

**VERHANDELINGEN**  
DER  
**KONINKLIJKE AKADEMIE**  
VAN  
**WETENSCHAPPEN**

---

**EERSTE SECTIE**

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde -  
Weerkunde en Ingenieurswetenschappen.)

---

**DEEL X**

**MET 2 PLATEN**

---

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER  
April 1911



# INHOUD.

---

1. M. BRÜCKNER. Ueber die Ableitung der allgemeinen Polytope und die nach Isomorphismus verschiedenen Typen der allgemeinen Achtzelle (Oktatope). Mit 2 Tafeln.
  2. M. J. VAN UVEN. Algebraische Strahlencongruenzen und verwandte complexe Ebenen als Schnitte derselben.
-



Ueber die Ableitung der allgemeinen Polytope  
und die nach Isomorphismus verschiedenen Typen  
der allgemeinen Achtzelle (Oktatope)

VON

Prof. Dr. M. BRÜCKNER (Bautzen, Sachsen).

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel X. N<sup>o</sup> 1.

(Mit 2 Tafeln.)

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1909.



## Einleitung: Von den allgemeinen konvexen Polyedern.

---

Das Problem der Bestimmung der allgemeinen konvexen Polyeder (mit nur dreikantigen Ecken) einer gewissen bestimmten Zahl von Begrenzungsflächen ist auf verschiedene Weise gelöst worden <sup>1)</sup>. Am nächstliegenden ist die Ableitung der von  $n + 1$  Flächen begrenzten Polyeder aus den als bekannt vorausgesetzten  $n$ -flachen durch die sogen. *Fundamentalkonstruktionen* <sup>2)</sup>, die wir im Folgenden einer kurzen Betrachtung zu unterziehen haben, ehe wir die Konstruktionen der allgemeinen Polytope erläutern können <sup>3)</sup>.

Sollen aus den allgemeinen  $n$ -flachen  $p_n$  alle  $p_{n+1}$  abgeleitet werden, so schneidet man von den  $p_n$  durch eine Ebene eine, zwei, drei . . . (benachbarte) Ecken einer Fläche ab, fügt also der Oberfläche des  $p_n$  ein Dreieck, Viereck, Fünfeck . . . ein, wobei die Kantenzahlen einiger anderer Flächen des  $p_n$  geändert werden. Es mögen die  $p_n$  von der *ersten, zweiten, dritten . . . Klasse* heissen, je nachdem die Begrenzungsflächen geringster Kantenzahl Drei-, Vier-, Fünf- . . . ecke sind. Dann ergibt sich ein  $p_{n+1}$  *erster Klasse*, wenn irgend eine Ecke eines  $p_n$  beliebiger Klasse durch einen dreiseitigen Schnitt entfernt wird; denn das  $p_{n+1}$  enthält mindestens ein Dreieck, nämlich das neueingeführte (erste Fundamentalkonstruktion). Die zweite Fundamentalkonstruktion zur Erzeugung der allgemeinen  $p_{n+1}$  besteht darin, dass durch einen vierseitigen Schnitt eine Kante  $AB$  des  $p_n$  entfernt wird. Nur die beiden Scheitelflächen in  $A$  und  $B$  erhalten dadurch in  $p_{n+1}$  je eine Kante mehr. Hieraus folgt: Die  $p_{n+1}$  zweiter Klasse sind durch die zweite Fundamentalkonstruktion aus allen  $p_n$  von der zweiten

---

<sup>1)</sup> Vergl. BRÜCKNER, Vielecke und Vielfache, Leipzig 1900. S. 93.

<sup>2)</sup> A. a. O. S. 84.

<sup>3)</sup> Für die Polytope beziehen wir uns bes. auf P. H. SCHOUTE, Mehrdimensionale Geometrie, 2. Teil. Leipzig 1905.

Klasse ab zu konstruieren, sowie aus den  $p_n$  erster Klasse, die *nur ein Dreieck* besitzen (man schneide eine Scheitellkante dieses Dreiecks ab) oder *zwei Dreiecke mit gemeinsamer Scheitellkante  $AB$*  (man unterwerfe diese Scheitellkante der zweiten Konstruktion). Schneidet man zwei aufeinanderfolgende Kanten  $AB$ ,  $BC$  einer Grenzfläche des  $p_n$  durch ein Fünfeck ab, so erhalten die beiden Scheitelflächen in  $A$  und  $C$  je eine Kante mehr, aber an Stelle der das Kantenpaar  $AB$ ,  $BC$  enthaltenden Fläche tritt eine Fläche mit um eins geringerer Kantenzahl. Diese dritte Fundamentalkonstruktion zur Erzeugung der  $p_{n+1}$  dritter Klasse braucht offenbar die  $p_n$  erster Klasse nicht mehr zu berücksichtigen und von den  $p_n$  zweiter Klasse kommen nur solche Polyeder in Frage, bei denen die Scheitelflächen in  $A$  und  $C$  allein Vierecke sind, während die Fläche mit dem Kantenzuge  $ABC$  mindestens sechskantig sein muss. Ueberdies sind zur Konstruktion der  $p_{n+1}$  dritter Klasse sämtliche  $p_n$  dritter Klasse zu verwenden; aber auch dabei muss die Fläche mit dem Kantenzuge  $ABC$  mindestens sechskantig sein. Es existieren nun bekanntlich nur allgemeine Polyeder dieser drei ersten Klassen, da stets

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + f_7 + 2f_8 + \dots$$

sein muss.<sup>1)</sup> Somit ist eine vierte Fundamentalkonstruktion nicht nötig; denn die Einführung eines Sechsecks erübrigt sich, da das dadurch zu erzeugende  $p_{n+1}$  sicher Drei-, Vier- oder Fünfecke enthalten muss, also durch eine der 3 ersten Fundamentalkonstruktionen sich aus einem  $p_n$  ergeben würde.<sup>2)</sup> Nur mit Rücksicht auf die Ableitung der allgemeinen Polytope betrachten wir noch weitere Schnitte der Polyed̄er. In erster Linie kommen hier die Schnitte durch Ebenen in Betracht, die sich als Weiterführung der bisherigen drei Konstruktionen auffassen lassen, wenn nämlich ein Polyeder durch eine Ebene so geschnitten wird, dass  $\mu$  auf einanderfolgende von den  $\lambda$  Ecken *einer* Grenzfläche ( $\mu \leq \lambda - 1$ ) auf eine Seite dieser Ebene zu liegen kommen, ohne dass auch irgend eine seitende Fläche des  $\lambda$ -ecks ihrer ganzen Erstreckung nach mit auf diese Seite der Ebene fällt. Es entsteht dann durch diese „ $\mu$ -te Konstruktion“ aus dem  $p_n$  ein  $p_{n+1}$ , das sich natürlich auch durch eine der Konstruktionen  $\mu = 1, 2, 3$  erhalten liess. Jedenfalls kann man an einem  $p_n$  das als Vieleck grösster Kantenzahl ein  $\lambda$ -eck enthält  $\mu = \lambda - 1$  solcher Konstruktionen an dieser

<sup>1)</sup> Vielecke u. Vielfache, S. 84. SCHOUTE, a. a. O. S. 56.

<sup>2)</sup> Die dritte Konstr. wird erst nötig bei Ableitung der  $p_{12}$  aus den  $p_{11}$  und führt auf das einzige  $p_{12}$  dritter Klasse, ein von 12 Fünfecken begrenztes Polyeder, das mit dem regulären Dodekaeder isomorph ist.



Fläche ausführen. Von besonderer Bedeutung sind im Folgenden mit Rücksicht hierauf solche  $p_n$ , die von zwei  $(n-1)$ -ecken mit gemeinsamer Kante und in Folge dessen von 2 Dreiecken und  $n-4$  Vierecken begrenzt werden. Man bezeichnet sie als *Hufe*. Von den  $n-1$  Ecken  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  einer Grenzfläche eines solchen Hufes  $p_n$  [ $A_1 A_{n-1}$  sei die gemeinsame Kante der beiden  $(n-1)$ -ecke] werden durch die  $\mu$ -te Konstruktion die  $\mu$  aufeinanderfolgenden Ecken des Kantenzuges  $A_i A_{i+1} \dots A_{i+\mu-1}$  durch ein  $(\mu+2)$ -eck abgeschnitten. Durch die letzte zulässige, d. h. die  $(n-2)$ -te Konstruktion ergeben sich dann die folgenden  $p_{n+1}$ , je nachdem die nicht mit abgeschnittene letzte Ecke eine der am Ende vermerkten Ecken ist:

- a) Der Huf  $p_{n+1}$  ( $2 f_3; (n-3) \cdot f_4; 2 f_n$ ).  $A_1$  oder  $A_{n-1}$ .
- b) Ein  $p_{n+1}$  ( $2 f_3; (n-4) \cdot f_4; 1 \cdot f_5; 1 \cdot f_{n-1}; 1 \cdot f_n$ ).  $A_2$  oder  $A_{n-2}$ .
- c)  $\tau$  Typen  $p_{n+1}$  ( $3 f_3; (n-6) \cdot f_4; 2 f_5; 1 \cdot f_{n-1}, 1 \cdot f_n$ )  
 $A_3$  oder  $A_{n-3}, A_4$  oder  $A_{n-4}$  u. s. w.

Unter c) sind  $\tau = \frac{n-4}{2}$  oder  $\tau = \frac{n-5}{2}$  *allomorphe* Typen enthalten, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist.

Für  $\mu = \lambda$  fällt das oben erwähnte  $\lambda$ -eck völlig auf die eine Seite der schneidenden Ebene, und das erzeugte Polyeder, aus dem gegebenen durch Abschneiden eines  $\lambda$ -seitigen Prismas entstanden, ist wieder ein  $p_n$ , das mit dem ursprünglichen isomorph ist. Es existieren aber für jedes  $p_n$  noch weitere zulässige Schnitte, wenn nur verlangt wird, dass keine seiner Grenzflächen ihrer ganzen Ausdehnung nach auf die dem Polyeder abgewandte Seite der schneidenden Ebene fällt: z. B. wenn das Tripel von Kanten einer Ecke durch ein Sechseck abgeschnitten wird, u. s. w. <sup>1)</sup>

Wir werden auf diese Konstruktionen, so weit sie im Folgenden gebraucht werden, an Ort und Stelle zurückkommen.

In den Figuren 1—8 liegen für spätere Verwendung die allgemeinen Polyeder für  $n = 5, 6, 7$  gezeichnet vor. Es ist das Polyeder zentral so aus einem ausserhalb liegenden Punkte auf eine seiner Grenzflächen projiziert, dass alle seine Eckpunkte innerhalb dieser Fläche liegen. Man bezeichnet diese Bilder der Polyeder als ihre *Diagramme*. <sup>2)</sup> Das Problem, alle  $p_n$  zu bestimmen, unter deren Grenzflächen ein  $\lambda$ -eck vorkommt ist dann, da ein allgemeines  $p_n$   $2n - 4$  Ecken besitzt, identisch mit dem,  $2n - 4 - \lambda$  Punkte

<sup>1)</sup> Vergl. O. HERMES, Ueber Anzahl und Form von Vielflachen. Progr. d. Kölln. Gymn. Berlin 1894.

