

REGELMÄSSIGE  
Schnitte und Projectionen

DES VIERUNDZWANZIGZELLES

IM

VIERDIMENSIONALEN RAUME.

VON

P. H. S C H O U T E.

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 4.

(MIT EINER TAFEL.)

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1894.



REGELMÄSSIGE  
SCHNITTE UND PROJECTIONEN  
DES VIERUNDZWANZIGZELLES  
IM VIERDIMENSIONALEN RAUME.

VON

P. H. S C H O U T E.



I. PROJECTION DER VIERDIMENSIONALEN GEBILDE AUF  
EINEN BEGRENZENDEN KÖRPER.

1. Bekanntlich erhält man im dreidimensionalen Raume ein ebenes Bild der regelmässigen Körper, indem man diese senkrecht projiciert auf eine der begrenzenden Seitenflächen.

Auch im vierdimensionalen Raume muss das analoge Verfahren immer zum Ziele führen können. Einerseits wird es da ausserordentlich wertvoll sein in den Fällen, wo keine einfache perspectivische Abbildung vorliegt, keine Coordinatenstellung sich erbieht und andere sonstige Hilfsmittel fehlen. Andererseits wird es am leichtesten anwendbar sein, wenn der Winkel zwischen zwei benachbarten Zellen einen einfachen Wert hat, wie beim  $Z_a^8$  ( $90^\circ$ ), beim  $Z_a^{16}$  ( $120^\circ$ ) und beim  $Z_a^{24}$  ( $120^\circ$ )\*.

Es ist der Zweck dieses Aufsatzes den Nutzen dieser Betrachtung am Beispiele des  $Z_a^{24}$  zu zeigen. Zur Anschliessung an eine frühere Arbeit †) und zur Einleitung fangen wir jedoch mit  $Z_a^8$  und  $Z_a^{16}$  an.

2. Der Fall des  $Z_a^8$  ist unmittelbar erledigt. Es ist die ganze

---

\*) In Bezug auf diese Winkel und ihre Berechnung vergleiche man *Wiskundige Opgaven* (T. V, 1891—93, S. 134).

†) Regelmässige Schnitte und Projectionen des Achtzelles und des Sechszehnzelles im vierdimensionalen Raume (*Verhandelingen*, eerste sectie, deel II, N<sup>o</sup> 2).

Projection des  $Z_a^8$  ein Würfel  $W_a$ . Von den acht begrenzenden Würfeln des  $Z_a^8$  projicieren sich zwei einander gegenüberliegende in  $W_a$ , die sechs übrigen in die Seitenflächen von  $W_a$  (I, § 7, zweiter Satz).

Im Falle des  $Z_a^{16}$  erhalten wir auch einen Würfel, jedoch einen  $W_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$  (I, § 14, vierter Satz). Es bilden nl. (Fig. 1) die zwölf Seitendiagonalen des Würfels die Kanten von zwei centrischen gleich stark entwickelten complementären Tetraedern  $PQRS$  und  $P'Q'R'S'$ , welche die hemiedrischen Formen eines nämlichen Octaeders sind. Geht man nun vom Tetraeder  $PQRS$  aus und projiciert man eins der beiden  $Z^{16}$ , zu deren Begrenzung  $PQRS$  gehören kann, auf  $PQRS$ , so hat man zünachst auf jede der vier Seitenflächen als Grundebene eine regelmässige dreiseitige Pyramide aufzusetzen, deren Höhe die halbe Höhe von  $ABCD$  beträgt. Denn es ist  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ . Und nun leuchtet es ein, dass man auf diese Weise das Tetraeder zum Würfel anfüllt. So findet man, dass die 16 Tetraeder sich nach einander projicieren in  $PQRS$ ,  $P'QRS$ ,  $P'Q'RS$ ,  $PQR'S$ ,  $PQRS'$ , die sechs Seitenflächen des Würfels,  $PQ'R'S'$ ,  $P'QR'S'$ ,  $P'Q'RS'$ ,  $P'Q'R'S'$ ,  $P'Q'R'S'$ . Indem die dreidimensionalen Räume von sechs Tetraedern auf dem Raume  $PQRS$  senkrecht stehen, wird der Würfel  $W_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$  auf zwei verschiedene Weisen von den Projectionen von fünf Tetraedern ausgefüllt\*).

3. Die Ausführung des nämlichen Gedankens beim  $Z_a^{24}$  erfordert zünachst, dass wir auf jede Seitenfläche  $ABC$  des Octaeders  $O_a$  (Fig. 2) ein zu  $O_a$  congruentes Octaeder aufsetzen und diese acht neuen Octaeder, jedesmal in die Richtung senkrecht auf die mit dem Octaeder  $O_a$  gemeinschaftliche Seitenfläche, bis auf die Hälfte zusammendrücken. Diese Construction bringt wieder die gleichwertige Combination von Würfel  $W_{a\sqrt{2}}$  und Octaeder  $O_{2a}$  (I, Fig. 14) hervor, welche weiter durch das Symbol  $(W,O)$  angedeutet werden soll. Ist nl.  $P$  (Fig. 2) der Eckpunkt des  $W_{a\sqrt{2}}$ , welcher der Seitenfläche  $ABC$  von  $O_a$  gegenüberliegt und  $A''B''C''$  das von den Endpunkten  $A'', B'', C''$  der in  $P$  zusammenstossenden Kanten des Würfels ( $OP$ ) gebildete gleichseitige Dreieck, so liegen die Schnittpunkte  $M, M', M''$  von  $OP$  mit den parallelen Ebenen  $ABC, A'B'C', A''B''C''$  offenbar so, dass die Strecken  $PM'', M''M, MO, OM'$  ein-

\*) Man kann die Figur auch als eine Projection auf den Raum des Tetraeders  $P'Q'R'S'$  betrachten. Will man den Unterschied zwischen beiden Betrachtungsweisen hervorheben, so hat man im räumlichen durchsichtigen Bilde das eine Tetraeder als sichtbar, das andere als unsichtbar anzudeuten.

ander gleich sind, und ist deshalb  $ABC$ ,  $A''B''C''$  der auf  $ABC$  zu beschreibende Körper. Und dieses Ergebnis macht es leicht die Projection des  $Z_a^{24}$  zu beendigen. Es bilden nl. die sechs in den Seitenflächen des Würfels  $W_{a\sqrt{2}}$  liegenden Quadrate von der Seitenlänge  $a$  die Projectionen von sechs begrenzenden Octaedern, die senkrecht auf  $O_a$  stehen, und jeder der neun in  $(W, O)$  enthaltenen Körper ist die Projection von zwei Octaedern des  $Z_a^{24}$  \*).

Wenn bei der Projection der regelmässigen Körper des dreidimensionalen Raumes ein regelmässiges Polygon erhalten wird, können zwei verschiedene Fälle eintreten. Entweder sind die Projectionen der Kanten von oberer und unterer Hälfte des Körpers verschieden, oder diese Projectionen kommen zur Deckung. Analoges ereignet sich bei der Projection von  $Z_a^{61}$  und  $Z_a^{24}$  auf einen der begrenzenden Körper; bei  $Z_a^{16}$  tritt der erste, bei  $Z_a^{24}$  tritt der zweite Fall ein.

