Het Vierdimensionale Prismoïde

DOOR

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel V. N°. 2.

(MET ÉÉN PLAAT.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1896.

Het vierdimensionale prismoïde

DOOR

P. H. SCHOUTE.

---

1. We wenschen in de volgende regels de bekende handelwijze ter bepaling van den inhoud van een driedimensionaal prismoïde langs aanschouwelijken weg op de ruimte met vier afmetingen uit te breiden.

Het vierdimensionale prismoïde wordt begrensd door boven- en grondlichaam in evenwijdige ruimten gelegen en door in het algemeen viervlakkige zijlichamen. Deze zijlichamen zijn van drieërlei aard. Eenige hebben één hoekpunt met het grondlichaam en drie hoekpunten met het bovenlichaam gemeen (*boven-zijlichamen*). Van anderen zijn de vier hoekpunten gelijkelijk over grond- en bovenlichaam verdeeld (*midden-zijlichamen*). Weer anderen sluiten zich met drie hoekpunten bij het grondlichaam en met één hoekpunt bij het bovenlichaam aan (*grond-zijlichamen*). En in bijzondere gevallen kunnen twee of meer zijruimten samenvallen en de in deze ruimten liggende zijlichamen vijf- of meervlakkig worden.

2. Omdat de middeldoorsnee in de formule van den inhoud van het driedimensionale prismoïde optreedt en van het vierdimensionale prismoïde het overeenkomstige te verwachten is van de doorsnee met de middelruimte, d. i. met de ruimte evenwijdig aan grond- en bovenruimte, die den afstand tusschen beide middendoordeelt en dus de meetkundige plaats is van de punten even ver van beide verwijderd, wijzen we eerst een algemeen hulp-

middel ter bepaling van deze doorsnee aan, die we met den naam van *middellichaam* bestempelen. Daarbij denken we ons het eenvoudige geval, waarin het boven- en het grondlichaam viervlakken ($A\ B\ C\ D$) en ($A'\ B'\ C'\ D'$) zijn en de verdere begrenzing bestaat uit de vier grond-zijlichamen (A, $B'C'D'$), enz., de zes middenzijlichamen (AB, $C'D'$), enz. en de vier boven-zijlichamen (ABC, D'), enz. We projecteeren deze vierdimensionale figuur, hetzij door loodrecht gerichte, hetzij door evenwijdige schuine stralen, op de middelruimte en maken dan gebruik van de eigenschap, dat het snijpunt van deze middelruimte met de lijn $P\,Q'$, die een punt P der bovenruimte met een punt Q' der grondruimte verbindt, het midden is van de projectie dier begrensde lijn. Hiermede is dan de bepaling van het middellichaam tot een vraagstuk in de ruimte met drie afmetingen herleid. Met behulp van evenwijdige perspectief is deze constructie dan weer in het platte vlak uit te voeren. Zoo is in fig. 1, waar $A\,B'$, $A\,C'$, $A\,D'$, enz. de middens zijn van de projecties der gelijknamige verbindingslijnen, een middellichaam verkregen, dat door acht driehoeken en zes parallelogrammen wordt begrensd. Zijn in het bijzonder de twee viervlakken bij tegenoverstand congruent en regelmatig, dan worden de driehoeken acht even groote gelijkzijdige driehoeken, de parallelogrammen zes even groote vierkanten en is het middellichaam de bekende combinatie van oktaëder en kubus in evenwicht, die dualistisch tegengesteld is aan het granatoëder (rhomben-dodekaëder). Zulk een doorsnee wordt o. a. ook aangetroffen bij de zestiencel (vergelijk *Verhandelingen* dezer Akademie, sectie 1, deel 2, n°. 2, fig. 14). Werkelijk is de zestiencel een prismoïde en wel op acht verschillende wijzen, nl. met betrekking tot elk paar tegenoverstaande viervlakken als grond- en bovenlichaam. [1])

In het geval van twee willekeurige viervlakken ($A\ B\ C\ D$) en ($A'\ B'\ C'\ D'$), die zich in evenwijdige ruimten bevinden, wordt het middellichaam dus begrensd 1° door vier driehoeken, die bij evenwijdige aaneenschuiving een viervlak insluiten, gelijkstandig en op de halve lengtemaat gelijkvormig met ($A\ B\ C\ D$), 2° door vier drie-

---

[1]) Van de regelmatige lichamen der ruimte met drie afmetingen kunnen viervlak, zesvlak, achtvlak achtereenvolgens op zeven, drie, vier wijzen, van de regelmatige cellen der ruimte met vier afmetingen kunnen vijfcel, achtcel, zestiencel achtereenvolgens op vijftien, vier, acht wijzen als prismoïde worden beschouwd. En in de ruimte met vijf en meer afmetingen zijn alle regelmatige wezens B_{n+1}, B_{2n}, B_{2n} als prismoïde te duiden.

hoeken, die onder dezelfde bewerking dezelfde uitkomst geven met betrekking tot $(A' B' C' D')$ en 3° door zes parallelogrammen, waarvan de zijden de op de helft herleide evenwijdig aan zich zelf verplaatste ongelijknamige ribben (AB en $C'D'$, enz.) der viervlakken zijn. En hieruit blijkt dan weer gemakkelijk, wat in het algemeene geval de begrenzing is van het middellichaam. Elk boven-zijlichaam (ABC, D') wordt door de middelruimte gesneden volgens een driehoek (AD', BD', CD') gelijkvormig en gelijkstandig met ABC en van de halve lengte-afmeting. Elk grondzijlichaam (A, $B' C' D'$) doet op dezelfde wijze een driehoek (AB', AC', AD') ontstaan, die hetzelfde verband houdt met $B' C' D'$. En elk midden-zijlichaam (AB, $C'D'$) heeft met de middelruimte een parallelogram (AC', AD', BD', BC') gemeen, waarvan de zijdenparen evenwijdig zijn met de ribben AB en $C'D'$ en half zoo lang als deze.