<sup>2)</sup> SCHOOTE, a. a. O. S. 23. Die Diagramme aller allgem. Vielflache bis  $n = 10$  vergl. Vielecke u. V. Taf. II—V.

innerhalb des Perimeters eines  $\lambda$ -ecks so unter einander und mit den  $\lambda$  Ecken des Aussenpolygons zu verbinden, dass jeder der Binnenpunkte mit nur je 3 andern Punkten, jeder der äussern Polygonpunkte aber nur mit einem Binnenpunkte verbunden und die Fläche des  $\lambda$ -ecks in  $n - 1$  einfachzusammenhängende Zellen geteilt wird. Es ist ersichtlich, dass dieses Problem der *Polygonteilung*, weil gewisse Zerlegungen verschiedenkantiger Vielecke Diagramme desselben Polyeders  $p_n$  auf verschiedenkantige seiner Grenzflächen bezogen <sup>1)</sup> darstellen, seine wahre Bedeutung erst erhält, wenn man die geteilten Polygone als Diagramme dreidimensionaler Polyeder auffasst. <sup>2)</sup>

### § 1. Von den allgemeinen konvexen Polytopen.

Unter einem Polytop (Vielzell) versteht man eine Reihe von Polyedern, die im vierdimensionalen Raume derart mit einander verbunden sind, dass je ein Polyeder jede seiner begrenzenden Flächen mit einem und nur einem andern Polyeder gemein hat, wobei durch diese Reihe der Polyeder der  $R_4$  in 2 getrennte Gebiete zerlegt wird, ein „inneres“ (endliches) und ein „äusseres“ (unendliches). Jedes der dreidimensionalen Polyeder liegt dabei in einem anderen dreidimensionalen Raume. Die gemeinsame Fläche zweier Grenzpolyeder liegt in der Schnittebene der beiden benachbarten Räume. Ein Polytop heisst allgemein, wenn jede seiner Ecken von nur 4 Polyedern gebildet wird, also in jeder seiner Kanten 3 Polyeder aneinandergrenzen. <sup>3)</sup> An jeder Ecke nehmen 6 Flächen Teil. Ist  $e$  die Zahl der Ecken,  $k$  der Kanten,  $f$  der Flächen und  $p$  der Polyeder des Polytopes, so gelten neben der Gleichung

$$e - k + f - p = 0$$

für ein allgemeines Polytop die Relationen <sup>4)</sup>:

$$k = 2e; f = e + p.$$

Während für ein allgemeines Polyeder des dreidimensionalen Raumes, das von  $n$  Flächen begrenzt wird, die Zahlen der Ecken und Kanten durch die Gleichungen  $e = 2n - 4$ ,  $k = 3n - 6$  be-

<sup>1)</sup> Vergl. die Diagramme Fig. 1<sup>a</sup> und 1<sup>b</sup> desselben  $p_n$ .

<sup>2)</sup> Wir bezeichnen die allgemeinen  $n$ -flache mit  $p_n$  und verstehen unter  $p_n$  stets den Huf, unter  $p_n$  das Prisma, während die mit weiteren Indices versehenen  $p_n^{\text{III}}$ ,  $p_n^{\text{IV}}$ , ... die übrigen (für  $n=7$  durch die Figuren 6—8 erläuterten) Polyeder  $p_n$  sind.

<sup>3)</sup> SCHOUTE, a. a. O. S. 28.

<sup>4)</sup> SCHOUTE, a. a. O. S. 65.

stimmt sind, gilt der Satz: Die Anzahl der Ecken eines allgemeinen Polytopes mit  $p$  Polyedern ( $p \geq 5$ ) ist nur an die Ungleichung bzw. Gleichung gebunden:

$$3p - 10 \leq e \leq \frac{p(p-3)}{2}.$$

In Verbindung mit den obigen Gleichungen folgt hieraus für die Anzahl der 2- und 3-dimensionalen Begrenzungsstücke:

$$2(3p - 10) \leq k \leq p(p - 3);$$

$$2(2p - 5) \leq f \leq \frac{p(p-1)}{2}.$$

Dabei werden für jede Zahl  $p$  der Polyeder die unteren und oberen Grenzen für  $e$ ,  $k$  und  $f$  wirklich erreicht, wie später zu beweisen ist.

Ein konvexes Polytop in  $R_4$  wird von einer Geraden, die nicht vollständig in einem Grenzraume  $R_3$  liegt, in 2 Punkten geschnitten. <sup>1)</sup> Verbindet man also einen Punkt ausserhalb des Polytopes in  $R_4$  mit allen seinen Ecken, so schneiden diese Geraden bei passender Wahl der Lage des Punktes einen Grenzraum in ebensoviel Punkten, wie die ausserhalb dieses Grenzraumes noch liegenden Ecken des Polytopes betragen, und es ergibt sich somit eine zentrale Projektion der übrigen begrenzenden Polyeder in diesen Raum, die als *Diagramm* der Polytopes zu bezeichnen ist. Wir werden im allgemeinen das Polytop möglichst in ein Grenzpolyeder grösster Flächenzahl projizieren.

Ein in Zellen geteiltes allgemeines Polyeder ist also als Diagramm eines allgemeinen Polytopes aufzufassen, wenn in jedem der Binnenpunkte 4 Zellen, in jeder Verbindungskante zweier Punkte 3 Zellen aneinandergrenzen; das umhüllende allgemeine Polyeder ist der letzte Grenzraum. Die Figuren 9—13 stellen die Diagramme der allgemeinen Polytope  $P_7$  dar. Projiziert man dasselbe Polytop in verschiedene seiner Grenzräume, so erhält man verschiedene Diagramme d. h. *Polyederteilungen*, wie die Figuren 10 und 10<sup>a</sup> erläutern, in denen dasselbe  $P_7$  einmal in ein begrenzendes  $p_6'$ , das zweite Mal in ein  $p_5$  projiziert ist. Als Polyederteilung hat man somit zwei verschiedene Lösungen, die ihr wahres Wesen erst offenbaren, wenn man die Figuren als Diagramme vierdimensionaler Polytope auffasst. — Unter diesen besitzen 2 Arten besonders ein-

<sup>1)</sup> SCHOUTE, a. a. O. S. 28, N°. 10.

fachen Charakter. Unter einem *Hufe* verstehe man ein Polytop, <sup>1)</sup> dessen sämtliche Ecken zwei isomorphen  $p_n$  zugehören, die eine homologe Grenzfläche gemeinsam haben. Für dasselbe  $p_n$  lassen sich demnach soviel Hufe in  $R_4$  konstruieren, als wesentlich nach Isomorphismus verschiedene Grenzflächen von  $p_n$  in Frage kommen, und es sind die erhaltenen Hufe der Zahl der Ecken etc nach verschieden. Ist die gemeinsame Fläche der beiden  $p_n$  ein  $\lambda$ -eck so ist für den Huf <sup>2)</sup>:

$$e = 4n - 8 - \lambda; k = 8n - 16 - 2\lambda;$$

$$f = 5n - 7 - \lambda; p = n + 1.$$

Es sind z. B. die drei Siebenzelle  $P_7^1, P_7^2, P_7^4$  (Fig. 9, 10 und 12) Hufe aus zwei  $p_6'$ , in denen der Reihe nach ein Fünfeck, Viereck und Dreieck gemeinsame Fläche der beiden  $p_6'$  ist. <sup>3)</sup> Das Siebenzell  $P_7^3$  (Fig. 11) ist ein Huf aus zwei  $p_6''$ . — Die zweite Art von Polytopen besondern Charakters sind die *Prismen*. Ein vierdimensionales Prisma entsteht, wenn ein Polyeder  $p_n$  so in  $R_4$  bewegt wird, dass seine Ecken aequipollente Strecken <sup>4)</sup> beschreiben, aber nicht in demselben Raume  $R_3$  bleiben. Es besitzt also 2 kongruente „Deckräume“ und  $n$  dreidimensionale Prismen als „Mantelräume“. Der Huf  $P_7^3$  ist zugleich ein Prisma aus einem  $p_5$  als Deckraum, wie sich erkennen lässt, wenn man das Polytop in eines der vier  $p_5$  (z. B.  $EIA, FKB$ ) projiziert <sup>5)</sup>, oder aus Fig. 11; nur sind die von den Ecken  $E, I$ , u. s. w., beschriebenen Strecken  $EH, IM, \dots$  im Diagramm nicht aequipollent. Wir teilen nun analog den Polyedern zur Uebersicht die Polytope in  $R_4$  in *Klassen*, wobei wir das Vorkommen von Polyedern bestimmter Flächenzahl als Grenzpolyeder zum Einteilungsprincip wählen. Ein Polytop der *ersten Klasse* besitze unter seinen Grenzräumen  $p_4$  (d. i. Tetraeder) und irgend welche  $p_n$  grösserer Flächenzahl (wenn  $p > 5$  ist). Ein Polytop der *zweiten Klasse* besitze keine  $p_4$  mehr, aber  $p_5$  und Polyeder grösserer Flächenzahl. Ein Polytop *i-ter Klasse* besitzt keine  $p_4, p_5, \dots, p_{i+2}$ , wohl aber  $p_{i+3}$

<sup>1)</sup> Das Beiwort *allgemein* ist künftig stets weggelassen.

<sup>2)</sup> Vergl. meine „Elemente der vierdimens. Geometrie“. Zwickau 1894. S. 46.

<sup>3)</sup> In Fig. 9 ist das Fünfeck  $ABCDG$  gemeinsame Fläche der beiden  $p_6'$ ; in den andern Figuren ist die gemeinsame Fläche schraffiert und für das innenliegende Polyeder ist die fünfeckige Fläche mit dem Kantenzuge  $LIGAB$  bzw.  $NMFBK$  aus dem hintersten Fünfeck der äusseren Umhüllungszelle bis auf eine Kante heraustretend vorzustellen.

<sup>4)</sup> SCHOUTE, a. a. O. S. 37.

<sup>5)</sup> Vergl. Elem. der vierdim. Geom. Taf. II. Fig. 17<sup>b</sup>. Die Diagramme der  $P_5$  und  $P_6$  sind dort auf den Tafeln gezeichnet.  $P_5$  (Taf. I Fig. 8) ist das aus 5 Tetraedern gebildete „Simplex“ (vergl. SCHOUTE a. a. O. S. 1) des  $R_4$ .  $P_6^1$  (Fig. 13<sup>a</sup> auf Taf. II) ist ein Prisma aus  $p_4$  als Deckraum;  $P_6^2$  (Fig. 14<sup>a</sup>) ein Huf über  $p_5$ .

und weitere. Da unter den Grenzpolyedern eines konvexen  $P_p$  ein  $p_{p-1}$  das Vielfach höchster Flächenzahl sein kann (es sind dann noch  $p-1$  Polyeder vorhanden, von denen jedes eine seiner Flächen mit dem  $p_{p-1}$  gemein hat) so kann ein  $P_p$  zur 1, 2, 3... ( $p-4$ )-ten Klasse gehören.

Es wird sich zeigen, dass für jeden Wert von  $p$  Polytope dieser sämtlichen Klassen existieren <sup>1)</sup> und sich konstruieren lassen. Diese unsre nächste Aufgabe: Die Konstruktion sämtlicher Polytope  $P_{p+1}$  aus den als bekannt vorauszusetzenden  $P_p$ , werden wir an den Diagrammen erläutern.

Ist  $A$  eine Ecke eines Polytopes  $P_p$ , und sind  $A_1, A_2, A_3, A_4$  Punkte auf den 4 von  $A$  ausgehenden Kanten, so konstruiere man das Tetraeder  $A_1 A_2 A_3 A_4$  und tilge die innerhalb desselben liegenden Teile jener 4 Kanten sowie die Ecke  $A$  selbst. Dadurch wird auf die 4 Polyeder in  $A$  die erste Polyederkonstruktion angewandt, d. h. von jedem wird eine Ecke abgeschnitten. Das neue Polytop  $P_{p+1}$  gehört der *ersten Klasse* nach obiger Einteilung an, denn es enthält mindestens das eine  $p_4 \equiv A_1 A_2 A_3 A_4$ .

Aus einem  $P_p(e, k, f, p)$  beliebiger Klasse ergibt sich durch diese *erste Polytopkonstruktion* ein Polytop erster Klasse  $P_{p+1}(e+3, k+6, f+4, p+1)$ . Da durch alle weiterhin zu besprechenden Konstruktionen die Zahl der Ecken um mehr als 3 erhöht wird, so ergeben sich die Polytope mit der Minimalzahl der Ecken durch wiederholte Anwendung dieser ersten Konstruktion. Es besitzt daher, weil für  $p=5$  auch  $e=5$  ist, ein  $P_p$  das Minimum der Ecken  $e=5+(p-5) \cdot 3 = 3p-10$ , wie früher behauptet war. Ueberdies leuchtet ein, dass zur Erzeugung der  $P_{p+1}$  erster Klasse diese erste Konstruktion auf *sämtliche*  $P_p$  zu erstrecken ist, und es sind alle deren Ecken zu berücksichtigen. Ebenso wie bei Konstruktion der Polyeder in  $R_3$  wird auch hier dasselbe  $P_{p+1}$  sich zuweilen aus mehreren  $P_p$  ergeben, ja in Folge der Symmetrie selbst mehrere Male aus demselben  $P_p$ . Inverse d. h. spiegelbildlich-isomorphe Diagramme sollen dabei überhaupt als gleichwertig angesehen werden.

