OVER DE
TOEPASSING DER QUATERNIONEN
OP DE
MECHANICA EN DE NATUURKUNDE

DOOR

P. MOLENBROEK.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 3.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1893.

OVER DE
TOEPASSING DER QUATERNIONEN
OP DE
MECHANICA EN DE NATUURKUNDE

DOOR

P. MOLENBROEK.

1. De operator ∇ komt in de toepassingen, door HAMILTON van zijne theorie der quaternionen gemaakt, slechts enkele malen voor. Wel vestigde hij in zijne „Lectures on Quaternions" (§ 620) bijzonder de aandacht op dit symbool met het oog op de bruikbaarheid bij natuurkundige toepassingen, maar een uitwerking van dit denkbeeld heeft hij niet in het licht gegeven. Toch schijnt dit zijn voornemen geweest te zijn; althans in de bekende verhandeling van TAIT „On Green's and other allied theorems" (Trans. of the R. Soc. of Ed. Vol. 26, 1870) zegt de schrijver: „In one of the last letters I received from him (HAMILTON), he said, that he intended to conclude the final chapter of his „Elements", which is devoted to physical applications, by some sections on the operator mentioned above".

Vooral door TAIT is uitvoeriger de beteekenis van dien operator uiteengezet in eenige verhandelingen en in zijn bekend werk „An elementary treatise on quaternions", waar dit over de leer van de elasticiteit, de potentiaal en de electriciteit handelt. Er zijn daarbij twee gevallen te onderscheiden, naarmate ∇ aan een scalaire functie f van een vector ϱ, of aan een vectorfunctie σ van ϱ werkt. In het eerste geval hebben ∇f en $\nabla^2 f$, in het laatste $S\nabla\sigma$ en $V\nabla\sigma$ eene eigenaardige beteekenis, die bij vraagstukken op het gebied, dat wij zooeven omschreven, duidelijk aan het licht treedt. Tot heden zijn dan ook steeds de genoemde theorieën aan de hand dier symbolen ontwikkeld: zoo b.v. in HICKS' „Quaternioninvestigations on

Verhand. Kon. Akad. v. Wetensch. (1e Sectie). Dl. II.

strains and fluid motion" (Quarterly Journal Vol. 14 p. 271, 1877). Toch doet zich daarbij het belangrijk bezwaar gelden, dat in de quaternionentheorie geen methoden bekend zijn, die bij transformaties van dien operator ∇ dienst kunnen doen, zoodat men dan ook, als een dergelijke transformatie vereischt wordt, steeds tot een overgang tot Cartesische coördinaten zijne toevlucht nemen moet. TAIT zelf drukt dit gevoelen uit, waar hij in de genoemde verhandeling zegt, dat zijne methode weinig „direct" is. Dientengevolge is de vorm, waarin hij de vraagstukken over de hydrodynamica behandelt, gelijk aan die in de gewone rekenwijze, zoodanig zelfs, dat de beweging van een vloeistof bij aanname van een snelheidspotentiaal volgens de beide methoden behandeld eenvoudig niet het geringste verschil vertoont. Het behoeft wel geen betoog, dat daardoor aan de invoering van quaternionen in zoodanige gevallen nagenoeg geen voordeelen verbonden zijn.

Sedert langeren tijd heeft zich de overtuiging bij mij gevestigd, dat de toepassing van HAMILTON's methode op de mechanica en de natuurkunde op geheel andere wijze moet plaats hebben, dan tot heden geschied is, hetgeen ik in deze verhandeling wensch aan te toonen. Het zal daarbij blijken, dat wij den operator ∇ slechts in het eenvoudige geval te beschouwen hebben, waarin hij aan een scalaire functie van ρ werkt, waarbij dan het resultaat der operatie ook onmiddellijk, zooals bekend is, door een gewone quaterniondifferentiatie te voorschijn treedt. Het zwaartepunt der verdere beschouwingen ligt in de toepassing der lineaire vectorfunctie, die door HAMILTON blijkens de uitvoerigheid, waarmede hij hare eigenschappen ontwikkeld heeft, zonder twijfel als het meest belangrijke symbool zijner theorie herkend is.

Een overgang tot Cartesische coördinaten is bij geen der menigvuldig voorkomende transformaties wenschelijk gebleken. Ik aarzel dan ook niet, den in het volgende afgeleiden vorm der behandelde vraagstukken in tegenstelling met dien, welken men bij TAIT vindt, met den naam van den *waren* quaternionvorm te bestempelen. De verrassende eenvoudigheid der verkregene vergelijkingen opent het uitzicht eenige tot heden onopgeloste vraagstukken van een geheel nieuw standpunt uit aan te vatten. Voor de theorie der vloeistofstralen heeft deze beschouwingswijze mij tot een, naar ik meen, nieuw theorema gevoerd.

2. Aangezien de theorie der quaternionen tot heden nog betrekkelijk weinig beoefend wordt, zullen wij de grondslagen voor de navolgende beschouwingen hier zooveel mogelijk in herinnering brengen. Daarbij zal ik menigmaal naar de speciale werken op dit

gebied moeten verwijzen, waartoe ik gekozen heb: TAIT, „An elementary treatise on quaternions" en mijne „Theorie der Quaternionen."

Wanneer men den vector ϱ van een willekeurig punt in de ruimte volgens drie vaste vectoren α, β, γ ontbindt, verkrijgt men

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

en door operatie met $S.\beta\gamma$, $S.\gamma\alpha$, $S.\alpha\beta$ ontstaat hieruit achtereenvolgens

$$x = \frac{S\beta\gamma\varrho}{S\alpha\beta\gamma}, \; y = \frac{S\gamma\alpha\varrho}{S\alpha\beta\gamma}, \; z = \frac{S\alpha\beta\varrho}{S\alpha\beta\gamma},$$

waardoor uit (1) de fundamenteele betrekking verkregen wordt

$$\varrho S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\varrho + \beta S\gamma\alpha\varrho + \gamma S\alpha\beta\varrho \quad . \; . \; . \quad (1^*)$$

Stelt men nu ter bekorting

$$\frac{V\beta\gamma}{S\alpha\beta\gamma} = \alpha_1, \; \frac{V\gamma\alpha}{S\alpha\beta\gamma} = \alpha_2, \; \frac{V\alpha\beta}{S\alpha\beta\gamma} = \alpha_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

dan gaan deze betrekkingen over in

$$x = S\alpha_1\varrho, \; y = S\alpha_2\varrho, \; z = S\alpha_3\varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

derhalve

$$\varrho = \alpha S\alpha_1\varrho + \beta S\alpha_2\varrho + \gamma S\alpha_3\varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Men kan ϱ echter ook ontbinden volgens de drie vectoren $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$, $V\alpha\beta$, die op de vlakken door α, β, γ twee aan twee gebracht, loodrecht staan en verkrijgt dan

$$\varrho = u\,V\beta\gamma + v\,V\gamma\alpha + w\,V\alpha\beta,$$

waaruit door operatie met $S.\alpha$, $S.\beta$, $S.\gamma$ achtereenvolgens ontstaat

$$u = \frac{S\alpha\varrho}{S\alpha\beta\gamma}, \; v = \frac{S\beta\varrho}{S\alpha\beta\gamma}, \; w = \frac{S\gamma\varrho}{S\alpha\beta\gamma},$$

welke vergelijkingen met de vorige weder de belangrijke formule opleveren

$$\varrho S\alpha\beta\gamma = V\beta\gamma S\alpha\varrho + V\gamma\alpha S\beta\varrho + V\alpha\beta S\gamma\varrho \quad . \; . \quad (4^*)$$

en in verband met (2) verkrijgt men tevens

$$\varrho = \alpha_1 S\alpha\varrho + \alpha_2 S\beta\varrho + \alpha_3 S\gamma\varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Een willekeurige functie van x, y, z, die wij door F aanduiden, gaat door de betrekkingen (3) over in

$$F(S\alpha_1\varrho,\ S\alpha_2\varrho,\ S\alpha_3\varrho),$$

hetgeen HAMILTON een scalaire functie van den vector ϱ van een punt genoemd heeft, waarvoor wij in het volgende kortheidshalve $F\varrho$ zullen schrijven.

Duidt men de partieele differentiaalquotienten van de functie $F\varrho$ naar de argumenten $S\alpha_1\varrho$, $S\alpha_2\varrho$, $S\alpha_3\varrho$ door F_1, F_2, F_3 aan, dan levert een differentiatie van die functie

$$\begin{aligned} dF &= F_1 S\alpha_1 d\varrho + F_2 S\alpha_2 d\varrho + F_3 S\alpha_3 d\varrho \\ &= S\nu d\varrho, \end{aligned}$$

waarin ν geschreven is in de beteekenis

$$\nu = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3.$$

Vormt men nu eveneens het differentiaal $d\nu$, waarbij algemeen door F_{ik} het tweede partieele differentiaalquotient van $F\varrho$ naar de beide argumenten $S\alpha_i\varrho$, $S\alpha_k\varrho$ worde voorgesteld, dan ontstaat

$$\begin{aligned} d\nu = \alpha_1 S(\alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13}) d\varrho + \alpha_2 S(\alpha_1 F_{12} + \alpha_2 F_{22} + \alpha_3 F_{23}) d\varrho + \\ + \alpha_3 S(\alpha_1 F_{13} + \alpha_2 F_{23} + \alpha_3 F_{33}) d\varrho. \end{aligned}$$

Deze uitdrukking kan verkort geschreven worden in den vorm

$$d\nu = \varphi_0 d\varrho = \alpha_1 S\nu_1 d\varrho + \alpha_2 S\nu_2 d\varrho + \alpha_3 S\nu_3 d\varrho \quad . \quad . \quad (6)$$

Zij is een lineaire vectorfunctie van $d\varrho$, door HAMILTON in §§ 346—365 van zijne „Elements of quaternions" beschouwd en wel verschijnt deze hier in den drietermigen grondvorm [1]).

3. Het is bekend, dat de lineaire vectorfunctie $\psi\varrho$ gedefinieerd kan worden door de fundamenteele eigenschap, die in de volgende vergelijking opgesloten ligt,

$$\psi\varrho + \psi\sigma = \psi(\varrho + \sigma).$$

Zij sluit tevens de betrekking in

$$\psi(x\varrho) = x\psi\varrho,$$

[1]) Vergelijk TAIT, Chapt. V § 160; MOLENBROEK, Sechster Abschn. § 158.

als x een willekeurig scalair getal voorstelt. Hieruit kan nu onmiddellijk de drietermige grondvorm voor die functie worden afgeleid. Immers met het oog op (4) heeft men

$$\begin{aligned}\psi\varrho &= \psi(\alpha\, S\alpha_1\varrho + \beta S\alpha_2\varrho + \gamma S\alpha_3\varrho)\\ &= \psi\alpha\,.\,S\alpha_1\varrho + \psi\beta\,.\,S\alpha_2\varrho + \psi\gamma\,.\,S\alpha_3\varrho;\end{aligned}$$

of, als men

$$\psi\alpha = \gamma_1,\quad \psi\beta = \gamma_2,\quad \psi\gamma = \gamma_3 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

stelt, dan is

$$\psi\varrho = \gamma_1 S\alpha_1\varrho + \gamma_2 S\alpha_2\varrho + \gamma_3 S\alpha_3\varrho. \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Bij elke lineaire vectorfunctie $\psi\varrho$ behoort een verwante functie $\psi'\varrho$, die gedefinieerd kan worden door de betrekking

$$S.\,\sigma\psi\varrho = S.\,\varrho\psi'\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

voor alle waarden der vectoren ϱ en σ geldende. Uit (5) volgt dan

$$\begin{aligned}\psi'\varrho &= \alpha_1 S\alpha\,\psi'\varrho + \alpha_2 S\beta\,\psi'\varrho + \alpha_3 S\gamma\,\psi'\varrho\\ &= \alpha_1 S\varrho\psi\alpha + \alpha_2 S\varrho\psi\beta + \alpha_3 S\varrho\psi\gamma\end{aligned}$$

dus

$$\psi'\varrho = \alpha_1 S\gamma_1\varrho + \alpha_2 S\gamma_2\varrho + \alpha_3 S\gamma_3\varrho \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

zoodat $\psi'\varrho$ eenvoudig uit $\psi\varrho$ ontstaat, door daarin de grootheden α en γ met elkander te verwisselen.

