DE VERSNELLINGEN

VAN

HOOGERE ORDEN

DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 5.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

ERRATA.

bl.	12,	regel	4,	$b_{''}\, c_{''}$	lees	$b_{''}\, c'_{''}$
»	13,	»	14,	ζ	»	ξ
»	14,	»	18,	η	»	$-\eta$
»	15,	»	3,	$\begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}$	»	$\begin{vmatrix} r & p \\ \zeta'' & \xi'' \end{vmatrix}$
»	15,	regels	12, 13, 14,	Ω	»	Ω_1.
»	19,	regel	17,	(10)	»	(11).

DE VERSNELLINGEN VAN HOOGERE ORDEN

DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.

In de „Kinematik von J. SOMOFF", vertaald door ALEX. ZIWET, Leipzig 1878, worden op blz. 333, form. (2), de uitdrukkingen gegeven van de ontbondenen langs rechthoekige coördinaatassen van de versnelling der n^e orde, die een punt van een lichaam heeft, dat om een vast punt beweegt.

Zij drukken uit, dat de versnelling van de n^e orde de snelheid is van het vrije uiteinde des versnellingsvectors van de $(n-1)^e$ orde. Die snelheid wordt in twee andere ontbonden, de eerste is die, welke het uiteinde heeft tengevolge van de wenteling om de oogenblikkelijke as, de andere die, welke voorstelt de snelheid, waarmede de vector langer wordt. Deze laatste ontbondene wordt eenvoudig voorgesteld door de afgeleide van den vector naar den tijd.

Evenwel zal deze laatste ontbondene samenhangen met den bewegingstoestand van het lichaam, evenzoo als dit met de eerste het geval is. Ziet men de eerste ontbondene, zoodra men de oogenblikkelijke as en de hoeksnelheid om die as gegeven denkt, waar komt dan die $\frac{dv}{dt}$ van daan?

Die samenhang van de versnelling van eenige orde met de wentelingen om de verschillende hoekversnellingsassen heb ik nergens ontwikkeld gezien, noch in de leerboeken van RÉSAL of van SCHELL, noch in de Verhandelingen van J. SOMOFF of van CAMILLE JORDAN [1]).

---

[1]) J. SOMOFF, „Mémoire sur les accélérations de divers ordres" in T. VIII 1864 van Mémoires de l'Académie impériale de St. Pétersbourg.

CAMILLE JORDAN, „Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace" in Bulletin de la Société mathem. de France, T. I, 1872—73.

De beschouwingen in de volgende bladen bewegen zich uitsluitend op cinematisch gebied en hebben ten hoofddoel bovenbedoelden samenhang duidelijk in het licht te stellen. Evenals men den snelheidsvector van een willekeurig punt eens lichaams ziet, zoodra men zich de oogenblikkelijke as en de hoeksnelheid gegeven denkt, evenzoo ziet men, hoe de versnellingsvector van elke orde ontstaat als de resultante van componenten, waarvan er een door elk der hoekversnellingsassen op bepaalde wijze gegeven wordt.

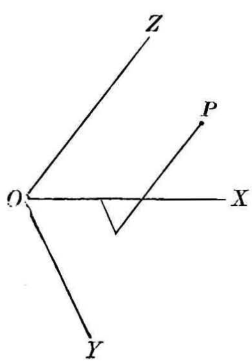
De wijze van behandeling, die overigens zuiver analytisch is, bracht mede, dat van de allereerste beginselen van de bewegingsleer werd uitgegaan. Op eenvoudige wijze blijkt, dat men spreken kan van het parallelogram en het parallelepipedum van versnellingen n^e orde, van hoekversnellingsassen n^e orde, dat eene verschuiving met eene versnelling α aequivalent is met een koppel van hoekversnellingen van dezelfde orde, welks vlak loodrecht staat op de versnelling en welks moment gelijk is aan die versnelling, onverschillig van welke orde die versnelling is.

Eindelijk blijkt, dat er in een lichaam, dat de meest algemeene beweging heeft, ieder oogenblik een punt kan aangewezen worden, dat *geene* versnelling n^e orde heeft, zoodat ter bepaling van de versnelling der overige punten dit punt als *vast* kan aangenomen worden. Slechts in bijzondere gevallen bestaat er eene rechte lijn, wier punten die eigenschap bezitten. Voor $n = 0$ geldt, zooals bekend is, die stelling niet, en treedt het genoemde bijzondere geval slechts dan in, wanneer het lichaam *geene* verschuiving heeft.

Beweging van een punt. Snelheid.

1. De plaats van een punt P zullen wij bepalen door zijne coördinaten op een recht- of scheefhoekig coördinatenstelsel $OXYZ$.

Die coördinaten $x\ y\ z$ bepalen volkomen den stand van dat punt ten opzichte van dat stelsel. Blijven de coordinaten voortdurend dezelfde, dan zegt men dat het punt ten opzichte van dat stelsel in *rust* is.



Veranderen ze daarentegen met den tijd, dan zegt men, dat het punt zich beweegt in dat stelsel, en noemt men de lijn, die het punt in dat stelsel beschrijft, de *baan* van het punt.

De beweging van elk der projecties van het punt langs de assen heet de ontbondene van de beweging van het punt langs die assen, en omgekeerd heet de beweging van het punt de resultante van de drie bewegingen langs de assen.

De beweging van het punt zal volkomen bekend zijn, als de coördinaten bekende functies van den tijd zijn.

Wordt uit die drie functies de tijd geëlimineerd, dan verkrijgt men twee vergelijkingen tusschen de coördinaten

$$f\,(x, y, z) = 0$$
$$\varphi\,(x, y, z) = 0$$

die de vergelijkingen van de baan voorstellen.

2. Is die baan eene rechte lijn, dan noemt men de beweging rechtlijnig; de richting dier lijn is dan de richting der beweging.

Het spreekt van zelf, dat als de rechtlijnige baan zelve gegeven is, de beweging van het punt ook bekend zal zijn, als zijn afstand s van een vast punt der baan ieder oogenblik bekend is.

Is de baan eene kromme lijn, dan wordt de beweging kromlijnig genoemd. In dat geval is de raaklijn aan de baan de richting der beweging op het oogenblik, dat het punt in het raakpunt is.

Is die baan gegeven, dan ook zal de beweging bekend zijn, als men voor ieder oogenblik de lengte s van het deel der baan kent, dat het punt van een vast punt op de baan scheidt.

3. De eenvoudigste beweging is die, waarbij de lengte van den doorloopen weg evenredig is met den daarvoor benoodigden tijd. Zulk een beweging heet eenparig. Ze is volkomen bepaald, als men de baan weet, de plaats, die het punt op zeker oogenblik daarop inneemt en de lengte van den weg, door het punt in een bepaalden tijd afgelegd. Neemt men voor dat tijdsverloop de tijdseenheid, dan noemt men de lengte van den weg, in de tijdseenheid afgelegd, de snelheid van de eenparige beweging. Wordt dus in t tijdseenheden een weg van s lengte-eenheden afgelegd, dan is de snelheid $v = \frac{s}{t}$, dus $s = vt$.

De afgeleide $\frac{ds}{dt}$ van de doorloopen ruimte naar den tijd is dus standvastig en gelijk aan de snelheid.

4. De eenparige rechtlijnige beweging wordt meetkundig voorgesteld door eene lijn, uit een willekeurig punt als oorsprong getrokken in de richting der beweging en waaraan eene lengte gegeven wordt gelijk aan het aantal lengte-eenheden van de snelheid. Zulk eene lijn heet de *snelheidsvector* van de beweging.

Weet men dus behalve de plaats, die het punt op een gegeven oogenblik inneemt, ook den snelheidsvector van eene eenparige rechtlijnige beweging, dan is deze volkomen bekend.

Is de beweging kromlijnig eenparig, dan ook zal de bewegingstoestand van het punt ieder oogenblik kunnen voorgesteld worden door eene lijn, getrokken in de richting van de raaklijn aan de baan, in het punt waar het bewegende punt zich op dat oogenblik bevindt, en waarvan de lengte gelijk genomen wordt aan het aantal lengte-eenheden van de snelheid.