4. Es liegt das Vermuten nahe, dass die zwölf Eckpunkte des  $Z_a^{24}$ , welche sich auf den Raum des  $O_a$  in die Eckpunkte des  $(W, O)$  projicieren, im vierdimensionalen Raume einem nämlichen dreidimensionalen Raume angehören. Durch Berechnung der Entfernung dieser Punkte vom  $R_3$  des  $O_a$  wird dieses Vermuten bestätigt. Sind  $ABC$  und  $ABD$  (Fig. 3) zwei Seitenflächen eines regelmässigen Körpers, welche unter dem Aussenwinkel  $\varphi$  an einander schliessen, so ist die Entfernung  $DD'$  in der Richtung der dritten Dimension dem Producte  $MD' \cdot \text{Tg } \varphi$  gleich. In ganz derselben Weise findet man die Entfernung des Punktes  $A''$  (Fig. 2) vom  $R_3$  des  $O_a$ , wenn man  $\text{Tg } 60^\circ$  in die Entfernung  $PM'' = \frac{1}{3} PA'' \sqrt{3} = \frac{1}{3} a \sqrt{6}$  des Punktes  $A''$  von der Ebene  $ABC$  multipliciert. So ergibt sich, dass die zwölf Eckpunkte in der vierten Dimension nach derselben Seite hin vom  $R_3$  des  $O_a$  eine gleiche Entfernung  $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$  haben. Demnach sind die 24 Eckpunkte des  $Z_a^{24}$  im vierdimensionalen Raume in drei parallelen dreidimensionalen Schichten gelagert, von welchen die mittlere 12 Eckpunkte, jede der beiden  $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$  entfernten äusseren 6 Eckpunkte aufnimmt. Beiläufig erhalten wir folgenden Satz:

„Es wird das  $Z_a^{24}$  von jedem Mittelraume, welcher zu zwei der begrenzenden Octaeder parallel ist, in einem  $(W, O)$  geschnitten.“

„Bei immer weitergehender paralleler Verschiebung des Schnitt-raumes werden an den Octaederflächen des  $(W, O)$  immerfort Scheibchen abgehobelt und geht der Schnittkörper allmählich in ein Octae

---

\*) Es tritt dieses  $(W, O)$  auch bei der SCHLEGEL'schen Projection auf.

der über, indem es dem Zwischenstadium (Fig. 4) eines Octaeders, dessen Ecken vom Würfel abgestumpft sind, passiert.

5. Aus der eben gefundenen Schichtung der 24 Eckpunkte des  $Z_a^{24}$  in drei parallelen Räumen folgt unmittelbar, wie  $Z_a^{24}$  sich auf den mittleren Raum projiziert. Man findet:

„In senkrechter Projection des  $Z_a^{24}$  auf irgend einen zu zwei begrenzenden Octaedern parallelen Mittelraum bilden die Eckpunkte des  $Z_a^{24}$  die Eckpunkte des Schnittes  $(W, O)$ , die ihre eigene Projection sind, und die doppelt zu zählenden Mittelpunkte der Quadrate des  $(W, O)$ , welche die Eckpunkte eines Octaeders und die Projectionen der Eckpunkte der beiden parallelen Octaeder sind“.

Projiziert man aber das  $Z_a^{24}$  in schräger Richtung auf den nämlichen Mittelraum, so erhält man eine parallel-perspectivische Abbildung (Fig. 5). Diese wird aus einem Drahtmodelle des  $(W, O)$  abgeleitet, indem man durch die Mittelpunkte  $A, B, C, A', B', C'$  der Quadrate des  $(W, O)$  in diesen Punkten halbierte Strecken  $aa', bb', cc', \alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$  gleicher Länge und Richtung annimmt und dann die Endpunkte jeder Strecke mit denen des entsprechenden Quadrates, die gleichartigen Endpunkte der sechs Strecken zu Kanten zweier Octaeder unter einander verbindet.

Die Figur zeigt deutlich die 24 Octaeder, welche das  $Z_a^{24}$  begrenzen. Es wird nämlich der Projectionskörper ausgefüllt erstens vom Octaeder  $abc \alpha\beta\gamma$ , den acht anliegenden Octaedern und den drei Octaedern mit den Körperdiagonalen  $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ , zweitens vom Octaeder  $a'b'c' \alpha'\beta'\gamma'$ , den acht anliegenden Octaedern und den drei Octaedern mit den Körperdiagonalen  $aa', bb', cc'$ . In der senkrechten Projection (Fig. 2) des unmittelbar vorhergehenden Satzes fallen die beiden Verteilungen des  $(W, O)$  zusammen.

Ist der Mittelpunkt  $O$  des  $(W, O)$  ebenfalls der Mittelpunkt der Strecke  $PP'$ , welche den genannten Strecken parallel und gleich angenommen ist, so leuchtet ein, dass die 12 Eckpunkte des  $(W, O)$  von  $P$  und  $P'$  die gleiche Entfernung  $a$  haben, u. s. w.

## II. COORDINATENSTELLUNG DES $Z_a^{24}$ .

6. Es führt die Betrachtung des Bildes (Fig. 5) des Drahtmodelles unmittelbar zu einer Coordinatenstellung des  $Z_a^{24}$ . In Bezug auf die Coordinatenachsen  $OA, OB, OC, OD$  findet man das Schema:

$a_1 \dots 0, p, p, 0$	$b_1 \dots p, 0, p, 0$	$c_1 \dots p, p, 0, 0$
$a_2 \dots 0, n, p, 0$	$b_2 \dots p, 0, n, 0$	$c_2 \dots n, p, 0, 0$
$a_3 \dots 0, n, n, 0$	$b_3 \dots n, 0, n, 0$	$c_3 \dots n, n, 0, 0$
$a_4 \dots 0, p, n, 0$	$b_4 \dots n, 0, p, 0$	$c_4 \dots p, n, 0, 0$
$a \dots p, 0, 0, p$	$b \dots 0, p, 0, p$	$c' \dots 0, 0, p, p$
$a' \dots p, 0, 0, n$	$b' \dots 0, p, 0, n$	$c \dots 0, 0, p, n$
$\alpha \dots n, 0, 0, p$	$\beta \dots 0, n, 0, p$	$\gamma \dots 0, 0, n, p$
$\alpha' \dots n, 0, 0, n$	$\beta' \dots 0, n, 0, n$	$\gamma' \dots 0, 0, n, n$

worin  $p$  und  $n$  für  $+\frac{1}{2}a\sqrt{2}$  und  $-\frac{1}{2}a\sqrt{2}$  stehen. Man wird sofort bemerken, dass dieses Schema sehr regelmässig ist; es enthält alle Punkte, von welchen zwei der Coordinaten verschwinden und die zwei anderen den absoluten Wert  $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$  haben.

7. Die gefundenen Coordinatenwerte ermöglichen die Bestimmung von einigen metrischen Verhältnissen. So findet man nach einander für die Länge von centraler Zelldiagonale, erster, zweiter und dritter Querlinie (Entfernung der parallelen Octaederräume)  $2a$ ,  $a\sqrt{3}$ ,  $\frac{2}{3}a\sqrt{6}$  und  $a\sqrt{2}$ , für den Winkel von Zelldiagonale und angrenzender erster Querlinie und für den Winkel von angrenzender zweiter und dritter Querlinie  $30^\circ$ , u. s. w.

Mittels der gefundenen Coordinatenwerte kann auch der bekannte Satz, nach welchem die Polarfigur des  $Z_a^{24}$  in Bezug auf eine concentrische Hypersphäre vom Radius  $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$  ein congruentes  $Z_a^{24}$  in anderer Stellung ist, bewiesen werden. Dabei ergibt sich, dass die Zelldiagonalen, ersten, zweiten und dritten Querlinien des einen respective mit den dritten, zweiten, ersten Querlinien und Zelldiagonalen des anderen zusammenfallen.