Blijft daarbij de functie onveranderd, dan noemt HAMILTON haar zelfverwant.

De som $\psi\varrho + \psi'\varrho$ of kortheidshalve $(\psi + \psi')\varrho$ is natuurlijk steeds eene zelfverwante functie, die wij door $2\psi_0\varrho$ voorstellen, dus

$$\psi\varrho + \psi'\varrho = 2\,\psi_0\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Maar uit de vergelijking (8) volgt

$$S\varrho\psi\varrho = S\varrho\psi'\varrho \text{ of } S.\,\varrho(\psi - \psi')\varrho = 0,$$

d.i. $(\psi - \psi')\varrho$ is een vector, die loodrecht staat op ϱ. Is nu δ een willekeurige vector, dan is $V\delta\varrho$ een vector loodrecht op het vlak van δ en ϱ en men kan dus stellen

$$\psi\varrho - \psi'\varrho = 2\,V\delta\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Uit deze vergelijking en (10) volgen nu de belangrijke betrekkingen [1])

---

[1]) Verg. TAIT, § 174; MOLENBROEK, § 161.

$$\left.\begin{aligned}\psi\varrho &= \psi_0\varrho + V\delta\varrho\\ \psi'\varrho &= \psi_0\varrho - V\delta\varrho\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Den hier ingevoerden vector δ zullen wij in het vervolg den *rotatievector* van de functie ψ noemen. Het is gemakkelijk dezen in de grootheden α en γ uittedrukken, want volgens (11) in verband met (8) en (10) is

$$\begin{aligned}2V\delta\varrho &= (\gamma_1 S\alpha_1\varrho - \alpha_1 S\gamma_1\varrho) + (\gamma_2 S\alpha_2\varrho - \alpha_2 S\gamma_2\varrho) + (\gamma_3 S\alpha_3\varrho - \alpha_3 S\gamma_3\varrho)\\ &= V.\varrho V(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3)\text{ [1]}\end{aligned}$$

derhalve

$$\delta = \tfrac{1}{2} V(\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

een betrekking, die ten gevolge van (7) en (2) ook aldus kan geschreven worden

$$2\delta S\alpha\beta\gamma = V(\psi\alpha.V\beta\gamma + \psi\beta.V\gamma\alpha + \psi\gamma.V\alpha\beta) \quad . \quad (14^*)$$

De voorwaarde, waaraan voldaan moet worden, opdat de functie ψ zelfverwant is, kan natuurlijk ook in dezen vorm uitgesproken worden, dat zij geen rotatievector δ bevat.

De merkwaardigste eigenschap van de lineaire vectorfunctie is ongetwijfeld, dat zij steeds aan een symbolische cubische vergelijking voldoet. Het zou te ver voeren bij de afleiding dezer vergelijking hier stil te staan.[2] Wij zullen deze vergelijking in het vervolg voor de functie ψ steeds in den vorm aanwenden

$$x\varrho - x_1\psi\varrho + x_2\psi^2\varrho - \psi^3\varrho = 0,$$

waarin $\psi^2\varrho$ voor $\psi(\psi\varrho)$ staat, terwijl x, x_1, x_2 getallen zijn, die op eenvoudige wijze met de functie ψ samenhangen, namelijk in het algemeen

$$\left.\begin{aligned}x &= \frac{S.\psi'\varkappa\psi'\lambda\psi'\mu}{S.\varkappa\lambda\mu}\\ x_1 &= \frac{S(\varkappa\psi'\lambda\psi'\mu + \lambda\psi'\mu\psi'\varkappa + \mu\psi'\varkappa\psi'\lambda)}{S.\varkappa\lambda\mu}\\ x_2 &= \frac{S(\lambda\mu\psi'\varkappa + \mu\varkappa\psi'\lambda + \varkappa\lambda\psi'\mu)}{S.\varkappa\lambda\mu}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (15)$$

---

[1]) Tait, § 90; Molenbroek, § 87, vergelijking (c. 40).

[2]) Men zie Tait, § 145 en vlg.; Molenbroek, § 143 en vlg.

$\varkappa$, λ, μ, zijn hierin drie willekeurige vectoren. Wanneer men voor ψ den drietermigen grondvorm aanneemt, dan is [1])

$$\left.\begin{aligned} x &= S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\, S\gamma_3\gamma_2\gamma_1 \\ x_1 &= -S(V\alpha_2\alpha_3\, V\gamma_2\gamma_3 + V\alpha_3\alpha_1\, V\gamma_3\gamma_1 + V\alpha_1\alpha_2\, V\gamma_1\gamma_2) \\ x_2 &= S(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (16)$$

zoodat deze drie grootheden voor de functie ψ en hare verwante dezelfde waarde hebben; men mag derhalve ook in (15) de functie ψ' overal door ψ vervangen. In het volgende zullen wij x, x_1, x_2 de invarianten der lineaire vectorfunctie noemen.

4. Wij zetten nu de beschouwingen van § 2 voort. Daarin werd gevonden, dat $d\nu$ een lineaire vectorfunctie van $d\varrho$ is; het blijkt nu gemakkelijk, dat deze onveranderd blijft, als men de grootheden α en ν (vergelijking (6)) verwisselt, zoodat $d\nu$ steeds zelfverwant is. Daarbij was ondersteld

$$\nu_1 = \alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13}, \quad \nu_2 = \alpha_1 F_{12} + \alpha_2 F_{22} + \alpha_3 F_{23}, \text{ enz.}$$

Een nieuwe differentiatie doet nu onmiddellijk inzien, dat $d\nu_1$, $d\nu_2$, $d\nu_3$ ook zelfverwante lineaire vectorfuncties van $d\varrho$ zijn zullen.

Een vector σ, volgens drie vaste vectoren α_1, α_2, α_3 in de ruimte ontbonden, levert

$$\sigma = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3,$$

waarin u_1, u_2, u_3 drie scalaire grootheden zijn. Hangt σ nu op een of met andere wijze met ϱ samen, dan openbaart zich dit hierin, dat u_1, u_2, u_3 scalaire functies van ϱ zijn, die wij door $F'\varrho$, $F''\varrho$, $F'''\varrho$ aanduiden. De uitdrukking

$$\sigma = \alpha_1 F'\varrho + \alpha_2 F''\varrho + \alpha_3 F'''\varrho$$

is dan de meest algemeene uitdrukking voor een *vector*functie van ϱ.

Het differentiaal $d\sigma$ verkrijgt volgens § 2 den vorm

$$d\sigma = \alpha_1 S\nu' d\varrho + \alpha_2 S\nu'' d\varrho + \alpha_3 S\nu''' d\varrho \quad . \; . \; . \quad (17)$$

het is dus een lineaire vectorfunctie $d\varrho$, die nu echter in het algemeen niet zelfverwant zijn zal en dus tot den vorm (13) herleid zal kunnen worden

$$d\varrho = \psi\, d\varrho = \psi_0\, d\varrho + V\delta\, d\varrho,$$

---

[1]) Verg. TAIT, § 160; MOLENBROEK, Zusätze zur Theorie d. Q. blz. 7.

waarin δ de waarde heeft

$$\delta = \tfrac{1}{2} V(\alpha_1 \nu' + \alpha_2 \nu'' + \alpha_3 \nu'').$$

Voor het volgende is het nu noodig nog eenige oogenblikken bij het differentiaal $d\delta$ stil te staan. Het zal namelijk blijken, dat, indien σ een volkomen willekeurige vectorfunctie van ϱ is, δ toch aan een bepaalde voorwaarde voldoen moet, die wij aldus opsporen. Men stelle

$$d\nu' = \chi_1 d\varrho, \quad d\nu'' = \chi_2 d\varrho, \quad d\nu''' = \chi_3 d\varrho,$$

dan zijn volgens het begin dezer § χ_1, χ_2, χ_3 zelfverwante lineaire vectorfuncties. Aangezien δ een vectorfunctie van ϱ is, zoo zal $d\delta$ een *niet*-zelfverwante lineaire vectorfunctie van $d\varrho$ zijn, die wij door $\chi d\varrho$ voorstellen, zoodat de betrekking geldt

$$2\delta = 2\chi d\varrho = V(\alpha_1 \chi' d\varrho + \alpha_2 \chi'' d\varrho + \alpha_3 \chi''' d\varrho).$$

Bepaalt men nu voor de functie χ met behulp van een der formules (15), nadat daarin de verwante functie door de oorspronkelijke vervangen is, de invariant x_2, aldus

$$x_2\, S\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = S(\alpha_2 \alpha_3 \chi \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_1 \chi \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 \chi \alpha_3),$$

dan vindt men

$$x_2 = 0.$$

Deze is de bovengenoemde voorwaarde, waaraan de rotatievector δ van een lineaire vectorfunctie van $d\varrho$, uit elke willekeurige vectorfunctie afgeleid, voldoen moet.

Wanneer in elk punt der ruimte voor een lineaire vectorfunctie de invariant x_2 verdwijnt, dan kan daaruit nog een besluit getrokken worden, dat ons later ten nutte komen zal. Zij namelijk die lineaire vectorfunctie ondersteld in den vorm (17) gegeven te zijn, dan is

$$x_2 = S(\alpha_1 \nu' + \alpha_2 \nu'' + \alpha_3 \nu''').$$

Bijaldien nu deze grootheid overal verdwijnt, dan volgt door differentiatie met de hierboven toegepaste schrijfwijze voor $d\nu'$, $d\nu''$, $d\nu'''$

$$S(\chi_1 \alpha_1 + \chi_2 \alpha_2 + \chi_3 \alpha_3) d\varrho = 0.$$

Daar deze betrekking voor elke waarde van $d\varrho$ gelden moet, zoo besluit men hieruit, dat ook in elk punt der ruimte de vergelijking

$$\chi_1 \alpha_1 + \chi_2 \alpha_2 + \chi_3 \alpha_3 = 0$$

geldig zijn zal.

Wij zullen nu het eerst nagaan, welken vorm eenige bekende stellingen uit de potentiaaltheorie aannemen. Voor de afleiding van al het navolgende blijkt een overgang tot Cartesische coördinaten steeds onnoodig.

THEORIE VAN DE POTENTIAAL.

