Over de theorie der straling in verband met de voorstelling van Fourier

DOOR

P. H. DOJES.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE)

Deel III. N°. 4.

AMSTERDAM
JOHANNES MÜLLER
1895

Over de theorie der straling in verband met de voorstelling van Fourier.

INLEIDING.

§ 1. De tegenwoordig algemeen aangenomene voorstelling, betreffende de warmte- en licht-emissie van een stralend (gloeiend) lichaam is door Fourier het eerst duidelijk uiteengezet. [1]) Zijne „hypothèse du rayonnement particulaire" schijnt zelfs zoo beslist het wezen der zaak weer te geven, dat van het hypothetische zijner voorstelling nauwelijks meer sprake kan zijn.

Volgens de bedoelde voorstelling dragen de afzonderlijke deeltjes, ook de inwendige, van een stralend lichaam bij tot de totale hoeveelheid warmte en licht (stralende energie), die het lichaam uitzendt. Gaat men dus voor elk element van het lichaam na, welke de hoeveelheid stralende energie is, die van het element afkomstig is, dan is de in 't geheel geëmitteerde hoeveelheid stralende energie van het lichaam eenvoudig de som van al deze elementaire hoeveelheden. De stralende energie, afkomstig van een deeltje in het inwendige van een lichaam, plant zich van daar, onder gedeeltelijke absorptie, naar alle kanten door de massa van het stralende lichaam voort tot het oppervlak van het lichaam is bereikt en gaat dan uit het stralende lichaam in de omringende diathermane middenstof over. Is het oppervlak van het lichaam glad, dan gelden bij dien overgang de eenvoudige wetten der breking.

Verschillende verschijnselen laten zich aanstonds qualitatief met behulp dezer voorstelling verklaren. Zoo bijv. het feit, door Arago [2]) ontdekt, dat het licht, hetwelk in schuine richting door gloeiende vaste of vloeibare lichamen wordt uitgezonden, partiëel is gepolariseerd en dat het polarisatie-vlak loodrecht staat op het vlak van

[1]) Fourier, Mém. de l'Acad. des Sc. t IV en V. 1821 en 22.
[2]) Arago. Oeuvres Compl. VII, 403.

emissie. Immers, als zijnde *gebroken*, moet het geëmitteerde licht deze eigenschap vertoonen.

Ook kan men, zich grondende op de bedoelde voorstelling, aanstonds het vermoeden uitspreken, dat de diathermane middenstof, die een stralend lichaam omringt, van invloed moet zijn op de hoeveelheid stralende energie, door het lichaam in bepaalden tijd uitgezonden. Want het licht (of de warmte), uitgestraald door de deeltjes van het lichaam, zal, aan de (gladde) oppervlakte gekomen, deels worden teruggekaatst, deels worden gebroken en alleen dit laatste gedeelte beslist over de intensiteit van het geëmitteerde licht. De richtingsverandering bij de breking en de hoeveelheid gebroken licht zijn beide ook afhankelijk van den aard der omringende middenstof; deze moet dus van invloed zijn op de emissie.

Het is de verdienste van Clausius [1]) het eerst gewezen te hebben op den invloed van de omringende middenstof; niet door eene beschouwing als de voorafgaande echter, maar op werkelijk geheel verschillende wijze heeft hij dien invloed nagegaan.

§ 2. Om evenwel, behalve qualitatieve gevolgtrekkingen ook quantitatieve resultaten te verkrijgen, moet men de voorstelling mathematisch uitwerken. In dit opzicht heeft de beroemde wiskundige, die vooral op het gebied der mathematische physica zich onsterfelijke lauweren heeft verworven, slechts weinig gedaan. In zijne berekeningen wordt zooveel verwaarloosd, dat van een wiskundig uitwerken der voorstelling nauwelijks sprake kan zijn. Ook van latere natuurkundigen vindt men geene strenge uiteenzetting; alleen Koláček [2]) heeft, met behulp van de electro-magnetische lichttheorie een onderzoek ingesteld naar de wiskundige uitkomsten van Fourier's voorstelling. Zijne methode verschilt geheel en al van die, welke hier gevolgd zal worden; zijn onderzoek betreft ook ten deele geheel andere grootheden.

Bij de toepassing van de mechanische warmte-theorie op de verschijnselen der emissie en absorptie is tot nu toe de voorstelling van Fourier niet in de beschouwingen opgenomen. Noch aan de beroemde onderzoekingen van Kirchhoff, noch aan die van Clausius ligt zij ten grondslag.

De theorie der straling, die door toepassing der mechanische warmte-theorie eene groote schrede voorwaarts deed, heeft in den laatsten tijd door de hulp der electro-magnetische licht-

---

[1]) Clausius, Mech. Wärme-theorie. 2te Aufl. Bd. 1 pag. 335.

[2]) Koláçek-Wied. Ann. Bd. 39 pag. 246

theorie van Maxwell nogmaals vorderingen gemaakt (Boltzmann). [1])

In deze verhandeling zal in de eerste plaats de voorstelling van Fourier worden uitgewerkt voor de straling van lichamen met gladde oppervlakte. Eene formule wordt daarbij afgeleid, die o. a. ook weergeeft den invloed van de omringende diathermane [2]) middenstof. Door toepassing der mechanische warmte-theorie heeft Clausius het eerst dien invloed opgemerkt en wiskundig uitgedrukt: het blijkt, dat de op zoo verschillende wegen verkregen resultaten met elkaar in overeenstemming zijn.

Hoe algemeen echter de resultaten ook zijn, die verkregen worden door toepassing der mechanische warmte-theorie, toch kleeft er aan de afleiding iets onbevredigends; het eigenlijke mechanisme van de verschijnselen blijft in het duister.

Daarentegen geven de hier volgende beschouwingen ook inzicht in het mechanisme van de straling; zij laten duidelijk zien, waarom het omringende medium van invloed is; zij leeren dus meer de directe oorzaken kennen, welke dien invloed bewerken.

Terwijl tot zoover de straling werd beschouwd, als er geen evenwicht van temperatuur bestaat, wordt dan verder de voorstelling van Fourier toegepast als alle uitstralende en ontvangende lichamen overal gelijke temperatuur hebben; hierbij wordt ook de toestand van den aether in de beschouwingen opgenomen. Door deze beschouwingen komen wij tot twee algemeene, voor zoover wij weten, nieuwe formules.

In overeenstemming met de resultaten, door Kirchhoff uit de mechanische warmte-theorie afgeleid, wordt verder ook met behulp van de in I afgeleide formule in het licht gesteld, waarom de totale emissie van stralende lichamen met gladde oppervlakte niet streng kan voldoen aan de stralingswet van Stefan. [3]) Eindelijk wordt ook nog de voorstelling van Fourier toegepast op de beroemde proef van Kirchhoff: de omkeering der natriumlijnen.

I

§ 3. In de volgende beschouwingen worden alleen lichamen opgenomen, die alleen eigen warmte of licht uitstralen en door gladde oppervlakken worden begrensd, dus verwarmde lichamen

---

[1]) Wied. Ann. Bd 22 pag. 31 en 291.

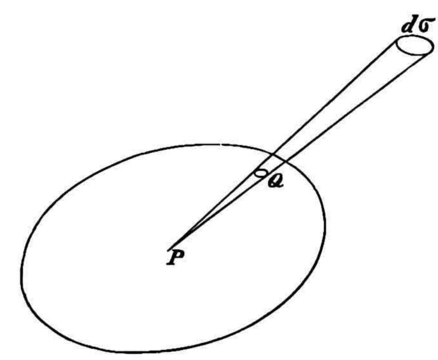
[2]) diathermaan sluit hier tevens in: volkomen doorzichtig.

[3]) Wiener Berichte. Bd 79. 1879.

van glas enz. met gepolijste oppervlakte en vloeistoffen of lichtemitteerende gasmassa's, bijv. vlammen, die lichtgevend zijn door daarin aanwezige metaaldampen [1]) (natriumvlam). Zij worden verondersteld te zijn isotroop en homogeen (in al hunne deelen heerscht dus ook dezelfde temperatuur; het verlies van warmte door straling wordt dus op andere wijze geacht te worden gecompenseerd).

Ieder element van het stralende lichaam straalt dus licht en warmte uit; is het spectrum van het geëmaneerde licht continu, dan zendt ieder lichaamselement stralende energie uit van oneindig vele golflengten; de hoeveelheid stralende energie van eene golflengte tusschen λ en $\lambda + d\lambda$ (in het luchtledige gemeten), die een lichaamselement $dxdydz$ naar alle kanten in de eenheid van tijd uitzendt, kan dan worden voorgesteld door $Id\lambda \,.\, dxdydz$, waarbij I eene constante voor het lichaam is, die, als wij met zuivere temperatuur-straling te doen hebben, alleen afhangt van de golflengte λ, van den aard en van de temperatuur van het stralende lichaam. Men kan aan I geschikt den naam geven van specifiek emitteerend vermogen van het lichaam voor stralende energie van bepaalde golflengte.

Men kan nu in de eerste plaats vragen naar de *totale* hoeveelheid stralende energie van eene golflengte tusschen λ en $\lambda + d\lambda$, die een stralend lichaam van bepaalden vorm naar een vlak-element $d\sigma$ zendt. De berekening van deze totale hoeveelheid zal hier alleen worden nagegaan voor het geval, dat men te doen heeft met eene stralende massa, waarvan de brekingsindex gelijk is aan die van het omringende diathermane medium en waarvan de absorptiecoëfficiënt nog die grootte heeft, dat bij den overgang uit de stralende massa in de omringende middenstof van de stralende energie geen merkbaar bedrag wordt teruggekaatst. De richtingsverandering door breking valt dus ook weg.