*Die zweite Polytopkonstruktion.* Ist  $AB$  eine Kante im Diagramm eines  $P_p$ , so seien  $A_1, A_2, A_3$  und  $B_1, B_2, B_3$  Punkte auf den übrigen je 3 von  $A$  und  $B$  ausgehenden Kanten, derart dass  $A_1$  und  $B_1, A_2$  und  $B_2, A_3$  und  $B_3$  je auf Kanten derselben von den 3 Flächen liegen, die die Kante  $AB$  gemein haben. Diese 6 Ecken  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  sind die eines  $p_5$ , das nach Tilgung der

<sup>1)</sup> Man beachte den Unterschied der Klassenzahl der Gebilde in  $R_3$  und  $R_4$ .

Kante  $AB$  und der innerhalb  $p_5$  liegenden Kantenteile  $AA_1$  u. s. w. als neues Grenzpolyeder dem Polytope bzw. Diagramme eingefügt ist. Dabei wird auf die 2 Scheitelpolyeder der Kante  $AB$  in  $A$  und  $B$  die erste Polyederkonstruktion angewandt; aus den 3 Polyedern, die die Kante  $AB$  gemeinsam hatten, wird durch die zweite Polyederkonstruktion ebenfalls je ein Polyeder mit um 1 vermehrter Flächenzahl. Aus dem  $P_p(e, k, f, p)$  wird ein  $P_{p+1}(e+4, k+8, f+5, p+1)$ . Da diese zweite Polytopkonstruktion zu einem  $P_{p+1}$  mit mindestens dem eingefügten  $p_5$  führt, so ist sie zur Ableitung der  $P_{p+1}$  zweiter Klasse zunächst auf alle  $P_p$  zweiter und höherer Klasse anzuwenden. Zweitens aber noch auf alle diejenigen  $P_p$  erster Klasse die *nur ein*  $p_4$  besitzen; sowohl auf dessen Kanten selbst als Kanten  $AB$ , sowie auf seine Scheiteltanten, denn in beiden Fällen tritt an Stelle dieses  $p_4$  ein  $p_5$ . Endlich sind auch die  $P_p$  erster Klasse zu berücksichtigen, unter deren Grenzkörpern nur 2 Tetraeder  $A_1 A_2 A_3 A_4$  und  $B_1 B_2 B_3 B_4$  mit der Scheiteltante  $A_i B_j$  auftreten, wobei an Stelle dieser Kante  $A_i B_j$  das neue  $p_5$  tritt.

Mit dieser zweiten Polytopkonstruktion ist die Eindeutigkeit der Konstruktionen schon erschöpft, da bereits für  $p_6$  zwei verschiedene Typen existieren, d. h. die Polytope dritter Klasse ihren Charakter als solcher sowohl dem Vorkommen von  $p_6'$  wie  $p_6''$  verdanken können. Es soll nun zunächst die Einfügung der *Hufe*  $p_6', p_7', \dots, p_n'$  genauer betrachtet werden und wir bezeichnen die dazu nötige Konstruktion als Polytopkonstruktion 3', 4' ...<sup>1)</sup>. Es liege das Diagramm irgend eines  $P_p$  vor, das 2 Polyeder mit einem gemeinsamen  $\lambda$ -eck enthält.  $\mu + 2$  aufeinander folgende Ecken dieses  $\lambda$ -ecks seien  $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{\mu-1}, e_\mu, e_{\mu+1}$ , wobei im ungünstigsten Falle  $e_0$  mit  $e_{\mu+1}$  identisch ist.<sup>2)</sup> (Allgemein sei  $\mu + 2 < \lambda$ , so dass noch weitere Ecken des  $\lambda$ -ecks vorhanden sind). Man verbinde einen Punkt  $e_1^3$  auf  $e_1 e_0$  mit einem Punkte  $e_\mu^3$  auf  $e_\mu e_{\mu+1}$  durch die Strecke  $e_1^3 e_\mu^3$ , die also ganz innerhalb des Perimeters des  $\lambda$ -ecks verläuft. Auf den noch verbleibenden je 2 Kanten von den Ecken  $e_1, e_2 \dots e_\mu$  im Diagramm, die nicht dem  $\lambda$ -eck angehören, fixiere man die Punkte  $e_1^1, e_1^2; e_2^1, e_2^2; e_3^1, e_3^2; \dots, e_\mu^1, e_\mu^2$  so, dass die Punkte  $e_1^1, e_2^1, e_3^1 \dots e_\mu^1$ , sowie die Punkte  $e_1^2, e_2^2, e_3^2 \dots e_\mu^2$  für sich je in einer Ebene durch die Kante  $e_1^3 e_\mu^3$  liegen. Durch diese beiden  $(\mu + 2)$ -ecke, die beiden Dreiecke  $e_1^1 e_1^2 e_1^3, e_\mu^1 e_\mu^2 e_\mu^3$  und die  $\mu - 1$  Vierecke  $e_1^1 e_1^2 e_2^2 e_2^1, e_2^1 e_2^2 e_3^2 e_3^1, \dots, e_{\mu-1}^1$

<sup>1)</sup> Es werde allgemein die Einfügung eines  $p_n', p_n'', p_n''' \dots$  in das Diagramm durch die Konstruktion  $(n-3)', (n-3)'', (n-3)''', \dots$  geleistet.

<sup>2)</sup> Vergl. Fig. 13<sup>a</sup> für  $\mu = 4$ .

$e_{\mu-1}^2 e_{\mu}^2 e_{\mu}^1$  wird ein Huf  $p_{\mu+3}$  begrenzt, durch dessen Einfügung das Diagramm eines  $P_{p+1}$  entsteht. <sup>1)</sup> Wir bezeichnen diese Konstruktion als die Konstruktion  $\mu'$ .

Aus dem Polytop  $P_p(e, k, f, p)$  entsteht durch sie ein

$$P_{p+1}(e + \mu + 2, k + 2\mu + 4, f + \mu + 3, p + 1);$$

denn es ist  $e' = e - \mu + (2\mu + 2)$ ,  $k' = k - (\mu - 1) + (3\mu + 3)$ , während Flächen und Polyeder nicht verloren gehen, sondern nur neu hinzukommen. Bei Ausführung der geschilderten Konstruktion erleiden die beteiligten Polyeder des Diagrammes die folgenden Veränderungen. Durch die dreikantigen Schnitte  $e_1^1 e_1^2 e_1^3$  und  $e_{\mu}^1 e_{\mu}^2 e_{\mu}^3$  wird von den beiden Scheitelpolyedern  $\Pi_1$  und  $\Pi_{\mu}$  des Kantenzuges  $e_1 e_2 \dots e_{\mu}$  eine Ecke abgeschnitten (erste Polyederkonstruktion). Durch die  $\mu - 1$  Vierecke  $e_1^1 e_1^2 e_2^2 e_2^1$  u. s. w. werden die Kanten  $e_1 e_2 \dots$  von  $\mu - 1$  Polyedern  $\Pi_{1,2}, \Pi_{2,3}, \dots, \Pi_{\mu-1,\mu}$  abgeschnitten (zweite Polyederkonstruktion), während die beiden Polyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$ , die das  $\lambda$ -eck gemein hatten, der als  $\mu$ -te bezeichneten Polyederkonstruktion unterworfen wurden. Beachten wir jetzt, das die Polytopkonstruktion nur dazu dienen soll, einen Huf  $p_{\mu+3}$  dem  $P_p$  einzufügen, so darf sie nur ausgeführt werden, wenn nach ihrer Erledigung das Polytop  $P_{p+1}$  keine Polyeder geringerer Flächenzahl, also auch keinen Huf niedrer Flächenzahl besitzt, denn sonst hätte dessen Einfügung die höhere Konstruktion unnötig gemacht, *Wir setzen allerdings hierbei die Erledigung der Einfügung aller Polyeder geringerer Flächenzahl überhaupt voraus.* Es dient die Einfügung eines Hufes  $p_{\mu+3}$  sonach erst zur Ableitung der  $P_{\mu+1}$   $\mu$ -ter Klasse aus den  $P_p$  und es ist diese Konstruktion auf *alle*  $P_p$  von der  $\mu$ -ten Klasse ab (die niedern Klassen ausgeschlossen) anzuwenden. Nur von der  $(\mu - 1)$ -ten Klasse der  $P_p$  sind noch gewisse Typen mit zuzuziehen, nämlich solche, die das  $\lambda$ -eck in der geschilderten Weise im Diagramm besitzen, und bei denen die Polyeder  $p_{\mu+2}$  lediglich längs des zu entfernenden Kantenzuges  $e_1, e_2, \dots, e_{\mu}$  liegen, also eine Kante dieses Zuges, oder wenigstens eine der Ecken  $e_1$  und  $e_{\mu}$  besitzen.

Das Maximum der Eckenzahl eines allgemeinen  $P_p$  ist vorhanden, wenn *alle* begrenzenden Polyeder  $(p-1)$ -flach sind. Da ein  $(p-1)$ -flach  $2p-6$  Ecken hat, so besitzen die  $p$  Polyeder  $p(2p-6)$  Ecken und das Polytop, da dann jede Ecke vierfach gezählt ist,  $\frac{p(2p-6)}{4}$  d. h.  $\frac{p(p-3)}{2}$  Ecken, wie oben angegeben wurde. Wir

<sup>1)</sup> Für  $\mu=1$  und 2 sind die eingefügten Polyeder ein  $p_4$  und  $p_5$ , und wir haben die schon erläuterte 1. und 2. Konstruktion.

beweisen jetzt den früher behaupteten Satz, dass für jeden Wert von  $p$  ( $> 5$ ) Polytope existieren, deren Eckenzahl dieses Maximum erreicht, durch den Schluss von  $p$  auf  $p + 1$ . Es existiere das Maximum  $M = \frac{p(p-3)}{2}$  für ein  $P_p$ , und wir setzen voraus, dass dann das Polytop einen Huf  $p'_{p-1}$  besitze (das vorher mit  $\Lambda$  bezeichnete Polyeder).

Die Zulässigkeit dieser Annahme wird sich zeigen. <sup>1)</sup> Auf diesen Huf wenden wir die Konstruktion  $\mu' = p-3$  an. Dies ist statthaft, denn die Fläche mit der Maximalzahl der Kanten des Hufes  $p'_{p-1}$  ist ein  $(p-2)$ -eck; man kann also einen Kantenzug mit  $p-3$  Ecken abschneiden, und zwar geschehe dies nach dem Schema  $a$ ) der Einleitung. Der dem Polytopdiagramm dadurch eingefügte Huf hat dann  $2(p-3) + 2 = 2p-4$  Ecken. Das neue Polytop besitzt also sicher mindestens diesen einen Huf! Die Zahl seiner Ecken ist aber gleich der Zahl der Ecken des ursprünglichen Polytopes, vermindert um  $p-3$  und vermehrt um  $2(p-3) + 2$ , d. h. es ist  $e' = M + p-1$ , oder

$$e' = \frac{p(p-3)}{2} + p-1 = \frac{(p+1)(p-2)}{2} = \frac{p'(p'-3)}{2}$$

für  $p' = p + 1$ , d. h. das neue  $P_{p+1}$  hat die Maximalzahl  $M'$  der Ecken. Nun existieren für  $p = 5, 6, 7$  Polytope mit der Maximalzahl der Ecken und mit Hufen, also . . . u. s. w.