8. Wir untersuchen zunächst, welche besondere Lage der Räume der 24 begrenzenden Octaeder der Schichtung der 24 Eckpunkte in drei parallelen Räumen dualistisch entspricht. Dazu bemerken wir, dass die Polarfigur der drei parallelen Räume von drei Punkten  $O, P, P'$  gebildet wird, welche auf einer durch  $O$  gehenden Geraden liegen; von diesen Punkten ist  $O'$  unendlich entfernt und wird die Strecke  $PP'$  in  $O$  halbiert. Wir finden deshalb, dass durch jeden der beiden Punkte  $P, P'$  sechs Octaeder gehen, was allerdings bekannt ist — denn jeder Eckpunkt  $Z_a^{24}$  ist Eckpunkt von sechs Octaedern —, und dass die übrigen 12 Octaeder zu der Geraden

$PP'$  parallel sind und sich also auf den Mittelraum, welcher  $PP'$  senkrecht halbiert, als Ebenen projizieren.

Der Reciprocität nach verlangt der Satz von § 4, dass die senkrechte Projection des  $Z_a^{24}$  in der Richtung einer Zelldiagonale ein Rhombendodekaeder  $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$  sei. Es stimmt dies genau mit der oben gefundenen Thatsache der 12 senkrechten Octaeder. Und es kann offenbar (Fig. 6) das  $R$  in sechs octaederförmige Körper ( $AO, PRQ'S$ ), ( $BO, QPSR'$ ), u. s. w. verteilt werden, welche doppelt gezählt die Projectionen der übrigen 12 Octaeder bilden. Deshalb finden wir den Satz:

„Die senkrechte Projection des  $Z_a^{24}$  in der Richtung der Zelldiagonale ist ein  $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$ “.

Die Abzählung der Eckpunkte in der letzten Projection zeigt, dass im Mittelpunkte  $O$  und in jedem der acht Würfelpunkte  $P, Q, R, S, P', Q', R', S'$  zwei Projectionen zusammenfallen, in jedem der sechs Octaederpunkte  $A, B, C, A', B', C'$  sich jedoch nur ein Eckpunkt projiziert. Es scheint deshalb, dass der Mittelraum nur die sechs Octaedereckpunkte enthält und der Schnitt dieses Mittelraumes mit  $Z_a^{24}$  ein Octaeder  $O_{a\sqrt{2}}$  ist. Dies ist aber nicht der Fall. Obgleich der Mittelraum nur sechs Eckpunkte des  $Z_a^{24}$  aufnimmt, ist der Schnitt doch ein  $R_{\frac{1}{2}a}$ , wie es die dualistische Umkehrung des Satzes von § 5 verlangt. Denn es wird dieser Schnitt von den 12 senkrecht auf dem Schnitttraume stehenden 12 Octaedern eingeschitten. Also finden wir:

„Es wird das  $Z_a^{24}$  von jedem Mittelraume senkrecht auf einer Zelldiagonale in ein  $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$  geschnitten“.

„Bei allmählich weitergehender paralleler Verschiebung des Schnitttraumes werden erst die Octaederecken des  $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$  vom Würfel abgestumpft (Fig. 7), bis endlich ein Würfel  $W_a$  zurückbleibt. Wird die Bewegung dann noch weiter fortgesetzt, so verringert sich die Seitenlänge des Würfels bis Null“.

Wir bemerken, dass auch in Bezug auf Räume senkrecht zu einer Zelldiagonale von einer Schichtung die Rede sein kann, wobei sich 1, 8, 6, 8, 1 der Punkte in den aufeinander folgenden parallelen Schichten lagern.

Bei schräger Projection der 18 Eckpunkte, welche sich in  $O$  und in den Würfeckpunkten projizieren, erhalten wir eine zweite parallel-perspectivische Abbildung (Fig. 8). Diese wird aus einem Drahtmodelle des  $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$  abgeleitet, indem man durch die Würfelpunkte  $P, Q, R, S, P', Q', R', S'$  in diesen Punkten halbierte



Strecken  $P_1 P_2, Q_1 Q_2, R_1 R_2$ , u s. w. gleicher Richtung und Länge annimmt, durch  $O$  eine in diesem Punkt halbierte Strecke  $DD'$  gleicher Richtung und doppelter Länge hindurchlegt und diese Punkte nachher zur Bildung der 24 Octaeder in geeigneter Weise unter einander verbindet. Es wird diese Verbindungsweise nachher schärfer gekennzeichnet werden.

9. Berechnet man (Fig. 8) die Länge von  $OD$ , indem man  $D, D'$  und den unendlich fernen Punkt von  $DD'$  als Pole von den drei parallelen Räumen von § 4 betrachtet, so findet man  $OD = a$ . Es sind demnach die Coordinaten der 24 Eckpunkte des  $Z_a^{24}$  in Bezug auf die Achsen  $OA, OB, OC, OD$  durch das Schema

$$\begin{aligned} &(\pm a, 0, 0, 0), (0, \pm a, 0, 0), (0, 0, \pm a, 0), (0, 0, 0, \pm a), \\ &(\pm \frac{1}{2} a, \pm \frac{1}{2} a, \pm \frac{1}{2} a, \pm \frac{1}{2} a) \end{aligned}$$

gegeben. Daraus folgt der merkwürdige Satz:

„Die 24 Eckpunkte des  $Z_a^{24}$  zerfallen in die 8 Eckpunkte eines  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$  und die 16 Eckpunkte eines  $Z_a^8$ “.

Hieraus folgt unmittelbar die am Ende des § 8 nicht näher angedeutete Verbindung. Offenbar hat man (Fig. 8) die Endpunkte  $A, C$  irgend einer Kante des  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$  jedesmal mit den vier Eckpunkten  $P_1 R_1' R_2' P_2$  jener Seitenfläche des  $Z_a^8$  zu vereinigen, auf welcher die Kante  $AC$  im Mittelpunkte senkrecht steht.

Es hat das  $Z_a^{24}$  zwölf Zelldiagonalen, welche sich zu drei rechtwinkligen Coordinatensystemen anordnen. Denn, sobald man eine Diagonale auserwählt hat, ist der senkrechte Mittelraum, welcher die drei zugehörigen enthält, bestimmt. Deshalb findet man:

„Die Zerlegung des  $Z_a^{24}$  in  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$  und  $Z_a^8$  den Eckpunkten nach kann in drei verschiedenen Weisen geschehen.“

Man liest diese dreifache Zerlegung leicht aus dem Bilde (Fig. 5) ab. Offenbar giebt es drei Octupel  $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma)$  von Ecken. Jedes dieser Octupel enthält die Eckpunkte eines  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$ , jedes Paar dieser Octupel enthält die Eckpunkte eines  $Z_a^8$ . Wie man erblickt, bestehen die 96 Kanten des  $Z_a^{24}$  jedesmal aus den 32 Kanten des  $Z_a^8$  und die  $8 \times 8$  Verbindungslinien von jedem der 8 Eckpunkte des  $Z_a^{16}$  mit den 8 Eckpunkten des angrenzenden Würfels von  $Z_a^8$ .

Aus den gefundenen folgen weiter noch die Sätze:

„Den Eckpunkten nach ist das  $Z_a^8$  eine Combination von zwei  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$  (Fig. 9). Es bilden die  $2 \times 24$  Kanten des  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$  die 48 Diagonalen der Seitenflächen des  $Z_a^8$ “.