Die lijn wordt ook de snelheidsvector van de kromlijnige eenparige beweging op dat oogenblik genoemd.

De vector zal op verschillende oogenblikken verschillende richtingen hebben. Worden alle vectoren uit een vast punt als gemeenschappelijken oorsprong getrokken, dan zullen de uiteinden er van op een boloppervlak gelegen zijn met den oorsprong tot middelpunt.

5. Is de afgelegde weg niet evenredig met den daartoe besteden tijd, dan heet de beweging veranderlijk. Ter bepaling van den bewegingstoestand van een punt, dat eene veranderlijke beweging heeft, vergelijkt men dien met den bewegingstoestand eener eenparige beweging.

Bevindt zich het bewegende punt op zeker oogenblik t van de beweging in het punt A van de baan, en is het na verloop van eenigen tijd Δt gekomen in B, zoodat het den boog $AB = \Delta s$ heeft afgelegd, dan is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ de snelheid, waarmede een ander punt P', uit A vertrokken, zich zou hebben moeten bewegen om na verloop van denzelfden tijd Δt ook in B aan te komen. In de onderstelling, dat P en P' op 't zelfde oogenblik vertrekken uit A, zullen ze gedurende den tijd Δt niet te gelijker tijd op dezelfde plaats zijn, alleen wel in B.

De verhouding $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ heet de gemiddelde snelheid van het punt P op het oogenblik t gedurende den tijd Δt. Zij bepaalt in geenen deele den bewegingstoestand van het punt op het oogenblik t, daar ze afhangt van de verschillende bewegingstoestanden gedurende den tijd Δt.

Wil men dus den bewegingstoestand op het oogenhlik t zelf meten, dan moet in $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tot de limiet 0 voor Δt worden overgaan. Dan wordt $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ gelijk aan de afgeleide $\frac{ds}{dt}$ van den afgelegden weg naar den tijd. Die afgeleide heet de snelheid van de beweging op het tijdstip t.

De snelheid eener veranderlijke beweging op zeker oogenblik t is de grenswaarde van de gemiddelde snelheid op dat oogenblik en wordt gegeven door de afgeleide $\frac{ds}{dt}$ van den afgelegden weg naar den tijd.

6. Evenals bij de eenparige beweging kan de bewegingstoestand van het punt ieder oogenblik worden voorgesteld door den snelheidsvector van het punt.

Parallelepipedum van snelheden.

7. Worden de vergelijkingen van de baan

$$f(x, y, z) = 0$$
$$\varphi(x, y, z) = 0$$

naar t gedifferentieerd, dan geeft dit

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt} :: \begin{vmatrix} f'_x, & f'_y, & f'_z \\ \varphi'_x, & \varphi'_y, & \varphi'_z \end{vmatrix},$$

waaruit blijkt, dat de snelheden van de ontbondenen der beweging evenredig zijn met de richtingscoefficienten van de raaklijn der baan; bijgevolg zullen de projecties van den snelheidsvector op de assen de snelheidsvectoren van de overeenkomstige ontbondenen der beweging geven.

Beschrijft men dus een parallelepipedum, dat den snelheidsvector tot lichaamsdiagonaal heeft, dan zullen de in den oorsprong van dien vector samenkomende ribben de vectoren voorstellen van de ontbondenen der beweging langs die ribben, en omgekeerd.

Dit parallelepipedum heet het *parallelepipedum van snelheden*. Het gaat over in het *parallelogram van snelheden*, als de beweging slechts in twee andere ontbonden wordt, die dan met de beweging zelve in het osculatievlak van de baan plaats grijpen.

Versnellingen.

8. De uitdrukking $\frac{d^2x}{dt^2}$ kan beschouwd worden als de snelheid die het punt $\left(x + \frac{dx}{dt}, 0, 0\right)$ boven die van het punt $(x, 0, 0)$ heeft; m.a.w.

$\frac{d^2 x}{dt^2}$ stelt voor de snelheid van het uiteinde van den snelheidsvector bij de beweging langs de X-as boven die van zijn oorsprong. Wordt de snelheidsvector uit een vast punt getrokken, dan is dus $\frac{d^2 x}{dt^2}$ de snelheid van het vrije uiteinde des vectors. Evenzoo is $\frac{d^2 y}{dt^2}$ de snelheid van het vrije uiteinde van den snelheidsvector der beweging langs de Y-as, $\frac{d^2 z}{dt^2}$ die van de beweging langs de Z-as, als n.l. de snelheidsvectoren uit een vast punt als oorsprong getrokken worden, wat we voortaan zullen onderstellen.

Volgens het parallelepipedum van snelheden is de resultante van die drie snelheden gelijk aan de snelheid, waarmede het vrije uiteinde $\left(x + \frac{dx}{dt}, y + \frac{dy}{dt}, z + \frac{dz}{dt}\right)$ van den snelheidsvector van het bewegend punt zich beweegt.

Men noemt $\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}$ de versnellingen van de bewegingen resp. langs de X, Y, Z-assen, en de resultante de versnelling van het bewegende punt P.

Deze laatste moet gelegen zijn in het osculatievlak van de baan, omdat daarin de vector van het punt beweegt.

Volgens het parallelogram van snelheden kunnen we de snelheid van het uiteinde des vectors ontbinden in twee andere, de eene in de richting des vectors, die dus de snelheid meet, waarmede de vector langer wordt, en volgens de raaklijn der baan is gericht; de andere in eene richting loodrecht daarop, die een gevolg is van de richtingsverandering des vectors en dus gericht is volgens den kromtestraal ϱ der baan.

De eerste heet de tangentiale versnelling, en is gelijk aan $\frac{dv}{dt}$ of $\frac{d^2 s}{dt^2}$; de andere heet de normale ontbondene en is gelijk aan $\frac{v^2}{\varrho}$. Want omdat $\varrho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{v}{\frac{d\theta}{dt}}$ dus $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\varrho}$ is, draait de raaklijn met eene hoeksnelheid $\frac{v}{\varrho}$ en is dien ten gevolge de snelheid, waarmede het uiteinde van den vector v beweegt, als deze niet in lengte verandert, $v \times \frac{v}{\varrho} = \frac{v^2}{\varrho}$.

Daar de versnelling de snelheid meet van het vrije uiteinde des snelheidsvectors, kan zij ook door een vector worden voorgesteld. Zulk een vector zullen wij een *versnellingsvector* noemen.

9. Nu kunnen de uitdrukkingen $\frac{d^3 x}{dt^3}, \frac{d^3 y}{dt^3}, \frac{d^3 z}{dt^3}$ beschouwd worden als de snelheden resp. van de vrije uiteinden der versnellingsvectoren der bewegingen langs de X, Y, Z-assen. Zij heeten de versnellingen van de 2e orde der ontbondene bewegingen en hunne resultante de versnelling van de beweging van het punt.

Volgens het parallelepipedum van snelheden zal die resultante gelijk zijn aan de snelheid van het vrije uiteinde des versnellingsvectors. Zooals we boven reeds vonden draait deze in het osculatievlak, dus om den binormaal als as, met de hoeksnelheid $\frac{v}{\varrho}$, terwijl het osculatievlak zelf om de raaklijn gedraaid wordt met eene hoeksnelheid $\frac{v}{\varrho_1}$, als ϱ_1 de wringingsstraal der kromme is. Immers $\varrho_1 = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{v}{\frac{d\varepsilon}{dt}}$, dus $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v}{\varrho_1}$ stelt de hoeksnelheid voor, waarmede het osculatievlak om de raaklijn der baan wentelt.

Volgens het parallelepipedum van snelheden is de snelheid van het uiteinde des vectors gelijk aan de resultante van de snelheden, waarmede de uiteinden der vectoren harer ontbondenen $\frac{d^2 s}{dt^2}$ en $\frac{v^2}{\varrho}$ zich bewegen.

We vinden dus:

tangentiale versnelling 2e orde $= \frac{d^3 s}{dt^3} - \frac{v}{\varrho} \cdot \frac{v^2}{\varrho}$

normale „ 2e „ $= \frac{d\frac{v^2}{\varrho}}{dt} + \frac{v}{\varrho} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{v} \frac{d\frac{v^3}{\varrho}}{dt}$

binormale „ 2e „ $= \frac{v}{\varrho_1} \cdot \frac{v^2}{\varrho}$.

