LES SURFACES DÉRIVABLES RELATIVEMENT À UNE RÈGLE DE MULTIPLICATION

(EN DEUX MÉMOIRES)

PAR

MAURICE FRÉCHET

MÉMOIRE PRÉLIMINAIRE:

SUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET SUR CERTAINES FAMILLES DE SURFACES

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE NEDERLANDSE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN, AFD. NATUURKUNDE

EERSTE REEKS, DEEL XXI, No. 1

1954
NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
(N.V. Noord-Hollandsche Uitgevers Mij.)
AMSTERDAM

RESUMO

EN LA INTERNACIA LINGVO ESPERANTO

En la Unua Parto (nure analitika) de tiu ĉi-memuaro, la aŭtoro:

1⁰ determinas kompletan tabelon de „kanonaj formoj" por ĉiuj sistemoj de tri diferencialaj ekvacioj je laŭparta derivado kiuj estas lineare sendependaj inter ili, unuaordaj kaj unuagradaj, homogenaj, kun konstantaj koeficientoj kaj formitaj de tri duvariaj funkcioj.

2⁰ starigas same la respektivajn kanonajn formojn de la solvoj de tiaj sistemoj.

En la Dua Parto, la aŭtoro studas la familiojn de surfacoj parametre reprezenteblaj per la aluditaj solvoj.

En la Dua Memuaro [1]), tiujn rezultojn oni aplikos al la studado de du *novaj nocioj*: la „hiperkompleksaj *paraanalitikaj*" funkcioj kaj la surfacoj „*deriveblaj* rilate al difinitaj reguloj".

Resumojn de tiuj du memuaroj aperis en du Notoj de la „Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (de Paris)", tome 237, 1953, p. 1053–1055 kaj tome 238, 1954, p. 633-636.

---

[1]) Ann. Ecole Norm. Sup., (3), LXXI, 1954, p. 29-85.

INTRODUCTION

Le sujet qui va nous occuper sera traité en *deux Mémoires.*

Prévenons immédiatement le lecteur que, sauf dans cette Introduction, *notre Premier Mémoire ne fera pas usage* de la notion de *nombre hypercomplexe*, qui jouera au contraire un rôle fondamental dans notre prochain Second Mémoire.

Notre Mémoire Préliminaire est consacré à l'étude de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles et à leur interprétation géométrique. Et l'on pourrait légitimement s'étonner de nous voir porter notre attention sur le système très particulier σ [(3) de la p. 8] plutôt que sur d'autres assez voisins. Il est donc utile d'expliquer la raison de ce choix.

Dans plusieurs Notes [1]) et Mémoires [2]), nous avons introduit la notion nouvelle de ,,dérivée'' d'une fonction hypercomplexe à n dimensions d'une variable hypercomplexe à n dimensions. Et nous avons pu ainsi obtenir une généralisation à n dimensions (sous le nom de ,,fonction paraanalytique'') de la notion de fonction analytique (à deux dimensions). Extension qui parait satisfaisante puisqu'elle entraîne la généralisation [3]) d'un grand nombre des propriétés des fonctions analytiques.

Ces résultats nous ont encouragé à passer maintenant au cas où les nombres de dimensions de la fonction hypercomplexe et de la variable hypercomplexe *cessent d'être égaux.*

On pourrait employer un *langage* géométrique pour interpréter de façon intuitive les résultats obtenus dans le cas le plus général.

Mais le cas le plus intéressant est celui où la fonction est à 3 dimensions et la variable à deux dimensions, car alors la fonction peut servir à définir une représentation paramétrique d'une surface de la géométrie classique.

Or, dans ce cas, les composantes X_1, X_2, X_3 vérifient nécessairement (comme on le verra dans notre Second Mémoire) un système σ d'équations aux dérivées partielles du type (3).

C'est donc *en vue de préparer* l'étude des fonctions hypercomplexes ,,dérivables'' et leur application géométrique, que nous avons été amené à étudier un tel système σ.

On se trouve alors devant un problème particulier de la théorie des équations aux dérivées partielles. Et c'est à ce titre et indépendamment de la notion de nombre hypercomplexe et de celle de fonction hypercomplexe dérivable que, dans le présent Premier Mémoire, nous résoudrons ce problème et en ferons une première application géométrique.

---

[1]) C. R., t. 236, 1953, p. 1832–34.

[2]) *Determinado de la plej ĝeneralaj planaj paraanalitaj funkcioj*, Annali di Matematica, t. 35, 1953, p. 255–268.

[3]) C. R., t. 236, 1953, p. 2.191–2.194.

Nous utiliserons ces résultats dans le Second Mémoire [1]) pour étudier les ,,fonctions paraanalytiques'' à trois dimensions d'une variable à deux dimensions ainsi que la ,,dérivation'' des surfaces et les ,,surfaces exponentielles''.

Le présent Mémoire est divisé en deux parties: ,,Exposé analytique'', puis ,,Interprétation géométrique''.

---

[1]) Ann. Ecole Norm. Sup., (3), LXXI, 1954, p. 29-85.

PREMIÈRE PARTIE

EXPOSÉ ANALYTIQUE

FORMES CANONIQUES DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Changement de coordonnées. Soit t un système de q *équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires, homogènes et à coefficients constants* entre n fonctions $X_1, \ldots, X_n$ de p variables $x_1, \ldots, x_p$.

Nous emploierons l'*expression abrégée* de „*changement de coordonnées*", pour désigner l'ensemble de deux transformations *linéaires* et *biunivoques* effectuées séparément sur les X

$$X_h = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{lh}\, Y_l + p_h, \qquad (h=1.\ldots,n)$$

et sur les x

$$y_m = \sum_{r=1}^{p} \mu_{mr}\, x_r + \nu_m, \qquad (m=1,\ldots,p).$$

On aura

$$\frac{\partial Y_l}{\partial x_r} = \sum_{m=1}^{p} \frac{\partial Y_l}{\partial y_m} \mu_{mr},$$

de sorte que le système t

$$(1) \qquad t\colon \sum_{r=1}^{p} \sum_{h=1}^{n} c_{krh} \frac{\partial X_h}{\partial x_r} = 0, \qquad (k=1.\ldots,q)$$

se trouvera *transformé en un système analogue:*

$$(2) \qquad \sum_{m=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} \gamma_{kml} \frac{\partial Y_l}{\partial y_m} = 0, \qquad (k=1,\ldots,q)$$

où:

$$\gamma_{kml} = \sum_{r=1}^{p} \sum_{h=1}^{n} \lambda_{lh}\, \mu_{mr}\, c_{krh}.$$

Réduction. On peut dire que les *équations* du système t sont *linéairement indépendantes* quand les formes linéaires en z_{rh}

$$\sum_r \sum_h c_{krh}\, z_{rh}$$

sont linéairement indépendantes. En supprimant au besoin plusieurs des équations du système t, on peut toujours lui substituer un système équivalent et de même forme, composé seulement d'équations linéairement indépendantes.

Le nombre des dérivées $(\partial X_h/\partial x_r)$ est np.

Si ses équations sont linéairement indépendantes, le nombre q des équations d'un système t est au plus égal à np. Lorsque $q=np$, la seule solution est la solution évidente où les X_h seraient constants.

Nous allons donc *nous restreindre au seul cas intéressant où* $q<np$. Alors l'un des déterminants d'ordre q formés avec les coefficients est $\neq 0$ et on peut remplacer le système t par *un système résolu par rapport à* q *des dérivées* $(\partial X_h/\partial x_r)$ en fonctions des $np-q$ autres.

Formes canoniques. D'autre part, il est clair que, tout ,,changement de coordonnées'' au sens précisé plus haut, faisant intervenir des constantes arbitraires, on peut espérer pouvoir choisir ces dernières de façon à obtenir pour le système t une forme plus simple. Et on pourra toujours supposer que cette forme est résolue par rapport à q des nouvelles dérivées. On obtiendra ainsi des *formes canoniques* des équations du type t.

En vue des applications à la théorie des fonctions hypercomplexes paraanalytiques nous nous limiterons au cas où le nombre $np-q$ est égal à n, de sorte que $q=n(p-1)$. Et même en vue des applications géométriques, nous considérerons d'abord le cas où: $n=3$, $p=2$ (donc $q=3$); car alors $X_1(x_1, x_2)$, $X_2(x_1, x_2)$, $X_3(x_1, x_2)$ *pourront être considérés comme définissant une représentation paramétrique d'une surface de la géométrie classique.*

Cas où $n=3$, $p=2$, $q=3$.

Ainsi donc nous nous proposons d'établir un tableau des formes canoniques d'un système σ de la forme

$$\sigma\colon \quad \frac{\partial X_h}{\partial x_r} = \sum_{j=1}^{3} b_{jrh} \frac{\partial X_{h_j}}{\partial x_{r_j}} \tag{3}$$

où h et h_j ne peuvent prendre que les valeurs 1, 2, 3, où r et r_j ne peuvent être égaux qu'à 1 ou 2 et où les couples (r, h); (r_1, h_1); (r_2, h_2); (r_3, h_3) sont tous différents (ce qui réduit le système σ à *trois* équations linéairement indépendantes).

Dans ce but, nous allons utiliser des raisonnements très voisins de ceux qui nous ont servi ailleurs [4]) à déterminer des formes canoniques d'un système semblable à σ, mais où l'on avait $n=p$.

Ces raisonnements nous donneront en même temps *la solution générale* de chacune des formes canoniques obtenues pour le système σ.

RECHERCHE D'UN SYSTÈME COMPLET DE FORMES CANONIQUES DES SYSTÈMES σ ET DE LEUR SOLUTIONS

En remettant les applications géométriques à la Seconde Partie de ce mémoire, il nous sera cependant commode, dans cette Première Partie,

[4]) *La paraanalitikaj funkcioj en n dimensioj* (Journ. reine u. angew. Mathematik 1954, p. 00). *La kanonaj formoj de la 2, 3, 4 dimensiaj paraanalitikaj funkcioj* (Compositio Mathematica, 1954, p. 00).

purement analytique de nous référer parfois à la forme de *la surface* S, lieu du point de coordonnées $X_1(x_1, x_2)$, $X_2(x_1, x_2)$, $X_3(x_1, x_2)$.

Pour éviter toute difficulté, nous supposerons, que ces trois fonctions sont non seulement dérivables (pour que le système σ ait un sens), mais encore soient ,,différentiables'' (au sens de Stolz–Young) au voisinage du point x_{10}, x_{20} considéré.

Cherchons s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls et s tels que

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \sum_h \lambda_h X_h = s \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_h \lambda_h X_h. \tag{4}$$

[Car dans ce cas, en posant $U = \sum \lambda_h X_h$, on aurait

$$U = F(x_1 + s x_2).]$$

Il faut pour cela, d'après (3), que

$$\sum_j \{ \sum_h \lambda_h [b_{j2h} - s b_{j1h}] \} \frac{\partial X_{h_j}}{\partial x_{r_j}} = 0.$$

Il suffit que l'on ait

$$\sum_h \lambda_h (b_{j2h} - s b_{j1h}) = 0, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{5}$$

et pour que les λ_h ne soient pas tous nuls, que

$$\begin{vmatrix} b_{121} - s b_{111} & \ldots & b_{123} - s b_{113} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{321} - s b_{311} & \ldots & b_{323} - s b_{313} \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

équation de la forme

$$\Delta - s\Delta_1 + s^2 \Delta_2 - s^3 \Delta_3 = 0. \tag{7}$$

Si $\Delta_3 \neq 0$, cette équation est du 3me degré et a donc au moins une racine réelle. Pour cette racine, les équations (5) ont au moins un système de solutions réelles non toutes nulles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Par exemple $\lambda_1 \neq 0$. Alors on posera

$$Y_1 = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_3 X_3, \quad Y_2 = X_2, \quad Y_3 = X_3 \tag{8}$$

et on aura

$$Y_1 = A(x_1 + s x_2).$$

On pourra alors poser $y_1 = x_1 + s x_2$, $y_2 = x_2$ et on aura

$$Y_1 = A(y_1), \; Y_2 \text{ et } Y_3 \text{ fonctions de } y_1 \text{ et } y_2. \tag{9}$$

Si l'on avait $\Delta_3 = 0$, on pourrait choisir les λ_h tels que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \sum_h \lambda_h X_h = 0$$

ou

$$\sum_j (\sum_h \lambda_h b_{j1h}) \frac{\partial X_{h_j}}{\partial x_{r_j}} = 0.$$

Alors en posant $y_2=x_1$, $y_1=x_2$, et en maintenant (8) en supposant, par exemple $\lambda_1\neq 0$, on aurait encore une solution de la forme (9).