Zij bij het punt $P\,(x, y, z)$ een lichaams-element $dxdydz$ aanwezig en zij $d\omega$ de lichamelijke hoek, waaronder men in P het vlakelement $d\sigma$ ziet, dan gaat van het element $dxdydz$ naar $d\sigma$ in de eenheid van tijd eene hoeveelheid stralende energie, met eene golflengte tusschen λ en $\lambda + d\lambda$,

$$= Id\lambda \,.\, dxdydz \,.\, \frac{d\omega}{4\pi}.$$

[1]) De gewone gasvlam met hare lichtende kooldeeltjes blijft dus buiten beschouwing.

Over den weg PQ, langs welken deze hoeveelheid zich in het stralende lichaam voortplant, ondervindt zij absorptie, zoodat bij Q hare intensiteit

$$= I d\lambda \,.\, dxdydz \,.\, \frac{d\,\omega}{4\,\pi} \,.\, e^{-\alpha r},$$

als α de absorptie-coëfficiënt (voor de intensiteit), $PQ = r$ en e de basis der natuurlijke logarithmen is. Zij ρ de afstand van P tot $d\sigma$ en ε de hoek van de normaal op $d\sigma$ met de verbindingslijn van P naar $d\sigma$, dan is:

$\rho^2 d\omega = d\sigma \cos \varepsilon$, zoodat het element bij P naar $d\sigma$ zendt:

$$\frac{I\,d\lambda}{4\,\pi} \,.\, d\sigma \,.\, e^{-\alpha r} \frac{\cos \varepsilon}{\rho^2} \,.\, dxdydz.$$

In 't geheel valt dus op $d\sigma$ eene hoeveelheid energie met bepaalde golflengte $= \frac{I\,d\lambda}{4\,\pi} \,.\, d\sigma \,.\, \iiint e^{-\alpha r} \frac{\cos \varepsilon}{\rho^2} \, dxdydz$, waarbij de 3-voudige integraal over het geheele stralende lichaam uit te breiden is. Zijn nu ξ, η en ζ de coördinaten van het middelpunt van $d\sigma$ en l, m en n de hoeken van de normaal op $d\sigma$ met de assen, dan is:

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \text{ en}$$

$$\cos \varepsilon = \cos l \,.\, \frac{\xi - x}{\rho} + \cos m \,.\, \frac{\eta - y}{\rho} + \cos n \,.\, \frac{\zeta - z}{\rho}.$$

Is verder $F(x, y, z) = 0$ de vergelijking van het oppervlak van het stralende lichaam, dan moeten de coördinaten van Q,

$$x + r\frac{\xi - x}{\rho}, \quad y + r\frac{\eta - y}{\rho}, \quad z + r\frac{\zeta - z}{\rho} \quad \text{hieraan voldoen.}$$

Deze vergelijking bepaalt r als functie van x, y, z, ξ, η en ζ.

De moeilijkheid om zelfs voor lichamen van eenvoudige gedaante, bijv. een bol, de integratie uit te voeren, maakt dat de vraag naar de totale hoeveelheid, die een vlak-element van een stralend lichaam ontvangt, moeilijk te beantwoorden is. Toch schijnen de formules van eenig belang, omdat zij kunnen dienen om na te gaan, welken invloed de vorm van een (natrium-)vlam en de ruimte, die zij inneemt, heeft op de hoeveelheid licht, die zij uitzendt.

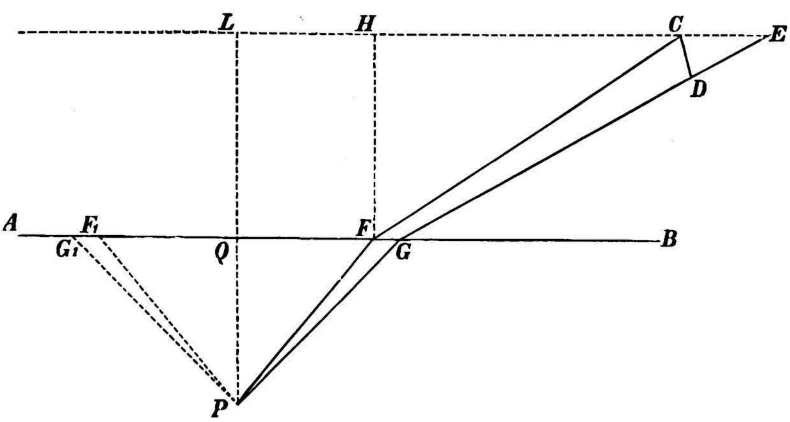
Een analoog probleem als dat van Gauss, betreffende het lichaam van maximale attractie bij gegevene massa, kan hierbij worden gesteld: hoe moet eene gegevene hoeveelheid, homogene, stralende massa worden begrensd om naar een element, met bepaalde grootte, van hare oppervlakte de maximale hoeveelheid energie te zenden;

m. a. w., als $\iiint dxdydz$ gegeven is,

wanneer wordt dan $\iiint e^{-\alpha r} \frac{\cos \varepsilon}{r^2} \, dxdydz$ een maximum?

§ 4. In plaats van de hoeveelheid stralende energie, door een geheel lichaam geëmitteerd, zullen wij in het vervolg berekenen die hoeveelheid, welke door een oppervlakte-element dS van het stralende lichaam gaande, het vlak-element $d\sigma$ bereikt. Door deze vraag te stellen nadert men tot de oude beschouwing, die alleen straling van oppervlakken kende; terwijl men echter, volgens de oude opvatting, bij de formule van Lambert dacht aan de stralende energie, uitgaande van een oppervlakte-element, mag men eigenlijk slechts spreken van de hoeveelheid stralende energie, die naar buiten treedt door een oppervlakte-element Evenmin als de absorptie van licht of warmte plaats heeft in het geometrische oppervlak van een lichaam, kan ook de emissie daar hare oorsprong vinden.

Op de volgende wijze kan men de bedoelde hoeveelheid berekenen. Het stralende lichaam zij isotroop en in alle zijne deelen van dezelfde samenstelling en temperatuur. Men stelle zich verder voor, dat het lichaam door een plat vlak AB wordt begrensd, terwijl het zich aan de eene zijde van AB (naar beneden) tot in het oneindige uitbreidt. Deze zuiver mathematische aanname wordt physisch weergegeven door de onderstelling, dat de dikte van het lichaam (loodrecht op AB gemeten) zoo groot is, dat vermeerdering der dikte niet meer van invloed is op de intensiteit der straling, door AB uittredende.



Als voorbereiding berekenen wij eerst de hoeveelheid energie, die een vlak-element $d\sigma$ ontvangt van een willekeurig lichaamselement, bij P aanwezig. Het vlak van teekening gaat door de normaal PQ en het middelpunt van het element $d\sigma$; CD is de doorsnede van dit vlak-element met het vlak van teekening. De vlak-elementen zullen wij voorstellen door $|CD|$, $|CE|$ en $|FG|$. Een stralenbundel, van P uitgaande, gaat door $|FG|$, wordt daar gebroken en bereikt dan $|CD|$ Zij $d\omega$ de lichamelijke hoek, waaronder men in P $|FG|$ ziet, dan valt op $|CD|$: $Id\lambda . dxdydz . \frac{d\omega}{4\pi} . e^{-\alpha\varrho} \times D$, als $PF = \rho$, α de absorptie-coëfficiënt (voor de intensiteit) en D de doorlatingsfactor is. Wij zullen thans $d\omega$ uitdrukken in $PF(\rho)$, CF, $\angle\, QPF = i$, $\angle\, CFH = i_1$ en ε, den hoek, dien de loodlijn op $|CD|$ of $d\sigma$ maakt met CF. Alle stralen, van P uitgaande, die hoeken van af $\angle\, QPF$ tot $\angle\, QPG$ maken met de loodlijn PQ, liggen binnen 2 kegel-oppervlakken met P tot top. De platte ring FGF_1G_1 heeft tot oppervlakte $2\pi FQ \times FG$ (daar FG oneindig klein is). Het licht, van P uit door dien ring gaande, valt ten slotte op den ring CEC_1E_1, wiens oppervlakte $= 2\pi CL \times CE$.

Blijkbaar is nu: $|CE| : |FG| = 2\pi CL \times CE : 2\pi FQ \times FG$ of daar $|CE| \cos i_1 = |CD| \cos \varepsilon = d\sigma \cos \varepsilon$,

$$\frac{d\sigma \, . \, \cos\varepsilon}{\cos i_1} : |FG| = (FQ + CH) \times \left(FG + \frac{FC \, . \, di_1}{\cos i_1}\right) : FQ \times FG$$

waarbij $i_1 + di_1$ de hoek van GE met de loodlijn op AB is. Hieruit volgt:

$$\text{oppervlakte-element } |FG| = \frac{d\sigma \, . \cos\varepsilon}{\cos i_1} \, . \, \frac{\rho \sin i \times \frac{\rho \, di}{\cos i}}{(\rho \sin i + FC \sin i_1)\left(\frac{\rho \, di}{\cos i} + \frac{FC di_1}{\cos i_1}\right)}$$

$$= \frac{d\sigma \, . \cos\varepsilon}{\cos i_1} \, . \, \frac{\rho^2 \sin i \cos^2 i_1}{(\rho \sin i + FC \sin i_1)\,(\rho \cos^2 i_1 + FC \, . \, \nu \, . \cos^2 i)}$$

waarbij ν de brekingsverhouding $\frac{\sin i_1}{\sin i}$ voorstelt.