10. Op dezelfde wijze kan voortgegaan worden. Noemt men $\frac{d^n x}{dt^n}$ (de snelheid van het uiteinde des versnellingsvectors van de $(n-1)^e$ orde bij de beweging langs de X-as), de versnelling van de n^e orde dier beweging, evenzoo $\frac{d^n y}{dt^n}$ de versnelling van de n^e orde van de beweging langs de Y-as, $\frac{d^n z}{dt^n}$ die van de beweging langs de

Z-as, en hunne resultante (= snelheid vrije uiteinde van den versnellingsvector $(n-1)^e$ orde) de versnelling n^e orde van de beweging van het punt, dan kan deze weer vervangen worden door de snelheden, waarmede de vrije uiteinden van de versnellingsvectoren der $(n-1)^e$ orde der ontbondenen worden bewogen door de wenteling om den binormaal met de hoeksnelheid $\frac{v}{\varrho}$ en de wenteling om de raaklijn met de hoeksnelheid $\frac{v}{\varrho_1}$.

Is dus $\overset{n}{\alpha}$ de versnelling van de n^e orde, en $\overset{n}{\alpha}_t$ de tangentiale, $\overset{n}{\alpha}_N$ de normale, $\overset{n}{\alpha}_B$ de binormale ontbondene, dan geldt algemeen de betrekking [1]:

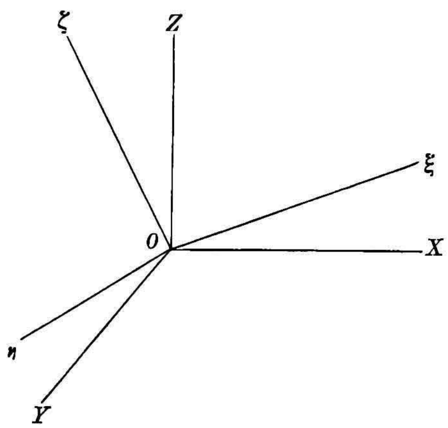
$$\overset{n}{\alpha}_t = \frac{d\,\overset{n-1}{\alpha}_t}{dt} - \overset{n-1}{\alpha}_N \cdot \frac{v}{\varrho}$$

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \overset{n}{\alpha}_N = \frac{d\,\overset{n-1}{\alpha}_N}{dt} + \overset{n-1}{\alpha}_t \cdot \frac{v}{\varrho} - \overset{n-1}{\alpha}_B \cdot \frac{v}{\varrho_1}$$

$$\overset{n}{\alpha}_B = \frac{d\,\overset{n-1}{\alpha}_B}{dt} + \overset{n-1}{\alpha}_N \cdot \frac{v}{\varrho_1}.$$

Beweging van een vast lichaam om een vast punt.

11. Zij O het vaste punt en $O\,X\,Y\,Z$ een vast rechthoekig assenstelsel. Laat $O\,\xi\,\eta\,\zeta$ een met het bewegend lichaam verbonden assenstelsel wezen, welks stand op zeker oogenblik t van de beweging aangegeven wordt door de cosinussen van de hoeken, die elke der beweeglijke assen maakt met ieder der vaste assen, zooals nevensstaand tabelletje dat aanwijst. b. v. Cos $X\xi = a$, Cos $(Z\,\eta) = b_{''}$.



[1] Reeds gegeven door Somoff, Kinematik bl. 60. (6).

$$\begin{array}{c|ccc} & X & Y & Z \\ \hline \xi & a & a_{,} & a_{,,} \\ \eta & b & b_{,} & b_{,,} \\ \zeta & c & c_{,} & c_{,,} \end{array}$$

De determinant $\begin{vmatrix} a & a_{,} & a_{,,} \\ b & b_{,} & b_{,,} \\ c & c_{,} & c_{,,} \end{vmatrix}$ is gelijk $+1$, als het assenstelsel $O\,\xi\,\eta\,\zeta$ zóó geplaatst kan worden op het assenstelsel $O\,X\,Y\,Z$, dat de gelijknamige positieve assen elkaar bedekken, wat wij onderstellen zullen dat het geval is. Verder is elke term van de niet ontwikkelde determinant gelijk aan zijn coefficient in de ontwikkelde;

$$\text{b.v. } c_{,} = \begin{vmatrix} a_{,,} & a \\ b_{,,} & b \end{vmatrix}, \text{ want } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ c & c_{,} & c_{,,} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a_{,} & a_{,,} \\ b & b_{,} & b_{,,} \\ c & c_{,} & c_{,,} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{,,} & b_{,,} & c_{,,} \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ of } c_{,} = \begin{vmatrix} a_{,,} & b_{,,} \\ a & b \end{vmatrix}.$$

12. Zijn nu op 't oogenblik t van de beweging de coördinaten van een punt van 't lichaam (x, y, z) op het vaste, (ξ, η, ζ) op het beweeglijk assenstelsel, dan bestaan er tusschen deze de volgende betrekkingen:

$$\begin{aligned} x &= a\ \xi + b\ \eta + c\ \zeta \\ y &= a_{,}\ \xi + b_{,}\ \eta + c_{,}\ \zeta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ z &= a_{,,}\ \xi + b_{,,}\ \eta + c_{,,}\ \zeta \end{aligned}$$

De snelheid v van dat punt wordt dan op dat oogenblik bepaald door de ontbondenen $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ of x', y', z'. *We zullen n.l. de eerste afgeleide naar t door één accent, de tweede afgeleide door twee accenten enz. voorstellen.*

$$\begin{aligned} x' &= a'\ \xi + b'\ \eta + c'\ \zeta \\ y' &= a'_{,}\ \xi + b'_{,}\ \eta + c'_{,}\ \zeta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ z' &= a'_{,,}\ \xi + b'_{,,}\ \eta + c'_{,,}\ \zeta \end{aligned}$$

13. De oorsprong (0, 0, 0) is in rust. Zijn er nog meer punten in rust? Het bestaan dier punten hangt natuurlijk af van de determinante $\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'_{,} & b'_{,} & c'_{,} \\ a'_{,,} & b'_{,,} & c'_{,,} \end{vmatrix}$. Is die identiek nul, dan zijn bovenstaande vergelijkingen, wier eerste leden in nullen moeten veranderd worden, onderling afhankelijk; in het tegengestelde geval niet.

Nu is die determinante identiek gelijk nul; want wordt ze vermenigvuldigd met $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{,} & b_{,} & c_{,} \\ a_{,,} & b_{,,} & c_{,,} \end{vmatrix} = 1$, daarbij met de kolommen werkende, dan vindt men voor het produkt:

$$\begin{vmatrix} o & -r & q \\ r & o & -p \\ -q & p & o \end{vmatrix}$$

als

$$\begin{aligned} b'c + b'_{,}c_{,} + b'_{,,}c_{,,} &= -bc' - b_{,}c'_{,} - b_{,,}c_{,,} = p \\ c'a + c'_{,}a_{,} + c'_{,,}a_{,,} &= -ca' - c_{,}a'_{,} - c_{,,}a'_{,,} = q \\ a'b + a'_{,}b_{,} + a'_{,,}b_{,,} &= -ab' - a_{,}b'_{,} - a_{,,}b'_{,,} = r \end{aligned}$$

gesteld worden. Dat produkt nu is identiek gelijk nul.

De vergelijkingen (3) kunnen nu als volgt geschreven worden:

$$\begin{aligned} -\eta r + \zeta q &= ax' + a_{,}y' + a_{,,}z' = v_\xi = \text{snelheid volgens de } \xi\text{-as}, \\ (4)\ldots\ldots \quad \xi r - \zeta p &= bx' + b_{,}y' + b_{,,}z' = v_\eta = \quad " \quad " \quad " \ \eta\text{-as}, \\ -\xi q + \eta p &= cx' + c_{,}y' + c_{,,}z' = v_\zeta = \quad " \quad " \quad " \ \zeta\text{-as}. \end{aligned}$$

of in determinantvorm:

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} q & r \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} = v_\xi \qquad \begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} = v_\eta \qquad \begin{vmatrix} p & q \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = v_\zeta$$

Wij maken uit deze vergelijkingen de volgende gevolgtrekkingen:

1°. De punten van 't lichaam, die in rust zijn, liggen op de lijn Ω, wier vergelijking is:

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}.$$

De beweging is op 't beschouwde oogenblik dus aequivalent met eene wenteling om de lijn Ω, die daarom de *oogenblikkelijke as* heet. Zij maakt met de assen hoeken, wier cosinussen $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}$ zijn, als $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$ gesteld wordt.