„Den Eckpunkten nach ist das  $Z_a^{24}$  eine Combination von drei  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$ . Es bilden die  $3 \times 24$  Kanten des  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$  die  $24 \times 3$  Körperdiagonalen der begrenzenden Octaeder des  $Z_a^{24}$ “.

Der erste dieser beiden Sätze folgt auch aus der ersten Arbeit (I, § 14); der zweite ist in derselben Weise aus der Bemerkung abzuleiten, dass die 12 Zelldiagonalen des  $Z_a^{24}$  drei Systeme von rechtwinkligen Coordinatenachsen bilden.

Aus der angegebenen Quelle (I, § 14) fliesst noch der neue Satz:

„Den Eckpunkten nach ist das  $Z_a^{2^{n+1}}$ , welches im Raume mit  $2^n$  Dimensionen das Mass bildet, eine Combination von  $2^{n+1}$  Zellen  $Z_{a\sqrt{2}}^{2^{2n}}$ “.

Natürlich stellen sich den angedeuteten Zerlegungen den Eckpunkten nach Zerlegungen den begrenzenden Räumen nach zur Seite. Mit Beachtung folgenden Schemas der

		$Z_a^8$	$Z_a^{16}$	$Z_a^{24}$	
Länge von	{	Zelldiagonale. . .	$2a$	$a\sqrt{2}$	$2a$
	{	erster Querlinie .	$a\sqrt{3}$	$a$	$a\sqrt{3}$
	{	zweiter „ . . .	$a\sqrt{2}$	$\frac{1}{3} a\sqrt{6}$	$\frac{2}{3} a\sqrt{6}$
	{	dritter „ . . .	$a$	$\frac{1}{3} a\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$

findet man nach einander:

„Die 16 begrenzenden Tetraederräume des  $Z_a^{16}$  zerfallen in die  $2 \times 8$  begrenzenden Würfelräume von zwei  $Z_{\frac{2}{3}a\sqrt{2}}^8$ , u. s. w“.

„Die 24 begrenzenden Octaederräume des  $Z_a^{24}$  zerfallen auf drei verschiedene Weisen in die 16 Tetraederräume eines  $Z_{2a}^{16}$  und die 8 Würfelräume eines  $Z_{a\sqrt{2}}^8$  und auf eine einzige Weise in die  $3 \times 8$  Würfelräume von drei  $Z_{a\sqrt{2}}^8$ . Bei jeder der ersten Zerlegungen bilden die 32 Seitenflächen des  $Z_{2a}^{16}$  und die  $8 \times 8$  Schnittebenen von jedem der 8 begrenzenden Würfelräume des  $Z_{a\sqrt{2}}^8$  mit den 8 in dem anliegenden Eckpunkte der  $Z_{2a}^{16}$  zusammenstossenden 8 Tetraederräume die Ebenen der 16 Seitenflächen des  $Z_a^{24}$ . Und bei der letzten Zerlegung bilden die  $3 \times 24$  Seitenflächen der drei  $Z_{a\sqrt{2}}^8$  die  $24 \times 3$  Schnittebenen der in den Eckpunkten zusammentretenden einander gegenüberliegenden Octaederräume“.

„Den begrenzenden Räumen  $2^n - 1$ ster Dimension nach ist das  $Z_a^{2^{2^n}}$  eine Combination von  $2^{n-1}$  Zellen  $Z_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}^{2^{n+1}}$ , u. s. w.“

Es bilden die Sätze dieser Zerlegungen in gewissem Sinne Er-

weiterungen des bekannten Satzes, nach welchem die Eckpunkte eines Würfels und die Seitenflächen eines Octaeders die Eckpunkte und Seitenflächen von zwei Tetraedern sind (Fig. 1).\*)

10. Zur Ableitung anderer Schnitte und Projectionen des  $Z_a^{24}$  fassen wir die gegenseitige Lage der bei den Zerlegungen gefundenen Componenten etwas näher in's Auge. Dabei bedienen wir uns der Notation  $D^n, Q_1^n, Q_2^n, Q_3^n$  zur Andeutung von Diagonalen, ersten, zweiten und dritten Querlinien des Zelles  $Z^n$ .

Betrachten wir zuerst die Zerlegung des  $Z_a^8$  in zwei  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$  (Fig. 9) und legen wir zur Unterscheidung den 8 Eckpunkten der einen  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$  die Buchstabe  $p$ , denen des anderen die Buchstabe  $n$  bei, so bestätigt man unmittelbar die in die Gleichungen

$$8 D^8 = 4 D^{16} + 4 Q_3^{16}, \quad 12 Q_2^8 = 12 Q_1^{16}$$

niedergelegten Resultate, wobei nur auf Coincidenz der Geraden, nicht auf ihre Länge geachtet wird. Dabei ergibt sich, dass die beiden Componenten  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$  in ihren 12  $Q_1$  übereinstimmen und die 4  $D$  des einen die 4  $Q_3$  des anderen sind.

Zwischen den 8  $D^8$  und den vier Achsen des  $Z_a^8$  besteht ein sehr einfacher Verband. Es sind nl. alle spitzwinkligen Dreiecke  $nOp$  (Fig. 9) gleichseitig. Also findet man:

„Es bilden die 8  $D^8$  den vollständigen Durchschnitt von den vier vierdimensionalen Kegeln, welche eine der Achsen des  $Z_a^8$  zur Achse und  $60^\circ$  zum halben Scheitelwinkel haben“.

Bei den Zerlegungen des  $Z_a^{24}$  beschränken wir uns auf diejenigen in zwei Componenten. Unterscheiden wir dabei die Zerlegung nach den begrenzenden Räumen mit kleinen Buchstaben, so gelten die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 12 D^{24} &= 8 D^8 + 4 D^{16} = 12 q_1^{16} = 12 q_2^8 \\ 48 Q_1^{24} &= 16 Q_1^8 + \dots = 16 Q_2^{16} + \dots \\ 48 Q_2^{24} &= 16 q_2^{16} + \dots = 16 q_1^8 + \dots \\ 12 Q_3^{24} &= 12 Q_2^8 = 12 Q_1^{16} = 8 q_3^{16} + 4 q_3^8 \end{aligned} \right\},$$

\*) Ich erinnere hier an den bekannten Satz, der aussagt, dass die 15 ersten Querlinien entweder eines regelmässigen Pentagondodekaeders oder eines regelmässigen Ikosaeders fünf rechtwinklige Koordinatensysteme bilden (F. KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Seiten 18, 19). Wie viele Sätze der nämlichen Art wird das weitere Studium des vierdimensionalen Raumes uns wohl nicht bringen können?

wobei nochmals hervorgehoben werden muss, dass nur auf Lage, nicht auf Länge der Linien geachtet ist.