Daar bovendien $PF^2 \, . \, d\omega = \rho^2 \, d\omega = |FG| \cos i$

$$\text{is } d\omega = \frac{d\sigma \, . \, \cos\varepsilon \, . \, \cos i \, . \, \cos i_1}{(\rho + \nu FC)\,(\rho \cos^2 i_1 + \nu \, . \, FC \, . \cos^2 i)}$$

en de hoeveelheid stralende energie van eene golflengte tusschen λ en $\lambda + d\lambda$, die $d\sigma$ in de eenheid van tijd van het lichaamselement $dxdydz$, bij P aanwezig, ontvangt, is dus

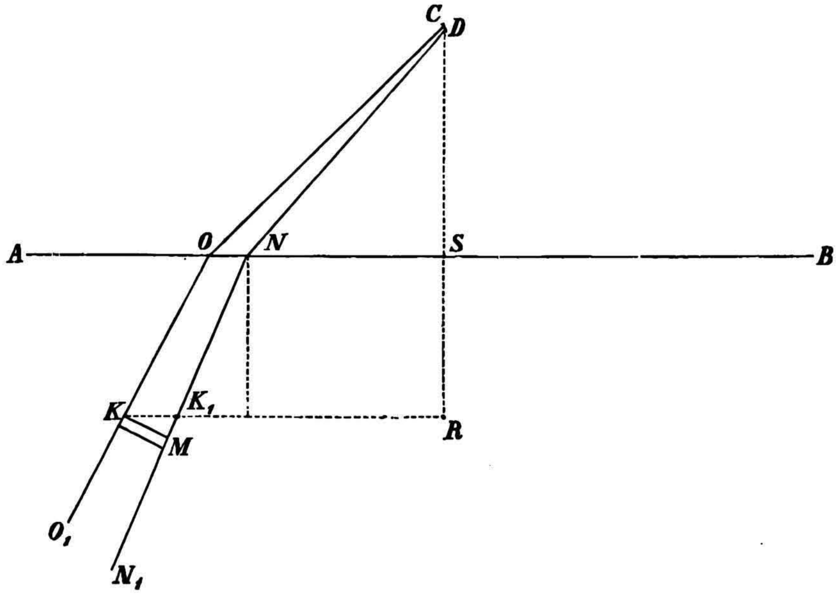
$$= dxdydz . \frac{Id\lambda}{4\pi} . e^{-\alpha\varrho} \frac{d\sigma \, . \, \cos\varepsilon \, . \, \cos i \, . \, \cos i_1}{(\rho + \nu FC)\,(\rho \cos^2 i_1 + \nu FC \cos^2 i)} \times D \text{ [1]}) \, . \, . \, . \, . \, . \quad (1)$$

§ 5. Thans gaan wij over tot de berekening van de hoeveelheid energie, die door een oppervlakte-element dS van AB gaande, op een vlak-element valt. Daartoe moeten wij vooreerst uitmaken, welke lichaams-elementen, door dS heen, stralende energie zenden naar dat vlak-element.

---

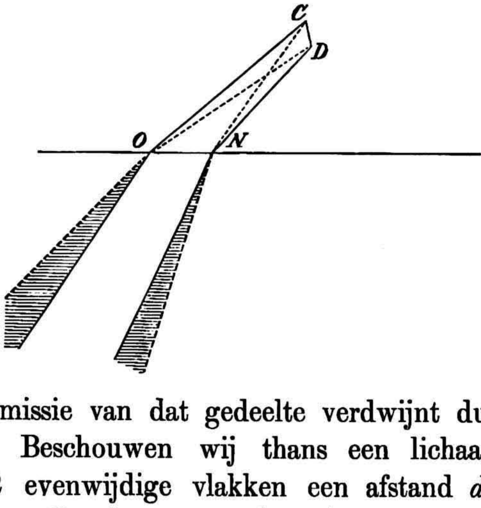
[1]) Valt dus in het stralende lichaam licht onder een invalshoek i op het grensvlak met eene intensiteit $= 1$, dan is de intensiteit van het doorgelaten of gebroken licht $= D$. Eene andere beteekenis van D komt voor in § 6.

Wij stellen nu voorop, dat dS of $|ON|$ oneindig klein van de 1^{ste} orde en $|CD|$ oneindig klein van de 2^{de} orde is, zoodat wij thans voor $|CD|$, in plaats van $d\sigma$ als straks, zullen schrijven $d_2\sigma$.



Dan liggen alle elementen van het stralende lichaam, die licht door $|ON|$ naar $|CD|$ zenden binnen het regelrechte oppervlak, waarvan de beschrijvende lijnen gaan door den omtrek van $|ON|$.

($|CD|$ wordt daarom oneindig klein van de 2^{de} orde verondersteld om buiten beschouwing te kunnen laten de lichaams-elementen, die buiten dit regelrechte oppervlak liggen; ware n.l. $|CD|$ oneindig klein van dezelfde orde als $|ON|$, dan zou men ook nog moeten beschouwen de lichaams-elementen, gelegen in het gestreepte gedeelte, die ook nog stralende energie door $|ON|$ naar $|CD|$ zenden.



Bij de vooropgestelde aanname is echter de verhouding van het volume van het gestreepte deel tot dat binnen het regelrechte oppervlak gelegen, oneindig klein: ook de emissie van dat gedeelte verdwijnt dus.

Beschouwen wij thans een lichaams-element KM, waarvan de 2 evenwijdige vlakken een afstand $d\rho$ hebben, dan is het volume van dit element $= |KM| \, . \, d\rho$. Is verder $|KK_1|$ de doorsnede van het zooeven vermelde regelrechte oppervlak met een plat vlak, evenwijdig aan AB en i de hoek van NK_1 met de loodlijn op dat vlak AB, dan is het volume van het lichaams-element $= |KK_1| . \cos i \,.\, d\rho$.

Daar $|CD|$ oneindig klein van de 2[de] orde, is ook nu: $|KK_1| : |ON| = 2\pi\, K_1R \times KK_1 : 2\pi\, NS \times ON$, of als $NK_1 = \rho$, $DN = a$ en de hoeken van ND, OC, K_1N en OK met de loodlijn op AB respectievelijk i_1, $i_1 + di_1$, i en $i + di$ zijn,

$$|KK_1| : dS = (\rho \sin i + a \sin i_1)\left(\frac{a\, di_1}{\cos i_1} + \frac{\rho\, di}{\cos i}\right) : a \sin i_1 \times \frac{a\, di_1}{\cos i_1}$$

dus:

$$|KK_1| = dS \frac{(\rho \sin i + a \sin i_1)\left(\dfrac{a}{\cos i_1} + \dfrac{\rho}{\cos i}\dfrac{di}{di_1}\right)}{a \sin i_1 \,.\, \dfrac{a}{\cos i_1}}$$

of, daar $\dfrac{\sin i_1}{\sin i} = \nu$,

$$|KK_1| = dS \frac{(\rho + \nu a)(\nu a \cos^2 i + \rho \cos^2 i_1)}{\nu^2 a^2 \cos^2 i}$$

en dus:

vol. lichaams-element $KM = dS \dfrac{(\rho + \nu a)(\nu a \cos^2 i + \rho \cos^2 i_1)}{\nu^2 a^2 \cos^2 i} \,.\, \cos i \, d\rho$

Door nu in de formule (1) van § 4 $dx\, dy\, dz$ door deze uitdrukking te vervangen, vindt men voor de hoeveelheid stralende energie, die het lichaamselement KM naar $d_2\sigma$ zendt:

$$d\rho \,.\, \cos i \,.\, dS \,.\, \frac{(\rho + \nu a)(\nu a \cos^2 i + \rho \cos^2 i_1)}{\nu^2 a^2 \cos^2 i} \,.\, \frac{I d\lambda}{4\pi} \,.\, e^{-\alpha\varrho}$$

$$\times \frac{d_2\sigma \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \cos i \,.\, \cos i_1}{(\rho + \nu a)(\rho \cos^2 i_1 + \nu a \cos^2 i)} \,.\, D$$

$$= dS \,.\, d_2\sigma \,.\, \frac{I d\lambda}{4\pi} \,.\, \frac{\cos \varepsilon \,.\, \cos i_1}{\nu^2 a^2} \,.\, e^{-\alpha\varrho}\, d\rho \,.\, D.$$

Integreeren wij deze uitdrukking naar ρ over alle elementen, gelegen binnen het regelrechte oppervlak, dan variëert ρ van 0 tot ∞ en voor de geheele hoeveelheid stralende energie met golflengte tusschen λ en $\lambda + d\lambda$, die door dS gaande, op $d_2\sigma$ valt, vindt men:

$$dS \,.\, d_2\sigma \,.\, \frac{I d\lambda}{4\pi} \,.\, \frac{\cos \varepsilon \,.\, \cos i_1}{\nu^2 a^2} D \int_0^\infty e^{-\alpha\varrho} \,.\, d\rho = dS \,.\, d_2\sigma \,.\, \frac{I d\lambda}{4\pi} \,.\, \frac{D}{\nu^2 \alpha} \,.\, \frac{\cos \varepsilon \,.\, \cos i_1}{a^2} \quad (2).$$