2°. Worden uit (4) ξ, η, ζ opgelost, dan vindt men b. v. voor ξ:

$$\xi \begin{vmatrix} o & -r & q \\ r & o & -p \\ -q & p & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_\xi & -r & q \\ v_\eta & o & -p \\ v_\zeta & p & o \end{vmatrix} = p\,(p v_\xi + q v_\eta + r v_\zeta) = 0$$

dus

$$\frac{p}{\omega} \cdot \frac{v_\xi}{v} + \frac{q}{\omega} \cdot \frac{v_\eta}{v} + \frac{r}{\omega} \cdot \frac{v_\zeta}{v} = \text{Cos}\,(\Omega, v) = 0.$$

3⁰. $v^2 = v^2_\xi + v^2_\eta + v^2_\zeta = \begin{vmatrix} p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} p^2+q^2+r^2, & p\xi+q\eta+r\zeta \\ p\xi+q\eta+r\zeta, & \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \omega^2 & \omega r \cos(\Omega r) \\ \omega r \cos(\Omega r), & r^2 \end{vmatrix} = \omega^2 r^2 \sin^2(\Omega r) = \omega^2 l^2$$

als l de lengte is van de loodlijn, uit het punt op de as Ω neergelaten en r voorstelt den afstand van het punt tot den oorsprong. Omdat ω de snelheid is van een punt, dat op de eenheid van afstand van Ω ligt, heet ω de *hoeksnelheid* van de wenteling om Ω.

Hieruit blijkt, dat de beweging op 't beschouwde oogenblik aequivalent is met eene wenteling om de as Ω, waarvan de hoeksnelheid gelijk ω is.

14. Uit de vergel. (5) volgt, dat p de snelheid voorstelt van het punt (0, 1, 0) in de richting van de ζ-as, of die van het punt (0, 0, 1) in de richting van de -η-as. Men mag dus p beschouwen als de hoeksnelheid, waarmede het lichaam om de ζ-as wentelt. Evenzoo blijkt, dat q de hoeksnelheid is van de wenteling om de η-as, en r die van de wenteling om de ζ-as.

De wenteling om de oogenblikkelijke as Ω met de hoeksnelheid ω is dus aequivalent met de drie wentelingen p, q, r, om de beweeglijke assen. Wordt dus op de as Ω een stuk afgezet gelijk aan ω lengte-eenheden, dan zullen de projecties van dat stuk op de beweeglijke assen p, q, r eenheden bevatten, zoodat lijnen, die aswentelingen in grootte en richting voorstellen samengesteld en ontbonden kunnen worden volgens dezelfde regels als lijnen, die snelheden en versnellingen voorstellen.

Men spreekt daarom ook van het *parallelogram* en het *parallelepipedum van wentelingsassen*.

HOEKVERSNELLINGSAS.

15. Worden de vergel. (5) naar t gedifferentieerd, dan komt er

$$\begin{aligned} \frac{dv_\xi}{dt} = \xi'' &= \begin{vmatrix} q' & r' \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & r \\ \eta' & \zeta' \end{vmatrix} \\ \eta'' &= \begin{vmatrix} r' & p' \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & p \\ \zeta' & \xi' \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7) \\ \zeta'' &= \begin{vmatrix} p' & q' \\ \xi & \eta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ \xi' & \eta' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Hieruit blijkt, dat de versnelling van het punt ξ, η, ζ de resultante is van twee andere:

1^0. De versnelling

$$\sqrt{\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} p'^2 + q'^2 + r'^2, & p'\xi + q'\eta + r'\zeta \\ p'\xi + q'\eta + r'\zeta, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \omega_1 R \sin(\Omega_1 R) = \omega_1 l_1,$$

als R de afstand van het punt tot den oorsprong, l_1 die tot de lijn $\Omega_1 \left(\frac{\xi}{p'} = \frac{\eta}{q'} = \frac{\zeta}{r'}\right)$ voorstellen en $\omega_1^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2$ gesteld wordt.

Zij staat loodrecht zoowel op Ω_1 $\left(\text{want} \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p' & q' & r' \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0\right)$ als op R $\left(\text{want ook} \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ p' & q' & r' \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0\right)$, is dus loodrecht gericht op het vlak bepaald door het punt en de lijn Ω_1.

Omdat ω_1 de versnelling is van een punt op de eenheid van afstand tot de as Ω_1, heet ω_1 de *hoekversnelling* om de as Ω_1, die daarom de *hoekversnellingsas* genoemd wordt.

2^0. De versnelling $\sqrt{\begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ p & q & r \end{vmatrix}^2} = \omega v \sin(\Omega\ V) = \omega\ v = \omega^2 l$ loodrecht gericht zoowel op Ω als op den snelheidsvector V, en omdat Ω en V elkaar rechthoekig kruissen, zal de versnelling loodrecht op Ω gericht wezen, en wel *naar* de as Ω, omdat zij gericht is in den zin van de wenteling om Ω.

16. p' stelt de versnelling voor van het punt $(0, 1, 0)$ in de richting van de ζ-as of van het punt $(0, 0, 1)$ in de richting van de η-as. De hoekversnelling ω_1 om de as Ω_1 is dus aequivalent met de drie hoekversnellingen p' q' r' om de beweeglijke assen. Men spreekt daarom ook van het *parallelogram* en het *parallelepipedum* van hoekversnellingsassen.

17. De Cosinus van den hoek tusschen Ω en Ω_1 wordt gegeven door

$$\text{Cos}(\Omega\, \Omega_1) = \frac{pp' + qq' + rr'}{\omega\, \omega_1} = \frac{\omega\omega'}{\omega\omega_1} = \frac{\omega'}{\omega_1}.$$

Vallen dus die assen samen, dan is de hoekversnelling ω_1 gelijk aan de afgeleide ω' van de hoeksnelheid naar den tijd. Vallen ze niet samen, dan is de ontbondene van ω_1 volgens Ω gelijk aan deze afgeleide.

HOEKVERSNELLINGSASSEN VAN HOOGERE ORDEN.

1 . Worden (7) nog eens naar t gedifferentieerd, dan vindt men

$$\begin{aligned} \xi''' &= \begin{vmatrix} q'' & r'' \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} q' & r' \\ \eta' & \zeta' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & r \\ \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} \\ \eta''' &= \begin{vmatrix} r'' & p'' \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} r' & p' \\ \zeta' & \xi' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (8) \\ \zeta''' &= \begin{vmatrix} p'' & q'' \\ \xi & \eta \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} p' & q' \\ \eta' & \xi' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ \xi'' & \eta'' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Hieruit leest men drie componenten van de versnelling der 2e orde, n.l.

1⁰. Eene gelijk $\sqrt{\begin{vmatrix} p'' & q'' & r'' \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}^2} = \omega_2 \, R \sin (\Omega_2 \, R) = \omega_2 \, l_2$, als $\omega_2{}^2 = p''^2 + q''^2 + r''^2$ gesteld wordt en l_2 de afstand is van het punt tot de lijn $\Omega_2 \left(\frac{\xi}{p''} = \frac{\eta}{q''} = \frac{\zeta}{r''}\right)$. Zij is loodrecht gericht zoowel op Ω_2 als op R, dus loodrecht op het vlak bepaald door het punt en Ω_2.

2⁰. Een tweede gelijk $2\sqrt{\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix}^2} = 2 \, \omega_1 \, v \sin (\Omega \, V)$. Deze is loodrecht gericht zoowel op Ω als op V, dus loodrecht op het vlak bepaald door Ω en V. Zij stelt dus de versnelling voor van het vrije uiteinde van den snelheidsvector V ten gevolge van de hoekversnelling ω_1 om de as Ω_1. Zij is loodrecht gericht op het vlak bepaald door Ω_1 en V in den zin van de hoekversnelling ω_1.