Dass umgekehrt sämtliche Grenzpolyeder eines  $P_{p+1}$  mit  $M'$  Ecken  $p$ -flache sind, ist nach dem Vorhergehenden selbstverständlich. Für  $p = 5, 6, 7$  existiert nur je ein Polytop mit der Maximalzahl der Ecken und es sind sämtliche Grenzpolyeder in diesen drei Fällen Hufe  $p'_{p-1}$ . Schon für  $p = 8$  gibt es vier nach Isomorphismus verschiedene Polytope mit der Maximalzahl von 20 Ecken, und unter diesen wieder eins, das lediglich von Hufen  $p'_7$  begrenzt wird. Solche Polytope gibt es für jeden Wert von  $p$ . Zum Beweise dieses Satzes betrachten wir das Polytop  $P_7^5$ , bzw. sein Diagramm (Vergl. Fig. 13).

Sind  $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$  und  $e_1 e_2' e_3' e_4' e_5'$  die beiden Fünfecke irgend eines beliebigen Hufes von  $P_7^5$ , so sind  $e_1 e_2$  und  $e_4' e_5'$  gemeinsame Kanten je eines verschiedenen Dreiecks und Fünfecks. Die 4 Nachbarkanten dieser beiden Kanten, die nicht Scheitelkanten der beiden Fünfecke sind, sind stets Scheitelkanten der beiden Fünf-

<sup>1)</sup> Damit ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass überdies auch Polytope mit der Maximalzahl der Ecken existieren, unter deren Grenzpolyedern sich keine Hufe befinden.



ecke eines benachbarten Hufes, und zwar die Scheitelkanten, die einem Dreieck und Viereck gemeinsam sind, so dass die 7 Dreiecke im Diagramm derart eine geschlossene Reihe bilden, dass jedes eine Ecke mit dem folgenden gemein hat:

$$A'EI' - I'KN' - N'MO' - O'GH' - H'DC' - C'LB' - B'FA'.$$

Daraus folgt, dass die dritte durch  $e_1 e_2$  bzw.  $e_4' e_5'$  gehende gemeinsame Fläche der beiden weiteren Hufe in diesen Kanten stets ein Fünfeck ist. Die übrigen Kanten der Fünfecke des ersten Hufes sind somit stets Scheitelkanten der Fünfecke der Nachbarhufe. Wendet man nun auf den Kantenzug  $e_2 e_3 e_4 e_5$  die vierte Polytopkonstruktion an (auf das Polyeder die Konstruktion des Schema  $a$ ) der Einleitung), so sieht man leicht ein., dass sämtliche in Anspruch genommenen Polyeder wieder zu Hufen werden <sup>1)</sup> und es ergibt sich ein neues Diagramm (Vergl. Fig. 49), das wieder denselben oben geschilderten Bau aufweist, wie das ursprüngliche. Durch die gleiche Betrachtung dieses und der folgenden Diagramme erschliesst man also, dass für jedes  $p$  ein Polytop aus lauter Hufen  $p'_{p-1}$  existiert.

Schliesslich ist auch noch durch Betrachtung des Diagrammes eines  $P_p$  mit der Maximalzahl der Ecken zu zeigen, wie man aus ihm Diagramme von Polytopen  $P_{p+1}$  sämtlicher zugehöriger Klassen ableitet, womit deren Existenz bewiesen ist. An dem Hufe  $\Lambda \equiv p'_{p-1}$  befinde sich der Kantenzug  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{p-3}$ . Wendet man auf je 1, 2, 3 ... ( $p - 3$ ) aufeinanderfolgende Ecken die Konstruktion 1', 2', 3' ... ( $p - 3$ )' an, so erhält man  $p - 3$  Polytope der 1., 2., 3 ... ( $p - 3$ )-ten Klasse, d. h. aller für  $P_{p+1}$  vorhandenen Klassen der Polytope, denn es ist  $p - 3 \equiv (p + 1) - 4$ .

Wir kehren nun zurück zur Ableitung der  $P_{p+1}$  dritter und höherer Klasse aus den  $P_p$ . Dass die bisher betrachteten Konstruktionen  $\mu'$  der Einfügung von Hufen in die Diagramme nicht hinreichend sein können zur Ableitung sämtlicher  $P_{p+1}$ , geht schon daraus hervor, dass Polytope existieren, unter deren Polyedern sich keine Hufe befinden. <sup>2)</sup> Als fernere Konstruktionen allgemeineren

<sup>1)</sup> Die Abschneidung der Ecken  $e_3$  und  $e_4$  der Hufe in den Enden des Kantenzuges unterwirft diese der ersten Polyederkonstruktion in der gemeinsamen Ecke der beiden Fünfecke; die Abschneidung von Scheitelkanten  $e_3 e_4$  u. s. w. der Fünfecke eines Hufes durch die zweite Polyederkonstruktion führt aber stets wieder auf Hufe.

<sup>2)</sup> Z. B. die (allgemeinen) regulären Polytope  $Z_n$  und  $Z_{120}$  (SCHOUTE, a. a. O. S. 207 und 213) — Hiernach sind auch die in „Elemente d. vierdim. Geom.“ S. 40 etc. erläuterten Konstruktionen zur Ableitung der Tetraederpolytope (SCHOUTE, a. a. O. S. 34) nicht hinreichend; denn sie sind nur die den bisher abgehandelten Konstruktionen der allgemeinen Polytope dualistisch zugeordneten. Der kundige Leser wird sich die weiteren Tetraederpolytopkonstruktionen leicht ergänzen.

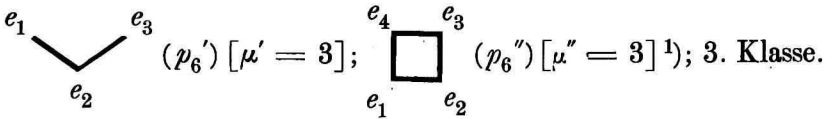
Charakters, die wir mit  $3''$ ,  $4''$ ,  $\dots$   $\mu''$  bezeichnen wollen, betrachten wir die Einfügung eines *Prisma*  $p''_{\mu+3}$  in das Diagramm des  $P_p$ . Da seine Grund- und Deckfläche  $(\mu - 1)$ -Ecke sind, so ist die Konstruktion folgendermassen auszuführen. Es sei  $e_1 e_2 \dots e_{\mu+1}$  eine gemeinsame Fläche zweier Polyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  des Diagramms. Nimmt man auf den zwei von jeder der Ecken  $e$  ausgehenden weitem Kanten die Punkte  $e^1$  und  $e^2$  an, so dass die je  $\mu + 1$  Punkte  $e_1^1 e_2^1 \dots e_{\mu+1}^1$  und  $e_1^2 e_2^2 \dots e_{\mu+1}^2$  in einer Ebene liegen, so bilden diese beiden  $(\mu + 1)$ -ecke und die  $\mu + 1$  Vierecke  $e_i^1 e_i^2 e_{i+1}^2 e_{i+1}^1$  ein Prisma  $p''_{\mu+3}$ , das dem Diagramm eingefügt ist. Die beiden Polyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  sind dadurch morphologisch nicht geändert, sämtliche dritte Polyeder an den Kanten  $e_i e_{i+1}$  sind der zweiten Polyederkonstruktion unterworfen. Aus dem  $P_p (e, k, f, p)$  entsteht durch die Konstruktion  $\mu''$  ein  $P_{p+1} (e + \mu + 1, k + 2\mu + 2, f + \mu + 2, p + 1)$ .

Dabei ist festzuhalten, dass eine Konstruktion  $\mu''$  nur zur Erzeugung eines  $P_{p+1}$   $\mu''$ -ter ( $= 3, 4, 5 \dots$ ) Klasse auszuführen ist, also das neue Polytop keine Polyeder  $p_{\mu+2}$  (oder niederer Flächenzahl) mehr besitzt, oder mit andern Worten nur an den  $P_p$   $\mu$ -ter und höherer Klasse und überdies an den  $P_p$   $(\mu - 1)$ -ter Klasse, wenn die hierin noch vorkommenden  $p_{\mu+2}$  durch die Konstruktion in  $p_{\mu+3}$  übergehen. Dabei soll noch vorausgesetzt werden, dass die Konstruktionen  $\mu'$  den  $\mu''$  voranzustellen sind. Durch diese Bedingung wird die Anwendbarkeit von  $\mu''$  bereits bedeutend eingeschränkt. Was nun die weiteren Konstruktionen zur Ableitung der Diagramme der  $P_{p+1}$  vierter und höherer Klasse anbetrifft, <sup>1)</sup> so wollen wir nur die Erzeugung der Polytope vierter Klasse noch betrachten, da sich von da aus das weitere Verfahren klar überblicken lässt. Wir hatten bei den Konstruktionen  $\mu'$  und  $\mu''$  gewisse ebene Kantenzüge  $e_1 e_2 \dots e_\mu$  bzw.  $e_1 e_2 \dots e_{\mu+1}$  zweier Polyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  mit gemeinsamer Grenzfläche ins Auge gefasst, die für  $\mu = 1, 2, 3$  durch folgende einfache Figuren gegeben sind, durch deren Eliminierung und Ersetzung durch das beivermerkte Polyeder das  $P_p$  in ein  $P_{p+1}$  übergang, und zwar in eins der am Ende angezeigten Klasse:

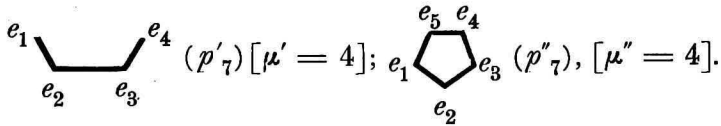
$$\dot{e}_1 (p_4) [\mu' = 1]; 1. \text{ Klasse.}$$

$$e_1 \text{---} e_2 (p_5) [\mu' = 2]; \begin{array}{c} e_3 \\ \triangle \\ e_1 \quad e_2 \end{array} (p_5) [\mu'' = 2]; 2. \text{ Klasse.}$$

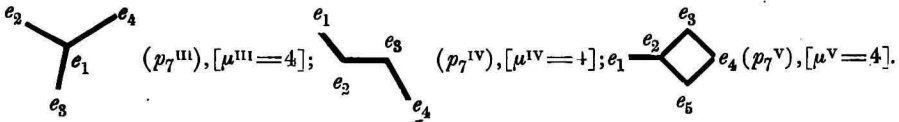
<sup>1)</sup> Die Polytope dritter Klasse sind erledigt, da nur der *Huf*  $p_6'$  und das *Prisma*  $p_6''$  existieren.



Für die Konstruktion der  $P_{p+1}$  vierter Klasse kommen nun zunächst die beiden schon erledigten Polyedereinfügungen in Frage, die durch die folgenden Figuren charakterisiert sind:



Weiter kann aber ein  $P_{p+1}$  vierter Klasse dadurch erzeugt werden, dass in das Diagramm  $P_p$  eins der drei noch verfügbaren Siebenfläche  $p_7^{III}$ ,  $p_7^{IV}$ ,  $p_7^V$  eingefügt wird. Für diese Polyeder sind die der Konstruktion zu Grunde liegenden Kantenzüge die folgenden:



Von den 3 Kanten der ersten Figur gehören je 2 derselben Grenzfläche einer Polyeders des Diagrammes an. Von den Ecken  $e_2, e_3, e_4$  gehen demnach noch 3 freie Kanten, von  $e_1$  noch eine freie Kante aus. Bestimmt man auf diesen 10 Kanten die Punkte  $e_1^2, e_2^2, e_3^2; e_1^3, e_2^3, e_3^3; e_1^4, e_2^4, e_3^4$  und  $e_1^1$ , so lässt sich aus diesen 10 Punkten ein  $p_7^{III}$  konstruieren (vergl. Fig. 7) mit den Flächen:  $\alpha \equiv e_2^2 e_3^2 e_2^3 e_3^3 e_2^4 e_3^4; \beta_1 \equiv e_2^2 e_3^2 e_4^1 e_1^1 e_2^1; \beta_2 \equiv e_1^4 e_2^4 e_3^3 e_1^3 e_1^1; \beta_3 \equiv e_1^3 e_2^3 e_3^2 e_1^2 e_1^1; \gamma_1 \equiv e_3^4 e_2^4 e_1^4; \gamma_2 \equiv e_3^3 e_2^3 e_1^3; \gamma_3 \equiv e_3^2 e_2^2 e_1^2$ . Das  $P_p$  ( $e, k, f, p$ ) wird durch Einfügung dieses  $p_7^{III}$  zu einem  $P_{p+1}$  ( $e + 6, k + 12, f + 7, p + 1$ ).