Deze formule geldt ook [1]), als het ontvangende element van de-

[1]) Deze uitbreiding van de formule (2) werd door Prof. Lorentz aangegeven, wien ik hierbij voor deze en andere opmerkingen mijnen hartelijken dank betuig.

zelfde orde is als dS. Men ziet dit in, als men het ontvangende element in oneindig vele elementen, zooals $d_2 \sigma$, verdeelt, op elk daarvan de formule (2) toepast en dan optelt. Daar voor ieder van deze elementen van de 2de orde de factoren, waarmede $d_2 \sigma$ wordt vermenigvuldigd, aan elkaar gelijk mogen worden gesteld, is de som van al deze uitdrukkingen, d. i. de hoeveelheid stralende energie, die $d\sigma$ ontvangt

$$= dS \,.\,.\, d\sigma \,.\, \frac{I d\lambda}{4\pi} \,.\, \frac{D}{\nu^2 \alpha} \, \frac{\cos \varepsilon \,.\, \cos i_1}{a^2} \quad . \; . \; . \; (2a).$$

§ 6. Bij het vergelijken dezer formule met die van Lambert

$$dS \,.\, d\sigma \,.\, E \,.\, \frac{\cos \varepsilon \,.\, \cos i_1}{a^2}$$

springt in het oog, dat de factor D het wezenlijke verschil uitmaakt van de beide formules en het is deze factor, die bewerkt dat de formule van Lambert niet doorgaat voor uitstralende lichamen met gladde oppervlakte. Dit stemt overeeen met het experimenteele resultaat, reeds lang geleden verkregen door de la Provostaye en Desains [1]. Vooral voor lichamen, als de hier bedoelde, met niet te grooten absorptie-coëfficient, waarbij D sterk met den invalshoek verandert, bijv. voor glas, is de afwijking van Lambert's formule zeer groot, zooals ook uit de waarnemingen der genoemde twee natuurkundigen gebleken is.

Bij sterk absorbeerende stoffen is ook ν afhankelijk van den invalshoek. De hier gegeven beschouwingen zijn echter op dergelijke lichamen niet nauwkeurig van toepassing. De wetten van de voortplanting in absorbeerende media en die voor den overgang uit zulk een medium in een andere middenstof zijn geheel andere dan die voor doorschijnende stoffen. Een afzonderlijk onderzoek naar de voortplanting van spherische golven in een absorbeerend medium en den overgang in eene doorschijnende middenstof zou noodig zijn om deze beschouwingen aan te vullen.

D is aldus experimenteel te bepalen. Valt stralende energie van eene golflengte tusschen λ en $\lambda + d\lambda$ in vlakke golven onder een invalshoek i_1 op het grensvlak van het stralende lichaam, terwijl de intensiteit van de invallende energie 1 is, dan is die van de teruggekaatste $1 - D$. [2]) De invallende en de teruggekaatste energie plant zich daarbij voort door het diathermane medium.

---

[1]) Ann. de Chimie et de Physique. 3e Sér. T. XXII en XXX.
[2]) Hierbij is reeds gebruik gemaakt van de bekende reciprociteitswet.

D wordt verder gegeven door de lichttheorie. Met behulp van de electro-magnetische lichttheorie heeft, voor het eerst H. A. Lorentz [1]) de waarde van D aldus uitgedrukt:

$$D = \frac{1}{2}\left\{ \frac{4m \cos(\tau + \omega)}{1 + 2m \cos(\tau + \omega) + m^2} + \frac{4m_1 \cos(\tau - \omega)}{1 + 2m_1 \cos(\tau - \omega) + {m_1}^2} \right\} \; ^{2)}$$

Deze uitdrukking voor D stemt ook overeen met die, door Mac Cullagh en Cauchy uit de elastische theorie van den aether afgeleid. Wij komen op de waarde van D straks terug.

Daar de uitdrukking $\frac{dS \,.\, d_2\sigma}{a^2} \,.\, \frac{Id\lambda}{4\pi} \,.\, \frac{D}{v^2 \alpha} \cos i_1$ te beschouwen is als de maat voor de emissie der onder een hoek met de normaal i_1 door dS uittredende stralen, kan men in verband met een formule, die in § 8 wordt afgeleid, n.l. $\frac{I}{v^2 a} = \frac{I_1}{{v_1}^2 \alpha_1}$, het volgende algemeene resultaat afleiden:

De emissie van stralende energie van bepaalde golflengte uit een oppervlakte-element van een stralend lichaam is voor alle homogene isotrope lichamen met gladde oppervlakte en zoo groote dikte, dat vermeerdering der dikte geen (waarneembaren) invloed meer heeft op de grootte der emissie, bij dezelfde temperatuur, evenredig met de intensiteit van het gebroken licht van die golflengte of m. a. w. evenredig met $D = 1 - R$, waarbij, als de intensiteit van invallend natuurlijk (niet gepolariseerd) licht van die golflengte gelijk 1, die van het teruggekaatste licht gelijk R is. Deze terugkaatsing wordt dan geacht plaats te hebben in het diathermane medium.

Deze algemeene stelling, die hier het eerst wordt afgeleid uit de voorstelling van Fourier, kan aan de waarnemingen nog moeilijk worden getoetst. Wel stemt de *volgorde* der lichamen, wat het bedrag hunner emissie betreft, met deze stelling overeen. [3]) Gewoonlijk heeft men echter geen lichamen met gladde oppervlakte onderzocht. Verder geldt de stelling voor stralende energie van bepaalde golflengte; bij de photometrische waarnemingen kan men betrekkelijk gemakkelijk de licht-intensiteit voor de verschillende kleuren bepalen: deze waarnemingen zijn echter onnauwkeuriger dan de calorimetrische, die van den anderen kant het bezwaar hebben, dat zij alleen

---

1) H. A. Lorentz. Over de theorie der terugkaatsing en breking van het licht. Dissertatie pag. 165 en 166.

2) Hierbij is ook gebruik gemaakt van de bekende reciprociteitswet. (Zie pag. 16).

3) De verschillen in temperatuur door Emden (Wied. Ann. 36 pag. 214) waargenomen bij verschillende metalen, wat betreft hunne beginnende licht-emissie bij nadering hunner temperatuur tot de gloeihitte, zijn zeer waarschijnlijk op rekening te stellen van de verschillende waarden van D.

de totale hoeveelheid stralende energie, van zeer verschillende golflengte bepalen.

§ 7. Wij zullen nu verder met behulp der formule (2) van § 5 den invloed nagaan van het omringende, diathermane medium. Het zijn de factoren D en ν in die formule, welke ook van dit medium afhankelijk zijn. Laten D' en D'', ν' en ν'' de grootheden voorstellen, die afhangen van den aard der beide diathermane media, terwijl dS, $d\sigma$, I, α, $\cos\varepsilon$ en $\cos i_1$ onveranderd blijven. Van beide brekingsverhoudingen ν' en ν'' is $\sin i_1$ de teller.

De onder een gelijken hoek i_1 met de normaal, in twee diathermane middenstoffen uitgestraalde hoeveelheden, verhouden zich dus als: $\frac{D'}{(\nu')^2} : \frac{D''}{(\nu'')^2}$.

Voor $\frac{\nu''}{\nu'}$ kan men schrijven $\frac{n_0'}{n_0''}$, als n_0' en n_0'' de absolute brekingsindices van de twee media voorstellen.

De verhouding der emissies in die twee middenstoffen is dan:

$$D' (n_0')^2 : D'' (n_0'')^2.$$

Voor een volkomen zwart lichaam zouden D' en D'' beide gelijk 1 zijn; de verhouding wordt dan: $(n_0')^2 : (n_0'')^2$.

Beide resultaten zijn in volkomen overeenstemming met de door Clausius [1]) op geheel andere wijze afgeleide.

Het laatste resultaat is ook door Von Quintus Icilius [2]) experimenteel geverifiëerd.

Men zou tegen de berekeningen in de vorige §§ uitgevoerd, eenige bedenkingen kunnen aanvoeren. Moet men n.l. niet, zooals bijv. Koláçek [3]) doet, de berekening van de hoeveelheid stralende energie, die op $d_2\sigma$ valt, beschouwen als een diffractie-probleem. Ofschoon de resultaten er niet door gewijzigd zouden worden, is het o. i. onnoodig de berekening aldus uit te voeren. Immers dS moet klein zijn, vergeleken met den afstand a, maar niet ten opzichte van de golflengte. Daardoor zullen diffratie-verschijnselen niet storend optreden.

Zooals ook reeds is opgemerkt, gelden verder de bovenstaande berekeningen niet streng voor lichamen met groote absorptie-coëfficiënten, zooals de metalen. De beschouwingen, gebaseerd op de mechanische warmte-theorie maken het echter waarschijnlijk, dat de *uitkomsten* ook voor sterk absorbeerende lichamen gelden.

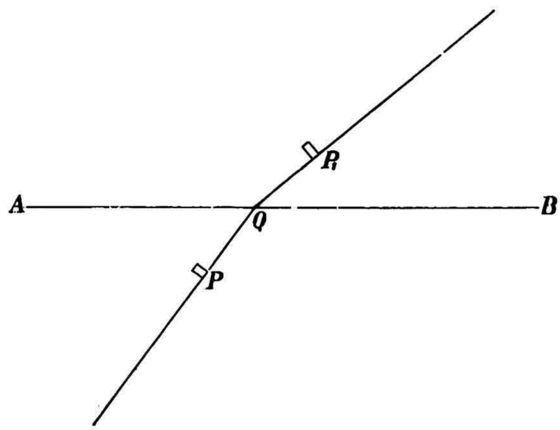
---

[1]) l. c. pag. 336. D' en D'' zijn de in de laatste alinea bedoelde absorptie-coëfficiënten.
[2]) Pogg. Ann. Bd 127.
[3]) L. c. pag. 250 en 251.