3⁰. Eene derde gelijk $\sqrt{\begin{vmatrix} \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ p & q & r \end{vmatrix}^2} = \omega \, \acute{\alpha} \sin (\Omega \, \acute{\alpha})$ waar $\acute{\alpha}$ den versnellingsvector van de eerste orde van het punt voorstelt. Zij is loodrecht gericht zoowel op Ω als op $\acute{\alpha}$, dus loodrecht op het vlak door Ω en $\acute{\alpha}$ bepaald, in den zin van de wenteling om Ω. Zij stelt de snelheid van het vrije uiteinde van den versnellingsvector van de eerste orde voor ten gevolge van de wenteling om de oogenblikkelijke as Ω.

De hoek tusschen Ω_1 en Ω_2 wordt gegeven door

$$\operatorname{Cos} (\Omega_1 \, \Omega_2) = \frac{p' p'' + q' q'' + r' r''}{\omega_1 \, \omega_2} = \frac{\omega_1 \, \omega_1'}{\omega_1 \, \omega_2} = \frac{\omega_1'}{\omega_2}.$$

Valt dus Ω_2 samen met Ω_1, dan is de hoekversnelling ω_2 van de 2ᵉ orde de afgeleide ω_1' van de hoekversnelling ω_1 van de 1ᵉ orde; valt ze er niet mede samen, dan is de ontbondene $\omega_2 \cos (\Omega_2 \, \Omega_1)$

van ω_2 volgens Ω_1 gelijk aan die afgeleide. Men kan n.l. ook spreken van het *parallelogram* en het *parallelepipedum* van hoekversnellingsassen van de 2e orde, aangezien de hoekversnelling ω_2 om de as Ω_2 aequivalent is met de drie hoekversnelllingen p'', q'', r'' om de beweeglijke assen.

19. Het is duidelijk, dat men voort kan gaan met de vergelijkingen (8) naar den tijd te differentieeren, deze nieuwe weer enz., waardoor de versnellingen van de 3e, 4e orde enz. zullen gevonden worden. Men vindt voor de ontbondenen $\overset{n}{\alpha}_\xi = \xi^{(n+1)}$, $\overset{n}{\alpha}_\eta = \eta^{(n+1)}$, $\overset{n}{\alpha}_\zeta = \zeta^{(n+1)}$ van de versnelling α^n van de n^e orde de uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} \overset{n}{\alpha}_\xi &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} q^{(n-m)} & r^{(n-m)} \\ \eta^{(m)} & \zeta^{(m)} \end{vmatrix} \\ \overset{n}{\alpha}_\eta &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} r^{(n-m)} & p^{(n-m)} \\ \zeta^{(m)} & \xi^{(m)} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9) \\ \overset{n}{\alpha}_\zeta &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} p^{(n-m)} & q^{(n-m)} \\ \xi^{(m)} & \eta^{(m)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

waarin $\binom{n}{m}$ de m^e binomiaalcoefficient van de n^e macht is. Hieruit volgt:

$$\overset{n}{\alpha} = \text{Resultante} \left\{ \omega_n\, l_n\, ,\binom{n}{m} \omega_{n-m} \overset{m-1}{\alpha} \sin\left(\Omega_{n-m}\, \overset{m-1}{\alpha}\right) \right\},\ m = 1, 2, 3, \ldots n \quad \ldots . (10)$$

als $\binom{n}{o} = 1$, $\omega_0 = \omega$, $\alpha^0 = v$ genomen wordt; of in woorden:

De versnelling van de n^e orde is de resultante van $(n+1)$ componenten; eene loodrecht op het vlak bepaald door het punt en de versnellingsas Ω_n van de n^e orde $\left(\frac{\xi}{p^{(n)}} = \frac{\eta}{q^{(n)}} = \frac{\zeta}{r^{(n)}}\right)$, *en gelijk aan* $\omega_n\, l_n \left(\omega_n^2 = p^{(n)2} + q^{(n)2} + r^{(n)2} \text{ en } l_n = \text{afstand van het punt tot de as } \Omega_n\right)$ *en n componenten* $\binom{n}{m}\omega_{n-m} \overset{m-1}{\alpha} \sin\left(\Omega_{n-m}\, \overset{m-1}{\alpha}\right)$, $(m = 1, 2, \ldots . n)$, *ieder loodrecht gericht op het vlak, bepaald door de overeenkomstige hoekversnellingsas Ω_{n-m} en den versnellingsvector* $\overset{m-1}{\alpha}$.

Verder is het duidelijk, dat men spreken kan van het *parallelogram* en het *parallelepipedum van hoekversnellingsassen van iedere orde.*

Vrije beweging van een lichaam.

20. Laat de oorsprong van het met het bewegend lichaam vast verbonden assenstelsel $O\,\xi\,\eta\,\zeta$ op het tijdstip t $x_0\,y_0\,z_0$ tot coördinaten op de vaste assen hebben, zoodat de transformatie formules nu zijn:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a\,\xi + b\,y + c\,\zeta \\ y &= y_0 + a_{,}\,\xi + b_{,}\,y + c_{,}\,\zeta \\ z &= z_0 + a_{,,}\,\xi + b_{,,}\,y + c_{,,}\,\zeta. \end{aligned}$$

Worden dus in (2) x, y, z vervangen dan $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, dan vindt men bovenstaande vergelijkingen. Deze kunnen geschreven worden als volgt:

$$\begin{vmatrix} q & r \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} = v_\xi - v^0{}_\xi$$

$$\begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} = v_\eta - v^0{}_\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\begin{vmatrix} p & q \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = v_\zeta - v^0{}_\zeta$$

waar v^0 de snelheid van den beweeglijken oorsprong voorstelt en $v^0{}_\xi$, $v^0{}_\eta$, $v^0{}_\zeta$, hare ontbondenen volgens de beweeglijke assen.

Hieruit volgt:

1^0. $p\,(v_\xi - v^0{}_\xi) + q\,(v_\eta - v^0{}_\eta) + r\,(v_\zeta - v^0{}_\zeta) = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0$

zoodat de uitdrukking $pv_\xi + qv_\eta + rv_\zeta$ voor alle punten van het lichaam dezelfde waarde heeft, dus ook $\frac{p}{\omega}\,v_\xi + \frac{q}{\omega}\,v_\eta + \frac{r}{\omega}\,v_\zeta$ of de projectie van de snelheid op de oogenblikkelijke as Ω.

2^0. dat de snelheid v de resultante is van v^0 en $\omega\,l$.

De beweging van het lichaam is dus aequivalent met eene wenteling om de oogenblikkelijke as Ω $\left(\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}\right)$ met de hoeksnelheid ω en eene verplaatsing van het lichaam, waarbij elk punt de snelheid v^0 heeft, welke verplaatsing wij eene verschuiving met de snelheid v^0 zullen noemen. De snelheid van elk punt heeft tot ontbondene in de richting van de oogenblikkelijke as eene snelheid gelijk $v^0 \cos(\Omega\, v^0)$, die wij T zullen noemen.