11. Wir kommen jetzt zu den Schnitten und Projectionen des  $Z_a^{24}$  in Bezug auf Mittelräume senkrecht zu den ersten und zweiten Querlinien. Teilweise werden diese mit Hilfe der gefundenen Zerlegungen abgeleitet. In Uebereinstimmung mit den letzten Gleichungen ist nl. die erste Querlinie  $OP$  (Fig. 8) des  $Z_a^{24}$  auch eine erste Querlinie eines  $Z_a^8$  und eine zweite Querlinie eines  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$ , welche zusammen die Eckpunkte des  $Z_a^{24}$  liefern. Wirklich verbindet sie die Mittelpunkte von den Kanten  $(P_1 P_2, P'_1 P'_2)$  des  $Z_a^8$  und von den Seitenflächen  $(ABC, A'B'C')$  des  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$ , wie man mittels Vergleichung von Fig. 6 und Fig. 8 leicht erblickt. Und vermöge der dreifachen Zerlegung des  $Z_a^{24}$  gilt diese Behauptung für jede erste Querlinie des  $Z_a^{24}$ . Also findet man die senkrechte Projection in der Richtung der ersten Querlinie durch Combination \*) der Projectionen von  $Z_a^8$  in der Richtung der ersten und vom  $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$  in der Richtung der zweiten Querlinie. So findet man die Combination eines regelmässigen sechsseitigen Prismas von der Seitenlänge  $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$  und der Höhe  $a$  (I, § 6) mit einer regelmässigen sechsseitigen Doppelpyramide von der Seitenlänge  $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$  und der Höhe  $2a$  (I, § 14, dritter Satz). Weil  $O$  der gemeinschaftliche Mittelpunkt,  $OD$  die gemeinschaftliche Achsenrichtung der beiden sechsseitigen Gebilde ist, wird die gegenseitige Lage der beiden Körper (Fig. 10) leicht erkannt. Dabei ist nicht zu übersehen, dass der verfolgte Weg in erster Instanz nur zur Kenntnis der Eckpunkte, jedenfalls nicht zur Kenntnis der Seitenflächen des Projectionskörpers führt und dieser Uebelstand unter mehr dadurch beseitigt werden kann, dass man die 96 Kanten abzählt. Nun sind die 24 Eckpunkte aus den 8 Eckpunkten  $a_1, a_2, \dots, a_8, z, z'$  der Doppelpyramide, den 12 Eckpunkten  $b_1, b_2, \dots, b_6, c_1, c_2, \dots, c_6$  und den doppelt zu zählenden Mittelpunkten  $M, M'$  der Grundebenen des Prismas aufgebaut und kommen neben den 32 Kanten der Projection des  $Z_a^8$  (d. h. die 18 Kanten, die  $2 \times 6$  Radien der Grundebenen und die doppelt zu zählende Achse  $MM'$  des Prismas) auch die Verbindungslinien  $zb_1, zb_2, \dots, zb_6$ , und  $z'c_1, z'c_2, \dots, z'c_6$  unter den Projectionen der 96 Kanten vor. Deshalb findet man leicht, dass der Projectionskörper ein

\*) Das hier angegebene Verfahren hätten wir auch in der vorhergehenden Arbeit benutzen können. Abgesehen von der Thatsache, dass die Zerlegungen uns damals noch unbekannt waren, wird man bald einsehen, dass diese Methode in ihre Anwendung auf  $Z^8$  und  $Z^{16}$  nicht einfach ist.

von zwei sechsseitigen Pyramiden gedecktes sechsseitiges Prisma ist, also in Projection 20 Eckpunkte des  $Z_a^{24}$  an der Oberfläche, vier (zwei doppelt zu zählende) im Innern des Projectionskörpers liegen. Und indem sich sechs der 24 Octaeder in den Seitenflächen des Prismas projectieren, zeigen die Fig. 11<sup>a</sup>, 11<sup>b</sup>, 11<sup>c</sup> eine der beiden Verteilungen des Projectionskörpers in  $3 \times 3$  Octaeder.

Bestimmen wir die Polarfigur des erhaltenen Körpers in Bezug auf die Hypersphäre mit dem Radius  $\frac{1}{2} a \sqrt{8}$ , so finden wir den Schnitt des  $Z_a^{24}$  mit dem Mittelraume senkrecht zu einer zweiten Querlinie. Weil der ursprüngliche Körper (Fig. 10) 18 Seitenflächen und 14 Eckpunkte hat, zählt die Polarfigur 18 Eckpunkte und 14 Seitenflächen; sie ist (Fig. 12) eine auf beiden Seiten abgestumpfte Doppelpyramide mit der Höhe  $a \sqrt{2}$  und den Radien  $\frac{1}{2} a$  und  $a$  von Grundebenen und Symmetrieebene.

### III. ANWENDUNG VON TRANSFORMATION DER COORDINATEN.

12. Die Transformation 2) der vorhergehenden Arbeit (I, § 10) führt vom Systeme von vier Zelldiagonalen des  $Z_a^8$  zum Systeme von vier ersten Querlinien von  $Z_a^8$  und hat also für  $Z_a^{24}$  die nämliche Bedeutung. Wendet man sie auf die Polarfigur des  $Z_a^{24}$  an, so führt sie vom Systeme von vier dritten Querlinien von  $Z_a^{24}$  zum Systeme von vier zweiten Querlinien des  $Z_a^{24}$ . Deshalb wenden wir es auf das Schema des § 6 an, um die Coordinaten der 24 Eckpunkte in Bezug auf dieses neue System zu erhalten. Wir finden in der nämlichen Reihenfolge in  $\frac{1}{6} a \sqrt{6}$  als Einheit

2, -1, 1, 0	1, -2, -1, 0	1, -1, 0, -2
0, -1, -1, 2	-1, 0, -1, -2	1, 1, 2, 0
-2, 1, -1, 0	-1, 2, 1, 0	-1, 1, 0, 2
0, 1, 1, -2	1, 0, 1, 2	-1, -1, -2, 0
1, 0, -2, -1	2, 1, 0, -1	2, 0, -1, 1
-1, -2, 0, -1	0, -1, 2, -1	0, -2, 1, 1
1, 2, 0, 1	0, 1, -2, 1	0, 2, -1, -1
-1, 0, 2, 1	-2, -1, 0, 1	-2, 0, 1, -1

und projicieren diese 24 Punkte in die Richtung der Achse  $z_4$  auf den Raum  $Z_1 Z_2 Z_3$ . Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der Projectionen geben wir erst in der Ebene  $Z_1 Z_2$  (Fig. 13) die Coordinaten  $z_1$  und  $z_2$  der Punkte an, indem  $z_3$  als cotierte Coordinate hinzugefügt wird. Daraus leiten wir ab, dass die 24 Punkte gelagert sind in den fünf Ebenen, für welche  $z_3$  nach einander die Werte  $= -2, -1, 0, 1, 2$  hat, und diese Ebenen (Fig. 14) respective 3, 6, 6, 6, 3 der Punkte enthalten. Schneidet man die fünf von diesen Punktgruppen eingeschlossenen Gebilde (zwei gleichschenkelige Dreiecke, zwei gleichschenklige Trapezia und ein Sechseck) von Pappendeckel aus und steckt man sie in der richtigen Weise mit ihren auf der  $z_3$  Achse liegenden Punkten an eine Stricknadel, so erblickt man bald, dass die 24 Punkte sich auf einfachere Weise in drei parallelen Ebenen lagern, die respective 6, 12, 6 Punkte aufnehmen. Hierauf beziehen sich die Andeutungen

$$(a b c d e f), (a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1), (a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2), (p q r s t u)$$

in der räumlichen Projection und in einem neuen Grundrisse (Fig. 15). Jedes dieser vier Gebilde ist ein regelmässiges Sechseck; das erste, zweite und dritte sind einanders senkrechte Projectionen in der Richtung der gemeinschaftlichen Perpendikeln der drei Ebenen. Das vierte liegt in der Mittelebene und hat in Bezug auf das erste eine sehr einfache Lage. Löst man  $(p q r s t u)$  den Eckpunkten nach in zwei gleichseitige Dreiecke auf, so ist  $(a b c d e f)$  der gemeinschaftliche Teil dieser Dreiecke. So findet man die Gestalt des Projectionskörpers (Fig. 16), welcher von 26 Ebenen begrenzt wird und 18 Eckpunkte hat. Es ist die Seitenlänge der drei gleichen Sechsecke  $\frac{1}{2} a \sqrt{3}$ , jene des grösseren  $a$  und die ganze Höhe  $a \sqrt{2}^*$ .