II.

§ 8. In dit gedeelte zal de voorstelling van Fourier worden toegepast, tegelijk met het principe van Prévost, dat door Kirchhoff [1]) scherper geformuleerd is. Wij zullen dus onderstellen, dat een systeem van lichamen overal gelijke temperatuur heeft, m. a. w. dat er overal evenwicht van temperatuur bestaat. Ook dan zenden de lichamen elkaar wederkeerig stralende energie toe, terwijl toch de temperatuur overal dezelfde blijft. Opdat dit laatste het geval is, zullen blijkbaar ook twee lichaamselementen steeds dezelfde temperatuur hebben; de eenvoudigste aanname is nu deze, dat de hoeveelheid stralende energie, die het 1ste element van het 2de ontvangt, gelijk moet zijn aan die, welke het 2de van het 1ste ontvangt. Brengen wij deze gelijkheid in eene wiskundige formule. Zij AB thans het scheidingsvlak van twee stralende lichamen, met verschillend specifiek emitteerend vermogen I en I_1 en de absorptie-coëfficiënten α en α_1.

PQ make met de loodlijn op het grensvlak den hoek i, $P_1 Q$ den hoek i_1, terwijl $\nu = \frac{\sin i_1}{\sin i}$ de brekingsverhouding der twee stoffen is.



Beschouwen wij twee lichaamselementen, bij P en P_1, waarvan twee der evenwijdige zijvlakken loodrecht staan op PQ, resp. $P_1 Q$. Zij verder $PQ = \rho$, een zijvlak, loodrecht op $PQ = dS$, $P_1 Q = \rho_1$ en een zijvlak, loodrecht op $P_1 Q = d S_1$. De twee lichaamselementen hebben dus tot volume $dS \,.\, d\rho$, resp. $dS_1 \,.\, d\rho$. Volgens de formule (1) van § 4 is nu de hoeveelheid stralende energie van golflengte tusschen λ en $\lambda + d\lambda$, die het lichaamselement bij P in de eenheid van tijd naar het lichaamselement bij P_1 doet toekomen

$$= dS \,.\, d\rho \,.\, \frac{I\, d\lambda}{4\pi} \,.\, e^{-\alpha\rho}\, e^{-\alpha_1 \rho_1} \frac{dS_1 \,.\, \cos i \,.\, \cos i_1}{(\rho + \nu \rho_1)(\rho \cos^2 i_1 + \nu \rho_1 \cos^2 i)} \times D$$

daar $\cos \varepsilon = 1$.

---

[1]) Kirchhoff, Gesammelte Abhandl. pag. 571.

Hiervan wordt door dit element bij P_1 geabsorbeerd:

$$dS . d\rho . \frac{I d\lambda}{4\pi} . e^{-\alpha\rho} . e^{-\alpha_1\rho_1} . \alpha_1 d\rho_1 . \frac{dS_1 . \cos i . \cos i_1}{(\rho \times \nu \rho_1)(\rho \cos^2 i_1 + \nu \rho_1 \cos^2 i)} \times D..(a)$$

Evenzoo zal men vinden voor de geabsorbeerde hoeveelheid, die $dS . d\rho$ in de eenheid van tijd van $dS_1 . d\rho_1$ verkrijgt:

$$dS_1 . d\rho . \frac{I d\lambda}{4\pi} . e^{-\alpha_1\rho_1} . e^{-\alpha\rho} . \alpha d\rho . \frac{dS \cos i_1 . \cos i}{\left(\rho_1 + \frac{\rho}{\nu}\right)\left(\rho_1 \cos^2 i + \frac{\rho}{\nu} \cos^2 i_1\right)} \times D..(b)$$

Daar deze hoeveelheden, bij temperatuurs-evenwicht, volgens onze onderstelling, gelijk zijn, vindt men, na weglating der gelijke factoren:

$$I\alpha_1 = I_1 \alpha \nu^2$$

of $\quad \dfrac{I}{\alpha} \dfrac{\sin^2 i}{\sin^2 i_0} = \dfrac{I_1}{\alpha_1} \dfrac{\sin^2 i_1}{\sin^2 i_0}$, dus ook: $\dfrac{I}{\alpha \nu_0{}^2} = \dfrac{I_1}{\alpha_1 (\nu_0{}^1)^2}$

als ν_0 en $\nu_0{}^1$ de absolute brekings-indices zijn van de twee lichamen. Het is van deze gelijkheid, dat in § 6 gebruik gemaakt is.

Daar nu, volgens de lichttheorie, $\dfrac{\nu_0}{\nu_0{}^1} = \dfrac{V_1}{V}$, als V_1 en V de snelheden van het licht in de twee middenstoffen voorstellen, kan men voor deze formule schrijven:

$$\frac{I}{\alpha} V^2 = \frac{I_1}{\alpha_1} V_1{}^2.$$

Men heeft dus deze eigenschap bewezen:

Voor alle lichamen met emissie-vermogen voor stralende energie van bepaalde golflengte, is bij dezelfde temperatuur het produkt van het kwadraat der voortplantingssnelheid en het quotiënt van specifiek emitteerend vermogen en absorptie-coëfficiënt eene constante.

Deze formule, hoewel in vorm verschillende van die van Kirchhoff $\dfrac{E}{A}$ = constante [1]), is daarmede volstrekt niet in tegenspraak; de hier voorkomende grootheden zijn andere dan bij Kirchhoff. I, α en V zijn zoogenaamde „inwendige" constanten, d. i. om ze te definiëeren behoeft men alleen het eene lichaam te beschouwen; zij hangen, bij zuivere temperatuurstraling, alleen af van de golflengte λ, van den aard der stof en van de temperatuur.

Bij het afleiden van deze formule: $\dfrac{I}{\alpha} V^2 = \dfrac{I_1}{\alpha_1} V_1{}^2$, hebben wij in de uitdrukkingen (a) en (b) voor den „doorlatingsfactor" denzelfden letter D genomen. Dit is in overeenstemming met de resul-

---

[1]) l. c. pag. 575.

taten der lichttheorie, volgens welke de intensiteiten van het doorgelaten (of gebroken) en gereflecteerde licht, bij de terugkaatsing op het grensvlak van twee middenstoffen, doorzichtige of absorbeerende, onafhankelijk zijn van de volgorde, in welke het licht de beide middenstoffen doorloopt. Dit geldt ook afzonderlijk voor licht, gepolariseerd in het vlak van inval en voor dat, loodrecht daarop gepolariseerd. Mathematisch wordt dit door de formules voor de intensiteiten daardoor weergegeven, dat hierin de beide absorptie-coëfficiënten en de beide hoeken i en i_1 symmetrisch voorkomen. In algemeeneren vorm is die onafhankelijkheid van de volgorde afgeleid door Helmholtz en Kirchhoff. [1])

Ware het eene stralende lichaam anisotroop en wel van het eenassige systeem, terwijl de as evenwijdig is met het grensvlak der 2 stralende lichamen, zijn verder I_0, α_0, V_0 en I_e, α_e, V_e de verschillende grootheden, dan is:

$$\frac{I_0}{\alpha_0} V_0^2 = \frac{I_e}{\alpha_e} V_e^2 = \frac{\frac{1}{2} I_1 V_1^2}{\alpha_1}.$$

Kirchhoff heeft bij een tourmalijnplaat eene dergelijke betrekking ook experimenteel aangetoond. [2])

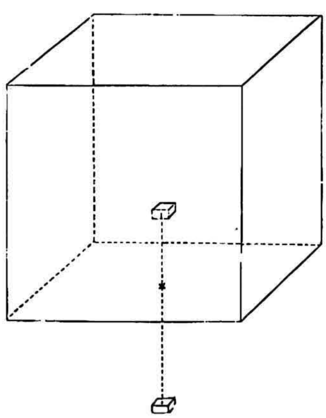
§ 9. Wij zullen thans ook in de beschouwingen opnemen den aether, wat betreft zijn toestand, als er temperatuursevenwicht bestaat. Stellen wij ons daartoe in het inwendige van een stralend lichaam, dat zich tot in het oneindige uitbreidt, eene ruimte voor, bijv. begrensd door vlakke wanden, die alleen aether bevat. Als overal dezelfde temperatuur heerscht, zal de aether in die ruimte per volume-eenheid overal eene gelijke hoeveelheid stralende energie van bepaald bedrag bezitten. Zij, voor de volume-eenheid, de hoeveelheid stralende energie, waarvan de golflengte tusschen λ en $\lambda + d\lambda$ ligt $= E_0\, d\lambda$. De stralende energie plant zich door den aether voort met de snelheid V_0, de genoemde hoeveelheid $E_0\, d\lambda$ beweegt zich telkens in alle richtingen uit de volume-eenheid om telkens door eene nieuwe, even groote hoeveelheid vervangen te worden.

Beschouwen wij nu een volume-element in den aether en tevens een element van het stralende lichaam. Kortheidshalve zullen wij aannemen, dat de verbindingslijn van de middelpunten der beide elementen loodrecht staat op een der grensvlakken van het lichaam.

---

[1]) l. c. pag. 586.
[2]) l. c. pag. 596.