5. Zij σ de vektor van een punt, waar een volume-element dv van een massa met dichtheid m zich bevindt. De potentiaal in het punt ϱ is dan

$$F\varrho = \int \frac{m\,dv}{T(\varrho - \sigma)}\,.$$

De verandering van deze, als men naar het zeer nabijgelegen punt $\varrho + x\,d\varrho$ overgaat, is [1])

$$x\,dF\varrho = x \int \frac{m\,dv}{T(\varrho-\sigma)^3}\,S(\varrho-\sigma)\,d\varrho\,,$$

zoodat de uitdrukking voor de kracht in het punt ϱ wordt

$$\varkappa = -\int \frac{m\,dv}{T(\varrho-\sigma)^3}\,(\varrho-\sigma)\,.$$

Hieruit verkrijgt men nu de zelfverwante lineaire vectorfunctie

$$d\varkappa = \varphi_0\,d\varrho = -\int \left[\frac{d\varrho}{T(\varrho-\sigma)^3} + 3\,\frac{S(\varrho-\sigma)\,d\varrho}{T(\varrho-\sigma)^5}\,(\varrho-\sigma)\right] m\,dv.$$

Wanneer men daarvoor de invariant x_2 bepaalt volgens (2), vindt men

$$x_2 = 0,$$

zijnde de ware quaternionvorm van de vergelijking van LAPLACE.

Om de vergelijking van POISSON af te leiden, volgen wij een door DIRICHLET aangegeven methode. Denken wij om het punt ϱ_0, binnen de massa gelegen, een bolletje beschreven en berekenen wij de waarde van x_2 in een daarbinnen gelegen punt ϱ, welke het gevolg is van de werking der massa binnen dat bolоppervlak gelegen. De kracht in het punt ϱ, welke eenvoudig gelijk is aan de werking van de massa binnen het boloppervlak met den straal $T(\varrho - \varrho_0)$ beschreven, wordt dan

---

[1]) TAIT, § 133; MOLENBROEK, § 118, vergelijking (e. 22).

$$\varkappa = \frac{4}{3} \pi m (\varrho - \varrho_0),$$

derhalve

$$d\varkappa = \varphi_0 \, d\varrho = -\frac{4}{3} \pi m \, d\varrho,$$

zoodat nu de berekening van x_2 voor de functie φ_0 levert

$$x_2 = -4 \pi m, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

de vergelijking van POISSON.

Wij hebben hierdoor tevens een zeer merkwaardigen vorm gevonden voor een partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde. Dit onderwerp is in mijne „Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie," welke weldra het licht zien zal, meer uitvoerig beschouwd, alwaar dan ook eenige algemeene integratiemethoden voor zoodanige vergelijkingen aangegeven zijn.

6. In verband met het voorgaande verkrijgt nu ook het theorema van GREEN een eigenaardigen vorm. Stellen wij door $F\varrho$ en $f\varrho$ twee scalaire functies van ϱ voor, zoodanig dat

$$dF = SK d\varrho, \quad df = S \varkappa \, d\varrho$$

$$dK = \Phi \, d\varrho, \quad d\varkappa = \varphi \, d\varrho,$$

terwijl X_2 en x_2 de bekende grootheden voor de functies Φ en φ zijn mogen.

Wanneer nu verder $d\varrho_1$, $d\varrho_2$, $d\varrho_3$ drie oneindig kleine vectoren voorstellen, die een volume-element

$$dv = S \, d\varrho_1 \, d\varrho_2 \, d\varrho_3$$

bepalen, en wij deze in het vervolg steeds zoodanig geconstrueerd denken, dat de draaiing van $d\varrho_2$ naar $d\varrho_3$ van $d\varrho_1$ uitgezien, tegengesteld is aan de beweging der wijzers van een uurwerk, terwijl hetzelfde bij een cyclische verwisseling van $d\varrho_1, d\varrho_2, d\varrho_3$ geldig blijft, dan is volgens (1*)

$$SK\varkappa \, S d\varrho_1 \, d\varrho_2 \, d\varrho_3 =$$
$$= S \,.\, K(d\varrho_1 \, S d\varrho_2 \, d\varrho_3 \, \varkappa + d\varrho_2 \, S d\varrho_3 \, d\varrho_1 \, \varkappa + d\varrho_3 \, S d\varrho_1 \, d\varrho_2 \, \varkappa).$$

Duidt men door $d_1 F$ de verandering van F aan, als ϱ in $\varrho + d\varrho_1$ overgaat, dan geldt voor den term $SK d\varrho_1 \, S d\varrho_2 d\varrho_3 \varkappa$ van het tweede lid der vorige vergelijking

$$S \, K d\varrho_1 \, S \, d\varrho_2 \, d\varrho_3 \, \varkappa = d_1 \, [F \, S \, d\varrho_2 \, d\varrho_3 \, \varkappa] - F \, S \, d\varrho_2 \, d\varrho_3 \, \varphi \, d\varrho_1.$$

Wanneer dus de drievoudige integraal

$$\iiint S K \varkappa \, dv$$

wordt uitgestrekt over een begrensde ruimte, die door drie stelsels van evenwijdige platte vlakken in kleine parallelepipeda verdeeld wordt, welker ribben evenwijdig aan $d\varrho_1$, $d\varrho_2$, $d\varrho_3$ zijn, dan is een deel ervan

$$\iiint S K d\varrho_1 S d\varrho_2 d\varrho_3 \varkappa = \iint F S d\varrho_2 d\varrho_3 \varkappa \Big|_i^u - \iiint F S d\varrho_2 d\varrho_3 \, \varphi \, d\varrho_1,$$

waar

$$F S \, d\varrho_2 \, d\varrho_3 \varkappa \Big|_i^u$$

aangeeft het verschil der waarden van $F S \, d\varrho_2 \, d\varrho_3 \varkappa$ in de punten, waar een prisma, op een vlakje $d\varrho_2$, $d\varrho_3$ met opstaande ribben evenwijdig aan $d\varrho_1$ geconstrueerd, het grensoppervlak der beschouwde ruimte snijdt en de dubbele integratie over alle zoodanige prisma's moet worden uitgestrekt. Derhalve wordt

$$\iiint S K \varkappa \, dv = \iint F S \varkappa \, (d\varrho_2 \, d\varrho_3 + d\varrho_3 \, d\varrho_1 + d\varrho_1 \, d\varrho_2)$$

$$- \iiint F S \, (d\varrho_2 \, d\varrho_3 \, \varphi \, d\varrho_1 + d\varrho_3 \, d\varrho_1 \, \varphi \, d\varrho_2 + d\varrho_1 \, d\varrho_2 \, \varphi \, d\varrho_3).$$

Is nu ν de normaal tot het oppervlak naar buiten getrokken, dan is

$$\begin{aligned} V (d\varrho_2 \, d\varrho_3 + d\varrho_3 \, d\varrho_1 + d\varrho_1 \, d\varrho_2) &= \\ &= U V (d\varrho_2 - d\varrho_1) (d\varrho_3 - d\varrho_1) \, T \, V (d\varrho_2 - d\varrho_1) (d\varrho_3 - d\varrho_1) \\ &= U\nu \, do, \end{aligned}$$

waarin do het element van het oppervlak voorstelt door een der prisma's uitgesneden [1]). Derhalve wordt het theorema van GREEN in algemeenen vorm

$$\iiint S K \varkappa \, dv = \iint F S \varkappa \; U\nu \, do - \iint F x_2 \, dv \quad . \; . \; . \quad (19)$$

---

1) TAIT, § 96; MOLENBROEK, § 86, formule (c. 33).

Voor één enkele functie f luidt het

$$\iiint \varkappa^2 \, dv = \iint f S \varkappa \, U\nu \, do - \iiint f \, x_2 \, dv.$$

Uitbreidingen van het theorema zijn in de theorie der quaternionen mogelijk. Wanneer namelijk $\varkappa$ niet van een scalaire functie is afgeleid, dan blijft toch $d\varkappa$ een lineaire vectorfunctie van $d\varrho$, al is deze dan niet zelfverwant. De vergelijking (19) zal dus ook in dit geval onveranderd geldig blijven.

Wanneer verder weder $F_1\varrho$, $F_2\varrho$, $F_3\varrho$ scalaire functies van ϱ voorstellen, dan zal

$$N = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$$

een op bepaalde wijze in de ruimte verdeelde vectorgrootheid zijn. Is nu

$$dF_1 = S K_1 \, d\varrho \, , \; dF_2 = S K_2 \, d\varrho \, , \; dF_3 = S K_3 \, d\varrho ,$$

$$\alpha_1 S K_1 \, d\varrho + \alpha_2 S K_2 \, d\varrho + \alpha_3 S K_3 \, d\varrho = \psi \, d\varrho ,$$

dan kan men eerst de vergelijking (19) op elk der grootheden K_1, K_2, K_3 afzonderlijk toepassen. Vermenigvuldigt men daarna de aldus verkregen vergelijkingen achtereenvolgens met α_1, α_2, α_3 en telt de producten samen, dan ontstaat het theorema

$$\iiint \psi \varkappa \, dv = \iint N \, S \varkappa \, U\nu \, do - \iint x_2 \, N \, dv \quad . \; . \; . \quad (20)$$

Het is natuurlijk ook gemakkelijk deze stelling direct te bewijzen.

Met het oog op de hydrodynamica is het wenschelijk hier eenige beschouwingen omtrent de elasticiteitstheorie op te nemen. Ten deele is deze theorie reeds door TAIT en andere schrijvers in den hier aangegeven vorm behandeld.

ELASTICITEITSTHEORIE.

7. Denkt men zich om het punt ϱ van een lichaam met een zeer kleinen straal r een bolletje beschreven, terwijl $\varrho + d\varrho$ de vektor van een punt van het oppervlak is, dan bestaat de betrekking

$$d\varrho^2 = - r^2 \quad . \; . \; , \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Nu moge het lichaam, waarvan dit bolletje deel uitmaakt, een verplaatsing met vervorming ondergaan, waardoor ϱ overgaat in σ en $\varrho + d\varrho$ in $\sigma + d\sigma$. Algemeen zij gesteld

$$\sigma = \alpha_1 F_1\varrho + \alpha_2 F_2\varrho + \alpha_3 F_3\varrho$$

en dus

$$d\sigma = \chi d\varrho = \alpha_1 S\nu_1 d\varrho + \alpha_2 S\nu_2 d\varrho + \alpha_3 S\nu_3 d\varrho.$$

Hieruit volgt dan [1])

$$d\varrho = \chi^{-1} d\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

en de vergelijking (21) geeft

$$(\chi^{-1} d\sigma)^2 = -r^2$$

of, als de tot χ^{-1} verwante functie door $(\chi^{-1})'$ aangeduid wordt, volgens (9)

$$S.\, d\sigma(\chi^{-1})'\chi^{-1} d\sigma = -r^2.$$

De functie $(\chi^{-1})'\chi^{-1}$, waarvoor wij kortheidshalve ψ schrijven, is steeds zelfverwant. Er blijkt dus, dat punten van het lichaam, die oorspronkelijk op een boloppervlak gelegen waren, na de verplaatsing een ellipsoïde vormen [2]). De assen van deze ellipsoïde

$$S.\, d\sigma\, \psi\, d\sigma = -r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

vallen in de richtingen der eenheidsvektoren ι_1, ι_2, ι_3, welke aan de vergelijking

$$V\varrho\psi\varrho = 0$$

voldoen [3]). Zijn m_1, m_2, m_3 de wortels der symbolische cubische vergelijking voor de functie ψ

$$x - x_1\psi + x_2\psi^2 - \psi^3 = 0,$$

dan voldoen dus ι_1, ι_2, ι_3 aan de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned} \psi\iota_1 &= (\chi^{-1})'\chi^{-1}\iota_1 = m_1\iota_1 \\ \psi\iota_2 &= (\chi^{-1})'\chi^{-1}\iota_2 = m_2\iota_2 \\ \psi\iota_3 &= (\chi^{-1})'\chi^{-1}\iota_3 = m_3\iota_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

De richtingen ι_1, ι_2, ι_3 vielen voor de vervorming blijkens (22) met

$$\chi^{-1}\iota_1, \quad \chi^{-1}\iota_2, \quad \chi^{-1}\iota_3$$

samen, waaruit volgt, dat zij ook voor de vervorming onderling lood-

---

[1]) TAIT, § 139; MOLENBROEK, § 137.