Ainsi *on peut toujours supposer*, en opérant au besoin deux changements de coordonnées, que

$$(\partial X_1/\partial x_2)=0. \tag{10}$$

Cela revient à supposer que $b_{j21}=0$. Donc $\Delta=0$ et l'équation (7) prend la forme

$$s[s^2\Delta_3-s\Delta_2+\Delta_1]=0.$$

Si Δ_3 était nul, on verrait comme plus haut qu'il existe un système de valeurs de λ_h non toutes nulles telles que $(\partial/\partial x_1)(\sum\lambda_h X_h)=0$.

Si λ_2 et λ_3 étaient nuls, on aurait $(\partial X_1/\partial x_1)=0$, avec (10) et par suite on aurait $X_1=\text{const}$, la surface S *serait plane*.

Si λ_2 ou λ_3 est $\neq 0$, par exemple $\lambda_2\neq 0$, on pose

$$Y_1=X_1,\ Y_2=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\lambda_3X_3,\ Y_3=X_3$$

et on a

$$Y_1=A(x_1),\ Y_2=B(x_2). \tag{11}$$

Si au contraire $\Delta_3\neq 0$, l'équation

$$s^2\Delta_3-s\Delta_2+\Delta_1=0 \tag{12}$$

est du second degré et il y a deux cas à examiner.

1°. elle a deux racines réelles s_2 et s_3 distinctes ou non, auxquelles correspondent

$$Y_2=\sum_h\lambda_h^2X_h,\ Y_3=\sum_h\lambda_h^3X_h \text{ avec } Y_1=X_1 \tag{13}$$

pour lesquels

$$Y_j=F_j(x_1+s_jx_2).$$

Si s_2 ou s_3 est $\neq 0$, par exemple $s_2\neq 0$, on pourra prendre pour coordonnées

$$y_1=x_1,\ y_2=x_1+s_2x_2$$

et on aura

$$X_1=A(y_1),\ \sum_h\lambda_h^2X_h=F_2(y_2)$$

d'où

$$\lambda_2^2X_2+\lambda_3^2X_3=F_2(y_2)-\lambda_1^2A(y_1).$$

Si λ_2^2 et λ_3^2 étaient nuls, on aurait

$$\lambda_1^2A(y_1)=F_2(y_2),\ \text{donc} = \text{constante} = a$$

et puisqu'alors $\lambda_1^2\neq 0$, $A(y_1) = \text{const}$.

La surface S serait encore plane.

Sinon, on aura par exemple $\lambda_2^2 \neq 0$ et on pourra faire le changement de coordonnées

$$Z_1 = X_1, \; Z_2 = \sum_h \lambda_h^2 X_h, \; Z_3 = X_3$$

et l'on aura encore comme (11)

$$Z_1 = A(y_1), \; Z_2 = B(y_2).$$

Si s_2 ou s_3 est nul, on a $\Delta_1 = 0 (= \Delta)$ dans (12).

Ici

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{111} & b_{122} & b_{123} \\ \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \\ b_{311} & b_{322} & b_{323} \end{vmatrix}.$$

Il y a donc des constantes non toutes nulles μ_h, telles que

$$\mu_1 b_{j11} + \mu_2 b_{j22} + \mu_3 b_{j23} = 0.$$

D'où

$$\mu_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \mu_3 \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\mu_2 X_2 + \mu_3 X_3) = -\mu_1 A'(x_1)$$

$$\mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 = -\mu_1 x_2 A'(x_1) + B(x_1).$$

Si $\mu_2 = \mu_3 = 0$, on aurait $\mu_1 \neq 0$ et

$$x_2 A'(x_1) = \frac{B(x_1)}{\mu_1}.$$

Donc $A'(x_1) = 0$, $A(x_1) = \text{const.}$, *la surface serait encore plane*: $X_1 = \text{const.}$

Si μ_2 ou $\mu_3 \neq 0$, par exemple $\mu_2 \neq 0$, on pourrait prendre pour coordonnées

$$Y_1 = X_1, \; Y_2 = \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 \text{ et } Y_3 = X_3.$$

On aurait

$$Y_1 = A(x_1), \; Y_2 = -\mu_1 x_2 A'(x_1) + B(x_1).$$

Alors: ou $\mu_1 = 0$ et la surface S *serait sur un cylindre* parallèle à OY_3;
ou $\mu_1 \neq 0$ et on pourrait faire le changement de coordonnées

$$y_1 = x_1, \; y_2 = -\mu_1 x_2,$$

d'où

(14) $$Y_1 = A(y_1), \; Y_2 = y_2 A'(y_1) + B(y_1).$$

2°. l'équation (12) a deux racines conjuguées distinctes $s' \pm is''$ (donc $s'' \neq 0$).

À ces racines correspondront deux systèmes de valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_3$.

Soit $\lambda_1' + i\lambda_1'', \ldots, \lambda_3' + i\lambda_3''$ le premier système.

En posant

$$(\lambda_1' + i\lambda_1'')X_1 + \ldots + (\lambda_3' + i\lambda_3'')X_3 = P + iQ$$

on aura

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(P+iQ)=(s'+is'')\frac{\partial}{\partial x_1}(P+iQ).$$

Puisque $s''\neq 0$, s a une inverse $\sigma'+i\sigma''$, avec $\sigma''\neq 0$ et on aura

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(P+iQ)=(\sigma'+i\sigma'')\frac{\partial}{\partial x_2}(P+iQ),$$

d'où

$$dP+idQ=\left[\frac{\partial(P+iQ)}{\partial x_2}\right][(\sigma'+i\sigma'')\,dx_1+dx_2]$$

qui peut s'écrire

$$d(P+iQ)=\left\{i\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(P+iQ)\right]\right\}d(y_1+iy_2)$$

en posant

$$y_1=\sigma''x_1,\ y_2=-(\sigma'x_1+x_2).$$

Dès lors $P+iQ$ est fonction dérivable (appelée aussi *monogène*) de y_1+iy_2.

Et puisque $\sigma''\neq 0$, $A(x_1)=B(y_1)$.

Posons

$$\left\{\begin{aligned} Y_3=X_1,\ Y_1&=\lambda_1'X_1+\ \dots\ +\lambda_3'X_3\\ Y_2&=\lambda_1''X_1+\ \dots\ +\lambda_3''X_3.\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Si cette transformation est biunivoque, on aura la solution

$$Y_1+iY_2=f(y_1+iy_2),\ Y_3=B(y_1), \tag{16}$$

où f est une fonction monogène de y_1+iy_2.

En revenant aux notations primitives, nous écrirons

$$X_1=A(x_1);\ X_2+iX_3=f(x_1+ix_2).$$

Si la transformation n'était pas biunivoque, il faudrait qu'il y eut une relation de la forme

$$aY_1+bY_2+cY_3=0 \tag{17}$$

où a et b ne sont pas tous deux nuls. En dérivant en y_2 on obtient

$$a\frac{\partial Y_1}{\partial y_2}+b\frac{\partial Y_1}{\partial y_1}=0,$$

d'où

$$Y_1=F(by_2-ay_1).$$

On a

$$0=\Delta Y_1=(a^2+b^2)F''.$$

Donc $F'=\text{constante}=p$

$$Y_1=p(by_2-ay_1)+\nu$$

et alors

$$Y_2=-p(ay_2+by_1)+\nu'.$$

Si p était nul, S serait *plane*. Pour $p \neq 0$:

$$bY_1 - aY_2 = p(b^2 + a^2)y_2 + bv - av'.$$

Or, d'après (15), $bY_1 - aY_2$ est de la forme

$$\sum t_h X_h.$$

Donc, p étant $\neq 0$, on ne peut avoir $t_2 = t_3 = 0$.

Si, par exemple, $t_2 \neq 0$, on posera

$$Z_1 = X_1, \; Z_2 = \sum t_h X_h, \; Z_3 = X_3$$

et on aurait comme (11)

$$Z_1 = A(y_1), \; Z_2 = B(y_2).$$

Il nous reste à revenir sur deux cas

1°. celui où toute solution de σ est de la forme

$$X_1 = A(x_1), \; X_2 = B(x_2), \; X_3 = X_3(x_1, x_2) \tag{11}$$

où par suite

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = 0.$$

La troisième équation (3) étant nécessairement ici de la forme

$$\alpha \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \gamma \frac{\partial X_3}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = 0 \tag{18}$$

avec au moins un coefficient égal à l'unité.

Si $\gamma = \delta = 0$, on aurait (si, par exemple, $\alpha = 1$) à résoudre le système

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = 0, \; \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_1} = -\beta \frac{\partial X_2}{\partial x_2}.$$

Lorsque $\beta = 0$, S est une surface *plane*: $X_1 = \text{const.}$

Pour $\beta \neq 0$, on pourra poser $y_1 = x_1$, $y_2 = -(1/\beta)x_2$ et on aura

$$\frac{\partial X_1}{\partial y_2} = 0, \; \frac{\partial X_2}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial X_1}{\partial y_1} = \frac{\partial X_2}{\partial y_2}.$$

Alors

$$X_1 = A(y_1), \; X_2 = C(y_2)$$

et

$$A'(y_1) = C'(y_2) \text{ donc} = \text{const.} = a,$$

d'où

$$A(y_1) = ay_1 + a_1, \; C(y_2) = ay_2 + a_2.$$

Pour $a \neq 0$, on pourra poser

$$z_1 = ay_1 + a_1, \; z_2 = ay_2 + a_2$$

et on aura

(19) $\begin{cases} X_1 = z_1, \; X_2 = z_2, \; X_3 = D(z_1, z_2) \\ \text{où } D(z_1, z_2) \text{ est } \textit{une fonction différentiable arbitraire.} \end{cases}$

C'est la solution signalée p. 36 comme excessivement générale, au point de vue géométrique.

Pour $a=0$, S est *rectiligne*, on peut ramener à

$$X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=D(z_1, z_2)$$

forme qui rentre comme cas particulier dans la forme (29) obtenue plus loin.

Supposerons donc γ ou $\delta\neq 0$; d'abord γ *et* $\delta\neq 0$.

Alors l'équation (18) a pour solution en X_3

$$F(\delta x_1-\gamma x_2)-(\alpha/\gamma)X_1-(\beta/\delta)X_2$$

et en posant

$$Y_1=X_1,\ Y_2=X_2,\ Y_3=X_3+(\alpha/\gamma)X_1+(\beta/\delta)X_2$$

et

$$y_1=\delta x_1,\ y_2=-\gamma x_2,$$

on aura

$$Y_1=U(y_1),\ Y_2=V(y_2),\ Y_3=F(y_1+y_2). \tag{20}$$

Si $\gamma\neq 0$, $\delta=0$, on a

$$\gamma X_3=-\alpha A-\beta x_1 B'+C_1(x_2)$$
$$X_3=-(\alpha/\gamma)A-(\beta/\gamma)x_1 B'+C(x_2)$$

et en posant

$$Y_3=X_3+(\alpha/\gamma)X_1,\ Y_1=X_2,\ Y_2=X_1,$$

on aura

$$Y_3=-(\beta/\gamma)x_1 B'(x_2)+C(x_2).$$

Ou bien $\beta=0$ et *la surface S serait cylindrique*, ou bien $\beta\neq 0$ et en posant $y_2=-(\beta/\gamma)x_1$, $y_1=x_2$, on aura une solution de la forme

$$Y_1=B(y_1),\ Y_2=M(y_2),\ Y_3=y_2 B'(y_1)+C(y_1). \tag{21}$$

On aurait un résultat analogue pour $\gamma=0$, $\delta\neq 0$.

2°. Considérons enfin le cas du système (14) de la p. 11, où, avec les premières notations,

$$X_1=A(x_1),\ X_3=x_2 A'(x_1)+B(x_1)$$

donc:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial X_3}{\partial x_2}=\frac{\partial X_1}{\partial x_1}.$$

Alors la troisième équation du système (3) sera nécessairement de la forme

$$\alpha\frac{\partial X_2}{\partial x_1}+\beta\frac{\partial X_3}{\partial x_1}+\gamma\frac{\partial X_2}{\partial x_2}=\delta\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\varrho\frac{\partial X_3}{\partial x_2}$$

où l'un au moins des coefficients δ ou ϱ est nul et où l'un au moins des coefficients α, β, γ, est égal à 1.