Ist das gefundene Resultat richtig, dann muss der Körper auch die 24 octaederförmigen Gebilde liefern können. Weil er zwei von Dreiecken verschiedenen Seitenflächen hat, n. l. die parallelen Grundebenen, muss er sich auf zwei verschiedene Weisen in elf solche Teile zerstückeln lassen. Eine von diesen zeigt Fig. 17, die andere Fig. 18. Es deuten in den beiden Figuren die kleineren Sechsecke die Grundebenen, das grössere Sechseck den Mittelschnitt an und nun

---

\*) Wird der Projectionskörper cotiert, so findet man:

$$0 \text{ bei } p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, \quad 1 \text{ bei } a_1, c_1, e_1, a_2, c_2, e_2, \quad 2 \text{ bei } b, d, f,$$

$$- 1 \text{ bei } b_1, d_1, f_1, b_2, d_2, f_2, \quad - 2 \text{ bei } a, c, e.$$

zählt man z. B. in Fig. 17 unmittelbar die 11 Octaeder ab, nl.:

$$\begin{aligned} & (b_1 d_1 f_1, e a c), \quad (d_1 e_1 f_1, t e s), \quad (f_1 a_1 b_1, p a u), \quad (b_1 c_1 d_1, r c q), \\ & (b_2 d_2 f_2, e a c), \quad (d_2 e_2 f_2, t e s), \quad (f_2 a_2 b_2, p a u), \quad (b_2 c_2 d_2, r c q), \\ & (b_1 b_2, a c q p), \quad (d_1 d_2, c e s r), \quad (f_1 f_2, e a u t). \end{aligned}$$

Bestimmen wir wieder die Polarfigur des erhaltenen Körpers in Bezug auf die Hypersphäre mit dem Radius  $\frac{1}{2} a \sqrt{8}$ , so finden wir den Schnitt des  $Z_a^{24}$  mit dem Mittelraume senkrecht zu einer ersten Querlinie. So erhält man einen Körper (Fig. 19), welcher 26 Eckpunkte und 18 Seitenflächen hat. Man findet  $a a_1 = b b_1 = \dots = \frac{2}{3} a$ ,  $p p_1 = q q_1 = \dots = a$ ,  $a d = b e = c f = \frac{2}{3} a \sqrt{6}$ ,  $z z' = 2 a$ .

---

## ERKLÄRUNG DER TAFEL.

---

Fig. 1. Der Würfel (schwarz) als Projection des Sechszehnzelles auf den Raum entweder des Tetraeders  $PQR S$  (rot) oder des Tetraeders  $P'Q'R'S'$  (blau). Zerlegung des Würfels ( $PP'$ ) den Eckpunkten nach und des Octaeders ( $ABC, A'B'C'$ ) den Seitenflächen nach in zwei Tetraeder.

Fig. 2. Die Combination von Würfel und Octaeder in Gleichgewicht (blau) als Projection des Vierundzwanzigzelles auf den Raum einer der begrenzenden Octaeder (rot) und als Schnitt des Vierundzwanzigzelles mit dem parallelen Mittelraume. Zergliederung der genannten Combination in neun Octaeder.

Fig. 3. Berechnung der Längen in der vierten Dimension mittels der körperlichen Projection.

Fig. 4. Umbildung des in Fig. 2 gegebenen Schnittes bei paralleler Verschiebung des Schnitttraumes.

Fig. 5. Parallel-perspectivisches Bild des Vierundzwanzigzelles mittels schiefer Projection auf den die Combination von Würfel und Octaeder (blau) enthaltenden Mittelraum. Abbildung der übrigen Kanten (rot).

Fig. 6. Das Rhombendodekaeder (blau) als senkrechte Projection des Vierundzwanzigzelles in der Richtung einer Zelldiagonale und als Schnitt mit dem Mittelraume senkrecht auf einer Zelldiagonale. Bei der Projection treten die Eckpunkte des Würfels (rot) und der Mittelpunkt zweimal auf. Zergliederung des Rhombendodekaeders in sechs Octaeder.

Fig. 7. Umbildung des in Fig. 6 gegebenen Schnittes bei paralleler Verschiebung des Schnitttraumes. Es werden die Octaederecken (rot) des Körpers (blau) vom Würfel abgestumpft.



- Fig. 8. Parallel-perspectivisches Bild des Vierundzwanzigzelles mittels schiefer Projection auf den Schnittraum der Fig. 6. Der Würfel wird zum Achtzelle (rot). Eins der begrenzenden Octaeder (blau) ist angegeben.
- Fig. 9. Das Achtzell (schwarz) mit seinen acht Zelldiagonalen, welche zwei Systeme (das rote und das blaue) von rechtwinkligen Achsen bilden. Zerlegung des Achtzelles den Eckpunkten nach in zwei Sechszehnzelle (rot und blau).
- Fig. 10. Das von zwei sechsseitigen Pyramiden abgeschlossene sechsseitige Prisma (blau) als senkrechte Projection des Vierundzwanzigzelles in der Richtung einer ersten Querlinie. Die Eckpunkte werden geliefert vom durch Grundebenen abgeschlossenen Prisma mit den doppeltzählenden Mittelpunkten der Grundebenen und einer Doppelpyramide (rot).
- Fig. 11. Zergliederung des Projectionskörpers von Fig. 10 in neun Octaeder, von denen das obere (Fig. 11<sup>a</sup>), mittlere (Fig. 11<sup>b</sup>) und untere (Fig. 11<sup>c</sup>) Stück je drei enthalten.
- Fig. 12. Die abgestumpfte Doppelpyramide als Schnitt des Vierundzwanzigzelles mit dem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie.
- Fig. 13. Grundriss eines neuen Projectionskörpers, welchen man bei Projection in der Richtung einer zweiten Querlinie erhält.
- Fig. 14. Räumliche Lage der 24 Eckpunkte des neuen Projectionskörpers von Fig. 13 in fünf parallelen Ebenen.
- Fig. 15. Andere Anordnung dieser Punkte als Eckpunkte von vier Sechsecken (drei rote und ein blaues).
- Fig. 16. Die in den Fig. 13, 14, 15 erzielte Projection des Vierundzwanzigzelles in der Richtung einer zweiten Querlinie (blau). Auf der Oberfläche des inneren Prismas (rot) liegen 18 der 24 Eckpunkte.
- Fig. 17 und 18. Zergliederung des Projectionskörpers von Fig. 16 auf zwei verschiedene Weisen in elf Octaeder.
- Fig. 19. Schnitt des Vierundzwanzigzelles mit dem Mittelraume senkrecht auf einer ersten Querlinie.
-



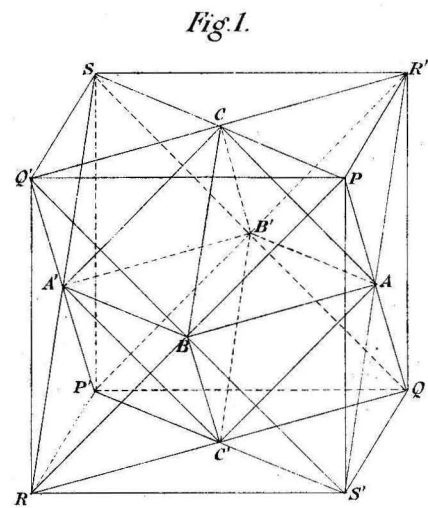


Fig. 1.