[2]) Zie TAIT, §§ 248—252, MOLENBROEK, Anwendung der Q. auf die Geom. § 48. en vlg.

[3]) TAIT, § 165 en vlg.; MOLENBROEK, § 155 en vlg.; ook Anw. d. Q. a. d. G. § 58.

recht waren. Wij hebben hier namelijk slechts met een bijzonder geval te doen van de stelling, dat elke twee geconjugeerde richtingen der ellipsoïde voor de vervorming loodrecht op elkander waren. Zijn toch $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ twee zoodanige richtingen, die oorspronkelijk langs $d\varrho_1$, $d\varrho_2$ vielen, dan is [1])

$$S \,.\, d\sigma_1\, \psi\, d\sigma_2 = 0,$$

of

$$S \,.\, \chi^{-1} d\sigma_1\, \chi^{-1} d\sigma_2 = 0,$$

derhalve volgens (22)

$$S\, d\varrho_1\, d\varrho_2 = 0.$$

Tevens blijkt hieruit, dat slechts één stelsel van drie richtingen aan te geven is, die zoowel voor als na de vervorming onderling loodrecht zijn.

Met een klein plat vlak

$$S\, \omega\, d\varrho = 0$$

komt later overeen

$$S \,.\, d\sigma\, (\chi^{-1})'\, \omega = 0,$$

dat is dus opnieuw een plat vlak.

Neemt men twee punten met de vectoren $\varrho + d\varrho$ en $\varrho + d\varrho_1$ voor de vervorming, dan correspondeeren hiermede later $\sigma + \chi\, d\varrho$ en $\sigma + \chi\, d\varrho_1$, zoodat de verbindingslijn, die oorspronkelijk $d\varrho - d\varrho_1$ was, is overgegaan in $\chi(d\varrho - d\varrho_1)$. De uitrekkingsverhouding voor deze lijn bedraagt dus

$$\frac{T\chi\,(d\varrho - d\varrho_1)}{T(d\varrho - d\varrho_1)} = T\chi\, U(d\varrho - d\varrho_1).$$

Deze vorm is alleen van de richting der verbindingslijn afhankelijk, waardoor de stelling bewezen is, dat alle evenwijdige lijnen in de zelfde verhouding hare lengten veranderen.

Als men in het bijzonder aanneemt, dat de verbindingslijn in de richting valt, die de richting ι_1 oorspronkelijk had, d. i. langs den vector $\chi^{-1}\iota_1$, dan heeft men te stellen

$$d\varrho - d\varrho_1 = u\, \chi^{-1}\, \iota_1,$$

waarin u een zeer kleine positieve grootheid is. Nu wordt de vorige uitdrukking

---

[1]) TAIT, § 254 en vlg.; MOLENBROEK, Anw. d. Q. a. d. G. § 56.

$$\frac{T\chi\,(d\varrho - d\varrho_1)}{T(d\varrho - d\varrho_1)} = \frac{1}{T\chi^{-1}\iota_1}$$

Duiden wij door OA', OB', OC' de assen der bovengenoemde ellipsoïde aan en door OA, OB, OC de oorspronkelijk daarmede overeenstemmende richtingen, dan kan men het punt $\varrho + d\varrho$ in het vlak $B\,O\,C$ gelegen denken, zoodat het na de vervorming in het vlak $B'\,O\,C'$ komt te liggen. Uit het vorige blijkt nu, dat de afstand van een willekeurig punt tot het vlak $B\,O\,C$ in de standvastige verhouding

$$\frac{1}{T\chi^{-1}\iota_1}$$

verandert. Opereert men echter aan de eerste der vergelijkingen (24) met $S\,.\,\iota_1$, dan vindt men

$$T\chi^{-1}\iota_1 = \sqrt{m_1}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

derhalve kan voor de uitrekkingsverhouding in de richting OA ook geschreven worden $1:\sqrt{m_1}$. Op dezelfde wijze worden de overeenkomstige grootheden voor de richtingen OB, OC door $1:\sqrt{m_2}$, $1:\sqrt{m_3}$ voorgesteld.

De geheele vervorming komt dus hierop neder, dat het oorspronkelijke bolletje uitrekkingen ondergaan heeft in drie onderling loodrechte richtingen $\chi^{-1}\iota_1$, $\chi^{1-}\iota_2$, $\chi^{-1}\iota_3$, terwijl daarop een draaiing gevolgd is, waardoor deze drie vektoren langs $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ gekomen zijn. Deze konische draaiing hebbe om een as plaats, welke met den eenheidsvektor γ samenvalt, terwijl het bedrag der draaiing $t\pi$ zij; dan moet volgens een bekende schrijfwijze der quaternionentheorie gesteld worden [1])

$$U\chi^{-1}\iota_1 = \gamma^{-t}\iota_1\gamma^t, \text{ enz.}$$

en in verband met de vergelijking (25) ontstaan dus de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned} \chi^{-1}\iota_1 &= \sqrt{m_1}\,\gamma^{-t}\,\iota_1\,\gamma^t \\ \chi^{-1}\iota_2 &= \sqrt{m_2}\,\gamma^{-t}\,\iota_2\,\gamma^t \\ \chi^{-1}\iota_3 &= \sqrt{m_3}\,\gamma^{-t}\,\iota_3\,\gamma^t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

waaruit γ en t bepaald moeten worden.

---

[1]) TAIT, § 354 en vlg.; MOLENBROEK, § 111.

Wij vonden zooeven voor de lineaire uitrekkingsverhoudingen

$$\frac{1}{\sqrt{m_1}}, \frac{1}{\sqrt{m_2}}, \frac{1}{\sqrt{m_3}}.$$

De dilatatie der vlakte-eenheid, loodrecht op de richting van den eenheidsvektor ω aangebracht, is eveneens op eenvoudige wijze aan te geven. Zijn namelijk $d\varrho_1$, $d\varrho_2$ twee kleine vectoren in dat vlak, dan is die dilatatie [1])

$$\frac{T\,V\chi\,d\varrho_1\,\chi\,d\varrho_2}{T\,Vd\varrho_1\,d\varrho_2} = T.\,x\chi'^{-1}\,\omega,$$

waarin x op de functie χ betrekking heeft.

Nog wordt de cubische dilatatie voorgesteld door

$$\frac{S.\,\chi\,d\varrho_1\,\chi\,d\varrho_2\,\chi\,d\varrho_3}{S.\,d\varrho_1\,d\varrho_2\,d\varrho_3} = x.$$

Men kan deze grootheid echter ook gemakkelijk in m_1, m_2, m_3 uitdrukken. Want de inhoud van het bolletje $\frac{4}{3}\pi r^3$ gaat later in dien der ellipsoïde $\frac{4}{3}\pi\frac{r^3}{\sqrt{m_1 m_2 m_3}}$ over, zoodat de cubische dilatatie gemeten zal worden door

$$\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2 m_3}} = \frac{1}{\sqrt{X}},$$

wanneer X de bekende beteekenis voor de functie $(\chi^{-1})'\,\chi^{-1}$ heeft.

8. De nadere bepaling dezer dilataties en van de as en de grootte der konische draaiing zullen wij alleen uitvoeren voor een geval, waarin de vervorming gering is, zoodat m_1, m_2, m_3 slechts weinig van de eenheid verschillen. Dit geval treedt in, als de beschouwde elastische massa een continue beweging bezit en wij haren toestand beschouwen op twee opeenvolgende tijdstippen t en $t + dt$. Duiden wij nu de snelheid van het deeltje in het punt ϱ door $\dot{\varrho}$ aan, dan kan algemeen gesteld worden

$$\dot{\varrho} = \alpha_1 F_1 \varrho + \alpha_2 F_2 \varrho + \alpha_3 F_3 \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

waarin F_1, F_2, F_3 behalve ϱ ook t bevatten. In plaats van de in

[1]) Tait, § 145; Molenbroek, § 143, formule (f. 32).

het voorgaande gebruikte grootheid σ moet nu $\varrho + \ddot{\varrho}\, dt$ gesteld worden. Is

$$d\dot{\varrho} = \alpha_1 S \nu_1 d\varrho + \alpha_2 S \nu_2 d\varrho + \alpha_3 S \nu_3 d\varrho = \varphi\, d\varrho \;.\;.\;.\quad (28)$$

de verandering van $\dot{\varrho}$ bij overgang van het punt ϱ naar $\varrho + d\varrho$ op hetzelfde tijdstip t, dan wordt

$$d\sigma = d\varrho + \varphi\, d\varrho \,.\, dt.$$

Ter wille van een duidelijke schrijfwijze vervangen wij dt door u. Nu heeft men voor de in § 5 dezer verhandeling gebruikte functie χ

$$\chi = 1 + u\varphi,\quad \chi^{-1} = 1 - u\varphi,$$

aangezien $\chi\chi^{-1} = 1$. Hiermede wordt dan

$$T\chi^{-1}\iota_1 = 1 + u\, S\, \iota_1 \varphi \iota_1 = \sqrt{m_1}.$$

De drie lineaire uitrekkingscoëffienten $\dfrac{1}{\sqrt{m_1}} - 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{m_2}} - 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{m_3}} - 1$ worden dus door

$$-u S \iota_1 \varphi \iota_1,\ -u S \iota_2 \varphi \iota_2,\ -u S \iota_3 \varphi \iota_3$$

voorgesteld en hieruit volgt dan verder voor den cubischen dilatatie-coëfficient

$$D = -u S(\iota_1 \varphi \iota_1 + \iota_2 \varphi \iota_2 + \iota_3 \varphi \iota_3),$$

of, aangezien $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ een rechthoekig stelsel van eenheidsvectoren vormen,

$$D = u x_2.$$

De eerste der vergelijkingen (24) vereenvoudigt zich tot

$$\varphi_0 \iota_1 + \iota_1 S \iota_1 \varphi \iota_1 = 0 \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (29)$$

Om nu de richting der oogenblikkelijke as van wenteling van het deeltje en de grootte h der hoeksnelheid te vinden, merken wij op, dat hu het bedrag der wenteling in den tijd dt voorstelt, zoodat hu/π voor t in de formules (26) in de plaats gesteld moet worden. Volgens een bekende formule is bovendien

$$\gamma^t = \operatorname{Cos} t\frac{\pi}{2} + \gamma \operatorname{Sin} t\frac{\pi}{2},$$

dus in het beschouwde geval is

$$\gamma^t = 1 + \tfrac{1}{2} hu\gamma.$$

Daardoor ontstáan dus uit (26) betrekkingen van den vorm

$$\varphi\iota_1 + \iota_1 S\iota_1 \varphi\iota_1 = hV\gamma\iota_1,$$

die tengevolge van de vergelijking (29) zich herleiden tot

$$V\delta\iota_1 = hV\gamma\iota_1, \quad V\delta\iota_2 = hV\gamma\iota_2, \text{ enz.},$$

derhalve

$$\delta = h\gamma.$$

Hieruit blijkt dus, dat de vector δ door zijne lengte de hoeksnelheid, door zijne richting de oogenblikkelijke as van wenteling van het deeltje aangeeft. Daarom gaven wij reeds in § 2 van deze verhandeling aan δ den naam van den rotatievector in de functie φ begrepen.