Von den 3 Kanten der zweiten obigen Figur liegen  $e_1 e_2$  und  $e_2 e_3$ , sowie  $e_2 e_3$  und  $e_3 e_4$  je in einer Ebene eines Polyeders des Diagrammes. Auf den 10 freien Kanten dieser 4 Ecken setze man die Punkte  $e_1^1 e_2^1 e_3^1; e_1^2, e_2^2; e_1^3, e_2^3; e_1^4, e_2^4, e_3^4$  so fest, dass diese die Ecken eines  $p_7^{IV}$  bilden, das dem Diagramm einzufügen ist.

<sup>1)</sup> Die Konstruktion  $\mu'' = 2$  ist entbehrlich. Denn hat sich ein gewisses  $P_{p+1}$  durch sie aus einem  $P_p$  ergeben, so reduciere man dieses  $P_{p+1}$  durch Anwendung der Umkehrung von  $p' = 2$  auf dieses eingefügte  $p_6$  in ein  $P_p$ , das natürlich ein andres sein muss, wie das ebengenannte, denn die Konstruktion  $\mu' = 2$  erhöhte die Eckenzahl um 4,  $\mu'' = 2$  jedoch nur um 3. Es wird sich also das durch  $p'' = 2$  erzeugte  $P_{p+1}$  bereits unter den mittels  $\mu' = 2$  gefundenen Polytopen finden.

(Vergl. Fig. 52<sup>a</sup> und den Text in § 2). Es entsteht dadurch ein  $P_{p+1}$  mit derselben Formel wie vorher.

Es ist kaum nötig, die Einfügung eines  $p_7^v$  in das Diagramm eines  $P_p$  durch Benutzung der dritten der obigen Figuren, bei der die Kante  $e_1 e_2$  nicht in der Ebene des Vierecks  $e_2 e_3 e_4 e_5$  liegt, zu erläutern. Das neue  $P_{p+1}$  besitzt aber hier die Formel  $P_{p+1}(e + 5, k + 10, f + 6, p + 1)$ , da das Viereck  $e_2 e_3 e_4 e_5$  bei der Konstruktion getilgt wird. *Die oben gezeichneten Linearfiguren der Kanten eines Polyeders im Diagramme des  $P_p$  sind nun nichts anderes, als die Deckkantensysteme der  $p_7$  im Sinne von O. Hermes; <sup>1)</sup> und es lässt sich also die betreffende Konstruktion  $\mu$  so oft an dem Diagramme des  $P_p$  ausführen, als das zugehörige Deckkantensystem an den Polyedern des Diagrammes ausfindig gemacht werden kann. Abgesehen von dem mehrfachen Ergebnis desselben  $P_{p+1}$  durch verschiedene Konstruktionen erfährt die Anwendung jeder eine Einschränkung durch die früher festgesetzte Folge der Einfügung der Polyeder  $p_7$  nach ihrem oberen Index. Es ist nun leicht zu übersehen, wie die Konstruktionen  $\mu^{\text{III}}, \mu^{\text{IV}}, \mu^{\text{V}} \dots (\mu = 5, 6, 7 \dots)$  mit den Deckkantenzügen der  $p_8, p_9 \dots$  in Zusammenhang zu bringen sind. Wir erläutern jetzt den bisherigen theoretischen Teil durch die Ableitung aller allgemeinen Oktatope aus den bekannten fünf allgemeinen Siebenzellen.*

## § 2. Die allgemeinen Oktatope oder Achtzelle.

a). *Die Oktatope erster Klasse.* Die Konstruktion  $\mu' = 1$ , d. h. die Einfügung eines Tetraeders  $p_4$  in die Diagramme der Siebenzelle zur Erzeugung sämtlicher  $P_8$  erster Klasse ist an allen Ecken der  $P_7$  auszuführen, so weit nicht schon ein Blick auf das Diagramm des  $P_7$  zeigt, dass in Folge seines symmetrischen Baues eine Reihe von Ecken übergangen werden kann, da sich durch ihre Beanspruchung keine weiteren isomorph verschiedenen  $P_8$  ergeben können. Die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen der  $P_7$ , sowie die Zahl der begrenzenden Polyeder  $p_i$  sind zur Uebersicht in der folgenden *Tabelle* zusammengestellt, nebst dem Hinweis auf die Figur des Diagrammes.

<sup>1)</sup> Vergl. Vielecke und Vielfache S. 97.

Bezeichnung u. Figur.	$e$	$k$	$f$	$p$	$p_4$	$p_5$	$p_6'$	$p_6''$	Klasse.
$P_7^1$ Fig. 9	11	22	18	7	2	2	3	—	1
$P_7^2$ Fig. 10 u. 10 <sup>a</sup>	12	24	19	7	1	2	4	—	1
$P_7^3$ Fig. 11					—	4	—	3	2
$P_7^4$ Fig. 12	13	26	20	7	—	2	4	1	2
$P_7^5$ Fig. 13	14	28	21	7	—	—	7	—	3

Das Diagramm Fig. 9 von  $P_7^1$  ist offenbar symmetrisch (natürlich ganz allgemein morphologisch aufgefasst) gegen die Ebene des Dreiecks  $AF L$  und gegen die Ebene des Fünfecks  $CD H F E$ . Es ergibt sich daraus sofort, welche Ecken, Kanten, Kantenpaare u. s. w. morphologisch gleichwertig sind, z. B. die Ecken  $C, D; B, E, K, G, H, I; A, F, L$ . Es ist also die Konstruktion  $\mu' = 1$  nur an 3 Ecken auszuführen, z. B.  $A, B$ , und  $C$ . Ersetzen wir diese Ecken durch die je 4 Ecken  $A_1, A_2, A_3, A_4$  u. s. w., so ergeben sich die folgenden 3 Oktatope erster Klasse. Durch Tilgung von  $A$  entsteht das Achteck  $P_8^1$  (Fig. 14), ein Huf über der Fläche  $\alpha$  von  $p_7^{III}$ .<sup>1)</sup> Die Tilgung der Ecke  $B$  gibt das Achteck  $P_8^2$  (Fig. 15), einen Huf über der Fläche  $\alpha$  von  $p_7^{IV}$ . Tritt an Stelle der Ecke  $C$  das  $p_4 = C_1 C_2 C_3 C_4$ , so ergibt sich der Huf  $P_8^3$  (Fig. 16) über der Fläche  $\alpha$  von  $p_7'$ . Diese 3 Oktatope erster Klasse sind die einzigen vom Minimum  $e = 14$  der Zahl der Ecken.

Der symmetrische Bau des Diagrammes des Hufes  $P_7^2$  ist am deutlichsten an Fig. 10<sup>a</sup> zu erkennen, in welcher die Ebene des Vierecks  $B E M L$  Symmetrieebene ist. Allgemein gilt: Die gemeinsame Ebene zweier begrenzender dreidimensionaler Hufe eines vierdimensionalen Hufes ist Symmetrieebene des Diagrammes des Polytopes<sup>2)</sup>. Das Diagramm von  $P_7^2$  ist aber auch symmetrisch gegen die Ebene des Vierecks  $K H G I$ , wie sowohl Fig 10 als 10<sup>a</sup> erkennen lässt. In Bezug auf diese beiden Symmetrieebenen sind die Ecken  $A, C; G, H; I, K; D, F$ ; bzw.  $A, D; B, E; C, F; L, M$  gleichwertig; woraus folgt, dass die Konstruktion  $\mu' = 1$  an

<sup>1)</sup> In den Figuren 14 u. s. w. der Diagramme der Oktatope ist den nicht durch die vorgenommene Konstruktion getilgten Ecken der Diagramme der  $P$ , derselbe Buchstabe belassen. Nur soweit sich die Art der begrenzenden Polyeder leicht aus der Figur der  $P$ , erkennen lässt, ist sie nicht besonders angeführt (vergl. hierzu auch die Haupttabelle am Schlusse).

<sup>2)</sup> Dies leuchtet sofort ein, wenn man das Diagramm dadurch bildet, dass man die Hufe mit dieser Ebene *aussen* an einander setzt und dann homologe Ecken durch Gerade verbindet.

5 Ecken auszuführen ist, z. B.  $B, L, C, G$  und  $I$ . Es ergeben sich jedoch nur die folgenden 3 Achtzelle erster Klasse. Durch Tilgung der Ecke  $B$  erhält man das Diagramm (Fig. 17) eines  $P_8^4$ , eines Hufes über einer Fläche  $\beta$  von  $p_7^{\text{III}}$ . Die Ersetzung der Ecke  $L$  in  $P_7^2$  durch das  $p_4 = L_1 L_2 L_3 L_4$  gibt das Diagramm (Fig. 18) eines Hufes  $P_8^5$  über einer Fläche  $\beta$  von  $p_7^{\text{IV}}$ . Tritt an Stelle der Ecke  $C$  von  $P_7^2$  das  $p_4 = C_1 C_2 C_3 C_4$ , so ergibt sich das Diagramm (Fig. 19) eines  $P_8^6$  allgemeineren Charakters. Zwei  $p_7^{\text{IV}}$  haben das Sechseck  $C_1 C_4 B L K H$  gemein, und über dem inneren  $p_7^{\text{IV}}$  ist der Punkt  $D$  mit den Ecken  $A$  und  $G$  des untern (bezw. innern) und mit den Ecken  $E$  und  $F$  des umhüllenden  $p_7^{\text{IV}}$  des Diagrammes zu verbinden. Ersetzt man die Ecke  $G$  in  $P_7^2$  durch ein  $p_4$ , so ergibt sich ein mit Fig. 17 isomorphes Diagramm, wenn man das zunächst erhaltene in einen andern Grenzkörper projiziert. Die Ersetzung der Ecke  $I$  durch ein  $p_4$  führt auf ein mit Fig. 18 isomorphes Diagramm. Um nicht zu weitläufig zu werden, sollen im Folgenden solche Ergebnisse isomorpher Diagramme von vornherein unberücksichtigt bleiben.

Die Symmetrieeigenschaften des Diagrammes Fig. 11 von  $P_7^3$  sind leicht zu übersehen. Bei Ersetzung der Ecke  $G$  durch das Tetraeder  $G_1 G_2 G_3 G_4$  ergibt sich das einzige durch  $\mu' = 1$  aus  $P_7^3$  zu erhaltende Achtzell  $P_8^7$  (Fig. 20). Dieses  $P_8^7$  ist ein vierdimensionaler Huf über einer Fläche  $\alpha$  von  $p_7^{\text{V}}$ . Das Diagramm des Siebenzells  $P_7^4$  (Fig. 12) besitzt die Symmetrieebene der Flächen  $IKN$  und  $LMN$ . Daher sind nur noch 5 Ecken zur Konstruktion  $\mu' = 1$  heranzuziehen, z. B.  $B, K, N, G, L$ ; doch ergeben sich nur 3 neue Oktatope. Durch Abschneiden der Ecke  $B$  in Fig. 12 mittels  $p_4 = B_1 B_2 B_3 B_4$  ergibt sich das Diagramm allgemeineren Charakters (Fig. 21) eines  $P_8^8$  erster Klasse, das nur noch ein  $p_4$  enthält. Die Ersetzung der Ecke  $K$  führt zu dem Hufe  $P_8^9$  über einer Fläche  $\gamma$  von  $p_7^{\text{IV}}$ , dessen Diagramm Fig. 22 darstellt. Tritt an Stelle der Ecke  $N$  in Fig. 12 ein  $p_4$ , so ergibt sich das Diagramm (Fig. 23) eines Hufes  $P_8^{10}$  über der Fläche  $\beta_1$  eines  $p_7'$ .