On a une équation où l'inconnue est X_2.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha X_2+\beta X_3-\delta X_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\gamma X_2-\varrho X_3)=0.$$

Posons

$$Y_2 = \alpha X_2 + \beta X_3 - \delta X_1:$$

Si $\alpha \neq 0$

$$X_2 = \frac{Y_2 - \beta X_3 + \delta X_1}{\alpha}$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{\gamma}{\alpha} [Y_2 - \beta X_3 + \delta X_1] - \varrho X_3 \right\} = 0$$

ou

$$(22) \qquad \frac{\partial Y_2}{\partial x_1} + \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} - \left(\frac{\gamma\beta}{\alpha} + \varrho\right) A'(x_1) = 0.$$

Si $\gamma \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[Y_2 - \left(\frac{\gamma\beta}{\alpha} + \varrho\right) A(x_1) \right] + \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[Y_2 - \left(\frac{\gamma\beta}{\alpha} + \varrho\right) A(x_1) \right] = 0.$$

D'où en posant

$$Z_2 = Y_2 - ((\gamma\beta/\alpha) + \varrho) X_1 = \alpha X_2 + \beta X_3 - ((\gamma\beta/\alpha) + \varrho + \delta) X_1,$$
$$Z_1 = X_1, \ Z_3 = X_3,$$

on a

$$Z_1 = A(x_1), \ Z_2 = F(x_2 - (\gamma/\alpha) x_1), \ Z_3 = x_2 A'(x_1) + B(x_1)$$

et en posant

$$y_1 = x_1, \ y_2 = x_2 - (\gamma/\alpha) x_1$$
$$Z_3 = y_2 A'(y_1) + B(y_1) + (\gamma/\alpha) y_1 A'(y_1).$$

D'où

$$(23) \qquad Z_1 = A(y_1), \ Z_2 = F(y_2), \ Z_3 = y_2 A'(y_1) + C(y_1)$$

qui est de la forme (21).

Si au contraire $\gamma = 0$, (22) devient:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (Y_2 - \varrho X_1) = 0.$$

D'où en posant

$$Z_1 = X_1, \ Z_2 = \alpha X_2 + \beta X_3 - (\delta + p) X_1, \ Z_3 = X_3$$

la solution

$$Z_1 = A(x_1), \ Z_2 = G(x_2), \ Z_3 = x_2 A'(x_1) + B(x_1)$$

qui est encore de la forme (21).

Supposons maintenant $\alpha = 0$. On aura

$$\gamma \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \varrho A'(x_1) + \beta [x_2 A''(x_1) + B'(x_1)] - \delta A'(x_1) = 0$$

et si $\gamma \neq 0$:

$$X_2 + \frac{\beta}{2\gamma} x_2^2 A''(x_1) + x_2 \left[\frac{\beta}{\gamma} B'(x_1) - \frac{(\varrho + \delta)}{\gamma} A'(x_1) \right] + D(x_1) = 0$$

$$X_2 - \frac{\varrho + \delta}{\gamma} X_3 = -\frac{\beta}{2\gamma} x_2^2 A''(x_1) - x_2 \frac{\beta}{\gamma} B'(x_1) - \frac{\varrho + \delta}{\gamma} B(x_1) - D(x_1).$$

On pourra poser

$$Y_1 = X_1,\ Y_3 = X_2 - \frac{\varrho+\delta}{\gamma} X_3,\ Y_2 = X_3,$$
$$-\frac{\beta}{\gamma} = c$$

et on aura

$$(24) \qquad \begin{cases} Y_1 = A(x_1);\ Y_2 = x_2 A'(x_1) + B(x_1) \\ Y_3 = c[(x_2^2/2)A''(x_1) + x_2 B'(x_1)] + C_1(x_1). \end{cases}$$

Si $c=0$, on aurait *une surface cylindrique.*
Si $c \neq 0$, on posera

$$Z_1 = Y_1,\ Z_2 = Y_2,\ Z_3 = Y_3/c$$

et on aura:

$$(25) \qquad \begin{cases} Z_1 = A(x_1),\ Z_2 = x_2 A'(x_1) + B(x_1) \\ Z_3 = (x_2^2/2)A''(x_1) + x_2 B'(x_1) + C(x_1). \end{cases}$$

Enfin si $\alpha = \gamma = 0$, on aurait $\beta = 1$, donc

$$x_2 A''(x_1) + B'(x_1) = (\delta + \varrho) A'(x_1)$$

et par suite

$$A''(x_1) = 0, \text{ donc } A'(x_1) = \text{const.} = \lambda,\ B' = \text{const.} = \nu$$
$$X_1 = \lambda x_1 + \mu,\ X_3 = \lambda x_2 + \nu x_1 + \nu'.$$

Dès lors: ou $\lambda = 0$ et la surface S serait *plane*, ou $\lambda \neq 0$ et comme

$$X_3 = \left[\lambda x_2 + \nu' + \nu \left(\frac{X_1 - \mu}{\lambda}\right)\right]$$

on pourra poser

$$Y_1 = X_1,\ Y_2 = X_3 - \nu X_1/\lambda,\ Y_3 = X_2,$$
$$z_1 = \lambda x_1 + \mu,\ z_2 = \lambda x_2 + \mu',$$

et on se trouvera ramené à la forme (19) déjà examinée

$$X_1 = z_1,\ X_2 = z_2,\ X_3 = D(z_1, z_2).$$

Traitons maintenant en une seule fois tous les cas rencontrés dans la discussion précédente où la surface S est plane et de même ceux où elle est cylindrique ou courbe.

1°. S est *plane*. Dans tous les cas rencontrés on pouvait ramener au cas où $X_3 = \text{const.}$ par des changements de coordonnées.

Le système (3) se réduit alors à

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = 0$$

et à une équation de la forme

$$\alpha \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \gamma \frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0 \tag{26}$$

où l'un au moins des coefficients est égal à 1.

Supposons par exemple $\alpha = 1$.

I. Si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, on peut faire la transformation

$$y_1 = \beta x_1 - \alpha x_2, \quad y_2 = \delta x_1 - \gamma x_2$$

et poser $X_1 = U_1(y_1, y_2)$, $X_2 = U_2(y_1, y_2)$, d'où

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\left[\frac{\partial U_1}{\partial y_2} - \frac{\partial U_2}{\partial y_1}\right] = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial U_1}{\partial y_2} = \frac{\partial U_2}{\partial y_1}.$$

Il existe donc une fonction $U(y_1, y_2)$ telle que

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = \dfrac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_1}, \quad X_2 = \dfrac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ \text{et l'on a} \\ \qquad X_3 = \text{const.} \end{array}\right. \tag{27}$$

II. Si $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, comme on a $\alpha = 1$, l'équation (26) peut s'écrire

$$\left[\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right] + \gamma \left[\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right] = 0. \tag{28}$$

On peut faire la transformation $y_2 = x_1$, $y_1 = \beta x_1 - x_2$ et, en posant encore $X_1 = U_1(y_1, y_2)$, $X_2 = U_2(y_1, y_2)$ l'équation (28) deviendra

$$\left[\frac{\partial U_1}{\partial y_2} + \gamma \frac{\partial U_2}{\partial y_2}\right] = 0$$

d'où en posant

$$Y_1 = X_1 + \gamma X_2, \quad Y_2 = X_2, \quad Y_3 = X_3$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_2} = 0$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} Y_1 = A(y_1), \ Y_2 \text{ fonction différentiable arbitraire de } y_1, y_2 \\ Y_3 = \text{const.} \end{array}\right. \tag{29}$$

On a

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial Y_3}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial Y_3}{\partial y_2} = 0.$$

2°. S est *cylindrique*. Dans tous les cas rencontrés plus haut on pouvait supposer

$$X_1 = A(x_1), \quad X_2 = B(x_1). \tag{30}$$

Le système (3) se réduit à

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0$$

et à une équation de la forme

$$\alpha \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial X_3}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = 0$$

où l'un au moins des coefficients est égal à 1.

Supposons d'abord $\gamma \neq 0$. Alors:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[X_3 + \frac{\alpha}{\gamma} X_1 + \frac{\beta}{\gamma} X_2\right] + \frac{\delta}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[X_3 + \frac{\alpha}{\gamma} X_1 + \frac{\beta}{\gamma} X_2\right]$$

on pourra poser

$$Y_1 = X_1,\ Y_2 = X_2,\ Y_3 = X_3 + (\alpha/\gamma)X_1 + (\beta/\gamma)X_2$$

et on aura

$$Y_3 = C(x_2 - (\delta/\gamma)x_1).$$

D'où, en posant $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - (\delta/\gamma)x_1$:

(31) $$Y_1 = A(y_1),\ Y_2 = B(y_1),\ Y_3 = C(y_2).$$

Si $\gamma = 0$, on aura

$$\delta \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = -\,[\alpha A'(x_1) + \beta B'(x_1)]$$
$$\delta X_3 = -x_2[\alpha A'(x_1) + \beta B'(x_1)] + C_1(x_1).$$

Si δ était nul, donc α ou $\beta \neq 0$, par exemple $\beta \neq 0$, on aurait

$$\alpha A'(x_1) + \beta B'(x_1) = 0.$$

On pourrait poser

$$Y_1 = X_1,\ Y_2 = \alpha X_1 + \beta X_2,\ Y_3 = X_3$$

on aurait $Y_2 = \text{const.}$ et on serait ramené au cas déjà examiné où S est un plan.

Si

$$\delta \neq 0$$

ou bien $\alpha = \beta = 0$ et on aurait

$$X_1 = A(x_1),\ X_2 = B(x_1),\ X_3 = C(x_1)$$

la surface S se réduirait à une *courbe*.

Ou bien α ou $\beta \neq 0$. Alors on pourrait poser, si par exemple $\alpha \neq 0$,

$$Y_1 = \frac{-(\alpha X_1 + \beta X_2)}{\delta},\ Y_2 = X_2,\ X_3 = X_3$$

et on aurait

(32) $$Y_1 = D(x_1),\ Y_2 = B(x_1),\ Y_3 = x_2 D'(x_1) + C(x_1).$$

Remarque. Il peut arriver qu'une solution de σ corresponde à une surface cylindrique S sans que les changements linéaires de coordonnées puissent ramener à la forme (29). Dans ce cas la solution de σ pourra être ramenée à une des formes canoniques autres que les formes (31) et (32). On verra dans l'Interprétation géométrique l'exemple du cylindre

$$e^X + e^Y = 1$$

qui peut être représenté paramétriquement sous les deux formes suivantes: d'abord

$$X = \log u, \quad Y = \log (1-u), \quad Z = v$$

ou en faisant le changement de coordonnées

$$(33) \qquad \begin{cases} X_1 = X+Z, \; Y_1 = Y+Z, \; Z_1 = Z, \\ u_1 = ue^v, \; v_1 = (1-u)\, e^v \qquad \text{à} \\ X_1 = \log u_1, \; Y_1 = \log v_1, \; Z_1 = \log (u_1 + v_1) \end{cases}$$

les solutions correspondantes appartenant à deux types différents, considérés plus haut, les types IIa et III.

Et la solution (33) ne peut pas être ramenée par un changement (*linéaire*) des coordonnées ou des paramètres à l'une des formes (31) ou (32).

CONCLUSIONS DE LA DISCUSSION PRÉCÉDENTE

Nous venons d'établir les différentes formes auxquelles on peut ramener les solutions du système σ. On les trouvera réunies dans le tableau I ci-après. Une fois celui-ci formé, on en déduit immédiatement les formes canoniques correspondantes du système σ. On obtient ainsi le tableau II ci-après.

Finalement on aboutit au résultat suivant.

Théorème: Tout système t ((1), p. 7 *de trois équations linéairement indépendantes, aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires, homogènes et à coefficients constants* entre trois fonctions X_1, X_2, X_3 de deux variables x_1, x_2 (fonctions supposées différentiables près de x_{10}, x_{20}), *peut être ramené par des transformations linéaires et biunivoques à l'un des systèmes (tous de même nature que σ) faisant partie du tableau II ci-après.*

Les *solutions* respectives de ces systèmes canoniques *sont données dans le tableau I* ci-après.