De hier verkregene resultaten zullen wij nu verder toepassen in de theorie der beweging van vloeistoffen. Vooreerst gaan wij over tot het opstellen van

de algemeene hydrodynamische vergelijkingen.

9. De grootte van den druk in een punt der vloeistof is een scalaire functie p van ϱ; wij onderstellen dus, dat geschreven kan worden

$$dp = S\pi_0 d\varrho.$$

Beschouwt men nu het volume-element

$$dv = Sd\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3,$$

dan werken op de zijvlakken, die evenwijdig zijn aan de richtingen $d\varrho_2, d\varrho_3$, nabij het punt ϱ de krachten

$$pVd\varrho_2 d\varrho_3, \; -(p + S\pi_0 d\varrho_1)\, Vd\varrho_2 d\varrho_3,$$

zoodat de totale kracht, die het volume-element tengevolge van den hydrostatischen druk ondervindt, bedraagt

$$-[Vd\varrho_2 d\varrho_3 . S\pi_0 d\varrho_1 + Vd\varrho_3 d\varrho_1 . S\pi_0 d\varrho_2 + Vd\varrho_1 d\varrho_2 . S\pi_0 d\varrho_3]$$
$$= -\pi_0 Sd\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3 = -\pi_0 dv. \text{ (volgens 4*)}$$

Is $\varkappa$ de uitwendige kracht per massa-eenheid, m de dichtheid der vloeistof, dan wordt derhalve de bewegingsvergelijking

$$m\frac{d\dot{\varrho}}{dt} = m\varkappa - \pi_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

De continuiteitsvergelijking is eveneens gemakkelijk af te leiden. Want in de vorige § vonden wij voor den cubischen dilatatiecoëfficient in den tijd dt de uitdrukking $x_2\,dt$ en hieruit volgt dan, als wij weder een differentiatie naar t door NEWTON's schrijfwijze aangeven,

$$m x_2 + \dot{m} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Deze vergelijking zou natuurlijk ook zonder de voorafgaande beschouwingen der elasticiteitstheorie op de volgende wijze gevonden kunnen worden. Daar het element $d\varrho_1$ in den tijd dt overgaat in $d\varrho_1 + \varphi\, d\varrho_1 \,.\, dt$, zoo zal het volume-element $S\, d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3$ daarbij overgaan in

$$S\, d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3 + dt\, S\,(d\varrho_2\, d\varrho_3\, \varphi\, d\varrho_1 + d\varrho_3\, d\varrho_1\, \varphi\, d\varrho_2 + d\varrho_1\, d\varrho_2\, \varphi\, d\varrho_3)$$
$$= S\, d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3\, (1 + x_2\, dt),$$

waardoor wij de vorige uitdrukking voor den dilatatiecoëfficient teruggevonden hebben.

Voor een onsamendrukbare vloeistof neemt de continuiteitsvergelijking den zeer eenvoudigen vorm aan

$$x_2 = 0.$$

De bewegingsvergelijking (30) kan nog in een andere gedaante gebracht worden. Wanneer wij allereerst, zooals gebruikelijk is

$$\int \frac{dp}{m} = P$$

stellen en verder

$$dP = S\pi\, d\varrho, \text{ dus } \pi_0 = m\pi\,;$$

wanneer wij dan bovendien in het oog houden, dat de betrekking geldt

$$\frac{d\dot{\varrho}}{dt} = \frac{\partial \dot{\varrho}}{\partial t} + \varphi\varrho,$$

dan luidt de bewegingsvergelijking

$$\frac{d\dot{\varrho}}{dt} = \frac{\partial \dot{\varrho}}{\partial t} + \varphi\,\dot{\varrho} = \varkappa - \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

In het geval van een stationaire beweging vereenvoudigt deze zich tot

$$\varphi\,\dot{\varrho} = \varkappa - \pi.$$

Uit het voorafgaande is verder duidelijk, dat de beide gevallen, waarin een snelheidspotentiaal al of niet bestaat, alleen daardoor onderscheiden zijn, dat in het eerste geval φ een zelfverwante lineaire vectorfunctie is, in het tweede geval niet.

Wervelbeweging.

10. Wij zullen nu aantoonen, dat de wervelbeweging op zeer eenvoudige wijze door middel van quaternionen beschreven kan worden. Er zij dus in het volgende ondersteld, dat φ een willekeurige lineaire vektorfunctie is, welks rotatievector door δ aangeduid wordt. Zooals wij in § 8 aantoonden, stelt dan δ in grootte en richting de werveldraaiing voor. Denken wij φ in den door (28) aangeduiden vorm en geven wij door d den overgang aan van een punt ϱ der vloeistof naar een nabijgelegen punt op hetzelfde tijdstip, dan volgt uit de bewegingsvergelijking (32)

$$\frac{\partial d\dot{\varrho}}{\partial t} + \varphi d\dot{\varrho} + \alpha_1 S\dot{\varrho}\, d\nu_1 + \alpha_2 S\dot{\varrho}\, d\nu_2 + \alpha_3\, S\dot{\varrho} d\nu_3 = d\varkappa - d\pi,$$

of, als men stelt

$$d\nu_1 = \varphi_1 d\varrho,\ d\nu_2 = \varphi_2\, d\varrho\,,\ d\,\nu_3 = \varphi_3 d\varrho,$$

$$d\varkappa = \psi_1\, d\varrho\,,\ d\pi = \psi_2\, d\varrho,$$

$$\frac{\partial \varphi d\varrho}{\partial t} + \varphi^2 d\varrho + \alpha_1 S\, d\varrho\, \varphi_1 \dot{\varrho} + \alpha_2 S\, d\varrho\, \varphi_2\, \dot{\varrho} + \alpha_3 S d\varrho\, \varphi_3 \dot{\varrho} = (\psi_1 - \psi_2) d\varrho \quad (33)$$

Hierin zijn volgens § 4 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2$ zelfverwante functies. Daar van het tweede lid dezer vergelijking hetzelfde geldt, zoo moet dus ook de rotatievektor van het eerste lid verdwijnen. Nu is φ'^2 de geconjugeerde functie van φ en volgens (13)

$$\varphi^2 - \varphi'^2 = 2\,[\varphi_0\, V\delta\, d\varrho + V.\delta\, \varphi_0\, d\varrho]$$

Voert men hierin voor $d\varrho$ de waarde in uit

$$d\varrho\, S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\, d\varrho + \beta\, S\gamma\alpha\, d\varrho + \gamma\, S\alpha\beta\, d\varrho \quad . \quad . \quad (34)$$

waarin α, β, γ willekeurige vektoren voorstellen, dan vindt men volgens (14*) voor het product van den rotatievektor in φ^2 begrepen met $S\alpha\beta\gamma$

$$\tfrac{1}{2} V[(\varphi_0 V\delta\alpha + V.\delta\,\varphi_0\,\alpha)\, V\beta\gamma + (\varphi_0\, V\delta\,\beta + V.\delta\,\varphi_0\,\beta)\, V\gamma\alpha +$$
$$+ (\varphi_0 V\delta\gamma + V.\delta\,\varphi_0\gamma)\, V\alpha\beta]$$

of na eenige herleiding

$$(x_2 - \varphi_0)\,\delta,$$

zoodat de rotatievektor in het eerste lid der vergelijking (33) wordt

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + (x_2 - \varphi_0)\,\delta + \tfrac{1}{2} V(\alpha_1 \varphi_1 \dot{\varrho} + \alpha_2 \varphi_2 \dot{\varrho} + \alpha_3 \varphi_3 \dot{\varrho}).$$

Nu volgt echter uit

$$\delta = \tfrac{1}{2} V(\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \alpha_3 \nu_3)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial\delta}{\partial t} + \tfrac{1}{2} V(\alpha_1 \varphi_1 \dot{\varrho} + \alpha_2 \varphi_2 \dot{\varrho} + \alpha_3 \varphi_3 \dot{\varrho}),$$

zoodat ten slotte de vergelijking voor de wervelbeweging luidt

$$\frac{d\delta}{dt} = \dot{\delta} = (\varphi_0 - x_2)\,\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

waarvoor men ook zou mogen schrijven

$$\dot{\delta} = (\varphi - x_2)\,\delta.$$

Deze vergelijking, die geheel algemeen bij vloeistoffen en gassen geldt, is zoo eenvoudig, dat zij wel als een der merkwaardigste voorbeelden van de fraaie wijze van behandeling door middel van quaternionen gelden mag. Voor onsamendrukbare vloeistoffen neemt zij den vorm aan

$$\dot{\delta} = \varphi_0\,\delta = \varphi\,\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

11. Het valt niet moeilijk met behulp van deze vergelijkingen de bekende eigenschappen der wervelbewegingen te bewijzen. Allereerst blijkt onmiddellijk, dat een deeltje, dat eenmaal geen rotatiesnelheid bezit, deze ook niet verkrijgen zal.

Neemt men twee deeltjes, welker verbindingslijn met een element van een wervellijn samenvalt, die dus vektoren ϱ en $\varrho + lU\delta$ hebben, dan zijn na een tijd dt hunne vektoren

$$\varrho + \dot{\varrho}\,dt, \quad \varrho + lU\delta + (\dot{\varrho} + l\varphi U\delta)\,dt,$$

zoodat de verbindingslijn geworden is

$$l(U\delta + \varphi U\delta \,.\, dt).$$

Nu wordt echter de hoeksnelheid van het deelte op het tijdstip $t + dt$ aangegeven door $\delta + \dot{\delta}\,dt$. Maar

$$V(\delta + \dot{\delta}\, dt)\,(U\delta + \varphi U\delta\,.\,dt)$$

blijkt een oneindig kleine grootheid van de tweede orde te zijn, als men de waarde van $\dot{\delta}$ uit (35) invoert. Hieruit volgt dus, dat de verbindingslijn van twee deeltjes, die op het tijdstip t langs een wervellijn valt, dezelfde eigenschap gedurende de geheele beweging behoudt.