Ehe wir auf die Ecken des Siebenzells  $P_7^5$  (Fig. 13) die Konstruktion  $\mu' = 1$  anwenden, sei es noch einer genaueren Betrachtung unterzogen. Es ist nach Früherem einleuchtend, dass dieses  $P_7^5$  sieben isomorphe Diagramme ergibt, wenn man es der Reihe nach in jedes seiner 7 Grenzpolyeder  $p_6'$  projiziert. Seine Ecken sind zweierlei Art. Sieben Ecken werden von 2 Dreiecken, 1 Viereck und 3 Fünfecken gebildet, nämlich  $A', B', C', H', I', N', O'$ . Die andern 7 Ecken  $D, E, F, G, K, L, M$  von 1 Dreieck, 3 Vierecken

und 2 Fünfecken. In jedem der sieben  $p_6'$  liegen diese Ecken verschiedener Art wie die durch  $e$  und  $e'$  unterschiedenen Ecken des Sechsecks in Fig. 2. Wendet man die Konstruktion  $\mu' = 1$  auf die Ecken derselben Art an, so ergeben sich isomorphe Diagramme, und es resultieren daher nur 2 durch Isomorphismus unterschiedene Oktatope. Um auch bei weitem Konstruktionen, die auf  $P_7^5$  anzuwenden sind, die Zuordnung der Achtecke leichter übersehen zu können, seien die begrenzenden 7 Sechsecke  $p_6'$  einzeln bezeichnet: (vergl. Fig. 13).

$$\begin{aligned} \text{I} &\equiv A' B' C' D E F G H'; \\ \text{II} &\equiv A' B' C' D E I' K L; \\ \text{III} &\equiv I' A' B' L K N' M F; \\ \text{IV} &\equiv N' I' A' F M O' G E; \\ \text{V} &\equiv O' N' I' E G H' D K; \\ \text{VI} &\equiv O' H' C' L M N' K D; \\ \text{VII} &\equiv C' H' O' M L B' F G. \end{aligned}$$

Das Achteck  $P_8^{11}$  mit dem Diagramme Fig. 24 ergibt sich durch Tilgung der Ecke  $L$  von  $P_7^5$ . Die begrenzenden Polyeder sind hier:  $\text{I} = p_6'$ ;  $\text{II} \sim p_7^{\text{IV}}$ ;  $\text{III} \sim p_7^{\text{III}}$ ;  $\text{IV} = p_6'$ ;  $\text{V} = p_6'$ ;  $\text{VI} \sim p_7^{\text{III}}$ ;  $\text{VII} \sim p_7^{\text{IV}}$  und das neu eingefügte  $p_4$  ( $L_1 L_2 L_3 L_4$ ), wobei z. B.  $\text{II} \sim p_7^{\text{IV}}$  bedeutet, dass das Polyeder II des Siebenzells durch  $\mu' = 1$  im Achteck in ein Siebenfläch  $p_7^{\text{IV}}$  übergegangen ist, während  $\text{I} = p_6'$  andeutet, dass das Sechseck I des Siebenzells als  $p_6'$  erhalten blieb.

$P_8^{12}$  ist das Achteck mit dem Diagramm Fig. 25, entstanden durch Ersetzung der Ecke  $A'$  durch ein  $p_4$ . Die übrigen 7 Grenzpolyeder sind:  $\text{I} \sim p_7^{\text{IV}}$ ;  $\text{II} \sim p_7'$ ;  $\text{III} \sim p_7'$ ;  $\text{IV} \sim p_7^{\text{IV}}$ ;  $\text{V} = p_6'$ ;  $\text{VI} = p_6'$ ;  $\text{VII} = p_6'$ . Hiermit sind die Oktatope erster Klasse erschöpft und es existieren also deren zwölf mit 14 bis 17 Ecken; eins derselben hat  $3p_4$ , vier haben  $2p_4$ , während 7 nur noch ein Tetraeder unter ihren begrenzenden Polyedern besitzen.

b) *Die Oktatope zweiter Klasse.* Um ein solches aus dem Siebenzell  $P_7^1$  zu erhalten, hat man die Konstruktion  $\mu' = 2$  nach den allgemeinen Erörterungen nur auf die Kante  $CD$  in Fig. 9 anzuwenden. Es ergibt sich ein vierdimensionaler Huf  $P_8^{13}$  mit 15 Ecken über einer Fläche  $\alpha$  von  $p_7''$ , dessen Diagramm in Fig. 26 dargestellt ist. Der Huf  $p_5 = C_1 C_2 C_3 D_1 D_2 D_3$  ist das durch die Konstruktion an Stelle der Kante  $CD$  getretene Polyeder.

Aus  $P_7^2$  ergeben sich 3 isomorph verschiedene Oktatope zweiter Klasse durch Tilgung der Kanten  $LK$ ,  $LM$ ,  $KI$  des Tetraeders, bzw. seiner Scheitelkanten  $KH$  und  $ME$ . Tritt an Stelle der Kante  $LK$  das Fünffläch  $L_1 L_2 L_3 K_1 K_2 K_3$ , so ergibt sich das

Achtzell  $P_8^{14}$ , dessen Diagramm Fig. 27 zeigt. Die Ersetzung der Kante  $LM$  von  $P_7^2$  führt auf das  $P_8^{15}$  (Fig. 28), einen vierdimensionalen Huf über der Fläche  $\beta_2$  von  $p_7'$ . Auf dasselbe Achtzell führt die Konstruktion  $\mu' = 2$  an der Kante  $KI$ . Das Diagramm Fig. 29 ist das eines  $P_8^{16}$ , das aus  $P_7^2$  sowohl durch Anwendung von  $\mu' = 2$  auf die Kante  $KH$  als  $ME$  resultiert. Wir haben hier einen vierdimensionalen Huf über einer Fläche  $\beta$  von  $p_7^v$ . Das Siebenzell  $P_7^3$  ergibt nur durch Tilgung einer Kante wie  $ML$  ein Achtzell  $P_8^{17}$ , das nicht mit bereits abgeleiteten isomorph ist. Das Polytop, dessen Diagramm Fig. 30 zeigt, ist ein Huf über einer Fläche  $\beta$  von  $p_7''$  und zugleich ein vierdimensionales Prisma über  $p_6'$ . Wir wenden nun die Konstruktion  $\mu' = 2$  auf das Siebenzell  $P_7^4$  an. Wegen der Symmetrie seines Diagrammes braucht sie nur auf die Kanten  $BC, CD, CK, KI, CG$  und  $GL$  angewandt zu werden. Wird die Kante  $BC$  von  $P_7^4$  durch das Fünfflach  $B_1 B_2 B_3 C_1 C_2 C_3$  ersetzt, so ergibt sich das Diagramm Fig. 31 eines Oktatopes  $P_8^{18}$ , das ein Huf über einer Fläche  $\gamma$  von  $p_7^{III}$  ist. Die Ersetzung der Kante  $CD$  führt auf den Huf  $P_8^{19}$  über einem Dreieck  $\delta$  von  $p_7^{IV}$ . Das Diagramm zeigt Fig. 32. Ersetzt man die Kante  $CK$  von  $P_7^4$  durch das Fünfflach  $C_1 C_2 C_3 K_1 K_2 K_3$ , so erhält man das Diagramm Fig. 33 eines  $P_8^{20}$  allgemeineren Charakters. Der vierdimensionale Huf  $P_8^{21}$  (Fig. 34) über einer Fläche  $\gamma$  des  $p_7'$  ist erzeugt durch Anwendung von  $\mu' = 2$  auf die Kante  $KI$  von  $P_7^4$ . Die Ersetzung der Kante  $CG$  von  $P_7^4$  durch ein  $p_5$  führt auf das Oktatop allgemeineren Charakters  $P_8^{22}$ , dessen Diagramm Fig. 35 zeigt. Die Anwendung von  $\mu' = 2$  auf die Kante  $GL$  von  $P_7^4$  endlich ergibt das Achtzell  $P_8^{23}$  mit dem Diagramme Fig. 36.

Um aus dem Siebenzell  $P_7^5$  durch die Konstruktion  $\mu' = 2$  Achtzelle abzuleiten, ist zu beachten, dass die Kanten von  $P_7^5$  von dreierlei Art sind, je nachdem sie 2 Ecken  $e$ , 2 Ecken  $e'$ , oder eine Ecke  $e$  mit einer Ecke  $e'$  nach der früheren Bezeichnung verbinden. Es ergeben sich daher 3 durch Isomorphismus verschiedene Oktatope mit 18 Ecken. Durch Tilgung der Kante  $LM$  vom Typus  $e, e$  ergibt sich das Achtzell  $P_8^{24}$  (Fig. 37) mit den Grenzpolyedern <sup>1)</sup>: I =  $p_6'$ ; II  $\sim p_7^{IV}$ ; III  $\sim p_7'$ ; IV  $\sim p_7^{IV}$ ; V =  $p_6'$ ; VI  $\sim p_7^v$ ; VII  $\sim p_7^v$  und dem eingefügten  $p_5$  ( $L_1 L_2 L_3 M_1 M_2 M_3$ ).

Bei Ersetzung der Kante  $OH$  durch ein  $p_5$  ergibt sich das Diagramm Fig. 38 eines  $P_8^{25}$ , das im übrigen von den Polyedern begrenzt wird: I  $\sim p_7^{IV}$ ; II =  $p_6'$ ; III =  $p_6'$ ; IV  $\sim p_7^{IV}$ ; V  $\sim p_7^{IV}$ ;

<sup>1)</sup> In allen folgenden aus  $P_7^5$  abgeleiteten Diagrammen ist die obere Strichelung der Eckenbuchstaben weggelassen.



VI  $\sim p_7''$ ; VII  $\sim p_7^{IV}$ . Die Elimination der Kante  $LC$  endlich ergibt das Achtzell  $P_8^{26}$  (Fig. 39) mit den Polyedern: I  $\sim p_7'$ ; II  $\sim p_7'$ ; III  $\sim p_7^{III}$ ; IV =  $p_6'$ ; V =  $p_6'$ ; VI  $\sim p_7^V$ ; VII  $\sim p_7^{IV}$  und dem Fünfflach  $p_5$  ( $L_1 L_2 L_3 C_1 C_2 C_3$ ). Es haben sich somit im ganzen 14 Oktatope zweiter Klasse mit 15 bis 18 Ecken ergeben.

c). *Die Oktatope dritter Klasse.* Um diese Polytope abzuleiten, haben wir zunächst die Konstruktion  $\mu' = 3$  zu beachten. Nach den allgemeinen Erörterungen braucht sie auf die Siebenzelle  $P_7^1$  und  $P_7^2$  nicht mehr angewandt zu werden, und von dem  $P_7^3$  kommt nur ein Kantenzug in Frage, durch dessen Tilgung sämtliche  $p_5$  in Sechsfache übergehen. Tilgt man den Kantenzug  $M L K$  in Fig. 11, so ergibt sich das Achtzell  $P_8^{27}$  mit 17 Ecken, dessen Diagramm Fig. 40 zeigt. Es ist ein vierdimensionaler Huf über der Fläche  $\gamma_1$  von  $p_7^V$ .