Remarques.

I. Le tableau I fournit les formes auxquelles peuvent être ramenées un système de solutions supposées différentiables (au sens de Stolz–Young) près de x_{10}, x_{20}, du système σ. Par conséquent *les diverses fonctions*

$$\frac{\partial G(x_1,x_2)}{\partial x_1}, \; \frac{\partial G(x_1,x_2)}{\partial x_2}, \; D\,(x_1, x_2), \; H\,(x_1, x_2), \; A\,(x_1), \ldots$$

qui figurent dans ce tableau *doivent être* aussi supposées *différentiables* près de x_{10}, x_{20}.

II. On observera que les solutions de σ dans les cas I et VII dépendent de fonctions *arbitraires* (différentiables deux fois dans le cas de G, une fois dans le cas de D et H) de *deux* variables, contrairement aux autres cas.

TABLEAU I

I. S est plane $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{I_a}\colon\ X_1=\lambda,\ X_2=\dfrac{\partial G(x_1,x_2)}{\partial x_1},\ X_3=\dfrac{\partial G(x_1,x_2)}{\partial x_2}, \\ \mathrm{I_b}\colon\ X_1=\lambda,\ X_2=A(x_1), \\ \quad X_3=\text{une fonction différentiable arbitraire de} \\ \quad\quad x_1 \text{ et } x_2, \text{ soit } D(x_1, x_2). \end{array}\right.$

II. S est cylindrique: $X_1=A(x_1),\ X_2=B(x_1)$ $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{II_a}\colon\ X_3=C(x_2), \\ \mathrm{II_b}\colon\ X_3=x_2A'(x_1)+C(x_1), \\ \mathrm{II_c}\colon\ X_3=C(x_1),\ S \text{ se réduit à une courbe.} \end{array}\right.$

III. $X_1=A(x_1),\ X_2=B(x_2),\ X_3=C(x_1+x_2)$.

IV. $X_1=A(x_1),\ X_2=x_2A'(x_1)+B(x_1),\ X_3=C(x_2)$.

V. $X_1=A(x_1),\ X_2=x_2A'(x_1)+B(x_1)$,
$X_3=\frac{1}{2}x_2^2A''(x_1)+x_2B'(x_1)+C(x_1)$.

VI. $X_1=A(x_1),\ X_2+iX_3=f(x_1+ix_2)$ où $f(x_1+ix_2)$ est une fonction *monogène* de x_1+ix_2.

VII. $X_1=ax_1+a_1,\ X_2=ax_2+a_2$,
$X_3=$ une fonction différentiable arbitraire de x_1, x_2, soit $H(x_1, x_2)$.

Nous verrons constamment dans ce mémoire et dans le suivant ces formes I et VII s'écarter des propriétés simples des autres formes (de II à VI).

Pour cette raison, nous appellerons les solutions de II à VI, *solutions d'un système σ ordinaire* ou, plus brièvement, solutions ordinaires. (Voir à ce sujet, la Remarque de la p. 43).

Remarque. Si l'on écrit, dans chaque cas, le système d'équations t du tableau II qui suit, sous la forme

$$E_1=0,\ E_2=0,\ E_3=0, \tag{34}$$

on observe que dans les cas „dissidents'' I et VII, on a des relations de la forme

$$\mathscr{D}_1E_1+\mathscr{D}_2E_2+\mathscr{D}_3E_3=0 \tag{35}$$

où $\mathscr{D}_k$ est un opérateur différentiel linéaire. Car, dans le cas I, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_1}E_1-\frac{\partial}{\partial x_2}E_2=0 \tag{36}$$

et dans le cas VII, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}E_1-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}E_2-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}E_3=0. \tag{37}$$

TABLEAU II

$$
\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = 0
\begin{cases}
\text{I.} \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} = 0 \text{ et, en outre} \begin{cases} \mathrm{I_a}: \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} = 0, \\[2ex] \mathrm{I_b}: \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} \doteq 0, \end{cases} \\[6ex]
\text{II.} \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0 \text{ et, en outre} \begin{cases} \text{pour } \mathrm{II_a}: \dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} = 0, \\[2ex] \text{pour } \mathrm{II_b}: \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} = 0, \\[2ex] \text{pour } \mathrm{II_c}: \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \\[6ex]
\text{III.} \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} = 0, \\[2ex]
\text{IV.} \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} = \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} = 0, \\[2ex]
\text{V.} \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} = 0, \\[2ex]
\text{VI.} \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} = \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} = 0, \\[2ex]
\text{VII.} \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0.
\end{cases}
$$

On se trouve alors en connexion avec deux cas particuliers d'un théorème de Maurice Janet [5]) concernant des systèmes d'équations beaucoup plus généraux que σ. Janet dit que si les équations (34) vérifient une identité telle que (35), ces équations sont ,,dépendantes''. Et il a démontré que les équations (36) ne peuvent avoir de solutions dépendant de fonctions arbitraires (à des conditions de différentiabilité près) de *deux* variables que si ces équations sont dépendantes.

Rappelons à ce propos que les systèmes autres que I et VII sont ceux que nous avons appelés (p. 20) *systèmes ordinaires*.

Un autre résultat général de Janet a comme cas particulier le théorème qui va suivre. Pour l'établir directement ici, on vérifie d'abord, *à vue*, que pour chaque forme canonique ordinaire du tableau I (donc à l'exception des formes I et VII) les trois fonctions X_1, X_2, X_3 verifient une *même* équation correspondante du tableau III ci-après. En opérant le changement de coordonnées ,,inverse'' de celui qui a conduit à une forme du tableau I, on en conclut que les solutions du système σ vérifient une même équation du troisième ordre, transformée d'une des équations du tableau III.

On est ainsi conduit au théorème suivant

Théorème: Les fonctions inconnues X_1, X_2, X_3, solutions d'un système σ ordinaire — ou qui peuvent s'y ramener par des changements de coordon-

[5]) Annales Soc. Math. Polonaise, t. 13, p. 79–81.

nées —, *vérifient une* **même** *équation aux dérivées partielles du troisième ordre, linéaire, homogène et à coefficients constants.*

Les formes canoniques de cette équation qui correspondent à des formes du tableau II *figurent dans le tableau III* ci-après.

Remarque. Le théorème, beaucoup plus général, de Janet qui permet *par une même règle* de former *toutes* les équations du tableau III est le suivant.

Si les équations du système σ sont indépendantes (au sens de Janet précisé plus haut), les trois fonctions X_1, X_2, X_3 qui en sont solutions vérifient une même équation aux dérivées partielles.

Celle-ci est de la forme $D=0$ où D est le déterminant dont le terme général est

$$c_{j1h}\, U_1 + c_{j2h}\, U_2 \tag{38}$$

et qu'on développe en remplaçant le produit $U_1^\alpha U_2^\beta$ par $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta}$.

Mais, pour le cas particulier actuel, il n'est pas nécessaire de recourir à ce déterminant, le tableau III se déduisant immédiatement du tableau II.

TABLEAU III

II. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0.$

[Cette équation vérifiée par les trois coordonnées de toutes les familles de II peut être remplacée par une équation d'ordre inférieur dans chacune de ces familles:

$$\mathrm{II_a}\colon \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; \quad \mathrm{II_b}\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0; \quad \mathrm{II_c}\colon \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0\right]$$

III. $\dfrac{\partial^3 U}{dx_1^2 \partial x_2} - \dfrac{\partial^3 U}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0.$

IV. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0$ (la même que pour II).

V. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial x_2^3} = 0.$

VI. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^3} = 0.$

Remarque. On peut écrire toutes ces équations sous la forme

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0,$$

avec

$$T \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \text{ dans le cas II et IV,}$$

$$T \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \text{ cas III,}$$

$$T \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \text{ cas V,}$$

$$T \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \text{ cas VI.}$$

CONFLUENCES DE FAMILLES DE FONCTIONS DÉRIVABLES

Position du problème.

D'après ce qui précède, la famille composée de systèmes de solutions X_1, X_2, X_3 d'un quelconque des systèmes σ d'équations du type (3) peut être répartie en dix familles correspondant aux dix cas du tableau I.

Mais on peut se demander *s'il peut y avoir* „confluence" de deux ou plusieurs de ces familles. Autrement dit, existe-t-il des systèmes de fonctions X_1, X_2, X_3 de x_1, x_2, qui, par des „changements de coordonnées" peuvent prendre deux ou plusieurs des formes du tableau I. La réponse est *affirmative* comme le montre ce qui suit.

Exemple simple. Nous allons d'abord indiquer un *système* X_1, X_2, X_3 *simple* qui, par des changements de coordonnées convenables et éventuels, peut se ramener respectivement à chacun des types ordinaires (soient III, IV, V et VI).

C'est le système

$$X_1 = x_1^2, \quad X_2 = 2x_1x_2, \quad X_3 = x_2^2. \tag{39}$$

Il se trouve déjà, par lui-même, des types IV et V, puisqu'il a, à la fois, les deux formes

$$X_1 = A(x_1), \quad X_2 = x_2A'(x_1), \quad X_3 = C(x_2);$$
$$X_1 = A(x_1), \quad X_2 = x_2A'(x_1), \quad X_3 = (x_2^2/2)A''(x_1).$$

Si l'on fait le changement de coordonnées

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_3, \quad Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

on voit que l'on pourra écrire

$$Y_1 = A(x_1), \quad Y_2 = B(x_2), \quad Y_3 = C(x_1 + x_2)$$

système qui se ramène donc au type III.

Enfin si l'on pose

$$Z_1 = X_1, \quad Z_2 = X_1 - X_3, \quad Z_3 = X_2,$$

on voit qu'il se ramène aussi au type VI, puisqu'on pourra écrire

$$Z_1 = A(x_1), \quad Z_2 + iZ_3 = f(x_1 + ix_2)$$

où $f(x_1 + ix_2)$, [qui est ici $(x_1 + ix_2)^2$], est bien une fonction analytique de $x_1 + ix_2$.

Solution générale. Au lieu de se contenter d'exemples on peut se proposer de chercher *tous* les systèmes X_1, X_2, X_3 qui, par des „changements éventuels de coordonnées" (portant sur X_1, X_2, X_3 d'une part, sur x_1, x_2 d'autre part) peuvent se ramener à deux familles distinctes déterminées du tableau I.

Exemple. Donnons une idée de la méthode qu'on peut suivre à cet effet en considérant le cas où ces deux familles sont par exemple III et IV.

On devra pouvoir passer directement de ce type III au type IV par un changement de coordonnées convenables. Autrement dit, on devra pouvoir déterminer des coefficients 1, m, ..., n'' tels que l'on ait des identités de la forme

$$(40)\qquad \begin{cases} Q(y_1)=1A(x_1)+mB(x_2)+nC(x_1+x_2) \\ R(y_2)=1'A(x_1)+m'B(x_2)+n'C(x_1+x_2) \\ y_2Q'(y_1)+S(y_1)=1''A(x_1)+m''B(x_2)+n''C(x_1+x_2) \end{cases}$$

avec

$$(41)\qquad y_1=\alpha x_1+\beta x_2,\ y_2=\alpha' x_1+\beta' x_2,$$

les deux systèmes de transformation étant assujettis à être biunivoques.

On en tire:

$$\beta(lA'+nC')=\beta\frac{\partial}{\partial x_1}Q(y_1)=\beta\alpha Q'(y_1)=\alpha\frac{\partial}{\partial x_2}Q(y_1)=\alpha(mB'+nC')$$
$$\beta lA'-\alpha mB'=n(\alpha-\beta)C'.$$

D'où

$$(42)\qquad \beta lA''=n(\alpha-\beta)C''=-\alpha mB''\qquad \text{donc}=\text{const.}=p.$$

Si p n'est pas nul A'', B'', C'' sont constants et $\neq 0$ et A, B, C sont exactement du second degré

$$A=ax_1^2+a'x_1+a'',\ B=bx_2^2+b'x_2+b'',$$
$$C=c(x_1+x_2)^2+c'(x_1+x_2)+c''$$

avec a, b, $c\neq 0$. Alors en posant

$$Z_1=\frac{X_1}{a},\ Z_2=\frac{X_2}{b},\ Z_3=\frac{X_3}{c}$$
$$z_1=x_1+\frac{a'}{2a},\ z_2=x_2+\frac{b'}{2b}$$

puis revenant aux notations primitives, on voit qu'on peut supposer, quand $p\neq 0$ qu'on a un cas particulier de la forme III:

$$A=x_1^2+p_1,\ B=x_2^2+p_2,\ C=(x_1+x_2+\theta)^2+p_3.$$

Si θ est nul, on a une solution du problème, car alors

$$X_3-X_1-X_2=2x_1x_2+p_4$$

et en posant

$$T_1=x_1,\ T_2=X_2,\ T_3=X_3-X_1-X_2,$$

on a

$$T_1=A_1(x_1),\ T_2=B_1(x_2),\ T_3=x_2A_1'(x_1)+C_1(x_2),$$

c'est à dire la forme IV.