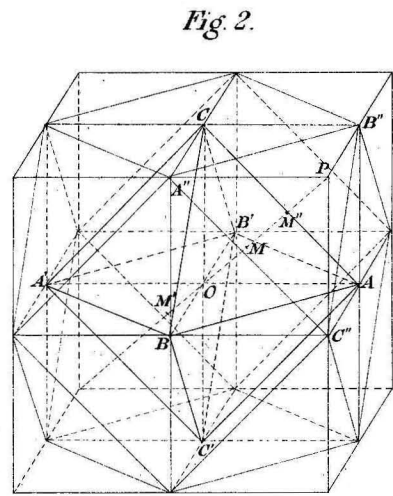


Fig. 2.

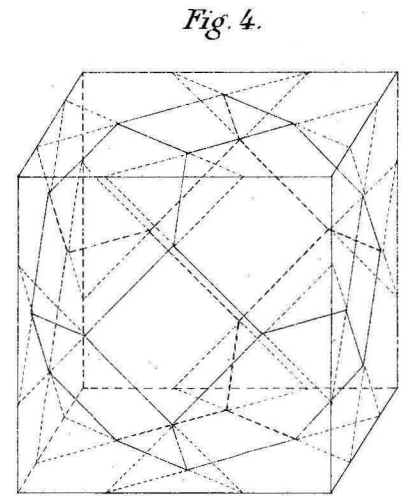


Fig. 3.

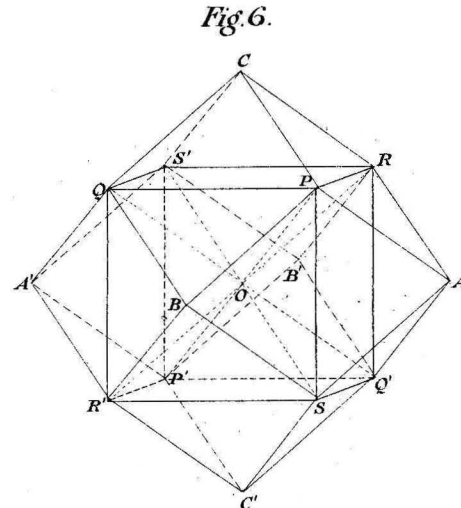


Fig. 4.

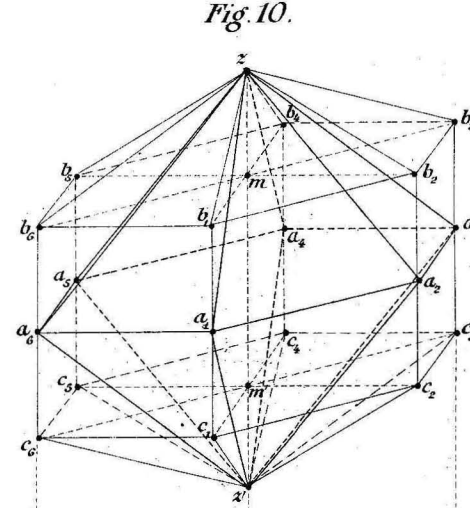


Fig. 5.

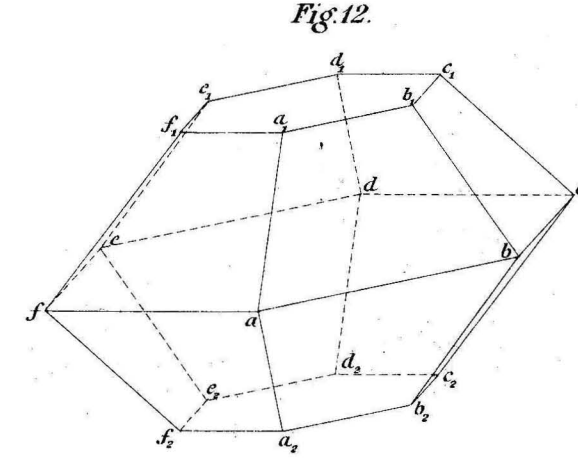


Fig. 6.

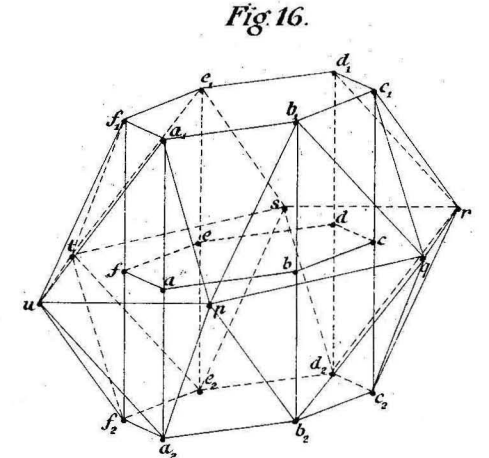


Fig. 7.

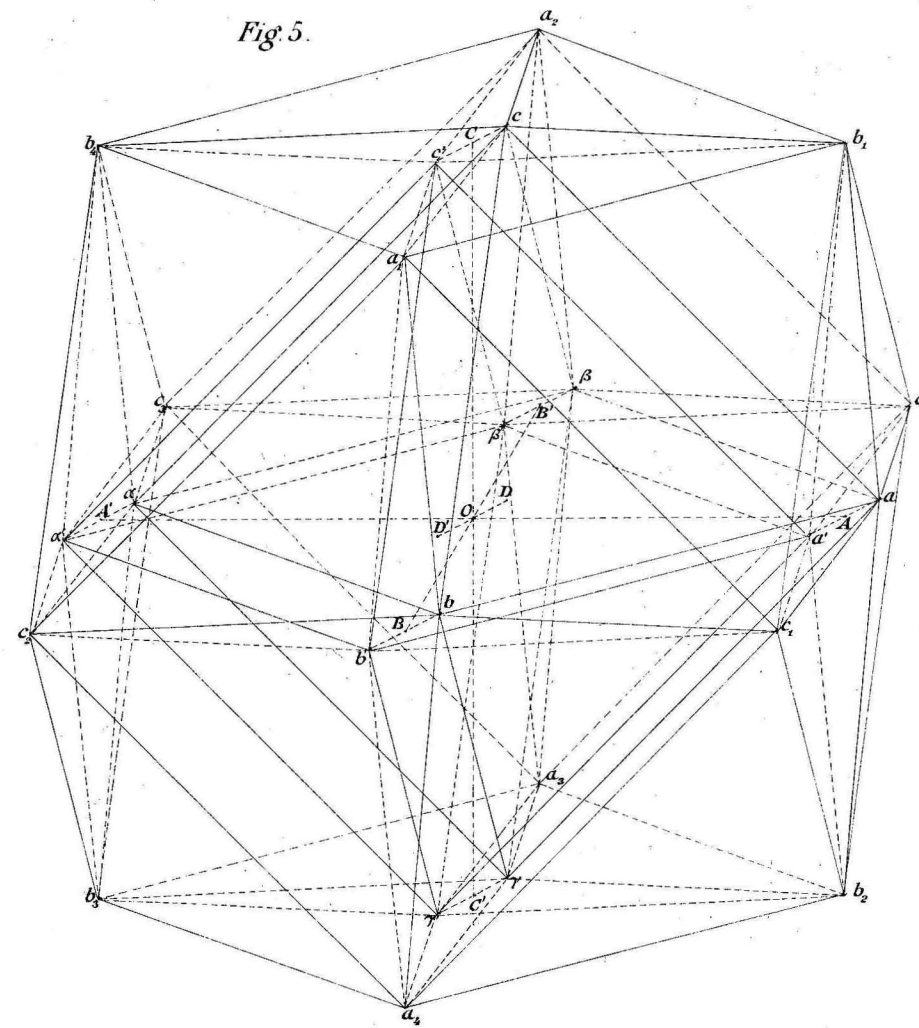


Fig. 8.