Is b de afstand van het lichaams-element $dxdydz$ tot dat grensvlak en a die van het volume-element in den aether, $d\xi d\eta d\zeta$, tot ditzelfde vlak, dan zendt, blijkens formule (1) van § 4, daar $\cos \varepsilon = 1$, $\cos i = 1$, $\cos i_1 = 1$, $\rho = b$, $FC = a$ en $d\sigma = d\xi d\eta$ en voor ν n gesteld wordt, in den tijd dt het lichaams-element $dxdydz$ op het vlakelement $d\xi d\eta$ een bedrag aan stralende energie van eene golflengte tusschen λ en



$$\lambda + d\lambda = \frac{Id\lambda}{4\pi} . dx . dy . dz . e^{-ab} \frac{1}{(b+an)^2} \times$$
$$\times \; d\xi . d\eta . D_n \times dt.$$

Deze hoeveelheid stralende energie plant zich door den aether met de snelheid V_0 voort, zij gaat loodrecht door het vlak-element $d\xi\, d\eta$; op zeker oogenblik zal nu die, in den tijd dt uitgezondene hoeveelheid zich bevinden in eene ruimte $d\xi . d\eta . V_0\, dt$. Nemen wij nu $d\zeta = V_0\, dt$ dan is dus op ieder oogenblik in het volume-element $d\xi d\eta d\zeta$ aanwezig eene hoeveelheid stralende energie.

$$= \frac{Id\lambda}{4\pi} . dxdydz . e^{-ab} \frac{1}{(b+an)^2} . d\xi . d\eta . D_n . dt,$$

die afkomstig is van het lichaams-element $dxdydz$. Deze hoeveelheid is dus de bijdrage, die het element $dxdydz$ in den tijd dt levert tot de geheele hoeveelheid stralende energie, die het aether-element $d\xi d\eta d\zeta$ bevat.

Omgekeerd stroomt er ook telkens uit het volume-element van den aether naar alle kanten stralende energie; van deze stralende energie bereikt ook een deel het lichaams-element $dxdydz$; de eenvoudigste onderstelling is nu weer deze, dat, wil er evenwicht van temperatuur zijn, de hoeveelheid energie, die het stoffelijk element $dxdydz$ in den tijd dt hiervan opneemt, gelijk is aan de zooeven berekende hoeveelheid, die $dxdydz$ in den tijd dt aan het volume-element $d\xi d\eta d\zeta$ doet toekomen.

Zij de ruimte-hoek, waaronder men van $d\xi d\eta d\zeta$ uit het vlakelement $dxdy$ ziet $= d\omega$; van de geheele hoeveelheid stralende energie, die uit het volume-element $d\xi d\eta d\zeta$ wegstroomt, beweegt zich dan binnen dien hoek $d\omega$ een breukdeel $= \frac{d\omega}{4\pi}$. Dit gedeelte beweegt zich loodrecht op $d\xi d\eta$; in den tijd $\frac{d\zeta}{V_0}$ zal het uit het volume-element $d\xi d\eta d\zeta$ zijn weggestroomd; daar $d\zeta = V_0\, dt$, zal juist in den tijd dt de hoeveelheid stralende energie $E_0 d\lambda . d\xi . d\eta . d\zeta . \frac{d\omega}{4\pi}$ uit het volume-element $d\xi . d\eta . d\zeta$ naar $dxdy$ worden uitgezonden. Hiervan bereikt het vlak-element $dxdy$ $E_0 . d\lambda . d\xi . d\eta . d\zeta . \frac{d\omega}{4\pi} . e^{-ab} . D_n$

of, daar $d\omega = \frac{dxdy}{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2}$,

$$\frac{E_0\, d\lambda}{4\pi} . d\xi . d\eta . d\zeta . e^{-ab} . \frac{dxdy}{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2} . D_n .$$

Van deze hoeveelheid energie absorbeert het stoffelijk element $dxdydz$ een breukdeel αdz; $dxdydz$ krijgt dus in den tijd dt van het aether-element $d\xi d\eta d\zeta$ terug eene hoeveelheid energie

$$= \frac{E_0\, d\lambda}{4\pi} . d\xi . d\eta . d\zeta . e^{-ab} . \frac{\alpha\, dxdydz}{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2} . D_n .$$

Daar het lichaams-element $dxdydz$ in denzelfden tijd dt tot de hoeveelheid energie, in het aether-element aanwezig, eene bijdrage levert,

$$= \frac{I d\lambda}{4\pi} . dxdydz . e^{-ab} . \frac{1}{(b + an)^2}\, d\xi . d\eta . D_n . dt$$

moet dus, volgens onze onderstelling:

$$\frac{E_0\, d\lambda}{4\pi} . d\xi . d\eta . d\zeta . e^{-ab}\, \frac{\alpha\, dxdydz}{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2} . D_n =$$

$$= \frac{I d\lambda}{4\pi} . dxdydz . e^{-ab}\, \frac{1}{(b + an)^2} . d\xi . d\eta . D_n\, dt$$

en daar $d\zeta = V_0\, dt$,

vindt men, na weglating der gelijke factoren in beide leden:

$$E_0 V_0 = \frac{I}{\alpha n^2} = \frac{I}{\alpha V_0^2} V^2 \text{ of } E_0 V_0^3 = \frac{I}{\alpha} V^2 \text{ [1]}.$$

Daar, zooals wij in § 8 vonden, $\frac{I}{\alpha} V^2$ voor alle stralende lichamen bij dezelfde temperatuur dezelfde waarde heeft, is ook $E_0 V_0^3$ constant; de aether heeft dus per volume-eenheid bij temperatuursevenwicht en gelijke temperatuur altijd dezelfde hoeveelheid stralende energie van bepaalde golflengte, onafhankelijk van de lichamen die uitstralen, mits zij slechts stralen van die golflengte emitteeren.

---

[1]) **Deze gelijkheid is te beschouwen als de voorwaarde voor het evenwicht van temperatuur tusschen aether en stof.**

Dit resultaat is in volkomen overeenstemming met het bekende, door Kirchhoff afgeleide. [1])

De constante uitdrukking $\frac{I}{\alpha} V^2$ heeft dus ook eene eigenaardige beteekenis; zij is gelijk aan de hoeveelheid energie, in den aether per kubieke voortplantingssnelheid aanwezig.

Hadden wij niet te doen met aether, maar met eene diathermane stof, dan zou men op gelijke wijze vinden:

$E_1 V^3_1 = \frac{I}{\alpha} V^2$, waarbij E_1 en V_1 voor de diathermane middenstof gelden. Uit $E_0 V_0{}^3 = \frac{I}{\alpha} V^2$ en $E_1 V_1{}^3 = \frac{I}{\alpha} V^2$, volgt ook: $E_0 V_0{}^3 = E_1 V_1{}^3$, dus:

de aether en de diathermane middenstof bevatten bij evenwicht van temperatuur per kubieke voortplantingssnelheid dezelfde hoeveelheid stralende energie.

Men kan dezelfde beschouwingen ook nog uitbreiden op de stralende lichamen zelf. Immers in het stralende lichaam zelf is op ieder oogenblik ook stralende energie voorhanden. De hoeveelheid stralende energie, die door een lichaams-element in een bepaalden tijd wordt *geabsorbeerd*, correspondeert met een *gelijke* hoeveelheid, die in denzelfden tijd door dat element wordt *uitgezonden* (daar anders de temperatuur van het element niet constant zou blijven). Daarom gedraagt zich ook het stralende lichaam, ten opzichte van de beweging der stralende energie, trots de absorptie, analoog met een diathermaan medium, wanneer er slechts evenwicht van temperatuur bestaat. Voor de voortplanting der stralende energie in het stralende lichaam is dus ook de voortplantingssnelheid karakteristiek. Onderzoekt men nu, onder welke voorwaarde er evenwicht is tusschen de hoeveelheden stralende energie in den aether en in het stralende lichaam, dan vindt men ook nu: $E_0 V_0 = E V^3$. De straks uitgesproken stelling luidt dus algemeen: Als er evenwicht van temperatuur bestaat, hebben alle lichamen (*diathermane* en *stralende*) en ook de *aether* per kubieke voortplantingssnelheid dezelfde hoeveelheid stralende energie van bepaalde golflengte.

Naast de hoeveelheid moleculaire energie, die in een stralend lichaam aanwezig is, bevat dus iedere volume-eenheid van het lichaam eene hoeveelheid stralende (electro-magnetische energie) van eene

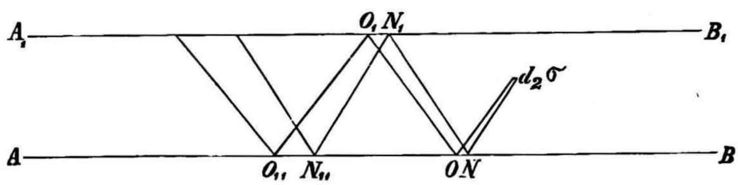
---

[1]) l. c. pag. 597.

golflengte tusschen λ en $\lambda + d\lambda$, waarvan het bedrag per volume-eenheid gegeven wordt door: $E d\lambda = \frac{I d\lambda}{\alpha V}$.

§ 10. Omgekeerd kan men ook, uitgaande van het door Kirchhoff bewezen resultaat, dat bij temperatuursevenwicht de aether per volume-eenheid steeds dezelfde hoeveelheid stralende energie van bepaalde golflengte bezit, onafhankelijk van de lichamen, die uitstralen, mits zij slechts stralen van die golflengte emitteeren, de formule $\frac{I}{\alpha} V^2 = \frac{I_1}{\alpha_1} V_1{}^2$ strenger afleiden.