En changeant l'origine des X et permutant deux des X, on pourra finalement ramener à la forme

$$X_1 = x_1^2,\ X_2 = 2x_1 x_2,\ X_3 = x_2^2. \tag{43}$$

Peut on avoir une solution où $\theta \neq 0$? D'après (40), (41), on aurait pour $Q(y_1)$, $R(y_2)$, $S(y_1)$ des fonctions du second degré au plus et par suite des relations de la forme

$$\left\{\begin{aligned} & l(x_1^2+p_1)+m(x_2^2+p_2)+n[(x_1+x_2+\theta)^2+p_3]= \\ & \qquad =q(\alpha x_1+\beta x_2)^2+q'(\alpha x_1+\beta x_2)+q'' \end{aligned}\right. \tag{44}$$

et comme plus haut

$$\beta l = n(\alpha-\beta) = -m\alpha = p \neq 0$$

donc

$$\alpha\beta(\alpha-\beta)\neq 0$$

et

$$q'\alpha = 2n\theta,\ q'\beta = 2n\theta,$$

d'où

$$q'(\alpha-\beta)=0$$

donc $q'=0$ et alors $n\theta=0$ avec $\theta\neq 0$, donc $n=0$ alors que

$$n(\alpha-\beta)\neq 0.$$

On a donc ou bien la solution (43) ou bien les relations (42) avec $p=0$.

Dans ce dernier cas, supposons d'abord que deux au moins des coefficients de A'', B'', C'' dans (42) soient $\neq 0$. On aura, par exemple

$$B''=0,\ C''=0$$

$$X_1 = A(x_1),\ X_2 = B = b'x_2+b'',\ X_3 = C = c'(x_1+x_2)+c''. \tag{45}$$

Cette forme III peut aussi se transformer par changement de coordonnées en une forme IV.

D'abord si $b'c'\neq 0$, posons

$$Y_1=\frac{X_2}{b'},\quad Y_2 = X_1,\quad Y_3=\frac{X_3}{c'}-\frac{X_2}{b'}$$

avec $y_1=x_2$, $y_2=x_1$; on aura bien la forme IV:

$$Y_1 = y_1+\lambda \equiv U(y_1),\ Y_2 = A(y_2),\ Y_3 = y_2+\mu = y_2U'(y_1)+V(y_1). \tag{46}$$

Après changement d'origine et permutation des Y, on aura ainsi ramené à la forme

$$X_1=x_1,\ X_2=x_2,\ X_3=A(x_2).$$

Si $b'c'=0$, par exemple, $c'=0$, on posera

$$Z_1=X_3,\ Z_2=X_2,\ Z_3=X_1;$$

on aura

$$Z_1 = c'' = S(x_1),\ Z_2 = B(x_2),\ Z_3 = x_2S'(x_1)+A(x_1). \tag{47}$$

Ainsi, dans les deux cas, (45) relève à la fois des formes III et IV.

Supposons maintenant que deux, au moins, des coefficients de A'', B'', C'' dans (42) soient nuls.

Par exemple

$$m\alpha = 0 = n(\alpha - \beta). \tag{48}$$

Supposons $\alpha(\alpha - \beta) \neq 0$, alors $m = n = 0$; on aura $1 \neq 0$

et
$$Q(\alpha x_1 + \beta x_2) = Q(y_1) = 1A(x_1).$$

Donc ou bien $Q(y_1)$ et alors aussi $A(x_1)$ sont constants, ou bien $\beta = 0$. Si d'abord Q et A sont constants

$$A(x_1) = a,\ Q(y_1) = 1a = q''$$

et le système

$$Y_1 = q'',\ Y_2 = R(y_2),\ Y_3 = S(y_1), \tag{49}$$

qui est de la forme IV, peut être ramené à la forme III en posant

$$Z_1 = Y_3,\ Z_2 = Y_2,\ Z_3 = Y_1$$

car alors

$$Z_1 = S(y_1),\ Z_2 = R(y_2),\ \text{et}\ Z_3 = T(y_1 + y_2)$$

où $T(y_1 + y_2)$ est la constante q''.

Si $\beta = 0$, alors $\alpha \neq 0$ et $Q(\alpha x_1) = 1A(x_1)$; on aura

$$1''A(x_1) + m''B(x_2) + n''C(x_1 + x_2) \equiv (\alpha' x_1 + \beta' x_2)(l/\alpha)A'(x_1) + S(\alpha x_1). \tag{50}$$

En dérivant deux fois en x_2, on aura

$$m''B''(x_2) = -n''C''(x_1 + x_2)\ \text{donc} = \text{const.} = \xi.$$

Mais en dérivant en x_2 puis en x_1 on a

$$\beta'(l/\alpha)A''(x_1) = n''C'' = -\xi.$$

Or $l \neq 0$ et $0 \neq \alpha\beta' - \alpha'\beta = \alpha\beta'$, donc $\beta' \neq 0$, donc $A''(x_1) = \text{constant}$.

Ou bien $\xi \neq 0$; alors A'', B'', C'' seront constants et $\neq 0$ et on sera ramené à un cas déjà examiné. Ou bien $\xi = 0$. Alors, on a d'abord $A'' = 0$. D'autre part le déterminant des $l, m, \dots n''$ qui doit être $\neq 0$, étant actuellement égal à $l(m'n'' - m''n')$ avec $l \neq 0$, on voit que m'' ou n'' ne sont pas tous duex nuls. Donc B'' ou C'' est nul. Alors deux des fonctions A, B, C sont linéaires et on est ramené à un cas déjà examiné.

Supposons maintenant $\alpha(\alpha - \beta) = 0$. Par exemple, $\alpha = 0$ et alors $\beta \neq 0$, $\beta - \alpha \neq 0$, d'où, d'après (48), $n = 0$. Alors

$$Q(\beta x_2) = lA(x_1) + mB(x_2),$$

donc

$$lA(x_1) = \text{const.}$$

et

(51) $$\beta^2 Q''(\beta x_2) = mB''(x_2).$$

D'autre part

$$(\alpha' x_1 + \beta' x_2) Q'(\beta x_2) + S(\beta x_2) = l'' A + m'' B + n'' C.$$

Donc en dérivant deux fois en x_1 et ensuite en x_1 et x_2:

$$l'' A'' = -n'' C'' \text{ donc} = \text{const.} = \eta$$

et

$$(\alpha'/\beta) m B''(x_2) = \alpha' \beta Q''(\beta x_2) = n'' C'' = -\eta.$$

Si $\eta \neq 0$, A'', B'', C'' sont constants et $\neq 0$ et on a un cas déjà examiné. Si $\eta = 0$, on a

$$l'' A'' = 0, \ m B'' = 0, \ n'' C'' = 0,$$

$$l'' A = \lambda x_1 + \lambda_1, \ m B = \mu x_2 + \mu_1, \ n'' C = \nu(x_1 + x_2) + \nu_1,$$

$$(\alpha' x_1 + \beta' x_2) Q'(\beta x_2) + S(\beta x_2) = \lambda x_1 + \lambda_1 + \nu(x_1 + x_2) + \nu_1 + m'' B(x_2).$$

Si m était nul, on aurait

$$Q(\beta x_2) = l A(x_1), \text{ donc} = \text{const.}$$

Alors le système

(52) $$\begin{cases} Y_1 = \text{const.} = Q(y_1), \ Y_2 = R(y_2), \\ Y_3 = y_2 Q'(y_1) + S(y_1) \end{cases}$$

qui est de la forme III pourrait être ramené, en posant

$$Z_1 = Y_3, \ Z_2 = Y_2, \ Z_3 = Y_1$$

à la forme

$$Z_1 = S(y_1), \ Z_2 = R(y_2), \ Z_3 = T(y_1 + y_2)$$

en posant pour T une constante, c'est à dire pourrait être ramené à la forme IV.

Si, au contraire $m \neq 0$, B est du premier degré au plus. Alors ou bien l'' ou n'' est $\neq 0$ et alors A'' ou C'' est nul, comme B'' et on est ramené à un cas déjà examiné. Ou bien $l'' = n'' = 0$ et on a

$$(\alpha' x_1 + \beta' x_2) Q'(\beta x_2) + S(\beta x_2) = m'' B(x_2),$$

d'où

$$\alpha' Q'(\beta x_2) = 0.$$

Mais on a $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, avec $\alpha = 0$ donc $\alpha' \neq 0$, d'où

$$Q'(y_1) = 0, \ Q(y_1) = \text{const.} = q''$$

et on revient à un cas déjà examiné.

En résumé *tous les systèmes* X_1, X_2, X_3 qui peuvent se ramener par des ,,changements de coordonnées'' à chacune des deux formes III et IV, peuvent être ramenés à *l'un des trois types suivants*:

TABLEAU IV

$$\begin{cases} X_1 = x_1^2 & , X_2 = x_2^2 & , X_3 = 2x_1x_2 \\ X_1 = A(x_1) & , X_2 = x_2 & , X_3 = x_1 \\ X_1 = A(x_1) & , X_2 = B(x_2) & , X_3 = 0 \end{cases}$$

(dont le premier avait été forme plus haut a priori) et qui sont tous les trois du type

$$X_1 = A(x_1),\ X_2 = B(x_2),\ X_3 = F(x_1, x_2).$$

DEUXIÈME PARTIE

(INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE)

Restriction. On peut définir de bien des manières ce qu'on entend par surface dans un espace cartésien à trois dimensions. Pour la commodité de ce qui suit, *nous nous limiterons* à la considération de la famille (pourtant encore très générale) des surfaces telles que chacune d'elles admette au moins une représentation paramétrique de la forme

$$X = F(u, v), \quad Y = G(u, v), \quad Z = H(u, v) \tag{53}$$

où F, G, H sont trois fonctions de u, v qui sont *différentiables* [6]) *en tout point* (u, v) *du domaine* D (fini ou infini) *de définition* de la surface dans le plan des u, v.

Surfaces dérivables. Quand une surface S possède au moins une réprésentation paramétrique (53) où les trois fonctions $F(u, v)$, ..., $H(u, v)$ forment un système de solutions d'un système t d'équations aux dérivées partielles linéairement indépendantes du type (cas particulier du type I de la p. 7)

$$c_{k11} \frac{\partial X}{\partial u} + c_{k21} \frac{\partial X}{\partial v} + c_{k12} \frac{\partial Y}{\partial u} + \ldots + c_{k23} \frac{\partial Z}{\partial v} = 0, \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{54}$$

nous dirons que S est *dérivable* et, s'il faut préciser, nous dirons qu'elle est „dérivable *relativement au système t*".

Pour le moment, l'emploi du mot dérivable dans le cas actuel est arbitraire et ne sert qu'à abréger le langage. Mais nous verrons dans notre Second Mémoire qu'il se présente naturellement en se plaçant à un certain point de vue.

ÉQUIVALENCE DE REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE MÊME SURFACE DÉRIVABLE

Soit un second système de solutions de t:

$$\xi = \xi(u_1, v_1), \quad \eta = \eta(u_1, v_1), \quad \zeta = \zeta(u_1 v_1). \tag{55}$$

Il définit une représentation paramétrique d'une surface s dérivable relativement au même système t que S.

À quelle condition S et s seront-elles identiques (les coordonnées $X, Y, Z,$ et ξ, η, ζ étant rapportées aux mêmes axes)?