21. Zijn er punten, wier snelheid gelijk T is?

De coördinaten van zulke punten moeten voldoen aan de vergelijkingen:

$$\begin{vmatrix} q & r \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} = \frac{p}{\omega^2}(p\,v^0_\xi + q\,v^0_\eta + r\,v^0_\zeta) - v^0_\xi = \frac{p}{\omega^2}(q\,v^0_\eta + r\,v^0_\zeta) - \frac{q^2+r^2}{\omega^2}\,v^0_\xi$$

$$\begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} = \frac{q}{\omega^2}(p\,v^0_\xi + q\,v^0_\eta + r\,v^0_\zeta) - v^0_\eta$$

$$\begin{vmatrix} p & q \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = \frac{r}{\omega^2}(p\,v^0_\xi + q\,v^0_\eta + r\,v^0_\zeta) - v^0_\zeta$$

welke ook als volgt kunnen geschreven worden:

$$q\left(\zeta - \begin{vmatrix} p & q \\ v^0_\xi & v^0_\eta \end{vmatrix} : \omega^2\right) = r\left(\eta - \begin{vmatrix} r & p \\ v^0_\zeta & v^0_\xi \end{vmatrix} : \omega^2\right)$$

$$r\left(\xi - \begin{vmatrix} q & r \\ v^0_\eta & v^0_\zeta \end{vmatrix} : \omega^2\right) = p\left(\zeta - \begin{vmatrix} p & q \\ v^0_\xi & v^0_\eta \end{vmatrix} : \omega^2\right)$$

$$p\left(\eta - \begin{vmatrix} r & p \\ v^0_\zeta & v^0_\xi \end{vmatrix} : \omega^2\right) = q\left(\xi - \begin{vmatrix} q & r \\ v^0_\eta & v^0_\zeta \end{vmatrix} : \omega^2\right)$$

zoodat de gevraagde punten liggen op de lijn

$$\frac{\xi - \begin{vmatrix} q & r \\ v^0_\eta & v^0_\zeta \end{vmatrix} : \omega^2}{p} = \frac{\eta - \begin{vmatrix} r & p \\ v^0_\zeta & v^0_\xi \end{vmatrix} : \omega^2}{q} = \frac{\zeta - \begin{vmatrix} p & q \\ v^0_\xi & v^0_\eta \end{vmatrix} : \omega^2}{r}$$

eene lijn dus evenwijdig aan de oogenblikkelijke as Ω, gaande door het punt ξ_1, η_1, ζ_1, gegeven door

$$\xi_1 = \begin{vmatrix} q & r \\ v^0_\eta & v^0_\zeta \end{vmatrix} : \omega^2$$

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} r & p \\ v^0_\zeta & v^0_\xi \end{vmatrix} : \omega^2$$

$$\zeta_1 = \begin{vmatrix} p & q \\ v^0_\xi & v^0_\eta \end{vmatrix} : \omega^2$$

De beweging is dus ook aequivalent met eene wenteling om deze lijn met de hoeksnelheid ω en eene verschuiving volgens deze lijn met de snelheid T; m. a. w. aequivalent met eene schroefbeweging. Deze lijn vormt de as der schroef waarvan de spoed is T. Daarom zullen we die as de schroefas van de beweging noemen.

22. De lengte r_0 van de lijn, die den beweeglijken oorsprong met het punt $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$, verbindt is

$$r_0 = \frac{1}{\omega^2}\sqrt{\begin{vmatrix} p & q & r \\ v^0_\xi & v^0_\eta & v^0_\zeta \end{vmatrix}^2} = \frac{\omega\, v^0 \sin(\Omega\, v^0)}{\omega^2} = \frac{u}{\omega}$$

als u de ontbondene $\sqrt{v^{02} - T^2}$ van de verschuivingssnelheid loodrecht op Ω voorstelt. Dus $u = r_0\, \omega$. Verder staat r^0 zoowel loodrecht op Ω als op v^0, en meet ze dus den kortsten afstand tusschen de schroefas en v^0, bijgevolg geeft de wenteling ω om de schroefas aan den beweeglijken oorsprong de snelheid u.

Hieruit blijkt dus, dat de wenteling ω om de schroefas aequivalent is met de wenteling ω om de as Ω $\left(\frac{\zeta}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\xi}{r}\right)$ + eene verschuiving u loodrecht op het vlak van beide assen, waaruit dan verder volgt, dat de verschuiving u aequivalent is met een koppel van aswenteling, gelegen in een vlak loodrecht op u, terwijl de afstand dier assen $\times$ hoeksnelheid $= r_0\, \omega = u$ is. Dit produkt heet het moment van het koppel.

Versnellingen.

23. Worden de vergel. (10) naar den tijd t gedifferentieerd, dan komt er:

$$\begin{aligned}
\xi'' &= \xi''_0 + \begin{vmatrix} q' & r' \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & r \\ \eta' & \zeta' \end{vmatrix} \\
\eta'' &= \eta''_0 + \begin{vmatrix} r' & p' \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & p \\ \zeta' & \xi' \end{vmatrix} \\
\zeta'' &= \zeta''_0 + \begin{vmatrix} p' & q' \\ \xi & \eta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ \xi' & \eta' \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Zij verschillen alleen van de vergelijkingen (7) door de termen ξ''_0, η''_0, ζ''_0 in het tweede lid, de versnellingen nl. volgens de beweeglijke assen van den oorsprong, en wier resultante gelijk is aan die van de ontbondenen in (1) genoemd, als daarin $n = 1$ genomen wordt.

De versnelling is dus de resultante van drie componenten nl. de twee in § 15 genoemd, $\omega^2\, l$ loodrecht gericht op de oogenblikkelijke as, $\omega_1\, l_1$ loodrecht op het vlak bepaald door de hoekversnellingsas Ω_1 en het punt, en eindelijk de versnelling van den oorsprong, de snelheid van het vrije uiteinde van den vector v^0. Deze laatste kan ontbonden worden in de tangentiale versnelling $\frac{dv^0}{dt}$ en in de normale versnelling $\omega v^0 \sin(\Omega v^0) = \omega u$, als u de ontbondene van v^0 loodrecht op de oogenblikkelijke as is, welke ontbondene gewoonlijk de orthogonale snelheid van den oorsprong heet.

Het is duidelijk, dat de versnelling van elke orde de resultante is van de componenten (9), die men vindt, als de oorsprong van het beweeglijk assenstelsel *vast* is, vermeerderd met de versnelling van dezelfde orde van den oorsprong, en die gegeven wordt door de drie componenten in (1) genoemd.

24. Een bijzonder geval van deze beweging is dat, waarbij alle punten van het lichaam zich bewegen evenwijdig aan een zelfde vlak. In dat geval beschrijft ieder punt eene vlakke baan, zoodat geene versnelling van eenige orde eene ontbondene loodrecht op dat vlak heeft. Bij deze beweging moeten dus alle hoekversnellingsassen samen vallen met de loodlijn uit den beweeglijken oorsprong op dat vlak neergelaten, waaruit verder volgt, dat $\omega_n = \omega'_{n-1} = \omega''_{n-2} = \ldots = \omega^{(n)}$ is.

Oogenblikkelijke assen en oogenblikkelijke middelpunten van hoogere orden.

25. Uit de formules (9) voor de ontbondenen van de versnelling van de n^e orde van een punt eens lichaams, dat om een vast punt beweegt, volgt:

1^0 dat die ontbondenen liniaire functies van de coördinaten ξ, η, ζ, van het punt zijn;

2^0 dat de coefficienten van ξ, η, ζ alleen afhangen van $p, q, r, p', q', r' \ldots p^{(n)}, q^{(n)}, r^{(n)}$, zoodat ook de determinant van het liniaire stelsel alleen van deze grootheden zal afhangen.

Zoo is b. v. de determinant D_1, welke behoort bij de versnelling van de 1^e orde:

$$D_1 = \begin{vmatrix} p^2 - \omega^2, & pq - r', & pr + q' \\ pq + r', & q^2 - \omega^2, & qr - p' \\ pr - q', & qr + p', & r^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = \omega^2 (\omega'^2 - \omega_1^2), \quad . \; . \; (12)$$

terwijl de determinant D_2 van de 2^e orde is

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3pp' - 3\omega\omega' & , 2pq' + p'q + (\omega^2 r - r''), & 2pr' + p'r - (\omega^2 q - q'') \\ 2p'q + pq' - (\omega^2 r - r''), & 3qq' - 3\omega\omega' & , 2qr' + q'r + (\omega^2 p - p'') \\ 2p'r + pr' + (\omega^2 q - q''), & 2q'r + qr' - (\omega^2 p - p''), & 3rr' - 3\omega\omega' \end{vmatrix}$$

Wordt deze ontwikkeld in gedeeltelijke determinanten, waarin de termen $3\omega\omega'$, $\omega^2 p - p''$, $\omega^2 q - q''$, $\omega^2 r - r''$ behouden blijven, dan vindt men, dat de som der termen, die onafhankelijk zijn van genoemde uitdrukkingen, identiek gelijk nul is. De overige geven samen:

$$D_2 = 3\omega\,[\omega'\{I - 2\,\omega^2(\omega'^2 - \omega_1^2)\} - \omega^3\{\omega_1\,\omega'_1 - \omega'\,\omega_2\cos(\Omega\,\Omega_2)\} -$$

$$- \omega_2\{\omega'\,\omega_2 - \omega_1\,\omega'_1\cos(\Omega\,\Omega_2)\}] \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

waar

$$I = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix}$$

den inhoud voorstelt van het parallelepipedum op ω, ω_1, ω_2 als ribben beschreven.