De lengte der verbindingslijn van de beide deeltjes op het tijdstip $t + dt$ is

$$l' = lT(U\delta + \varphi U\delta\,.\,dt) = l(1 - S\, U\delta\, \varphi U\delta\,.\,dt)$$

en de grootte der hoeksnelheid op hetzelfde tijdstip is

$$h' = T(\delta + \dot{\delta}\, dt) = T\delta\,(1 - S U\delta\, \varphi\, U\delta\,.\,dt - x_2\, dt)$$

Hieruit volgt

$$\frac{h'}{l'} = \frac{T\delta}{l}\,(1 - x_2\, dt) = \frac{T\delta}{l}\left(1 + \frac{\dot{m}}{m}\, dt\right) \text{ volgens (31),}$$

of, als men $m + \dot{m}\, dt$ door m' en $T\delta$ door h aanduidt,

$$\frac{h'}{m'l'} = \frac{h}{ml}.$$

Het product van den afstand van twee deeltjes met de dichtheid blijft gedurende de beweging dus evenredig met de hoeksnelheid. Zooals bekend is, kan deze eigenschap ook op de navolgende wijze uitgedrukt worden: het product van de hoeksnelheid met de doorsnede van een werveldraad behoudt gedurende de beweging een standvastige waarde. Om haar te bewijzen kan men dus ook aantoonen, dat

$$\delta^2\, V^3\, d\varrho\, d\varrho_1 = \text{een standvastige grootheid } ^{1)},$$

als $d\varrho$, $d\varrho_1$ twee lijnelementen voorstellen loodrecht op de wervellijn. Volgens § 9 is

$$\frac{d}{dt}\, d\varrho = \varphi\, d\varrho\,;$$

derhalve wordt[2])

---

[1]) TAIT, § 96; MOLENBROEK, § 86, formules (c. 33) en (c. 34).

[2]) TAIT, § 134; MOLENBROEK, § 118, formule (e. 22).

$$\frac{d}{dt}\delta^2 V^2 d\varrho\, d\varrho_1 = 2\, S\delta\dot{\delta}\, V^2 d\varrho\, d\varrho_1 + 2\,\delta^2 S\,.\, Vd\varrho\, d\varrho_1\, V(\varphi\, d\varrho\,.\, d\varrho_1 + d\varrho\,\varphi\, d\varrho_1).$$

Hierin is nu volgens een bekende formule der theorie[1])

$$V(d\varrho\,\varphi\, d\varrho_1 + \varphi\, d\varrho\,.\, d\varrho_1) = (x_2 - \varphi')\, V d\varrho\, d\varrho_1$$
$$= TV d\varrho\, d\varrho_1\,.\,(x_2 - \varphi')\, U\delta,$$

en het tweede lid der vorige vergelijking wordt dus na deeling door $2\,V^2\, d\varrho\, d\varrho_1$

$$S\delta\dot{\delta} - \delta^2 S\,.\, U\delta\,(x_2 - \varphi)\, U\delta,$$

een vorm, die met het oog op de vergelijking (35) verdwijnt.

Eindelijk beschouwen wij de ruimte, ingenomen door een deel van een werveldraad, dat door twee doorsneden, loodrecht op de wervellijnen aangebracht, begrensd wordt. Passen wij hierop nu het theorema van GREEN toe in den vorm (19), waarbij voor F de eenheid genomen worde, zoodat K verdwijnt, en voor $\varkappa$ de vector δ. Volgens § 4 is hiervoor $x_2 = 0$, waardoor men vindt

$$\iint S\,\delta\, U\nu\, do = 0.$$

In deze vergelijking ligt de stelling opgesloten, dat langs een werveldraad de hoeksnelheid in elk punt omgekeerd evenredig is met de grootte der loodrechte doorsnede.

12. Men kan op dezelfde wijze, als zulks in de gewone rekenwijze geschiedt, aantoonen, dat de beweging eener onsamendrukbare vloeistof, die op oneindigen afstand in rust verkeert, op elk tijdstip geheel bepaald is, als de waarde van δ in elk punt op dat oogenblik gegeven is. Hierbij zullen wij niet stilstaan, doch onderzoeken, hoe in dat geval de waarde van $\dot{\varrho}$ in elk punt gevonden kan worden, waardoor dan ook ψ bekend is, zoodat tengevolge van de vergelijking (35) dus ook de beweging op elk volgend tijdstip gevonden kan worden. Daarbij nemen wij aan, dat de vloeistof onsamendrukbaar is.

Aangezien voor $\dot{\varrho}$ in dat geval, evenals voor δ, de grootheid x_2 verdwijnt, zoo ligt de onderstelling voor de hand, of $\dot{\varrho}$ ook als rotatievector van een nader te bepalen lineaire vectorfunctie χ kan worden voorgesteld.

---

[1]) TAIT § 147; MOLENBROEK, § 145, formule (f. 44).

Indien nu

$$\chi\sigma = \alpha_1 S\mu_1\sigma + \alpha_2 S\mu_2\sigma + \alpha_3 S\mu_3\sigma$$

gesteld wordt, dan is dus

$$2\dot{\varrho} = V(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3).$$

Hieruit volge nu

$$2\,d\dot{\varrho} = \varphi\,d\varrho = V(\alpha_1\chi_1 d\varrho + \alpha_2\chi_2 d\varrho + \alpha_3\chi_3 d\varrho).$$

Vervangt men weder $d\varrho$ door de uitdrukking in (34) aangegeven, dan leidt men gemakkelijk af volgens (14*)

$$2\,\delta\,S\alpha\beta\gamma = V.[V(\alpha_1\chi_1\alpha + \alpha_2\chi_2\alpha + \alpha_3\chi_3\alpha).V\beta\gamma +$$
$$+ V(\alpha_1\chi_1\beta + \alpha_2\chi_2\beta + \alpha_3\chi_3\beta).V\gamma\alpha + V(\alpha_1\chi_1\gamma + \alpha_2\chi_2\gamma + \alpha_3\chi_3\gamma).V\alpha\beta]$$

of na eenige herleiding [1])

$$2\,\delta = (x_2' - \chi_1)\,\alpha_1 + (x_2'' - \chi_2)\,\alpha_2 + (x_2''' - \chi_3)\,\alpha_3,$$

waarin x'_2, x''_2, x'''_2 de waarden van de invariant x_2 voor de functies χ_1, χ_2, χ_3 voorstellen. Daar echter voor φ in alle punten der ruimte x_2 verdwijnt, zoo is volgens § 4

$$\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 + \chi_3\alpha_3 = 0,$$

derhalve

$$2\,\delta = x_2'\alpha_1 + x_2''\alpha_2 + x_2'''\alpha_3$$

of volgens § 2

$$x_2' = 2\frac{S\alpha_2\alpha_3\delta}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\quad x_2'' = 2\frac{S\alpha_3\alpha_1\delta}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\quad x_2''' = 2\frac{S\alpha_1\alpha_2\delta}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3}.$$

Denkt men zich nu drie massaverdeelingen in de ruimte, welker dichtheden achtereenvolgens bedragen

$$-\frac{x_2'}{4\pi},\quad -\frac{x_2''}{4\pi},\quad -\frac{x_2'''}{4\pi},$$

dan zullen volgens § 5 de vectoren μ_1, μ_2, μ_3 de daarvan afkomstige krachten voorstellen. Wanneer de waarde van δ in het punt ϱ' door δ' wordt aangeduid en een daar ter plaatse gelegen volume-

[1]) Tait, § 91; Molenbroek, § 88, formule (c. 44).

element door dv', dan is volgens § 5

$$\mu_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{S\alpha_2\alpha_3\delta}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \frac{dv'}{T(\varrho-\varrho')^3}(\varrho-\varrho'),$$

zoodat de functie $\chi\sigma$ ten slotte bepaald wordt door

$$\chi\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\delta' S\sigma(\varrho-\varrho')}{T(\varrho-\varrho')^3}dv' \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

en $\dot{\varrho}$ door

$$\dot{\varrho} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{V.\delta'(\varrho-\varrho')}{T(\varrho-\varrho')^3}dv' \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

Uit (37) volgt nog, als men σ door $d\varrho$ vervangt,

$$\int \chi\, d\varrho = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\delta'}{T(\varrho-\varrho')}dv'.$$

De functie in het tweede lid dezer vergelijking levert dus ten slotte de kennis der geheele beweging. Wij zullen hier niet verder aantoonen, dat deze functie inderdaad aan alle voorwaarden voldoet, aangezien dit bewijs geleverd kan worden geheel overeenkomstig de methode, door HELMHOLTZ in zijne bekende verhandeling gevolgd. Wij stippen echter aan, dat de vergelijking (38) de volgende stelling bevat: het aandeel, door het volume-element dv' tot de grootte van $\dot{\varrho}$ bijgedragen, is

$$\frac{1}{4\pi}\frac{V.\delta' U(\varrho-\varrho')}{T(\varrho-\varrho')^2}dv'.$$

Het deeltje dv' veroorzaakt dus in het punt ϱ een snelheid, welke loodrecht gericht is op de oogenblikkelijke as van wenteling δ' van het deeltje en op de verbindingslijn $\varrho-\varrho'$, terwijl de grootte evenredig is met de oogenblikkelijke hoeksnelheid van het deeltje en den sinus van den hoek tusschen rotatie-as en verbindingslijn, daarentegen omgekeerd evenredig met het vierkant van den afstand.

Tengevolge van de transformaties in § 6 kan aan de functie

$$F = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\delta'}{T(\varrho-\varrho')}dv'$$

nog een andere gedaante toegekend worden. Stelt men namelijk in de vergelijking (20)

$$\varkappa = \tfrac{1}{2}\, U(\varrho-\varrho'),$$

dan vindt men voor de hierbij behoorende waarde van x_2

$$x_2 = -\frac{1}{T(\varrho-\varrho')},$$

en als nu voor N de grootheid δ' genomen en de integratie over de oneindige ruimte uitgestrekt wordt, aan welks oppervlak δ' verdwijnt, dan wordt

$$\iiint \frac{\delta'}{T(\varrho-\varrho')}\, dv' = \tfrac{1}{2}\iiint \psi\, U(\varrho-\varrho')\, dv',$$

waarin ψ de lineaire vectorfunctie voorstelt, die bij het differentieeren van δ' gevonden wordt.

Stationaire potentiaalbeweging.

Vloeistofstralen in de ruimte.

13. In het algemeen zal het vraagstuk, een stationaire wervellooze beweging van een onsamendrukbare vloeistof te beschrijven, volgens § 9 neerkomen op de bepaling van een zelfverwante lineaire vectorfunctie φ_0, die aan gegeven grensvoorwaarden voldoen moet en tevens aan de vergelijkingen

$$d\dot{\varrho} = \varphi_0\, d\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$\varphi_0\, \dot{\varrho} = \varkappa - \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

$$x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Het is duidelijk, dat men eerst uit (41), de gegeven grensvoorwaarden en desgevorderd (39) de functie φ_0 en $\dot{\varrho}$ zal moeten bepalen, daarna π uit (40).

Een der meest tot heden uitgewerkte vraagstukken is dat der vloeistofstralen. Zooals bekend is, is het nog slechts gelukt volgens een strenge methode het geval te behandelen, waarin geen uitwendige krachten werken en de beweging slechts van twee coördinaten afhankelijk is. Vloeistofstralen in de ruimte hebben tot heden aan elke poging om het vraagstuk tot een eenvoudigen vorm terug te brengen weerstand geboden. Wij zullen nu eerst den algemeenen quaternionvorm voor deze beweging opstellen en de eenvoudige uitkomst, waartoe wij geraken, zal ons dan in staat stellen een algemeene eigenschap dezer bewegingen te bewijzen, welke in verband staat met de theorie der oppervlakken.

Vooraf willen wij echter opmerken, dat de hydrodynamische vergelijking voor het geval, dat er geen wervels in de vloeistof aanwezig zijn, ook in den door (32) aangeduiden vorm gemakkelijk geïntegreerd kan worden, mits de uitwendige krachten een potentiaal F hebben.