Évidemment, il suffit qu'il existe entre les couples (u, v) et (u_1, v_1) une correspondance biunivoque telle que l'on ait

$$X(u, v) = \xi(u_1, v_1), \ \ldots, \ Z(u, v) = \zeta(u_1, v_1)$$

[6]) Au sens de Stolz–Young où l'existence des dérivées partielles ne suffit pas à assurer la différentiabilité.

quand u, v et u_1, v_1 sont des couples correspondants. Cette condition sera *toujours réalisée* quand la correspondance est définie par les relations *linéaires*.

$$u = \beta u_1 + \beta_1, \; v = \beta v_1 + \beta_2 \tag{56}$$

avec

$$\beta \neq 0,$$

si l'on obtient $\xi(u_1, v_1)$, ..., $\zeta(u_1, v_1)$ en remplaçant u, v en fonction de u_1, v_1 dans $X(u, v)$, ..., $Z(u, v)$, de sorte que

$$\xi(u_1, v_1) = X(\beta u_1 + \beta_1, \beta v_1 + \beta_2), \; \ldots, \; \zeta(u_1, v_1) = Z(\beta u_1 + \beta_1, \beta v_1 + \beta_2).$$

Car, dans ce cas, non seulement la surface s sera évidemment identique à S, mais les fonctions ξ, η, ζ ainsi definies sont bien comme X, Y, Z une solution de t. En effet

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial v_1},$$

sont alors proportionnels à

$$\frac{\partial X}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial v}.$$

Il est à peu près évident que si S est une surface cylindrique et en particulier plane ou curviligne, il peut y avoir identité entre S et s sans que la correspondance entre (u, v) et (u_1, v_1) soit de la forme (56).

Exemple. Par exemple dans le cas $\mathrm{II_b}$, S étant défini comme dans le tableau I, s sera définie par des relations de la forme

$$\xi = \xi(u_1), \quad \eta = \eta(u_1), \quad \zeta = v_1 \xi'(u_1) + \zeta(u_1)$$

et la correspondance devra être telle que

$$A(u) = \xi(u_1), \quad B(u) = \eta(u_1), \quad vA'(u) + C(u) = v_1 \xi'(u_1) + \zeta(u_1).$$

D'après les deux premières relations, si S n'est pas une surface plane A, B ne sont pas constants, donc u est une fonction de u_1

$$u = \theta(u_1),$$

et alors

$$vA'(\theta(u_1)) + C(\theta(u_1)) = v_1 \xi'(u_1) + \zeta(u_1). \tag{57}$$

On suppose $A'(u) \not\equiv 0$, donc, on peut résoudre en v sous la forme

$$v = v_1 f(u_1) + g(u_1),$$

d'où

$$\begin{cases} f(u_1) A'(\theta(u_1)) = \xi'(u_1) \\ g(u_1) A'(\theta(u_1)) + C(\theta(u_1)) = \zeta(u_1). \end{cases} \tag{58}$$

Mais on a

$$A(\theta(u_1)) = \xi(u_1),$$

d'où

$$\theta'(u_1)A'(\theta(u_1)) = \xi'(u_1) \tag{59}$$

et en comparant (58) et (59), on a

$$f(u_1) = \theta'(u_1).$$

En résumé la correspondance entre (u, v) et $(u_1 v_1)$ est définie par

$$\begin{cases} u = \theta(u_1), \\ v = v_1\theta'(u_1) + g(u_1). \end{cases} \tag{60}$$

Connaissant $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$, on aura alors $\xi(u_1)$, $\eta(u_1)$, $\zeta(u_1)$ par les formules

$$\begin{cases} \xi(u_1) = A(\theta(u_1)), \\ \eta(u_1) = B(\theta(u_1)), \\ \zeta(u_1) = g(u_1)A'(\theta(u_1)) + C(\theta(u_1)). \end{cases} \tag{61}$$

On voit qu'on peut prendre arbitrairement les fonctions $\theta(u_1)$ et $g(u_1)$ et que, par suite, la correspondance (61) n'a pas en général la forme (56). Mais elle peut l'avoir en prenant $\theta(u)$ du premier degré et $g(u)$ constant.

Théorème. Au contraire, *quand une surface S dérivable n'est pas une surface cylindrique* (ou plane ou curviligne), *la correspondance entre les couples* (u, v), (u_1, v_1) qui définissent le même point de la surface S dans deux représentations paramétriques de S, solutions du même système (54) (supposé formé d'équations linéairement indépendantes), *ne peut être que de la forme linéaire* (56).

Nous supposons qu'il existe une correspondance

$$u_1 = \varphi(u, v), \quad v_1 = \psi(u, v)$$

telle que

$$X(u, v) = \xi(u_1, v_1), \; \ldots, \; Z(u, v) = \zeta(u_1, v_1).$$

I. On a donc

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial u_1}\varphi'_u + \frac{\partial \xi}{\partial v_1}\psi'_u, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial u_1}\varphi'_v + \frac{\partial \xi}{\partial v_1}\psi'_v \text{ etc.}$$

Donc:

$$\begin{aligned} &\varphi'_u\left[c_{k11}\frac{\partial \xi}{\partial u_1} + c_{k12}\frac{\partial \eta}{\partial u_1} + c_{k13}\frac{\partial \zeta}{\partial u_1}\right] \\ &+ \varphi'_v\left[c_{k21}\frac{\partial \xi}{\partial u_1} + c_{k22}\frac{\partial \eta}{\partial u_1} + c_{k23}\frac{\partial \zeta}{\partial u_1}\right] \\ &+ \psi'_u\left[c_{k11}\frac{\partial \xi}{\partial v_1} + c_{k12}\frac{\partial \eta}{\partial v_1} + c_{k13}\frac{\partial \zeta}{\partial v_1}\right] \\ &+ \psi'_v\left[b_{k21}\frac{\partial \xi}{\partial v_1} + c_{k22}\frac{\partial \eta}{\partial v_1} + c_{k23}\frac{\partial \zeta}{\partial v_1}\right] = 0. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} &\left[c_{k11}\frac{\partial \xi}{\partial u_1} + c_{k12}\frac{\partial \eta}{\partial u_1} + c_{k13}\frac{\partial \zeta}{\partial u_1}\right] \\ &+ \left[c_{k21}\frac{\partial \xi}{\partial v_1} + c_{k22}\frac{\partial \eta}{\partial v_1} + c_{k23}\frac{\partial \zeta}{\partial v_1}\right] = 0. \end{aligned}$$

On a donc trois relations de la forme

$$[\ldots](\varphi'_u - \psi'_v) + [\ldots]\varphi'_v + [\ldots]\psi'_u = 0, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Si le déterminant formé des crochets est $\neq 0$, on a

$$\varphi'_u = \psi'_v, \quad \varphi'_v = 0, \quad \psi'_u = 0,$$

c'est à dire

$$u_1 = \varphi(u, v) = \alpha u + \alpha_1, \quad v_1 = \psi(u, v) = \alpha v + \alpha_2$$

et pour que la correspondance soit biunivoque, il faut que $\alpha \neq 0$.

On a bien la transformation (56) annoncée.

II. Mais il y aura exception si le déterminant des crochets est nul.

Il suffit alors de montrer que ce cas ne peut se présenter que si la surface S est cylindrique (ou plane ou curviligne), cas qui a été exclu dans l'énoncé du théorème.

Le cas à examiner est celui où il existe trois quantités non toutes nulles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ telles que

$$\begin{aligned}
&(\sum \lambda_k c_{k11}) \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + (\sum \lambda_k c_{k12}) \frac{\partial \eta}{\partial u_1} + (\sum \lambda_k c_{k13}) \frac{\partial \zeta}{\partial u_1} = 0 \\
&(\sum \lambda_k c_{k21}) \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + (\sum \lambda_k c_{k22}) \frac{\partial \eta}{\partial u_1} + (\sum \lambda_k c_{k23}) \frac{\partial \zeta}{\partial u_1} = 0 \\
&(\sum \lambda_k c_{k11}) \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \quad \ldots\ldots \quad + \quad \ldots\ldots \quad = 0
\end{aligned}$$

et alors:

$$(\sum \lambda_k c_{k21}) \frac{\partial \xi}{\partial v_1} + \ldots = 0.$$

On a ainsi des relations de la forme

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\mu_{11} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \mu_{12} \frac{\partial \eta}{\partial u_1} + \mu_{13} \frac{\partial \zeta}{\partial u_1} = 0 \\
&\mu_{21} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \mu_{22} \frac{\partial \eta}{\partial u_1} + \mu_{23} \frac{\partial \zeta}{\partial u_1} = 0 \\
&\mu_{11} \frac{\partial \xi}{\partial v_1} + \ \ldots \ + \ \ldots \ = 0 \\
&\mu_{21} \frac{\partial \xi}{\partial v_1} + \ \ldots \ + \ \ldots \ = 0.
\end{aligned} \right.$$

Si les mineurs du tableau

$$\begin{matrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \end{matrix}$$

ne sont pas tous nuls,

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial u_1}$$

seront proportionnels à

$$\frac{\partial \xi}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial v_1}$$

et par suite S se réduira *à une courbe*.

Si, au contraire, les mêmes mineurs sont tous nuls, leurs éléments μ^{rh} ne sont pas tous nuls. Sans quoi, on aurait

$$\sum_k \lambda_k c_{kth} = 0; \quad (r = 1, 2; \; h = 1, 2, 3)$$

où les λ_k ne sont pas tous nuls.

Alors en représentant par E_1, E_2, E_3 les trois premiers membres des équations du système t, on aurait

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0$$

où λ_1, λ_2, λ_3 ne sont pas tous nuls: les équations du système t ne seraient pas linéairement indépendantes, contrairement à l'hypothèse.

Supposons donc, par exemple, que les μ_{1h} ne sont pas tous nuls. Alors il existerait une quantité ϱ telle que

$$\mu_{2h} = \varrho \mu_{1h}, \quad (h = 1, 2, 3),$$

d'où

(63) $$\sum_k \lambda_k (c_{k2h} - \varrho c_{k1h}) = 0, \quad (h = 1, 2, 3).$$

Donc le déterminant des coefficients des λ_k devra être nul:

(64) $$||c_{k2h} - \varrho c_{k1h}|| = 0.$$

Si cette équation en ϱ ne se réduit pas à une identité, on en déduira que ϱ est constant. Et si elle se réduit à une identité en ϱ, on peut prendre pour ϱ une constante. Alors si l'un au moins des mineurs de (64) est $\neq 0$, les équations (63) donneront des valeurs des λ_k proportionnelles à des constantes non toutes nulles. On pourra prendre pour valeurs des λ_k ces constantes et par suite pour les μ_{rh} des constantes, les μ_{1h} n'étant pas tous nuls. Alors d'après (62), on aura

$$\mu_{11}\xi + \mu_{12}\eta + \mu_{13}\zeta = \text{const.}$$

la surface S serait plane.

Considérons maintenant le cas où tous les mineurs du déterminant (64) seraient nuls.

D'après le tableau II, on peut toujours par des changements de coordonnées, supposer que $\partial X/\partial v = 0$, donc supposer que

$$c_{1rh} = 0 \quad \text{sauf} \quad c_{121} = 1$$

et alors

$$c_{221} = c_{321} = 0.$$

L'équation (64) se réduira à

(65) $$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & c_{323} - \varrho c_{313} \end{vmatrix} = 0.$$

Si tous les mineurs du déterminant (65) sont nuls, on aura

$$c_{222} = \varrho c_{212}, \quad c_{322} = \varrho c_{312}$$
$$c_{223} = \varrho c_{213}, \quad c_{323} = \varrho c_{313}.$$

Les deux dernières équations du système (54) peuvent donc s'écrire

$$c_{k11}\left(\frac{\partial X}{\partial u} + \varrho \frac{\partial X}{\partial v}\right) + c_{k12}\left(\frac{\partial Y}{\partial u} + \varrho \frac{\partial Y}{\partial v}\right) + c_{k13}\left(\frac{\partial Z}{\partial u} + \varrho \frac{\partial Z}{\partial v}\right) = 0.$$
pour $k = 2,3$.

Les trois déterminants des coefficients ne peuvent être nuls, sans quoi les trois équations du système (54) ne seraient pas linéairement indépendantes.

Donc les trois parenthèses sont proportionnelles à des constantes non toutes nulles.

Or, pour $\varrho \neq 0$, on peut poser $u' = \varrho u - v$, $v' = v$ et $T(u, v) = W(u', v')$, on voit alors que

$$\frac{\partial T}{\partial u} + \varrho \frac{\partial T}{\partial v} = \varrho \frac{\partial W}{\partial v}.$$

En remplaçant T par X, Y, Z et posant

$$X(u, v) = X'(u', v'), \ldots, Z(u, v) = Z'(u', v')$$

on voit alors que

$$\frac{\partial X'}{\partial v'}, \quad \frac{\partial Y'}{\partial v'}, \quad \frac{\partial Z'}{\partial v'}$$

sont proportionnels à des constantes non toutes nulles: S est un *cylindre* (ou un plan).