Vallen Ω en Ω_1 samen, zoodat $\omega_1 = \omega'$ en $\omega_2 \cos(\Omega\,\Omega_2) = \omega''$ is, dan gaat deze determinant D_2 over in

$$D_2 = -\,3\,\omega\,\omega_1\,\omega_2^2\sin^2(\Omega\,\Omega_2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

en wordt dus gelijk nul, wanneer ook Ω_2 met Ω en Ω_1 samenvalt. D_2 wordt dus nul voor $\omega = 0$ en ook voor $\omega_2 = \omega'_1 = \omega''$, als dus de drie hoekversnellingsassen van de 0^e, 1^e en 2^e orde samenvallen. D_1 wordt nul voor $\omega = 0$ en ook voor $\omega_1 = \omega'$, als dus de assen Ω en Ω_1 samenvallen.

26. Is de determinant D_n ongelijk aan nul, dan kan men in het lichaam altijd één, maar ook slechts één punt aanwijzen, welks versnellingsvector van de n^e orde eene vooraf bepaalde grootte en richting heeft, en dan is het vaste punt het eenige punt, dat geene versnelling van de n^e orde heeft.

Is de determinant D_n gelijk nul, dan heeft ieder punt van 't lichaam nog de versnelling van de n^e orde, aangewezen door de vergelijkingen (9), maar nu bestaat er eene betrekking tusschen de ontbondenen van die versnelling, zoodat het nu niet altijd mogelijk zal zijn een punt van 't lichaam aan te wijzen, welks versnellingsvector van de n^e orde eene vooraf bepaalde richting en grootte heeft.

Daarentegen bestaat er nu eene rechte lijn in het lichaam, die door het vaste punt gaat, wier punten geene versnelling van de n^e orde hebben, en die alzoo *de oogenblikkelijke as van de n^e orde* kan genoemd worden. Hare vergelijking wordt gegeven door twee van de drie vergelijkingen (9), als daarin de eerste leden gelijk nul gesteld worden.

27. Nu is de determinant D_n niet identiek gelijk nul, omdat gemakkelijk kan aangetoond worden, dat er altijd een geval denk-

baar is, waarbij het vaste punt het eenige is, dat eene versnelling van de n^e orde gelijk nul heeft.

Onderstellen we nl. dat alle hoekversnellingsassen behalve de laatste of Ω_n samenvallen met de oogenblikkelijke as, dan liggen de n componenten $\binom{n}{m}\omega_{n-m}\overset{m-1}{\alpha}\sin\left(\Omega_{n-m}\overset{m-1}{\alpha}\right)$ allen in het vlak dat loodrecht op de gemeenschappelijke as staat en door het punt gaat. De $(n+1)^e$ component $\omega_n\, l_n$ ligt buiten dat vlak. Werd het punt op de gemeenschappelijke as gekozen, dan is de versnelling gelijk $\omega_n\, l_n$; en werd het punt gekozen op Ω_n zelf, dan zou de versnelling alleen nul kunnen wezen, als dit 't geval was met de resultante van de eerstgenoemde n componenten; en daar deze zeker niet voor alle punten in het normale vlak nul kan wezen, behoeft men Ω_n slechts getrokken te denken door een punt van dat vlak, voor hetwelk die resultante niet nul is. De uitdrukking (14) voor D_2 bevestigt de stelling.

In 't algemeen dus zal D_n niet nul wezen, maar alle mogelijke waarden kunnen hebben, aangezien de grootheden $\omega, \omega_1, \omega_2 \ldots . \omega_n$ waarvan ze afhangt, geheel willekeurig zijn.

28. Is $D_n = 0$, dan moet er dus eene betrekking tusschen de hoekversnellingen bestaan.

Twee betrekkingen kunnen wij uit (9) afleiden, voor welke $D_n = 0$ moet wezen.

Eerstens als $\omega_n = \omega'_{n-1} = \omega''_{n-2} = \ldots . = \omega^{(n)}$ is, m. a. w. als alle hoekversnellingsassen van de 0^0 tot de n^e orde samenvallen. Want dan zijn $p^{(l)}$, $q^{(l)}$, $r^{(l)}$ evenredig met p, q, r; en worden in (9) ξ evenredig met p, η met q, ζ met r gesteld, zoodat het punt op de oogenblikkelijke as Ω wordt aangenomen, dan worden alle determinanten in de tweede leden gelijk nul, en met dezen ook de versnelling $\overset{n}{\alpha}$. De oogenblikkelijke as van de 0^e orde is dan tevens die van elke andere orde.

De tweede betrekking blijkt uit (10), als deze op de volgende wijze geschreven wordt:

$$\overset{n}{\alpha} = \text{Result.}\left\{\begin{array}{l} \omega_n\, l_n, \begin{array}{l}\binom{n}{1}\omega_{n-1}\overset{0}{\alpha}\sin\left(\Omega_{n-1}\overset{0}{\alpha}\right), \ldots\ldots, \\ \binom{n}{1}\omega\overset{n-1}{\alpha}\sin\left(\Omega\overset{n-1}{\alpha}\right), \ldots\ldots, \end{array} \\ \begin{array}{l} \ldots\ldots\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\omega_{\frac{n+1}{2}}\overset{\frac{n-3}{2}}{\alpha}\sin\left(\Omega_{\frac{n+1}{2}}\overset{\frac{n-3}{2}}{\alpha}\right), \\ \ldots\ldots\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\omega_{\frac{n-3}{2}}\overset{\frac{n+1}{2}}{\alpha}\sin\left(\Omega_{\frac{n-3}{2}}\overset{\frac{n+1}{2}}{\alpha}\right), \end{array} \binom{n}{\frac{n+1}{2}}\omega_{\frac{n-1}{2}}\overset{\frac{n-1}{2}}{\alpha}\sin\left(\Omega_{\frac{n-1}{2}}\overset{\frac{n-1}{2}}{\alpha}\right), \end{array}\right\}$$

als n *oneven* is,

$$\overset{n}{\alpha} = \text{Result.}\left\{\begin{array}{l} \omega_n l_n, \binom{n}{1}\omega_{n-1}\overset{0}{\alpha}\sin\left(\Omega_{n-1}\overset{0}{\alpha}\right), \ldots\ldots, \\ \qquad\quad \binom{n}{1}\omega\overset{n-1}{\alpha}\sin\left(\Omega\overset{n-1}{\alpha}\right), \ldots\ldots, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\binom{n}{\frac{n}{2}}\omega_{\frac{n}{2}}\overset{\frac{n-2}{2}}{\alpha}\sin\left(\Omega_{\frac{n}{2}}\overset{\frac{n-2}{2}}{\alpha}\right) \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\binom{n}{\frac{n}{2}}\omega_{\frac{n-2}{2}}\overset{\frac{n}{2}}{\alpha}\sin\left(\Omega_{\frac{n-2}{2}}\overset{\frac{n}{2}}{\alpha}\right)\end{array}\right\}$$

als n *even* is.

Omdat nu met $\omega = \omega_1 = \ldots\ldots = \omega_l = 0$ gepaard gaat $\alpha^0 = \alpha^1 = = \alpha^2 = \ldots = \alpha^l = 0$, zoo zien we, dat de versnelling $\overset{n}{\alpha}$ van de n^e orde zich reduceert tot $\omega_n l_n$ en dat bijgevolg de as Ω_n de oogenblikkelijke as van de n_e orde is, zoodra $\omega = \omega_1 = \ldots\ldots = \omega_{\frac{n-1}{2}} = 0$ is voor n *oneven*, of $\omega = \omega_1 = \ldots\ldots = \omega_{\frac{n-2}{2}} = 0$ voor n *even*. Tevens blijkt, dat elke hoekversnellingsas van lagere orde de oogenblikkelijke as van dezelfde orde is. In 't algemeen geldt de stelling:

Is $\omega = \omega_1 = \omega_2 = \ldots\ldots = \omega_l = 0$, *dan is* Ω_{l+1} *de oogenblikkelijke as van de* $(l+1)^e$ *orde*, Ω_{l+2} *die van de* $(l+2)^e$ *orde*, ..., Ω_{2l+2} *die van de* $(2l+2)^e$ *orde.*

De uitdrukking (12) voor D_1 geeft aan, dat deze alleen in beide gevallen nul wordt, terwijl ook D_2 nul wordt van $\omega = 0$ volgens (13) en voor $\omega_2 = \omega'_1 = \omega''$ volgens (14).