De vektor $\dot{\varrho}$ valt in richting met de normaal tot een aequipotentiaaloppervlak samen. Is $d\varrho$ een lijnelement in het oppervlak gelegen, dan is dus

$$S\dot{\varrho}\,d\varrho = 0$$

en men zal dientengevolge onmiddellijk de vergelijking van een zoodanig oppervlak verkrijgen, als de functie $S\dot{\varrho}\,d\varrho$ integrabel is. Dit nu is inderdaad het geval, aangezien aan de voorwaarde, welker vervulling daartoe vereischt wordt, dat $d\dot{\varrho}$ een zelfverwante lineaire vectorfunctie is, hier inderdaad voldaan wordt [1]). Derhalve is

$$f\varrho = \int S\dot{\varrho}\,d\varrho = \text{standvastig} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

de vergelijking van de aequipotentiale oppervlakken en $f\varrho$ de snelheidspotentiaal in het punt ϱ. Verder is de krachtfunctie bepaald door

$$dF = -S\varkappa\,d\varrho.$$

Wanneer men nu aan de vergelijking (17) met $S\,.\,d\varrho$ opereert, dan wordt door integratie gevonden

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\dot{\varrho}^2 + F + P = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

waarin C alleen van t afhangen kan. Bij een stationaire beweging, bij welke geen uitwendige krachten werkzaam zijn, is dan

$$\tfrac{1}{2}\dot{\varrho}^2 + P = \text{standvastig} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

De grensvoorwaarden, waaraan bij een vloeistofstraal voldaan moet worden zijn: In het vrije vloeistofoppervlak heeft, zooals uit (44) in verband met de continuiteit van den druk volgt, de snelheid een

---

[1]) TAIT, § 317; MOLENBROEK, Anw. d. Q. a. d. G. § 95.

standvastige waarde en bij den vasten wand is er geen snelheidscomponent loodrecht op het oppervlak. De vergelijking van het vrije vloeistofoppervlak zal dus worden voorgesteld door

$$\dot{\varrho}^2 = -a^2 \text{ of } T\dot{\varrho} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Differentieerend vindt men [1])

$$S \,.\, d\varrho\, \varphi_0 \dot{\varrho} = 0,$$

zoodat de normaal tot het straaloppervlak wordt voorgesteld door $\varphi_0 \dot{\varrho}$.

In de punten van het oppervlak (45) moet derhalve de voorwaarde vervuld worden

$$S \,.\, \dot{\varrho}\, \varphi_0 \dot{\varrho} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Zoodra men verder een oppervlak construeert, welks normaal door ν aangeduid worde, waar in elk punt de betrekking geldt

$$S\dot{\varrho}\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

zal men dit als een vasten wand mogen beschouwen. Het is nu niet moeilijk een zoodanig oppervlak te vinden. Want, indien eenmaal uit de betrekking $x_2 = 0$ benevens (39) en de gelijktijdige vervulling van (45) en (46) de functie φ_0 en de vektor $\dot{\varrho}$ bepaald zijn, heeft men in (47) een lineaire partieele differentiaalvergelijking van de eerste orde, welker integratie het gezochte oppervlak levert. Voor een dergelijke integratie heb ik in mijne „Anwendung der der Quaternionen auf die Geometrie" twee methoden gegeven.

In de vergelijking (46) ligt een algemeene eigenschap der vloeistofstralen opgesloten. Om deze af te leiden brengen wij eerst eenige bekende formules uit de theorie der oppervlakken in herinnering.

Is $d\varrho$ een lijnelement op een aequipotentiaal oppervlak in het punt ϱ getrokken en brengt men hierdoor een normale doorsnede tot het oppervlak, dan is

$$R = -\frac{T\dot{\varrho}}{S.\, Ud\varrho\, \varphi_0\, Ud\varrho}$$

de kromtestraal dier doorsnede [2]); deze is gelijk aan het vierkant van de halve middellijn, welke in het oppervlak van den tweeden graad met de vergelijking

[1]) TAIT, § 134; MOLENBROEK, § 118, formule (e. 22).

[2]) TAIT, § 333; MOLENBROEK, Anw. d. Q. a. d. G., § 14(.

$$S\omega\,\varphi_0\,\omega = T\dot{\varrho}$$

evenwijdig aan de richting van $d\varrho$ getrokken wordt. De richting $d\varrho$ behoort tot het raakvlak aan het oppervlak, dus is

$$S\dot{\varrho}\,d\varrho = 0.$$

Zijn nu $d\varrho_1$, $d\varrho_2$ de hoofdrichtingen van het oppervlak in het beschouwde punt, dan zal de som der hoofdkromtestralen dus verdwijnen, als

$$S.\,Ud\varrho_1\,\varphi_0\,Ud\varrho_1 + S.\,Ud\varrho_2\,\varphi_0\,Ud\varrho_2 = 0.$$

Maar in het algemeen is volgens (15), in aanmerking nemende, dat $Ud\varrho_1$, $Ud\varrho_2$ en $U\dot{\varrho}$ drie onderling loodrechte eenheidsvectoren zijn

$$x_2 = -\,[S.\,Ud\varrho_1\,\varphi_0\,Ud\varrho_1 + S.\,Ud\varrho_2\,\varphi_0\,Ud\varrho_2 + S.\,U\dot{\varrho}\,\varphi_0\,U\dot{\varrho}]$$

en aangezien voor de functie φ_0 de grootheid x_2 verdwijnt, zoo drukt dus de gelijktijdige vervulling van de betrekkingen (45) en (46) de navolgende eigenschap uit:

In elk punt, waar het vrije straaloppervlak een der aequipotentiale oppervlakken ontmoet, hebben de beide hoofdkromtestralen van dit laatste gelijke lengte doch tegenovergestelde richting.

Op vloeistofstralen, bij welke de beweging in een plat vlak plaats heeft, toegepast luidt dit theorema dus: *In elk punt, waar de aequipotentiale lijnen door de vrije vloeistofbegrenzing gesneden worden, bezitten de eerstgenoemde krommen een buigpunt.*

Nadat ik dit theorema met behulp van de quaternionen gevonden had, gelukte het natuurlijk spoedig het ook met gewone coördinaten te bewijzen. Daarbij blijkt dan echter onmiddellijk, waarom deze eigenschap tot heden verborgen bleef. Immers de bekende voorwaarde, die in een punt van een oppervlak

$$z = F(x, y)$$

vervuld moet worden, opdat de beide hoofdkromtestralen gelijk doch tegengesteld zijn

$$(1 + q^2)\,r - 2\,pqs + (1 + p^2)\,t = 0$$

neemt voor het geval, dat men den algemeenen vorm

$$\varphi(x, y, z) = \text{standvastig}$$

aanwendt een zoo ingewikkelde gedaante aan, dat het moeilijk valt het verband met andere betrekkingen op te sporen.

Onmiddellijk blijkt uit het voorafgaande ook, hoe de uitbreiding van het theorema luidt op de uitstrooming van een gas onder vrije straalvorming. Immers de formules op de kromming der aequipotentiale oppervlakken betrekking hebbende geven in verband met de continuiteitsvergelijking (16)

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\dot{m}}{mT\dot{\varrho}}=\frac{\dot{m}}{am}=\frac{1}{a}\frac{d\log m}{dt},$$

zoodat de som der hoofdkrommingen van het evenwichtsoppervlak in een eenvoudig verband blijkt te staan tot de verandering der dichtheid.

14. Hoewel de vorm, waarin het vraagstuk der vloeistofstralen in de ruimte gebracht is, zeer eenvoudig schijnt, zoo is er toch bij de vervulling der grensvoorwaarde een bezwaar, waaraan tegemoet gekomen kan worden. Daar de functie φ_0 den vector ϱ bevat, zoo komen in de vergelijking (46) de beide grootheden ϱ en $\dot{\varrho}$ gelijktijdig voor, hetgeen de oplossing ten zeerste bemoeilijkt.

Nu heb ik echter in mijne „Anwendung enz.” aangetoond, dat een merkwaardige transformatie der gewone differentiaalrekening, welke ik reeds vroeger had aangewend om eenige gevallen van de gasbeweging tot een oplosbaren vorm terug te brengen, ook in de quaternionentheorie geldig is. Deze transformatie kan in de gewone rekenwijze ook bij vloeistofstralen, die van twee coördinaten afhankelijk zijn, met goed gevolg worden aangewend, echter niet bij afhankelijkheid van drie coördinaten. Het is nu gemakkelijk aan te toonen, dat zij bij HAMILTON's methode inderdaad vereenvoudiging geeft.

Beschouwen wij opnieuw de functie f, die door de vergelijking (42) gedefinieerd wordt en vormen wij een nieuwe functie

$$F=S\varrho\dot{\varrho}-f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

dan is wegens (42)

$$dF=S\varrho\, d\dot{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

zoodat F een functie van $\dot{\varrho}$ alleen blijkt te zijn en ϱ in dezelfde betrekking staat tot F als $\dot{\varrho}$ tot f. Bij differentiatie zal er derhalve een lineaire vectorfunctie van $d\dot{\varrho}$ doen ontstaan, welke overigens slechts $\dot{\varrho}$ bevat

$$d\varrho=\psi\, d\dot{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Dus is

$$d\dot{\varrho}=\psi^{-1}\, d\varrho=\varphi_0\, d\varrho.$$

De functie ψ^{-1} blijkt dus identiek te zijn met φ_0 of

$$\psi\,\varphi_0=1,$$

waarin de beide symbolen verwisseld mogen worden. ψ is dus evenals φ_0 een zelfverwante lineaire vectorfunctie.

Uit de voor φ_0 geldende vergelijking

$$x_2 = 0$$

volgt nu in verband met (15)

$$S(\beta\gamma\psi^{-1}\alpha + \gamma\alpha\psi^{-1}\beta + \alpha\beta\psi^{-1}\gamma) = 0,$$

of volgens een bekende formule der theorie [1])

$$S(\alpha\psi\beta\psi\gamma + \beta\psi\gamma\psi\alpha + \gamma\psi\alpha\psi\beta) = 0,$$

zoodat voor de functie ψ de grootheid x_1 verdwijnt. Ten slotte neemt dus het vraagstuk der vloeistofstralen in de ruimte den vorm aan:

Een zelfverwante lineaire vektorfunctie ψ te bepalen, welke slechts van $\dot\varrho$ afhangt en waarvoor x_1 verdwijnt, terwijl de voorwaarde-vergelijking plaats vindt

$$\text{Voor } T\dot\varrho = a \text{ is } S\dot\varrho\psi^{-1}\dot\varrho = 0.$$

Heeft men hieruit ψ bepaald, dan levert de integratie van de vergelijking (50) ϱ als functie van $\dot\varrho$; uit (49) vindt men F en ten slotte is de snelheids-potentiaal bekend, daar uit (46) en de beide zooeven verkregene vergelijkingen $\dot\varrho$ en F geëlimineerd kunnen worden.