Si l'on avait $\varrho = 0$, ce serait

$$\frac{\partial X}{\partial v}, \quad \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad \frac{\partial Z}{\partial v}$$

qui seraient proportionnels à des constantes non toutes nulles, on aurait encore pour S un *cylindre* (ou un plan). [7])

ÉQUATIONS CANONIQUES DES SURFACES DÉRIVABLES

Au tableau I (p. 20), nous avons donné les représentations paramétriques canoniques des surfaces dérivables. Partant de ces représentations paramétriques, nous allons former les équations canoniques correspondantes de ces surfaces.

Cas I. La surface S est un *plan*. $X = \text{const.}$

Cas II_a, II_b. S est une surface *cylindrique*.

$$F(X, Y) = 0,$$

[7]) On pourrait démontrer le même théorème en le démontrant successivement pour les différents types canoniques du tableau I, pour chacun desquels les calculs sont considérablement plus simples.

équation obtenue en éliminant u entre

$$X = A(u), \quad Y = B(u).$$

Cas $\mathbf{II}_c$. Ici S est réduite à *une courbe*

$$F(X, Y) = 0, \quad G(X, Z) = 0.$$

Cas III. Si A, B ou C est une fonction constante, S est un plan. Dans le cas contraire, soit

$$u = a(X), \quad v = b(Y), \quad u + v = c(Z),$$

les fonctions inverses de A, B, C. Alors l'équation de S est

$$a(X) + b(Y) = c(Z) \tag{66}$$

où *l'on doit supposer* que, comme u, v, $u+v$, aucune des trois fonctions a, b, c *n'est constante*. Bien entendu, il pourra arriver que l'une ou l'autre de ces fonctions soit multiforme. Par exemple, si

$$A(u) = u^2, \quad B(v) = v^2, \quad C(u+v) = (u+v)^2,$$

l'équation de S sera

$$\pm \sqrt{X} \pm \sqrt{Y} = \pm \sqrt{Z}. \tag{67}$$

Cas IV. On a comme plus haut

$$u = a(X), \quad v = c(Z)$$

et puisque

$$X = A(a(X)), \text{ on a } 1 = A'a'(X).$$

Donc, sauf si S est un plan $X =$ constante, on a $A'(u) \not\equiv 0$ et on peut écrire

$$Y = \frac{c(Z)}{a'(X)} + B(a(X)),$$

équation de la forme

$$Y = \alpha(X)c(Z) + \beta(X). \tag{68}$$

Ici la fonction $c(Z)$ ne doit pas être constante et $\alpha(X) \not\equiv 0$.

Remarque. On se conformera mieux aux habitudes en opérant des changements de coordonnées et en écrivant l'équation de S sous la forme

$$Z = \beta(Y)\alpha(X) + \gamma(X) \tag{69}$$

que nous adopterons par la suite, $\alpha(x)$ devant être *supposé* $\neq 0$ et $\beta(Y)$ *non constante.*

Cas V. Si S n'est pas un plan $X = \text{const.}$, $A'(u)$ n'est pas $\equiv 0$. Alors en éliminant v entre les expressions de Y et Z:

$$Z = \frac{A''(u)}{2}\left[\frac{Y - B(u)}{A'(u)}\right]^2 + \frac{Y - B(u)}{A'(u)} B'(u) + C(u)$$

équation de la forme

$$Z = \alpha_1(u) Y^2 + \beta_1(u) Y + \gamma_1(u).$$

De l'expression de $X = A(u)$, on tire, si S n'est pas un plan $X = \text{const.}$

$$u = a(X).$$

Donc l'équation de S est de la forme

$$Z = \alpha(X) Y^2 + \beta(X) Y + \gamma(X). \tag{70}$$

C'est le *lieu d'une parabole* dont le plan est parallèle à YOZ et dont l'axe reste parallèle à OZ.

Cas VI. On a en remplaçant X, Y, Z par Z, X, Y,

$$X + iY = f(u + iv), \quad Z = A(u).$$

Si S n'est pas réduit à un droite parallèle à OZ, $f'(u+iv)$ n'est pas $\equiv 0$ et on peut écrire

$$u + iv = \varphi(X + iY) = U(X, Y) + iV(X, Y).$$

Or on a

$$u = a(Z).$$

Donc l'équation de S est

$$a(Z) = U(X, Y) \tag{71}$$

où U doit être *une fonction harmonique.*

$$\left(\text{c-à-d telle que } \Delta U(X, Y) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0\right).$$

Cas VII. On a

$$X = au + a_1, \quad Y = av + a_2, \quad Z = H(u, v).$$

Ou bien $a = 0$ et S est rectiligne ou bien $a \neq 0$, d'où

$$Z = K(X, Y) \tag{72}$$

où K est, comme H, une fonction différentiable arbitraire.

On voit que, dans le cas VII le plus général, S est une surface extrêmement générale: c'est une surface à laquelle on peut associer une droite Γ telle que

1°. toute parallèle à Γ qui coupe S ne la coupe qu'en un seul point.

2°. pour tout point de S, il y a un plan tangent à S en ce point, plan qui est unique et non parallèle à Γ.

Alors que les surfaces dérivables des familles I à VI appartiennent à des types assez particuliers, les surfaces dérivables du type VII, sans être les surfaces les plus générales sont trop générales pour mériter une étude particulière[1]).

[1]) Mais les surfaces du type VII ne correspondeut pas aux mêmes systèmes d'équations t que celles des autres types.

C'est pourquoi dans notre Second Mémoire, nous restreindrons l'étude du cas VII à un cas particulier important de celui-ci.

Nous résumerons la discussion précédente dans le tableau suivant.

TABLEAU V

Remarque. Le tableau ci-dessous ne correspond exactement au tableau I qu'après certaines permutations de coordonnées, opérées pour ramener à des notations plus familières.

I.	$\mathrm{I_a}$ et $\mathrm{I_b}$	$Z=0.$
II.	$\mathrm{II_a}$ et $\mathrm{II_b}$	$F(X, Y)=0,$
	$\mathrm{II_c}$	$F(X, Y)=0,\ G(X, Z)=0.$
III.		$a(X)+b(Y)=c(Z),$ $a, b, c,$ non constants.
IV.		$Z=\beta(Y)\alpha(X)+\gamma(X),$ $\alpha(X)\neq 0;\ \beta(Y)$ non constant.
V.		$Z=\alpha(X)Y^2+\beta(X)Y+\gamma(X).$
VI.		$a(Z)=U(X, Y),$ avec $\Delta U=0.$
VII.		$Z=K(X, Y).$

ÉQUIVALENCE D'ÉQUATIONS D'UNE MÊME SURFACE DÉRIVABLE

Une même surface peut être représentée par une infinité d'équations équivalentes. Laissons de côté le cas bien connu des plans, des cylindres et des courbes.

Pour chacun des cas III, IV et VI une même surface dérivable peut être représentée par des équations distinctes même en les assujettissant à appartenir à une même forme canonique. Il suffit, comme nous le verrons dans chaque cas d'effectuer sur les différents termes d'une équation des transformations *linéaires* convenables sur une équation d'un type pour obtenir une équation du même type. Mais, de plus, nous allons montrer réciproquement dans chaque cas que deux équations de même forme canonique qui représentent la même surface *peuvent toujours être transformées l'une dans l'autre de cette façon*, précisée plus loin (Dans les cas V et VII, il n'y a qu'une façon de mettre l'équation de la surface sous sa forme canonique).

Forme III. Une même surface S du type III

$$a(X)+b(Y)=c(Z) \quad \text{(où } a, \text{ ni } b, \text{ ni } c \text{ ne sont constants)}$$

peut se représenter par une infinité d'autres équations de la même forme

$$f(X)+g(Y)=h(Z).$$

On peut prendre évidemment

$$(73) \qquad \begin{cases} f(X) = \lambda a(X) + \mu, \ g(Y) = \lambda b(Y) + \mu' \\ h(Z) = \lambda c(Z) + \mu + \mu'. \end{cases}$$

C'est même la forme la plus générale (en supposant les six fonctions dérivables avec dérivées continues dans un même parallélépipède π). Car, soit

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \ Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

On a $c'(Z) \neq 0$ en au moins un point de π. Alors $c'(Z)$ sera $\neq 0$ dans un parallélépipède convenable π_1 appartenant à π. Or

$$a'(X) = Pc'(Z) \ ; \ b'(Y) = Qc'(Z),$$
$$f'(X) = Ph'(Z) \ ; \ g'(Y) = Qh'(Z), \text{ d'oû}$$
$$c'(Z)f'(X) = a'(X)h'(Z) \ ; \ c'(Z)g'(y) = b'(Y)h'(Z).$$

Donc dans π_1:

$$f'(X) = a'(X)\frac{h'(Z)}{c'(Z)} \ ; \quad g'(Y) = b'(Y)\frac{h'(Z)}{c'(Z)}.$$

Comme plus haut, on peut supposer que, dans un parallélépipède π_2 convenable, $a'(X)$, $b'(Y)$ sont $\neq 0$. On aura

$$\frac{f'(X)}{a'(X)} = \frac{g'(Y)}{b'(Y)} \text{ donc} = \text{const.} = \lambda.$$

D'où:

$$f(X) = \lambda a(X) + \mu, \ g(Y) = \lambda b(Y) + \mu';$$

on retrouve la solution (73).

Forme IV. Soit S une surface ayant pour équation

$$(74) \qquad Z = \beta(Y)\alpha(X) + \gamma(X) \quad \text{où} \quad \alpha(X) \neq 0, \ \beta' \neq 0.$$

Elle peut avoir la même forme avec des termes différents

$$(75) \qquad Z = g(Y)f(X) + h(X).$$

On peut prendre évidemment

$$(76) \qquad \begin{cases} g(Y) = \lambda\beta(Y) + \mu \quad (\text{avec } \lambda \neq 0). \\ f(X) = \dfrac{\alpha(X)}{\lambda}. \\ h(X) + \dfrac{\mu}{\lambda}\alpha(X) = \gamma(X). \end{cases}$$

Il n'y a pas d'autre forme (75) équivalente à (74).

Car on doit avoir

$$\beta'(Y)\alpha(X) = Q = g'(Y)f(X).$$

On doit supposer

$$f(X) \neq 0, \ \beta'(Y) \neq 0,$$

d'où

$$\frac{\alpha(X)}{f(X)} = \frac{g'(Y)}{\beta'(Y)} \text{ donc} = \text{const.} = \lambda.$$

D'où

$$f(X) = \frac{\alpha(X)}{\lambda}, \; g(Y) = \lambda\beta(Y) + \mu$$

et on retrouve la forme (76).

Forme V. Soit une équation du type V:

$$Z = \alpha(X)Y^2 + \beta(X)Y + \gamma(X).$$

Dans ce cas, il est clair que toute autre équation du même type et représentant la même surface devra être identique à celle-ci.

Forme VI. Soit S

$$a(Z) = U(X, Y) \qquad \text{avec, } \Delta U = 0, \tag{77}$$

une surface du type VI. On peut attribuer à cette même surface une infinité d'équations équivalentes et de même forme

$$\alpha(Z) = V(X, Y) \qquad \text{avec } \Delta V = 0. \tag{78}$$

Il suffit de prendre

$$\begin{cases} \alpha(Z) = \lambda a(Z) + \mu \\ V(X, Y) = \lambda U(X, Y) + \mu. \end{cases} \tag{79}$$

Il n'y a pas d'autres équations équivalentes de la forme (77). Car on a

$$Pa'(Z) = \frac{\partial U}{\partial X}$$

$$P^2a''(Z) + Ra'(Z) = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$$

et de même une équation analogue, d'où, en ajoutant

$$(P^2+Q^2)a''(Z) + (R+T)a'(Z) = \Delta U = 0$$

et de même

$$(P^2+Q^2)\alpha''(Z) + (R+T)\alpha'(Z) = 0.$$

On peut supposer, que dans un parallélépipède convenable on a

$$P^2+Q^2 \neq 0, \; a'(Z) \neq 0, \; \alpha'(Z) \neq 0.$$

D'où

$$-\frac{R+T}{P^2+Q^2} = \frac{\alpha''}{\alpha'} = \frac{a''}{a'}$$

et, par suite $\alpha' = \lambda a'$

$$\alpha(Z) = \lambda a(Z) + \mu$$

et on retrouve la solution (79).