29. Bij de wenteling van een lichaam om een vast punt is er dus in 't algemeen altijd één, maar ook slechts één punt aan te wijzen, welks versnellingsvector van de n^e orde eene vooraf bepaalde grootte en richting heeft, zoodat het *vaste* punt, waarom het lichaam beweegt, het eenige is, waarvan de versnellingen van alle orden nul zijn.

30. Heeft een lichaam eene geheel willekeurige beweging, dan bestaat er in het algemeen slechts één punt, welks versnellingsvector van de n^e orde nul is, dat dus een *oogenblikkelijk versnellingsmiddelpunt van de* n^e *orde is.* Omdat er toch slechts één punt is, welks versnellingsvector, in de onderstelling nl. dat de oorsprong *vast* gedacht wordt, gelijk maar tegengesteld gericht is aan den versnellingsvector van dien oorsprong, zoo zal dat in werkelijkheid eene versnelling van de n^e orde hebben, die nul is. Omdat in 't algemeen D_n niet gelijk nul is, bestaat er dus in 't algemeen een *oogenblikkelijk versnellingsmiddelpunt van de* n^e *orde.*

31 Noemen we de coördinaten van dat oogenblikkelijke versnellingsmiddelpunt ξ_1, η_1, ζ_1, en is $\overset{n}{\alpha}_0$ de versnelling van de n^e orde van den oorsprong van het beweeglijk assenstelsel, dan is volgens (9)

$$\overset{n}{\alpha}_\xi - \overset{n}{\alpha}_{0\xi} = \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} q^{(n-m)} & r^{(n-m)} \\ \eta^{(m)} & \zeta^{(m)} \end{vmatrix},$$

en volgens onderstelling

$$-\overset{n}{\alpha}_{0\xi} = \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} q^{(n-m)} & r^{(n-m)} \\ \eta_1{}^{(m)} & \zeta_1{}^{(m)} \end{vmatrix},$$

zoodat door aftrekking hieruit volgt:

Evenzoo is

$$\left.\begin{aligned} \overset{n}{\alpha}_\xi &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} q^{(n-m)} & r^{(n-m)} \\ (\eta-\eta_1)^{(m)} & (\zeta-\zeta_1)^{(m)} \end{vmatrix} \\ \overset{n}{\alpha}_\eta &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} r^{(n-m)} & p^{(n-m)} \\ (\zeta-\zeta_1)^{(m)} & (\xi-\xi_1)^{(m)} \end{vmatrix} \\ \overset{n}{\alpha}_\zeta &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} p^{(n-m)} & q^{(n-m)} \\ (\xi-\xi_1)^{(m)} & (\eta-\eta_1)^{(m)} \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Deze formules gaan over in (9), als $\xi-\xi_1$, $\eta-\eta_1$, $\zeta-\zeta_1$ veranderd worden in ξ, η, ζ, m. a. w. als het oogenblikkelijk versnellingsmiddelpunt tot oorsprong van het beweeglijk assenstelsel wordt gekozen. *De versnelling van de n^e orde van een punt eens lichaams, dat de meest algemeene beweging heeft, is gelijk aan die, welke het hebben zou, als het oogenblikkelijke versnellingsmiddelpunt van de n^e orde tot vasten oorsprong van het beweeglijke assenstelsel wordt gekozen.* De versnellingen van de 0^e tot aan de $(n-1)^e$ orde, welke dit punt heeft, wijzigen de versnelling van de n^e orde in geenen deele.

32. Is D_n echter gelijk nul, (zooals bij D_0, die identiek gelijk nul is, bij D_1 voor $\omega = 0$ en voor $\omega_1 = \omega'$; bij D_2 voor $\omega = 0$ en $\omega_2 = \omega_1' = \omega''$) dan bestaat er eene liniaire betrekking tusschen $\overset{n}{\alpha}_\xi - \overset{n}{\alpha}_{0\xi}$, $\overset{n}{\alpha}_\eta - \overset{n}{\alpha}_{0\eta}$, $\overset{n}{\alpha}_\zeta - \overset{n}{\alpha}_{0\zeta}$, die *identiek* gelijk nul is. De coefficienten van die grootheden (nl. de onderdeterminanten van de 1^e orde van D_n, welke uit twee *kolommen* kunnen gevormd worden) zijn functies van $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_n$. Noemen we ze kortheidshalve A, B, C, dan is dus

$$A\overset{n}{\alpha}_\xi + B\overset{n}{\alpha}_\eta + C\overset{n}{\alpha}_\zeta = \text{standvastig.}$$

In geval dus $D_n = 0$ is, bestaat er eene richting volgens welke de ontbondene van $\overset{n}{\alpha}$ voor *alle* punten dezelfde grootte heeft.

De richtingscoefficienten van die lijn zijn evenredig met het drietal onderdeterminanten, die gevormd kunnen worden uit twee *kolommen* van D_n, terwijl de richtingscoefficienten van de oogenblikkelijke hoekversnellingsas evenredig zijn met de drie onderdeterminanten, welke uit twee *rijen* van D_n kunnen gevormd worden. Zonder nader onderzoek mag dus niet aangenomen worden, dat beide richtingen samenvallen, en dus de mogelijkheid bestaat, dat er bij alle versnellingen van hoogere orde eene as is, wier punten alle dezelfde versnelling alleen *in* de richting dier as hebben, evenals dit het geval is bij de versnellingen van de 0^e orde.

33. Evenwel kan aangetoond worden, dat wanneer Ω_n de oogenblikkelijke hoekversnellingsas van de n^e orde is, er eene schroefas van de n^e orde bestaat.

In dit geval toch zijn de vergelijkingen voor de ontbondenen van de versnelling van de n^e orde:

$$\overset{n}{\alpha}_\xi - \overset{n}{\alpha}_{0\xi} = \begin{vmatrix} q^{(n)} & r^{(n)} \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

$$\overset{n}{\alpha}_\eta - \overset{n}{\alpha}_{0\eta} = \begin{vmatrix} r^{(n)} & p^{(n)} \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}$$

$$\overset{n}{\alpha}_\zeta - \overset{n}{\alpha}_{0\zeta} = \begin{vmatrix} p^{(n)} & q^{(n)} \\ \xi & \eta \end{vmatrix}$$

Worden deze vergeleken met (11) in § 20, dan ziet men, dat daar p, q, r, v veranderd moeten worden resp. in $p^{(n)}$, $q^{(n)}$, $r^{(n)}$, $\alpha^{(n)}$ om in deze over te gaan. Met deze verwisseling kunnen we het daar gevonden resultaat overnemen.

Het blijkt dus, dat ingeval Ω_n is de oogenblikkelijke hoekversnellingsas, 1^0. er eene *schroefas* van de n^e orde bestaat, 2^0. dat eene *verschuiving* met de versnelling $\overset{n}{\alpha}$ aequivalent is met een *koppel van hoekversnellingen* van de n^e orde, welks vlak loodrecht op $\overset{n}{\alpha}$ gericht is en welks moment gelijk $\overset{n}{\alpha}$ is.

34. Geschiedt de beweging van het lichaam evenwijdig aan een plat vlak, dan moeten alle hoekversnellingsassen samenvallen met

de loodlijn, uit den beweeglijken oorsprong op dat vlak neergelaten en bestaat er bij deze beweging altijd eene oogenblikkelijke as voor elke orde.

De doorsnede van die as met het vlak zal dan het oogenblikkelijk middelpunt kunnen genoemd worden van de beweging der doorsnede van het lichaam met het vlak.