Laten daartoe AB en A_1B_1 de begrenzende (platte) vlakken voorstellen van twee gelijke, homogene, isotrope stralende massa's, die zich tot in het oneindige uitstrekken en alleen eene ruimte openlaten, waarin zich alleen aether bevindt. Zij het evenwicht van temperatuur bereikt en gaan wij na, hoeveel stralende energie de aether per volume-eenheid bevat.



Berekenen wij daartoe eerst welke hoeveelheid stralende energie, met $|ON| = dS$ overeenkomende, *thans* op $d_2\sigma$ valt. Zij $\cos \varepsilon = 1$, dan valt, volgens formule, in de eerste plaats op $d_2\sigma$:

$$\frac{I d\lambda}{4\pi} \cdot \frac{d_2\sigma}{\nu_2 \alpha} \cdot \frac{dS \cos i_1}{a^2} \left(\tfrac{1}{2} d_1 + \tfrac{1}{2} d_{11}\right),$$

waarbij $\frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} d_{11} = D$ is. d_1 en d_{11} zijn dus de intensiteiten van het doorgelaten licht, gepolariseerd *in*, resp. *loodrecht op* het invalsvlak.

Behalve deze hoeveelheid ontvangt echter in dit geval (bij temperatuursevenwicht) $d_2\sigma$ ook stralende energie van een oppervlakte-element $|O_1N_1|$ van A_1B_1, die na door $|ON|$ te zijn teruggekaatst, ook van $|ON|$ schijnt te komen. Evenzoo na eene 2-malige reflectie van $|O_{11}N_{11}|$ enz.

Daar nu: $\frac{|ON| \cos i_1}{a^2} = \frac{|O_1N_1| \cos i_1}{a_1{}^2} = \frac{|O_{11}N_{11}| \cos i_1}{a_{11}{}^2}$,

(daar $d_2\sigma$ oneindig klein van de 2de orde is), is de totale hoeveelheid stralende energie van bepaalde golflengte, die thans van $|ON| = dS$ komende op $d_2\sigma$ valt:

$$\frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{d_2\sigma}{\nu^2\alpha} \cdot \frac{dS\cos i_1}{a^2}\Big(\tfrac{1}{2}d_1 + \tfrac{1}{2}r_1d_1 + \tfrac{1}{2}r_1{}^2d_1 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \tfrac{1}{2}d_{11} + \tfrac{1}{2}r_{11}d_{11} + \tfrac{1}{2}r_{11}{}^2d_{11} + \ldots\ldots\Big)$$

waarbij $d_1 + r_1 = 1$ en $d_{11} + r_{11} = 1$ is. De geheele som dezer 2 meetkundige reeksen is dus juist gelijk 1, zoodat de vorige uitdrukking wordt:

$$= \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{1}{\nu^2\alpha} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{dS\cos i_1}{a^2} \ldots\ldots \quad (3).$$

Beschouwen wij nu in plaats van het element $d_2\sigma$ een oneindig klein afgeknot kegeloppervlak, waarvan de loodlijn in het middelpunt van $|ON|$ de as is, dan is de grootte hiervan $= 2\pi a^2 \,.\, \sin i_1 \,.\, di_1$.

De hoeveelheid stralende energie, die in de eenheid van tijd van dS komt en begrepen is tusschen 2 kegeloppervlakken, overeenkomende met de hoeken i_1 en $i_1 + di_1$ bedraagt dus:

$$\frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{1}{\nu^2\alpha} \cdot 2\pi a^2 \sin i_1 \,.\, di \,.\, \frac{dS\cos i_1}{a^2} = \frac{Id\lambda}{2\nu^2\alpha}\, dS \,.\, \cos i_1 \,.\, \sin i_1 \,.\, di_1.$$

Op het voorbeeld van Boltzmann [1]) berekenen wij nu aldus de grootheid E_0. Als b den loodrechten afstand tusschen de twee evenwijdige vlakken AB en A_1B_1 voorstelt, dan moet de laatst gevondene uitdrukking met $\frac{b}{V_0\cos i_1}$ worden vermenigvuldigd, om daarna te integreeren van $i_1 = 0$ tot $i_1 = \frac{\pi}{2}$.

In 't geheel draagt dus dS bij tot de hoeveelheid stralende energie, die de aether tusschen de beide vlakken bevat, voor een bedrag

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Id\lambda}{2\nu^2\alpha} \,.\, dS \,.\, \cos i_1 \,.\, \sin i_1 \,.\, \frac{b}{V_0\cos i_1} . di_1 = \frac{Id\lambda}{2\nu^2\alpha}\, \frac{b}{V_0} \,.\, dS.$$

Het oneindig groote vlak S van AB levert dus: $\frac{Id\lambda}{2\nu^2\alpha} \cdot \frac{b}{V_0} \,.\, S$,

een even groot vlak S van A_1B_1 levert evenzoo: $\frac{Id\lambda}{2\nu^2\alpha} \cdot \frac{b}{V_0} \,.\, S$.

Deze som $\frac{Id\lambda}{\nu^2\alpha} \cdot \frac{b}{V_0}\, S$ is aanwezig in het volume bS; per volume eenheid is dus aanwezig:

$$E_0 d\lambda = \frac{Id\lambda}{\nu^2\alpha}\,\frac{1}{V_0};\ \text{dus is: } E_0 = \frac{I}{\alpha\nu_0{}^3}\, V^2 \text{ of } E_0V_0{}^3 = \frac{I}{\alpha}\, V^2.$$

Volgens Kirchhoff is nu $E_0V_0{}^3$ constant, zoodat $\frac{I}{\alpha}\, V^2 = \frac{I_1}{\alpha_1}\, V_1{}^2$.

---

[1]) Wied. Ann. Bd 22 pag. 35.

De formule (3, pag. 22) leert nog dit: Is de ruimte tusschen AB en A_1B_1 achtereenvolgens gevuld met 2 diathermane media, dan ontvangt bij evenwicht van temperatuur het element $d_2\sigma$ eerst van dS: $\frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{1}{\nu_1{}^2\alpha} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{dS\, cos\, i_1}{a^2}$, vervolgens $\frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{1}{\nu^2{}_{11}\alpha} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{dS\, cos\, i_1}{a^2}$. Deze hoeveelheden verhouden zich als: $(n_0{}^1)^2 : (n_0{}^{11})^2$, ofschoon wij hier niet met volkomen zwarte lichamen te doen hebben. $n_0{}^1$ en $n_0{}^{11}$ zijn hierbij de absolute brekingsindices der twee diathermane media.

§ 11. De voorstelling van Fourier leert ook, in overeenstemming met de mechanische warmte-theorie, dat de emissie van stralende lichamen met gladde oppervlakte afwijkt van de stralingswet van Stefan. Uit de theoretische beschouwingen van Boltzmann, [1]) die berusten op de mechanische warmte-theorie en op de electro-magnetische licht-theorie van Maxwell, volgt, dat de hoeveelheid stralende energie van den aether, die zich in evenwicht van temperatuur bevindt met stralende lichamen, die emissie-vermogen hebben voor warmte en licht van alle golflengten, evenredig is met de 4[de] macht van de absolute temperatuur. Die totale hoeveelheid stralende energie, per volume-eenheid in den aether aanwezig, is, volgens de notatie in § 9 $= \int E_0 d\lambda$, waarbij de integratie is uit te breiden over alle golflengten van de geëmitteerde energie. Volgens dezelfde § is:

$$E_0 V_0{}^3 = \frac{I}{\alpha} V^2, \text{ dus } V_0{}^3 \int E_0 d\lambda = \int \frac{I}{\alpha} V^2 \,.\, d\lambda.$$

Daar nu, volgens Boltzmann, $\int E_0 d\lambda$ evenredig is met de 4[de] macht van de absolute temperatuur, is ook:

$\int \frac{I}{\alpha} V^2 \,.\, d\lambda = cT^4$, waarbij c eene constante is, die voor alle stralende lichamen met een continu spectrum dezelfde is.

Gaan wij nu na, welke uitdrukking door de experimenten wordt opgeleverd. Nemen wij lichamen van voldoende dikte, dan bepaalt men, volgens § 5 bij loodrechte emissie en loodrechten inval op het opvangende vlak-element:

$$\int \frac{dS \,.\, d_2\sigma}{a^2} \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi n^2\alpha} \cdot D_n \text{ of } \frac{dS \,.\, d_2\sigma}{a^2} \cdot \frac{1}{4\pi V_0{}^2} \int \frac{IV^2}{\alpha} \cdot D_n \cdot d\lambda.$$

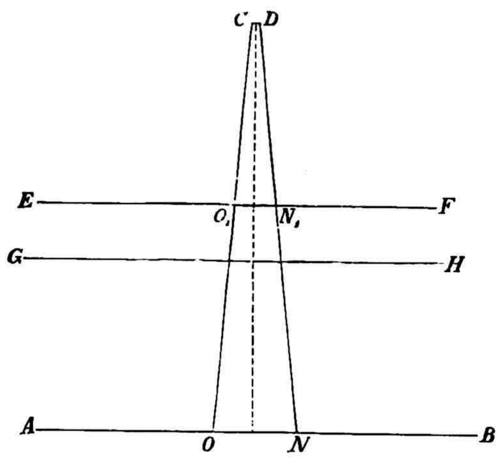
Volgens de theorie is $\int \frac{IV^2}{\alpha} d\lambda = cT^4$, de waarnemingen geven

---

[1]) Boltzmann, Wied. Ann. 22 pag. 31 en 291.

evenwel, van constante factoren afgezien: $\int \frac{IV^2}{\alpha} D_n \,.\, d\lambda$ en daar D_n geene constante is, maar met λ verandert, kan dus de, bij straling van lichamen met gladde oppervlakte, waargenomene emissie niet nauwkeurig evenredig zijn met de 4[de] macht van de absolute temperatuur. Is echter $D_n = 1$, dan gaat de evenredigheid streng door. Zijn de temperaturen, waarover de waarnemingen loopen, niet te zeer uiteenloopende, dan zal ook D_n nog weinig variëeren: ook dan zal de evenredigheid met de 4[de] macht der absolute temperatuur vrij nauwkeurig doorgaan. Met behulp van de algemeene stelling van § 6 is het gemakkelijk in te zien, dat de constanten in de Stefan'sche stralingswet voor verschillende lichamen onderling een zeer eenvoudig verband hebben.