Forme VII. L'équation

$$Z = K(X, Y)$$

ne peut être écrite que d'une manière sous cette forme.

ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ENTRE LES COORDONNÉES D'UN POINT D'UNE SURFACE DÉRIVABLE

Soit S une surface dérivable relativement à une règle R. Par des ,,changements de coordonnées'', on peut toujours ramener son équation à une forme canonique et résoudre celle-ci en Z, sous la forme

$$Z=\varphi(X, Y).$$

Nous allons montrer pour chacune des formes canoniques ,,ordinaires'', mais en supposant que $\varphi(X, Y)$ est différentiable jusqu'au 3e ordre, que $\varphi(X, Y)$ *vérifie une équation aux dérivées partielles du* 3e *ordre, linéaire par rapport aux dérivées du* 3e *ordre, avec des coefficients polynomiaux* par rapport aux autres dérivées. A chacun des cas ordinaires III à VI est associée une telle équation et *réciproquement la solution générale de cette équation fournit la fonction canonique correspondante* $\varphi(X, Y)$ *la plus générale parmi celles qui ont des dérivées partielles du* 3e *ordre.*

Il n'y a pas lieu de s'occuper des cas I et II, cas trop connus, où S est un plan ou un cylindre, le problème cessant d'avoir un sens dans le cas IIc où S est une courbe.

Dans le cas VII, la fonction canonique $Z=K(X, Y)$ n'étant assujettie qu'à être différentiable, il n'est évidemment pas question de la soumettre à une équation aux dérivées partielles de quelque nature qu'elle soit.

Pour former les équations canoniques annoncées, nous poserons

$$P=\frac{\partial Z}{\partial X},\quad Q=\frac{\partial Z}{\partial Y}$$

$$R=\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2},\quad S=\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y},\quad T=\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$$

$$\lambda=\frac{\partial^3 Z}{\partial X^3},\quad \mu=\frac{\partial^3 Z}{\partial X^2\partial Y},\quad \gamma=\frac{\partial^3 Z}{\partial X\partial Y^2},\quad \varrho=\frac{\partial^3 Z}{\partial Y^3}.$$

Cas III. Nous supposons que l'équation de S est

$$a(X)+b(Y)=c(Z).$$

On a

$$c'(Z)P=a'(X);\ c'(Z)Q=b'(Y)$$

et on doit supposer qu'au moins au voisinage d'un point X_0, Y_0, ni $a'(X)$, ni $b'(Y)$ n'est identiquement nul.

On peut alors écrire

$$\frac{P}{Q}=\frac{a'(X)}{b'(Y)},$$

$\log P-\log Q=\log a'(X)-\log b'(Y)$.

Donc:

$$0=\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y}(\log P-\log Q)=\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{R}{P}-\frac{S}{Q}\right)$$

$$=\frac{\mu P-SR}{P^2}-\frac{\nu Q-ST}{Q^2}.$$

D'où l'équation cherchée

$$\text{III}:\quad (\mu Q-\nu P)PQ=S(RQ^2-TP^2),$$

ou

$$\frac{\mu}{P}-\frac{\nu}{Q}=S\left(\frac{R}{P^2}-\frac{T}{Q^2}\right),$$

ou

$$Q^2(\mu P-RS)+P^2(ST-\nu Q)=0\ ^{1)}.$$

Cas IV.

$$Z=\alpha(X)\beta(Y)+\gamma(X).$$

D'où:

$$P=\alpha'(X)\beta(Y)+\gamma'(X)$$

et nous devons supposer que $\alpha'(X)$ n'est pas identiquement nul près de $X=X_0$.

Or, on peut écrire:

$$Z\alpha'(X)-P\alpha(X)=\alpha'(X)\gamma(X)-\alpha(X)\gamma'(X)$$

d'où

$$0=\frac{\partial}{\partial Y}(Z\alpha'-P\alpha)=\alpha' Q-S\alpha$$

et alors

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{Q}{S}.$$

Comme pour le cas III écrivons

$$\log Q-\log S=\text{fonction de } X.$$

L'équation cherchée est alors

$$\frac{\partial}{\partial Y}(\log Q-\log S)=0,$$

$$\frac{T}{Q}-\frac{\nu}{S}=0$$

ou

$$\text{IV}:\quad TS-\nu Q=0.$$

Cas V.

$$Z=\alpha(X)Y^2+\beta(X)Y+\gamma(X).$$

on a évidemment

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial Y^3}=0,$$

c'est à dire

$$\text{V}:\quad \varrho=0.$$

Cas VI. $a(Z)=U(X,Y)$, avec $\Delta U=0$.

Alors:

$$Pa'=\frac{\partial U}{\partial X}\ ;\ Qa'=\frac{\partial U}{\partial Y}$$

$$0=\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}=(Ra'+P^2a'')+(Ta'+Q^2a''),$$

$$(R+T)a'+(P^2+Q^2)a''=0.$$

---

[1]) A propos d'un problème tout différent relevant de la théorie des groupes, MAURICE JANET a remontré et signalé cette même équation, à la p. 344 de son mémoire: «*Sur un système simple d'équations aux dérivées partielles du second ordre*», Annales Soc. Polonaise de Math., t. XX, 1947.

Or, on doit supposer que P^2+Q^2 ni $a'(Z)$ n'est identiquement nul au voisinage de Z_0.

On peut donc écrire

$$\frac{R+T}{P^2+Q^2} = -\frac{a''(Z)}{a'(Z)} = \varphi(Z).$$

D'où

$$P\varphi'(Z) = \frac{\partial}{\partial X}\frac{R+T}{P^2+Q^2} \quad ; \quad Q\varphi'(Z) = \frac{\partial}{\partial Y}\frac{R+T}{P^2+Q^2}.$$

Alors

$$Q\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{R+T}{P^2+Q^2}\right) = P\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{R+T}{P^2+Q^2}\right)$$

ou:

$$\text{VI:} \quad \begin{cases} [(\lambda+\nu)Q-(\mu+\varrho)P](P^2+Q^2) \\ = 2(R+T)\,[PQ(R-T)+S(Q^2-P^2)], \end{cases}$$

qu'on peut écrire aussi

$$\begin{aligned}(P^2+Q^2)[(\lambda Q-\varrho P)+(\nu Q-ST)-(\mu P-RS)]& \\ =(R-T)[S(P^2+Q^2)+2(R+T)PQ]+2S(R+T)(Q^2-P^2).&\end{aligned}$$

CONFLUENCES DES FAMILLES DE SURFACES DÉRIVABLES

Le problème posé p. 23 sur la confluence des familles de solutions d'équations du type σ trouve évidemment son parallèle dans le problème de la confluence des familles de surfaces dérivables.

Il se pose lui aussi de deux manières.

Ou bien on se demande s'il existe des surfaces appartenant à la fois à plusieurs des familles du tableau V.

Ou bien on se demande, plus généralement, s'il existe des surfaces telles que chacune puisse se ramener par des changements de coordonnées à plusieurs des formes du tableau V.

Il est curieux d'observer que le problème ait pu être posé indirectement sous sa première forme, sans référence à la notion de surface dérivée, sans référence à un tableau tel que le tableau I.

En effet deux auteurs: Bouligand[8]), puis M. H. Martin[9]) se sont posés pour des raisons différentes, le problème de trouver deux fonctions d'une variable: $a(X)$, $b(Y)$ telles qu'il existe une fonction $F(W)$ choisie de façon que

$$U(X, Y) = F(a(X)+b(Y))$$

[8]) Voir le n° de juillet 1949, (où ce problème est proposé à titre d'exercice avec indications sur la solution) dans la Revue de Mathématiques Spéciales, chez Vuibert, Paris.

[9]) No. 2 du volume 2 du „Journal of rational Mechanics and Analysis".

soit harmonique. Alors, on voit que quelle que soit la fonction $A(Z)$ la surface ayant pour équation

$$A(Z) = U(X, Y) \tag{80}$$

et qui est par conséquent du type VI du tableau V, aura aussi une équation de la forme

$$c(Z) = a(X) + b(Y) \tag{81}$$

qui est du type III du même tableau. Et réciproquement, toute surface dont l'équation peut se mettre aussi bien sous la forme (81) que sous la forme (80) où U est harmonique, correspond à une solution du problème de Bouligand et M. H. Martin.

Ainsi la solution du problème analytique posé et résolu par ces auteurs équivaut au problème géométrique suivant; trouver toutes les surfaces, dont l'équation est équivalente à la fois à une équation du type III et à une équation du type VI du tableau V. Nous renverrons aux mémoires originaux de ces deux auteurs pour leurs solutions du problème.

Remarque. Il est clair que le problème de la confluence de deux des formes du tableau V perd tout son intérêt, si l'une des deux formes est de la forme trop générale VII. Toutes les surfaces appartenant aux autres formes rentrent dans ce cas pourvu que des conditions évidentes d'inversion et de différentiabilité soient remplies.

Un exemple très simple. L'exemple donné p. 23 se traduit géométriquement ici sous la forme suivante — qui relève de la seconde forme, plus générale — de notre problème.

Le cône du second degré: $Y^2 = 4XZ$ est *une surface dont, par des changements éventuels de coordonnées, l'équation peut être ramenée à chacune des quatre formes* canoniques „ordinaires" (soient III, IV, V, VI) du tableau V.

D'abord, sans changement de coordonnées, on peut écrire son équation sous les formes

$$\log 2X - \log Y^2 + \log 2Z = 0$$

du type III ou

$$Z = \frac{1}{4X} Y^2$$

qui est à la fois du type IV et du type V.

Enfin, si l'on pose

$$X_1 = X + Z, \quad Y_1 = X - Z, \quad Z_1 = Y$$

son équation pourra s'écrire

$$Z_1^2 = X_1^2 - Y_1^2,$$

équation qui est bien du type VI, puisque $X_1^2 - Y_1^2$ est une fonction harmonique.

Solution générale. Il est clair que si une solution d'un système σ peut être ramenée par des changements linéaires et biunivoques de coordonnées

X, Y, Z et de paramètres u, v à deux formes canoniques (distinctes) du tableau I, elle correspond à une surface qui est une solution de notre problème général.

Mais la réciproque n'est pas vraie: si l'équation d'une surface S peut être ramenée par des changements linéaires et biunivoques des coordonnées X, Y, Z seulement, à deux formes différentes du tableau V, on devra pouvoir en donner deux des représentations paramétriques figurant dans le tableau I, les paramètres étant u, v pour l'une, u_1, v_1 pour l'autre. Mais rien n'oblige à supposer que, si u_1, v_1 et u, v correspondent au même point de S ces paramètres soient liés par des relations linéaires: la solution du problème actuel est plus générale que celle qu'on déduirait des p. 24 à 28.

Exemple. Pour ne pas allonger, nous ne chercherons pas tous les cas de confluences des familles de surfaces dérivables. Mais à titre d'exemple, nous considérerons le cas de confluence des surfaces des types III et IV.

Méthode indirecte. On trouve *des* solutions en déterminant les surfaces représentées par le tableau IV. De la seconde ligne, on tire $X = A(Z)$, mais par un changement de coordonnées, on obtient la forme plus familière simple $Z = A(X)$. On a ainsi les trois solutions suivantes:

$$(82) \qquad \begin{cases} \text{le cône du second degré } Y^2 = 4XZ, \\ \text{le cylindre arbitraire } Z = A(X), \\ \text{le plan } Z = 0. \end{cases}$$

Solution plus générale. Mais ce ne sont que trois *solutions particulières.* Sans chercher systématiquement la solution la plus générale, il suffit de regarder les formes III et IV du tableau V pour s'apercevoir immédiatement que l'équation du type IV obtenue en faisant $\gamma(X) \equiv 0$, soit

$$(83) \qquad Z = \alpha(X)\beta(Y)$$

prend aussi la forme III quand on prend les log des valeurs absolues des deux membres.

On obtient ainsi, en effectuant un changement de coordonnées arbitraires dans (83) non seulement *une* solution très générale, mais même une solution qui comprend comme cas particuliers évidents les trois solutions particulières (82).

Le 25 novembre 1953