Auf  $P_7^4$  ist die Konstruktion  $\mu' = 3$  nur für solche Kantepaare anzuwenden, bei deren Tilgung die beiden vorhandenen  $p_5$  zerstört werden. Zur leichtern Uebersicht führen wir für die Grenzpolyeder von  $P_7^4$  hier die Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} a &\equiv p_6' (L H D I N K C G); \\ b &\equiv p_6' (M E A I N K B F); \\ c &\equiv p_6' (N M F B K C G L); \\ d &\equiv p_6' (I A E M N L H D); \\ e &\equiv p_5 (F E H G L M); \\ f &\equiv p_6'' (A B C D E F G H); \\ g &\equiv p_5 (A B C D I K). \end{aligned}$$

Wie die genauere Untersuchung zeigt, ergeben sich nur 3 neue isomorph verschiedene Achtzelle.  $P_8^{28}$  (Fig. 41) entsteht aus  $P_7^4$ , wenn der Kantenzug  $L N K$  durch ein  $p_6'$  ersetzt wird. Die beiden Polyeder  $a$  und  $c$  werden hierbei durch einen fünfseitigen Schnitt beide zu Siebenflächen  $p_7^V$ , nämlich <sup>1)</sup>  $a \sim p_7^V (I D H L_1 N_1; K_1 K_3 L_3 G C)$  und  $c \sim p_7^V (M F B K_2 N_2; L_2 L_3 K_3 C G)$ . Die Polyeder  $b$  und  $d$  werden durch vierseitige Schnitte zu  $p_7^{IV}$ , nämlich  $b \sim p_7^{IV} (N_1 N_2 M E A I, K_1 K_2 B F)$  und  $d \sim p_7^{IV} (M E A I N_1 N_2; L_2 L_1 H D)$ . Die Fünffläche  $e$  und  $g$  gehen durch dreiseitige Schnitte in  $p_6'$  über:  $e \sim p_6' (M E H L_1 L_2; L_3 G F)$  und  $g \sim p_6' (I K_1 K_2 B A; D C K_3)$ . Das Polyeder  $f$  bleibt das  $p_6'' (A B C D; H G F E)$  und das eingefügte  $p_6'$  ist  $p_6' (L_3 K_3 K_2 N_2 L_2; L_1 N_1 K_1)$ . Hiernach sind die 8 Grenzpolyeder in dem Diagramm Fig. 41 leicht auf-

<sup>1)</sup> Die Reihenfolge der Buchstaben der Ecken der neuen  $p$  ist im Ausschluss an die Figuren 2 bis 8 der Diagramme stets so gewählt, dass zunächst die Ecken der „Grundfläche“ und dann die Ecken des „Deckkantenzuges“ geschrieben sind.

zufinden. Die Ersetzung pes Kantenzuges  $MEA$  durch ein  $p_6'$  erzeugt ein  $P_8^{29}$  (Fig. 42) mit den begrenzenden Polyedern:

$$\begin{aligned} b &\sim p_7^{IV} (NM_3 M_2 FBK; IA_3 A_2 E_2); \\ c &\sim p_7^{IV} (M_4 NKB FM_2; M_1 LGC); \\ d &\sim p_7'' (HDINL; M_1 E_1 A_1 A_3 M_3); \\ e &\sim p_6' (GF E_2 E_1 H; LM_1 M_2); \\ f &\sim p_7'' (A_1 A_2 BCD; HE_1 E_2 FG); \\ g &\sim p_6' (A_2 BCD A_1; A_3 IK); \\ a &= p_6' (LNIDH; GCK); \end{aligned}$$

dazu das neu eingefügte  $p_6' (M_3 A_3 A_2 E_2 M_2; M_1 E_1 A_1)$ .

Tritt an Stelle des Kantenzuges  $HDA$  ein  $p_6'$  so ergibt sich ein Achtzell  $P_8^{30}$  (Fig. 43) mit folgenden Polyedern:

$$\begin{aligned} a &\sim p_7^V (NLGCK; ID_1 D_2 H_2 H_1); \\ b &\sim p_7^{III} (MEA_2 A_1 IN; FBK_1 A_2); \\ d &\sim p_7^{III} (A_1 A_3 EMNI; D_1 H_1 H_3; L); \\ f &\sim p_7^V (H_3 H_2 GFE; A_3 A_2 BCD_2); \\ e &\sim p_6' (EFG H_2 H_3; H_1 LM); \\ g &\sim p_6' (IKCD_2 D_1; A_1 A_2 B); \\ \text{und } c &= p_6' (NLGCK; BFM). \end{aligned}$$

Dazu das eingefügte  $p_6' (H_3 A_3 A_2 D_2 H_2; H_1 D_1 A_1)$ . Diese 3 Achtzelle besitzen je 18 Ecken.

Um aus dem Siebenzell  $P_7^5$  durch  $\mu' = 3$  Achtzelle abzuleiten, hat man zu beachten, dass die zweikantigen Züge wegen der zu unterscheidenden Ecken  $e$  und  $e'$  verschiedenartig gewählt werden können. Es zeigt die Untersuchung, dass die folgenden Anordnungen auf neue isomorph verschiedene Oktatope führen.

Der Zug  $e', e, e$ , z. B.  $I'KL$  (Kanten eines Fünfeckes); der Zug  $e', e', e$  z. B.  $A'B'L'$  (desgl.); der Zug  $e', e', e'$  z. B.  $A'B'C$  (desgl.), sowie der Zug  $e, e', e$  z. B.  $GH'D$  (Kantenzug eines Vierecks). Ein Zug  $e', e, e'$  tritt nur an Dreiecken auf, ist also zur Konstruktion unbrauchbar, und der Zug  $e, e, e$  der an Vierecken vorkommt (z. B.  $KLM$ ) führt auf dasselbe Polytop wie  $e'e'e'$ . Es ergeben sich danach die folgenden 4 durch Isomorphismus unterschiedenen Oktatope mit 19 Ecken. Das Achtzell  $P_8^{31}$  (Fig. 44), erzeugt durch Ersetzung des Kantenzuges  $I'KL$ , besitzt die begrenzenden Polyeder:

$$\begin{aligned} I &= p_6' (BCDEA; FGH); \\ II &\sim p_7'' (ABCDE; I_2 I_3 L_3 L_2 K_2); \\ III &\sim p_7^{IV} (I_1 I_3 AFMN; K_1 L_1 L_3 B); \\ IV &\sim p_7' (I_1 I_3 AFMN; OGEI_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &\sim p_7' (O G E I_2 I_1 N; K_1 K_2 D H); \\ VI &\sim p_7' (O N K_1 K_2 D H; C L_2 L_1 M); \\ VII &\sim p_7^{IV} (L_2 C H O M L_1; L_3 B F G); \end{aligned}$$

dazu das neu eingeführte  $p_6' (L_3 I_3 I_2 K_2 L_2; L_1 K_1 I_1)$ .

Das Achteck  $P_8^{32}$  (Fig. 45) entsteht aus  $P_7^5$  durch Ersetzung des Kantenzuges  $A' B' L$  mittels des Sechsecks.

$$p_6' (A_3 L_3 L_2 B_2 A_2; A_1 B_1 L_1).$$

Die übrigen Polyeder sind:

$$\begin{aligned} I &\sim p_7^{IV} (F G H C B_2 B_1; A_1 A_2 E D); \\ II &\sim p_7^V (B_2 A_2 E D C; L_2 L_3 A_3 I K); \\ III &\sim p_7^{IV} (A_1 A_3 I N M F; B_1 L_1 L_3 K); \\ IV &\sim p_7^{IV} (A_3 I N M F A_1; A_2 E G O); \\ V &= p_6' (N O G E I; K D H); \\ VI &\sim p_7^{III} (O M L_1 L_2 C H; D K N; L_3); \\ VII &\sim p_7' (C B_2 B_1 F G H; O M L_1 L_2). \end{aligned}$$

Ersetzt man den Kantenzug  $A' B' C'$  durch das Sechseck  $p_6' (A_3 C_3 C_2 B_2 A_2; A_1 B_1 C_1)$  so entsteht das Achteck  $P_8^{33}$  (Fig. 46) dessen übrige Polyeder sind:

$$\begin{aligned} I &\sim p_7^V (A_2 A_3 C_3 C_2 B_2; F G E D H); \\ II &\sim p_7^V (B_1 A_1 A_3 C_3 C; L K I E D); \\ III &\sim p_7^{IV} (A_2 A_1 I N M F; B_2 B_1 L K); \\ IV &\sim p_7^{IV} (A_1 I N M F A_2; A_3 E G O); \\ V &= p_6' (O H D K N; I E G); \\ VI &\sim p_7^{IV} (O H C_2 C_1 L M; N K D C_3); \\ VII &\sim p_7^{IV} (L M O H C_2 C_1; B_1 B_2 F G). \end{aligned}$$

Die Elimination des Kantenzuges  $G H' D$  endlich durch das Sechseck  $p_6' (G_3 D_3 D_2 H_2 G_2; G_1 H_1 D_1)$  führt auf das Achteck  $P_8^{34}$  (Fig. 47) mit den weiteren Grenzkörpern:

$$\begin{aligned} I &\sim p_7^{III} (A E D_3 D_1 C B; F G_1 G_3; H_1); \\ II &\sim p_7^{III} (A E D_3 D_1 C B; L K I; D_2); \\ III &= p_6' (I K L B A; F M N); \\ IV &\sim p_7^{III} (G_3 E I N O G_2; G_1 F A; M); \\ V &\sim p_7^{III} (O G_2 G_3 E I N; K D_2 H_2; D_3); \\ VI &\sim p_7^{IV} (M L C H_1 H_2 O; N K D_2 D_1); \\ VII &\sim p_7^{IV} (L M O H_2 H_1 C; B F G_1 G_2). \end{aligned}$$

Weitere Oktotope dritter Klasse können sich nun mittels der Konstruktion  $\mu'' = 3$  d. h. Einfügung eines Sechsecks  $p_6''$  ergeben.

Da nach Erledigung der Konstruktion das Polytop keine  $p_6'$  enthalten darf, ebensowenig aber Polyeder geringerer Flächenzahl, so ist, da die Einführung des  $p_6''$  nur 4 Grenzpolyeder von  $P_7$  morphologisch ändert, die Konstruktion nur anwendbar, wenn die drei weiteren Polyeder bereits  $p_6''$  sind. Die einzige zulässige Konstruktion ist deshalb in dem Siebenzell  $P_7^3$  (Fig. 11) an dem geschlossenen Kantenzuge  $IKLM$  auszuführen, durch dessen Elimination die vier  $p_5$  in  $p_6''$  übergehen. Das erzeugte  $P_8^{35}$ , dessen Diagramm mit 16 Ecken Fig. 48 zeigt, wird also von acht  $p_6''$  gebildet und ist mit dem bekannten regulären Achtzell <sup>1)</sup> aus 8 Hexaedern (Würfeln) isomorph. Damit haben sich in Summa 9 Achtzelle dritter Klasse mit 16 bis 19 Ecken ergeben.

d.) Die Oktatope vierter Klasse. Die erste Konstruktion zur Ableitung der Achtzelle vierter Klasse aus den  $P_7$ , nämlich  $\mu' = 4$ , die in der Einfügung eines  $p_7'$  besteht, kann ebenso wie die noch folgenden Konstruktionen nur an dem Siebenzell  $P_7^5$  in Frage kommen, und ist an den Kanten des gemeinsamen Fünfecks irgend zweier begrenzenden  $p_6'$  auszuführen. Wir bezeichnen dabei die geänderten Polyeder in  $P_8$  wieder mit den entsprechenden Nummern I, II, ... VII wie in  $P_7^5$  und nennen das neu hinzugefügte Polyeder VIII.

Wählen wir als Polyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  der allgemeinen Erörterungen die Polyeder I und VII von  $P_7^5$  mit der gemeinsamen Fläche  $B' C' H' G F$ , so führt die Anwendung von  $\mu' = 4$  auf die 3 Kantenzüge  $B' F G H'$ ,  $C' B' F G$  und  $F B' C' H'$  zu 3 isomorph verschiedenen Achtzellen.