§ 12. Ten slotte zal nog behandeld worden de uitstraling van eene vlakke laag van eene stralende massa, waarvan de dikte nog van invloed is op de hoeveelheid uitgezondene energie. Wij zullen de berekening uitvoeren bij de bespreking van Kirchhoff's beroemde proef: de omkeering der natriumlijnen.



Zij AB weer het grensvlak van een stralend lichaam, dat zich naar beneden tot in het oneindige moge uitstrekken of anders gezegd, zoo groote dikte, loodrecht op AB gemeten, heeft, dat vermeerdering dier dikte geen invloed meer heeft op de uitstraling.

Zij $dS = |ON|$ een oppervlakte-element, oneindig klein van de 1[ste] orde, terwijl weer het opvangende vlak-element $|CD| = d_2\sigma$ oneindig klein van de 2[de] orde is. Kortheidshalve zullen wij aannemen, dat de verbindingslijn van de middelpunten dezer elementen, welker lengte $= a$ is, loodrecht staat op AB en op $|CD|$. De formule (2) van § 5 gaat dan over in: $\frac{|ON|\, d_2\sigma}{a^2} \,.\, \frac{Id\lambda}{4\pi} \,.\, \frac{D_n}{n^2\alpha}$; [1]) dit is dus de hoeveelheid stralende energie met eene golflengte tusschen λ en

---

[1]) Deze formule kan direct veel eenvoudiger worden afgeleid. D_n heeft betrekking op den overgang uit het stralende, *vaste* lichaam in de omringende middenstof.

$\lambda + d\lambda$, die door $|ON|$ gaat en op $|CD| = d_2\sigma$ invalt. Nu worde tusschen $|ON|$ en $|CD|$ eene laag geplaatst van eene stralende massa, begrensd door 2 vlakken EF en GH, beide evenwijdig aan AB, die den onderlingen afstand p hebben, terwijl de afstand tusschen $|CD|$ en $EF = q$ is. De brekingsindex van deze stralende massa zij gelijk aan dien van de omringende, diathermane middenstof en hare absorptie-coëfficiënt van die grootte, dat de intensiteit van het teruggekaatste licht, bij den doorgang door GH of EF te verwaarloozen is. De stralende massa van eene gekleurde vlam, bijv. eene natriumvlam, voldoet nagenoeg aan deze voorwaarden.

Het element $|CD| = d_2\sigma$ ontvangt door het oppervlakte-element $|O_1N_1|$ heen, van deze laag eene hoeveelheid energie

$$= \frac{|O_1N_1|}{q^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{I_1 d\lambda}{4\pi} \cdot \int_0^p e^{-\alpha_1\rho} d\rho = \frac{|O_1N_1|}{q^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{I_1 d\lambda}{4\pi\alpha_1}(1 - e^{-\alpha_1 p}),$$

waarbij I_1 en α_1 betrekking hebben op de massa van de laag $EFGH$.

Daarentegen valt nu niet meer op $|CD| = d_2\sigma$, de straks berekende hoeveelheid $\frac{|ON|}{a^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{I d\lambda}{4\pi} \cdot \frac{D_n}{n^2\alpha}$, omdat van deze hoeveelheid bij den doorgang door de laag $EFGH$ een gedeelte geabsorbeerd wordt; de hoeveelheid, die thans $d_2\sigma$ bereikt, is:

$$\frac{|ON|}{a^2} d_2\sigma \cdot \frac{I d\lambda}{4\pi} \cdot \frac{D_n}{n^2\alpha} e^{-\alpha_1 p}.$$

Eindelijk valt nog op $d_2\sigma$ eene hoeveelheid energie, afkomstig van een deel der laag $EFGH$ en door AB teruggekaatst.

Deze hoeveelheid is gemakkelijk te berekenen en blijkt, (daar $d_2\sigma$ oneindig klein is van de 2^{de} orde) te zijn

$$= \frac{|ON|}{a^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{I_1 d\lambda}{4\pi\alpha_1}(1 - e^{-\alpha_1 p}) R_n \cdot e^{-\alpha_1 p}, \text{ waarbij } R_n + D_n = 1 \text{ is.}$$

In 't geheel valt dus thans op $d_2\sigma$:

$$\frac{|ON|}{a^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{I d\lambda}{n^2\alpha} D_n \cdot e^{-\alpha_1 p} + \frac{I_1 d\lambda}{\alpha_1}(1 - e^{-\alpha_1 p} + R_n e^{-\alpha_1 p} - R_n e^{-2\alpha_1 p})\right\}$$

Heeft men met zuivere temperatuurstraling te doen, dan is, volgens § 8 $\frac{I}{\alpha} = \frac{I_1}{\alpha_1} n^2$.

De laatste uitdrukking gaat dan over in:

$$\frac{|ON|}{a^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{I d\lambda}{4\pi n^2\alpha}(1 - e^{-2\alpha_1 p} + D_n e^{-2\alpha_1 p}),$$ terwijl zonder de tusschengevoegde laag op $d_2\sigma$ invalt: $\frac{|ON|}{a^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{I d\lambda}{4\pi n^2\alpha} \cdot D_n$.

Het hangt dus van de verhouding: $\frac{1 - e^{-2\alpha_1 p} + D_n e^{-2\alpha_1 p}}{D_n}$

af, welken invloed de tusschengevoegde laag *EFGH* heeft: is de verhouding $=1$, dan blijft het deel van het spectrum, waarop I betrekking heeft, volkomen gelijk; is zij >1, dan veroorzaakt de tusschengevoegde laag eene vermeerdering der licht-intensiteit; is zij kleiner dan 1, dan wordt door de tusschengevoegde laag dit deel van het spectrum verzwakt, m. a. w. er treedt eene relatieve verduistering op in dit deel van het spectrum: men ziet in het overigens continue spectrum eene donkere streep.

Daar D_n en $e^{-2\alpha_1 p}$ beide echte breuken zijn, is het gemakkelijk in te zien, dat deze verhouding altijd $>$ is. [1])

Onder de beschreven omstandigheden kan men dus niet de omkeering der lijnen verkrijgen; om dit te bereiken moet de temperatuur van de tusschengevoegde (gas-) laag beneden die van het (vaste) stralende lichaam zijn gelegen. Daartoe is niet voldoende, dat zij lager is: *hoeveel* zij lager moet zijn hangt o. a. ook van $e^{-\alpha_1 p}$ en van D_n af. [2])

De emissie van een stralend lichaam van geringe dikte, met aanmerkelijk reflecteerend vermogen en begrensd door twee evenwijdige platte vlakken, laat zich ook zonder moeilijkheid behandelen door bij de berekeningen ook te letten op de herhaalde reflecties aan de beide begrenzende vlakken.

Daarentegen blijft voor later overgelaten de uitwerking van Fourier's voorstelling voor dubbel-brekende stralende lichamen; ook experimenteel is de uitstraling van dergelijke lichamen nog weinig of niet onderzocht.

Amsterdam, Januari 1895. P. H. Dojes.

---

1) Ware $D_n = 1$ dan is de verhouding $=1$, onafhankelijk van $e^{-\alpha_1 p}$; in dit geval is wel de temperatuur alleen beslissend.

2) De onderzoekingen van Pringsheim (Wied. Ann. 45 pag. 428) maken het waarschijnlijk, dat men bij de gekleurde vlammen niet met zuivere temperatuur-straling te doen heeft; dan gaat de formule $\frac{I}{\alpha} = \frac{I_1}{\alpha_1} n^2$ niet meer door en moet men de discussie beginnen met:

$$\frac{I d\lambda}{n^2 \alpha} D_n e^{-\alpha_1 p} + \frac{I_1 d\lambda}{\alpha_1} \left(1 - D_n e^{-\alpha_1 p} - R_n e^{-2\alpha_1 p}\right) \text{ en } \frac{I d\lambda}{n^2 \alpha} \, . \, D_n$$

Door Rizzo (Atti. R. Acc. delle Sc. Torino 29, pag. 292—301, 1893/94) zijn proeven genomen met rood-gloeiend kobaltglas om de juistheid van Kirchhoff's wet te onderzoeken. Het korte referaat in Beiblätter. Bd 18 N°. 8 pag. 835 en 836 laat misschien niet toe te beslissen omtrent de juistheid van Rizzo's conclusie, dat de wet van Kirchhoff voor gloeiend kobaltglas niet zou doorgaan. Uit dit referaat echter moet men opmaken, dat deze conclusie overijld is.