Onderstellen wij, dat de functie ψ^{-1} in den drietermigen grondvorm geschreven wordt aldus:

$$\psi^{-1}\sigma = \alpha_1 S\xi_1\sigma + \alpha_2 S\xi_2\sigma + \alpha_3 S\xi_3\sigma,$$

waarin ξ_1, ξ_2, ξ_3 van $\dot\varrho$ afhangen, dan moet wegens het ontbreken van den rotatievector en het verdwijnen van x_2 voor ψ^{-1} de betrekking gelden

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Voor $T\dot\varrho = a$ moet

$$S\dot\varrho\alpha_1 S\dot\varrho\xi_1 + S\dot\varrho\alpha_2 S\dot\varrho\xi_2 + S\dot\varrho\alpha_3 S\dot\varrho\xi_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Door middel van de vergelijking (51) kan onmiddellijk een der

[1]) Tait, § 145; Molenbroek, § 143, formule (f. 32),

grootheden ξ_1, ξ_2, ξ_3 in de beide andere worden uitgedrukt, b. v.

$$\xi_3 = \alpha_3^{-1}(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2).$$

Hieruit volgt dan, dat de beide vectoren ξ_1, ξ_2 nog slechts aan de betrekking

$$S\alpha_3(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2) = 0$$

en aan de vervormde voorwaardevergelijking (52) voldoen moeten.

Hoewel het mij tot heden niet gelukt is, eenigszins belangwekkende oplossingen dezer vergelijkingen te vinden, zoo meen ik toch, dat het uitzicht bestaat, dat langs dezen weg oplossingen voor het vraagstuk zullen gevonden worden. De algemeene gezichtspunten, welke ik in het voorgaande heb uiteengezet, schenen mij echter van genoeg belang, om een afzonderlijke inzending van dit gedeelte te rechtvaardigen.

's Gravenhage, 27 Maart 1893.

NASCHRIFT.

Eenigen tijd, nadat ik de voorafgaande verhandeling ingezonden had, hield ik mij met hetzelfde onderwerp bezig hoofdzakelijk met het doel op te sporen, of ook bij eindige vervormingen tusschen den rotatievector der lineaire vectorfunctie en de as der konische wenteling een of andere merkwaardige betrekking bestaat. Hiertoe was het noodig de oplossing te vinden van het stelsel van vergelijkingen door (26) aangeduid. Deze oplossing is mij nu inderdaad gelukt en hoewel het niet gemakkelijk is haar een bepaalde mechanische beteekenis toe te kennen, moge zij hier toch wedergegeven worden. Voor zoover mij bekend is, heeft men in de gewone rekenwijze tot heden dit vraagstuk niet ter hand genomen.

Stelt men in de vergelijkingen (26)

$$\gamma^t = q,$$

dan kunnen zij in den navolgenden vorm gebracht worden

$$\left.\begin{aligned} q\chi^{-1}\iota_1 &= \sqrt{m_1}\,\iota_1 q \\ q\chi^{-1}\iota_2 &= \sqrt{m_2}\,\iota_2 q \\ q\chi^{-1}\iota_3 &= \sqrt{m_3}\,\iota_3 q \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

Vermenigvuldigt men nu de eerste vergelijking door ι_2, de tweede door $-\iota_1$, de derde met -1; opereert men daarna aan de drie vergelijkingen met S. en sommeert de uitkomsten, dan ontstaat

$$Sq(\chi^{-1}\iota_1.\iota_2 - \chi^{-1}\iota_2.\iota_1 - \chi^{-1}\iota_3) = -(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3})\,S\iota_3 q\,. \quad (54)$$

Om deze betrekking te vereenvoudigen stellen wij

$$\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3} = n.$$

Verder is

$$S(\chi^{-1}\iota_1 . \iota_2 - \chi^{-1}\iota_2 . \iota_1) = - S\iota_1 [\chi^{-1}\iota_2 - (\chi^{-1})'\iota_2]$$
$$= -2S\iota_1 \Delta \iota_2 = 2S\iota_3 \Delta,$$

als Δ de rotatievector is van de functie χ^{-1}, welke laatste wij in het volgende kortheidshalve door Θ voorstellen. Dan wordt

$$V(\chi^{-1}\iota_1 . \iota_2 - \chi^{-1}\iota_2 . \iota_1) = V(\Theta\iota_1 . \iota_2 + \iota_1 \Theta \iota_2).$$

Maar

$$S . \iota_1 V(\Theta\iota_1 . \iota_2 + \iota_1 \Theta\iota_2) = - S . \iota_3 \Theta \iota_1 = - S . \iota_1 \Theta'\iota_3,$$
$$S . \iota_2 V(\Theta\iota_1 . \iota_2 + \iota_1 \Theta\iota_2) = - S . \iota_3 \Theta \iota_2 = - S . \iota_2 \Theta'\iota_3;$$

derhalve

$$S . \iota_1 [V(\Theta\iota_1 . \iota_2 + \iota_1 \Theta\iota_2) + \Theta'\iota_3] = 0,$$
$$S . \iota_2 [V(\Theta\iota_1 . \iota_2 + \iota_1 \Theta\iota_2) + \Theta'\iota_3] = 0,$$

zoodat $V(\Theta\iota_1 . \iota_2 + \iota_1 \Theta\iota_2) + \Theta'\iota_3$ loodrecht is op ι_1 en ι_2 en dus gesteld kan worden

$$V(\Theta\iota_1 . \iota_2 + \iota_1 \Theta\iota_2) + \Theta'\iota_3 = a\iota_3.$$

Hieruit volgt dan door operatie met $S . \iota_3$

$$S(\iota_1 \Theta \iota_1 + \iota_2 \Theta \iota_2 + \iota_3 \Theta \iota_3) = - a.$$

Duidt men nu door X_2 de bekende invariant voor de functie Θ of χ^{-1} aan, dan blijkt dus, dat $a = X_2$, zoodat men ten slotte heeft

$$V(\Theta\iota_1 . \iota_2 + \iota_1 \Theta\iota_2) = (X_2 - \Theta')\iota_3.$$

De hier ingevoerde grootheden Δ en X_2, die op Θ betrekking hebben, kunnen gemakkelijk ook onmiddellijk met de oorspronkelijke functie χ in verband gebracht worden. De oplossing van de vergelijking

$$d\sigma = \chi d\varrho = \alpha_1 S\nu_1 d\varrho + \alpha_2 S\nu_2 d\varrho + \alpha_3 S\nu_3 d\varrho,$$

die de functie χ defineert, luidt namelijk [1])

$$d\varrho = \chi^{-1} d\sigma = \frac{V\nu_2\nu_3 S\alpha_2\alpha_3 d\sigma + V\nu_3\nu_1 S\alpha_3\alpha_1 d\sigma + V\nu_1\nu_2 S\alpha_1\alpha_2 d\sigma}{2S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 S\nu_1\nu_2\nu_3}$$

---

[1]) TAIT § 161; MOLENBROEK, § 183.

en volgens (14) is dus de rotatievector van χ^{-1}

$$\Delta = \frac{V(V\nu_2\nu_3\, V\alpha_2\alpha_3 + V\nu_3\nu_1\, V\alpha_3\alpha_1 + V\nu_1\nu_2\, V\alpha_1\alpha_2)}{2\, S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\, S\nu_1\nu_2\nu_3}.$$

De noemer van deze breuk is het dubbel der negatieve waarde van de invariant x der functie χ. De teller kan volgens een bekende formule[1]) herleid worden tot den vorm

$$2(\alpha_1 S\nu_1\delta + \alpha_2 S\nu_2\delta + \alpha_3 S\nu_3\delta) = 2\chi\delta,$$

waarin δ de rotatievector van χ is. Derhalve

$$x\Delta = -\chi\delta$$

Volgens (16) is verder

$$X_2 = \frac{S(V\alpha_2\alpha_3\, V\nu_2\nu_3 + V\alpha_3\alpha_1\, V\nu_3\nu_1 + V\alpha_1\alpha_2\, V\nu_1\nu_2)}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\, S\nu_1\nu_2\nu_3}$$
$$= \frac{x_1}{x},$$

als x_1 ook weder een invariant van χ is.

Wij keeren nu tot de formule (54) terug, die na het vorige de gedaante aanneemt

$$S.q[2S\iota_3\Delta + (X_2 + n - \Theta - \Theta')\iota_3] = 0$$

Hierin kan nog in den zin van vergelijking (11)

$$(\Theta + \Theta')\iota_3 = 2\,\Theta_0\,\iota_3$$

gesteld worden. Bovendien is volgens een bekende formule der theorie[2])

$$q = \gamma^t = \operatorname{Cos} t\frac{\pi}{2} + \gamma \operatorname{Sin} t\frac{\pi}{2},$$

zoodat de vorige vergelijking nu oplevert

$$S\iota_3\Delta + tg\left(t\frac{\pi}{2}\right) S.\gamma\left(\frac{X_2+n}{2} - \Theta_0\right)\iota_3 = 0,$$

of ook

$$S\iota_3\Delta - tg\left(t\frac{\pi}{2}\right) S.\iota_3\left(\Theta_0 - \frac{X_2+n}{2}\right)\gamma = 0.$$

Natuurlijk zal deze vergelijking zonder verdere wijziging geldig

---

1) TAIT, § 91; MOLENBROEK, § 88, formule (c. 43).

2) TAIT, Examples to Chapt. III; MOLENBROEK, § 83.

blijven, als men ι_3 door ι_1, en ι_2 achtereenvolgens vervangt; vermenigvuldigt men daarna de drie zoo verkregen vergelijkingen met ι_3, ι_1, ι_2, en sommeert de uitkomsten, dan ontstaat volgens de formule (1*), waarin α, β, γ door $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ vervangen worden,

$$\Delta = tg\, t\frac{\pi}{2}\left(\Theta_0 - \frac{X_2 + n}{2}\right)\gamma,$$

en eindelijk

$$\gamma\, tg\, t\frac{\pi}{2} = \left(\Theta_0 - \frac{X_2 + n}{2}\right)^{-1}\Delta.$$

Deze vergelijking bevat de volledige oplossing. Neemt men aan, dat de richting van de as der konische wenteling steeds zoo gekozen wordt, dat hare grootte $w = t\pi$ nooit meer dan 180° bedraagt, dan is dus

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= U.\left(\Theta_0 - \frac{X_2 + n}{2}\right)^{-1}\Delta \\ tg\frac{w}{2} &= T.\left(\Theta_0 - \frac{X_2 + n}{2}\right)^{-1}\Delta \end{aligned}\right\}$$

Alle in het tweede lid dezer vergelijkingen voorkomende grootheden kunnen volgens bekende formules uit de oorspronkelijke functie χ bepaald worden, zoodat hiermede inderdaad in het algemeenste geval de konische wenteling volledig beschreven is.

Natuurlijk moet de formule (55) voor de onderstellingen in § 8 dezer verhandeling ingevoeid ook de aldaar verkregen uitkomst opleveren. Men heeft dan bij aanwending der aldaar voorkomende notatie

$$\chi = 1 + u\varphi, \quad \chi^{-1} = \Theta = 1 - u\varphi, \quad t = \frac{hu}{\pi},$$

$$\Theta_0 = \tfrac{1}{2}(1 - u\varphi + 1 - u\varphi') = 1 - u\varphi_0,$$

$$X_2 = 3 - ux_2, \quad n = \sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3} = 3 - ux_2$$

$$\Delta = -u\delta,$$

waarin x_2 en δ bij de functie ψ behooren; alles bij verwaarloozing van oneindig kleinen hooger dan de eerste orde. Volgens (55) wordt nu

$$\frac{hu}{2}\gamma = -[-2 + u(x_2 - \varphi_0)]^{-1}u\delta = \tfrac{1}{2}u\delta;$$

derhalve evenals in § 8

$$h\gamma = \delta.$$

'*s-Hage*, Juni 1893.