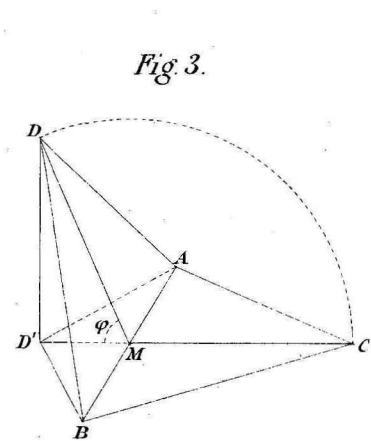


Fig. 9.

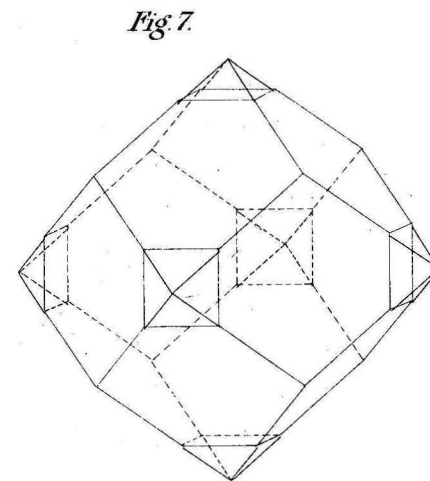


Fig. 10.

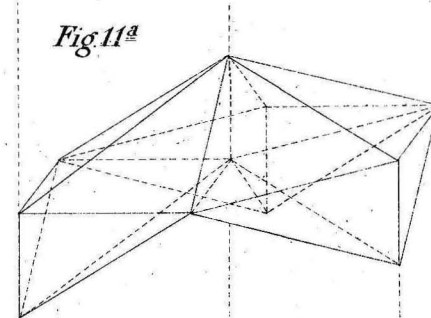


Fig. 11<sup>a</sup>.

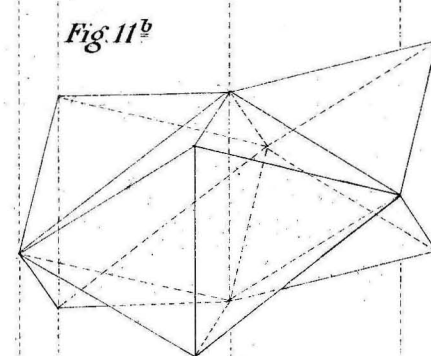


Fig. 11<sup>b</sup>.

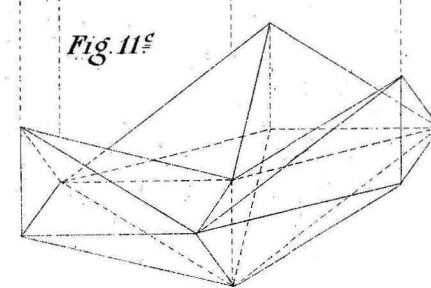


Fig. 11<sup>c</sup>.

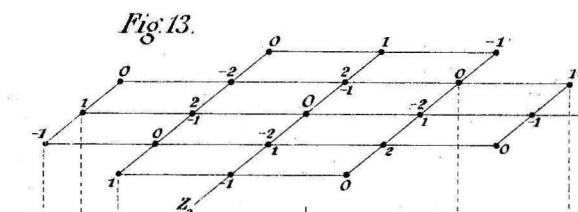


Fig. 12.

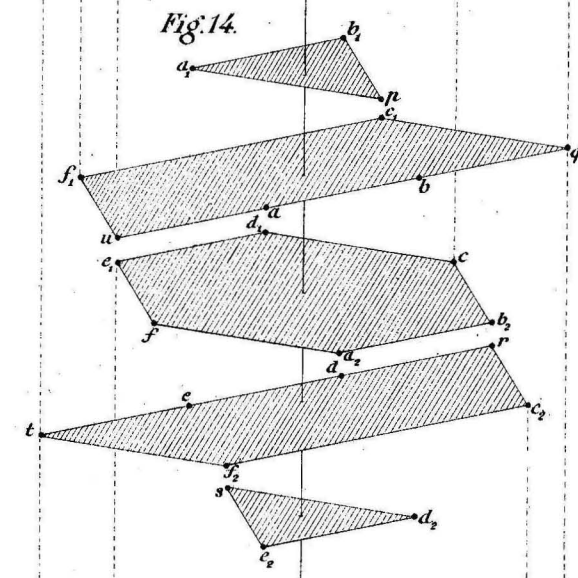


Fig. 13.

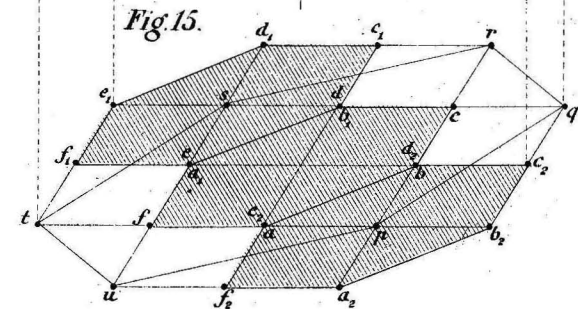


Fig. 14.

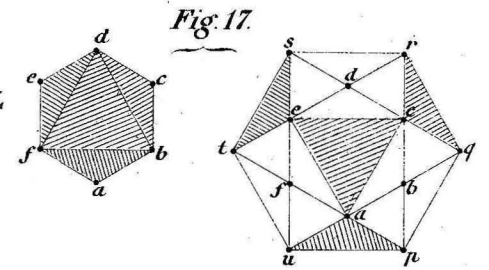


Fig. 15.

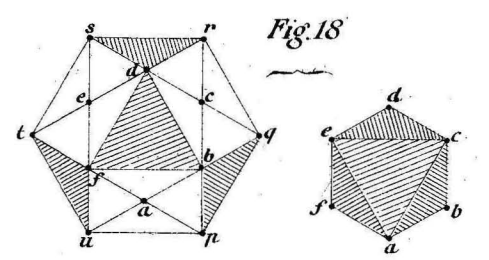


Fig. 16.

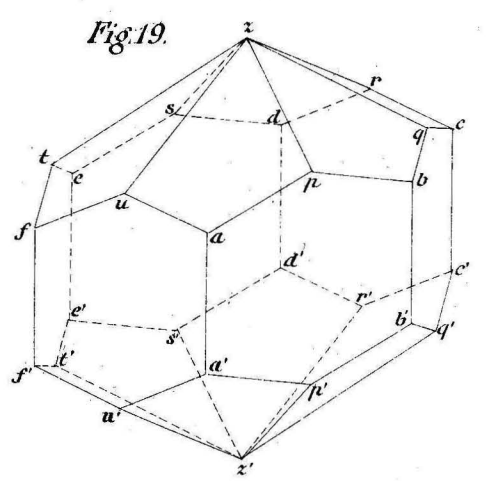


Fig. 17.