Die Ersetzung des Kantenzuges  $B' F G H'$  durch ein Siebenfläch  $p_7'$  führt auf das Achtzell  $P_8^{36}$ , dessen sämtliche Grenzpolyeder  $p_7'$  sind (Fig. 49). Diese 8 Polyeder sind:

$$\begin{aligned} \text{I} &\sim p_7' (A E D C B_3 B_2; F_2 G_2 H_2 H_3); \\ \text{II} &\sim p_7' (A E D C B_3 B_2; B_1 L K I); \\ \text{III} &\sim p_7' (A I K L B_1 B_2; F_2 F_1 M N); \\ \text{IV} &\sim p_7' (N M F_1 F_2 A I; E G_2 G_1 O); \\ \text{V} &\sim p_7' (O G_1 G_2 E I N; K D H_2 H_1); \\ \text{VI} &\sim p_7' (O N K D H_2 H_1; H_3 C L M); \\ \text{VII} &\sim p_7' (H_3 C L M O H_1; G_1 F_1 B_1 B_3); \\ \text{VIII} &= p_7' (B_3 B_2 F_2 G_2 H_2 H_3; H_1 G_1 F_1 B_1). \end{aligned}$$

Wie bereits früher erwähnt bilden die 8 Dreiecke der Polyeder im Diagramm eine geschlossene Kette, die in Fig. 49 kenntlich

<sup>1)</sup> Vergl. SCHOUTE, a. a. O. S. 202 und S. 207.

gemacht ist. Durch Anwendung der Konstruktion  $\mu' = 4$  auf den Kantenzug  $C' B' F G$  in  $P_7^5$  ergibt sich das Diagramm Fig. 50 des Achtzells  $P_8^{37}$ , das von den folgenden Polyedern gebildet wird: II  $\sim p_7^{IV}(A B_1 B_2 L K I; E D C_1 C_2)$ , d. h. das äusserste, alle übrigen Polyeder umhüllende im Diagramme;

$$\text{III} \sim p_7'(I A B_1 B_2 L K; N M F_2 F_1),$$

das eine sechskantige Fläche mit dem vorigen gemein hat; in Fig. 50 von den nachfolgenden darüberliegenden verdeckt zu denken;

$$\begin{aligned} \text{IV} &\sim p_7'(I A F_1 F_2 M N; O G_2 G_1 E); \\ \text{I} &\sim p_7^{IV}(C_3 G_3 G_1 F_1 B_1 C_1; H D E A); \\ \text{V} &\sim p_7^{IV}(G_1 E I N O G_2; G_3 H D K); \\ \text{VI} &\sim p_7^{IV}(M L C_2 C_3 H O; N K D C_1); \\ \text{VII} &\sim p_7'(C_3 G_3 G_2 F_2 B_2 C_2; L M O H) \text{ und} \\ \text{VIII} &= p_7'(C_3 C_2 B_2 F_2 G_2 G_3; G_1 F_1 B_1 C_1). \end{aligned}$$

Die Ersetzung des Kantenzuges  $F B' C' H'$  endlich durch ein  $p_7$  führt auf ein Polytop  $P_8^{38}$ , dessen Diagramm Fig. 51 zeigt. Die begrenzenden Polyeder sind hier:

$$\begin{aligned} \text{I} &\sim p_7^{III}(B_1 C_1 H_1 H_3 F_3 F_1; A E D; G); \\ \text{II} &\sim p_7^{IV}(B_1 B_2 L K I A; E D C_1 C_2); \\ \text{III} &\sim p_7'(A B_1 B_2 L K I; N M F_2 F_1); \\ \text{IV} &\sim p_7^{III}(N M F_2 F_1 A I; E G O; F_3); \\ \text{V} &\sim p_7^{IV}(K D H_1 H_2 O N; I E G H_3); \\ \text{VI} &\sim p_7^{IV}(N K D H_1 H_2 O; M L C_2 C_1); \\ \text{VII} &\sim p_7^{IV}(B_2 F_2 F_3 H_3 H_2 C_2; L M O G) \end{aligned}$$

und das sie im Diagramme alle umhüllende neueingeführte Polyeder

$$\text{VIII} = p_7'(H_3 F_3 F_1 B_1 C_1 H_1; H_2 C_2 B_2 F_2).$$

Wendet man auf das gemeinsame Fünfeck irgend zweier Grenzpolyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  von  $P_7^5$  die Konstruktion  $\mu'' = 4$  an, so erscheinen diese Polyeder unverändert wieder als  $p_6'$ ; es ergibt sich also kein Achtzell vierter Klasse. Die Konstruktion  $\mu''' = 4$ , mittels der ein  $p_7^{III}$  in das Diagramm eingeführt wird, kann nur ein Tripel von Kanten wie die 3 von  $G$  ausgehenden Kanten  $G E, G F, G H'$  des Diagrammes Fig. 13 entfernen, da nur dann die 3 Zwischenflächen sämtlich mehr als dreikantig sind. Es führt aber diese Konstruktion wieder auf  $P_8^{38}$ . Ein neues, isomorph von den bisherigen verschiedenes, Achtzell ergibt schliesslich noch die Konstruktion  $\mu^{IV} = 4$ . Schneidet man ein Sechsfach  $p_6'$ , z. B.  $V(O' G E I N'; K D H')$  von  $P_7^5$  durch eine Ebene so, dass der Kantenzug  $G E D K$  auf einer Seite dieser Ebene liegt, sämtliche übrigen Ecken des  $p_6'$  aber

auf der andern Seite der Ebene, so entstehen aus dem Sechseck zwei Siebenfläche  $p_7^{IV}$ . Durch Elimination des Kantenzuges  $GEDK$  aus dem Diagramme  $P_7^5$  und Ersetzung durch ein  $p_7^{IV}$  tritt also an Stelle des Polyeders V ein  $p_7^{IV} (G_2 G_1 E_1 K_2 K_1 D_1; HONI)$ . Vergl. Fig. 52<sup>a</sup> und die Fig. 52 des neuen Diagrammes. Die übrigen Grenzpolyeder von  $P_7^5$  werden in folgender Weise verändert. Von dem Sechseck I wird der Kantenzug  $GED$  durch einen fünfkantigen Schnitt entfernt (dritte Polyederkonstruktion) und es entsteht ein  $p_7^{IV} (HCBFG_3 G_2; D_1 D_2 E_2 A)$ .

Von dem Sechseck II wird durch die gleiche Konstruktion der Zug  $EDK$  abgeschnitten, und es ergibt sich das  $p_7^{IV} (BAIK_2 K_3 L; CD_2 E_2 E_1)$ . Der zweiten Polyederkonstruktion, Abschneiden der Kanten  $DK$  und  $GE$  durch einen vierseitigen Schnitt, werden die beiden Sechseck VI und IV unterworfen. Es entstehen die Siebenfläche  $VI \sim p_7^V (NK_1 D_1 HO; MLC D_2 K_3)$ ;  $IV \sim p_7^V (MFAIN; OG_1 E_1 E_2 G_3)$ .

Die erste Polyederkonstruktion d. h. Abschneiden der Ecken  $G$  und  $K$  durch ein Dreieck wird auf die beiden Sechseck VII und III angewandt, und es entstehen die Siebenfläche  $VII \sim p_7^{IV} (BFG_3 G_2 HC; LMO G_1)$  und  $III \sim p_7^{IV} (AIK_2 K_3 LB; FMNK_1)$ . Hierzu kommt als achttes Grenzpolyeder des Oktatopes  $P_8$ <sup>39</sup> das eingeführte Siebenfläche  $VIII = p_7^{IV} (K_1 D_1 G_2 G_1 E_1 K_2; K_3 D_2 E_2 G_3)$ . In Fig. 52 sind die sieben aus den Polyedern von  $P_7^5$  entstandenen Grenzkörper des  $P_8$  in das Siebenfläche VIII projiziert.

Die Konstruktion  $\mu^V = 4$  kann kein Oktatop vierter Klasse ergeben, da das Abschneiden eines Kantenzuges von der Form wie sie hier vorgeschrieben ist, ein  $p_6'$  wieder in ein solches zurückführt. Es haben sich also nur 4 Oktatope vierter Klasse und damit im ganzen 39 isomorph verschiedene Achtzelle ergeben, die mit ihren Begrenzungsstücken etc. in der am Schlusse folgenden *Tabelle* übersichtlich zusammengestellt sind.

Natürlich sind mit den allgemeinen konvexen Achtzellen auch die Tetraederpolytope mit 8 Ecken bestimmt; aber die Figuren der Diagramme werden weniger übersichtlich. Was aber die weitere Konstruktion der Polytope  $P_9$  aus den nun bekannten  $P_8$  mittels der geschilderten Methoden betrifft, so zeigt sich bald, dass deren Anzahl bereits ganz bedeutend ist, und es darf wohl der Satz Cayleys wiederholt werden, mit dem er die Unterlassung der Ableitung der neuneckigen Trigonalpolyeder aus den achteckigen begründete: „for although perfectly practicable, it would be no commensurate advantage in doing so.“

TABELLE.

$e, k, f, p.$	Bez.	Fig.	$p_4$	$p_5$	$p_6'$	$p_6''$	$p_7'$	$p_7''$	$p_7^{III}$	$p_7^{IV}$	$p_1^V$	Klass.		
$e=14. k=28$ $f=22. p=8$	{	$P_8^1$ Fig. 14	3	—	3	—	—	—	2	—	—	1		
		$P_8^2$ Fig. 15	2	2	2	—	—	—	—	2	—	1		
		$P_8^3$ Fig. 16	2	3	—	—	3	—	—	—	—	—	1	
$e=15. k=30$ $f=23. p=8$	{	$P_8^4$ Fig. 17	2	1	2	—	1	—	2	—	—	1		
		$P_8^5$ Fig. 18	1	3	1	—	1	—	—	2	—	1		
		$P_8^6$ Fig. 19	2	—	4	—	—	—	—	—	2	—	1	
		$P_8^7$ Fig. 20	1	2	2	1	—	—	—	—	—	2	1	
		$P_8^{13}$ Fig. 26	—	5	—	—	—	3	—	—	—	—	—	2
$e=16. k=32$ $f=24. p=8$	{	$P_8^8$ Fig. 21	1	1	3	—	—	—	1	1	1	1		
		$P_8^9$ Fig. 22	1	1	2	1	1	—	—	2	—	—	1	
		$P_8^{10}$ Fig. 23	1	2	—	1	4	—	—	—	—	—	1	
		$P_8^{14}$ Fig. 27	—	4	—	—	—	—	—	—	4	—	2	
		$P_8^{15}$ Fig. 28	—	4	—	—	4	—	—	—	—	—	2	
		$P_8^{16}$ Fig. 29	—	3	2	—	—	1	—	—	—	2	2	
		$P_8^{17}$ Fig. 30	—	2	2	2	2	2	—	—	—	—	2	
		$P_8^{35}$ Fig. 48	—	—	—	8	—	—	—	—	—	—	—	3
$e=17. k=34$ $f=25. p=8$	{	$P_8^{11}$ Fig. 24	1	—	3	—	—	—	2	2	—	1		
		$P_8^{12}$ Fig. 25	1	—	3	—	2	—	—	2	—	—	1	
		$P_8^{18}$ Fig. 31	—	2	2	—	1	1	2	—	—	—	2	
		$P_8^{19}$ Fig. 32	—	2	1	1	1	1	—	2	—	—	2	
		$P_8^{20}$ Fig. 33	—	2	2	—	—	1	—	2	1	—	2	
		$P_8^{21}$ Fig. 34	—	2	—	2	4	—	—	—	—	—	2	
		$P_8^{22}$ Fig. 35	—	1	4	—	—	1	—	—	—	2	2	
		$P_8^{23}$ Fig. 36	—	2	2	—	—	—	—	—	2	2	2	
		$P_8^{27}$ Fig. 40	—	—	3	3	—	—	—	—	—	2	—	3
$e=18. k=36$ $f=26. p=8$	{	$P_8^{24}$ Fig. 37	—	1	2	—	1	—	—	2	2	2		
		$P_8^{25}$ Fig. 38	—	1	2	—	1	—	—	4	—	—	2	
		$P_8^{26}$ Fig. 39	—	1	2	—	2	—	1	1	1	—	2	
		$P_8^{28}$ Fig. 41	—	—	3	1	—	—	—	2	2	—	3	
		$P_8^{29}$ Fig. 42	—	—	4	—	—	2	—	—	2	—	3	
		$P_8^{30}$ Fig. 43	—	—	4	—	—	—	2	—	—	2	—	3
$e=19. k=38$ $f=27. p=8$	{	$P_8^{31}$ Fig. 44	—	—	2	—	1	1	—	2	—	3		
		$P_8^{32}$ Fig. 45	—	—	2	—	3	—	1	3	1	—	3	
		$P_8^{33}$ Fig. 46	—	—	2	—	—	—	—	4	4	2	—	3
		$P_8^{34}$ Fig. 47	—	—	2	—	—	—	—	4	2	—	—	3
$e=20. k=40$ $f=28. p=8$	{	$P_8^{36}$ Fig. 49	—	—	—	—	8	—	—	—	—	—	4	
		$P_8^{37}$ Fig. 50	—	—	—	—	4	—	—	—	4	—	—	4
		$P_8^{38}$ Fig. 51	—	—	—	—	2	—	—	2	4	—	—	4
		$P_8^{39}$ Fig. 52	—	—	—	—	—	—	—	—	6	2	—	4