3. We zijn thans in staat zonder van infinitesimale beschouwingen gebruik te maken een algemeene formule van het hypervolume van het vierdimensionale prismoïde af te leiden. Daarbij nemen we als bekend aan, dat het hypervolume van een vierdimensionale pyramide het product is van het volume van het grondlichaam en het vierde gedeelte der hoogte, wat o. a. langs eenvoudigen weg is afgeleid door V. SCHLEGEL. [1])

Door in het middellichaam van het prismoïde een willekeurig punt P aan te nemen en dit punt met behulp van de noodige lijnen, vlakken en ruimten met de hoekpunten, ribben en zijvlakken van bovenlichaam, grondlichaam en zijlichamen te verbinden verdeelen we het prismoïde in twee vierdimensionale pyramiden en zooveel vijfcellen als er viervlakkige zijlichamen zijn. We gaan nu het hypervolume zoeken van elk dier stukken en duiden dan ter voorkoming van verwarring oppervlak, volume of hypervolume eener figuur F steeds door $O(F)$, $V(F)$ of $H(F)$ aan.

Is h de hoogte, dan stellen $\frac{1}{8}$ h. $V(B)$ en $\frac{1}{8}$ h. $V(G)$ het hypervolume van boven- en grondpiramide voor. Verder is

$$H(P, A, B, C, D') = 8\ H(P, AD', BD', CD', D') = \\ = h.\ V(P, AD', BD', CD'),$$

[1]) Zooals men weet, kan een driedimensionaal driezijdig prisma in drie gelijke viervlakken verdeeld worden. Evenzoo is een vierdimensionaal vier-zijlichamig prisma in vier gelijke vijfcellen te splitsen. De firma BRILL te Darmstadt bracht een door SCHLEGEL ontworpen model in den handel, waaraan de laatste een kleine verhandeling toevoegde. Een fransche omwerking hiervan komt voor in het *Annuaire* van de fransche associatie (Congres van Toulouse, 1887, blz. 264).

$$H\,(P,\ A,\ B',\ C'\ D',) = 8\ H\,(P,\ A,\ AB',\ AC',\ AD') =$$
$$= h.\ V(P,\ AB',\ AC',\ AD'),$$

als de dubbele letters AD', enz. weer de snijpunten der overeenkomstige verbindingslijnen met de middelruimte aangeven. Eindelijk ontleenen we aan de formule van het driedimensionale prismoïde de vergelijking

$$V\,(A,\ B,\ C'\ D') = \tfrac{2}{3}\ h.\ O\,(AC',\ AD', BD',\ BC').$$

Is l de lengte van de loodlijn uit P op het midden-zijlichaam $(AB,\ C'D')$ neergelaten, dan is $\frac{1}{4}\ l.\ V(A, B, C', D')$ het hyper-volume $H\ (P,\ A,\ B,\ C',\ D')$ en tevens $\frac{1}{3}\ l.\ \ O\,(AC',\ AD',\ BD',\ BC')$ het volume $V(P,\ AC',\ AD',\ BD',\ BC')$. Dus vinden we

$$H\,(P,\ A,\ B,\ C',\ D') = \tfrac{1}{2}\ h.\ V\ (P,\ AC',\ AD',\ BD',\ BC').$$

Door nu over alle zijlichamen te sommeeren en kortheidshalve de uitdrukkingen $\Sigma\ V(P,\ AD',\ BD',\ CD')$, $\Sigma\ V(P,\ AB',\ AC',\ AD')$, $\Sigma\ V(P,\ AC',\ AD',\ BD',\ BC')$ door $V(M_b)$, $V(M_g)$, $V(M_m)$ aan te duiden komen we tot de betrekking

$$H = \tfrac{1}{8}\ h.\ V(B + G) + h.\ V(M_b + M_g) + \tfrac{1}{2}\ h.\ V(M_m) \ldots\ldots 1),$$

waarvoor in verband met de identiteit

$$V\,(M_b + M_m + M_g) = V\,(M),$$

d. i. het volume van de geheele middeldoorsnee, ook

$$H = \tfrac{1}{8}\ h.\ V(B + G) + h.\ V(M) - \tfrac{1}{2}\ h.\ V(M_m) \ldots\ldots\ldots\ldots 2),$$

of

$$H = \tfrac{1}{8}\ h.\ V(B + G) + \tfrac{1}{2}\ h.\ V(M) + \tfrac{1}{2}\ h.\ V(M_b + M_g) \ldots\, 3)$$

geschreven kan worden. Deze formules zijn algemeen. Want mochten er zijlichamen met meer dan vier zijvlakken voorkomen, dan kunnen we deze in viervlakken ontbinden.

4. Van de drie voor H gevonden uitdrukkingen laat 2) zich het gemakkelijkst onder woorden brengen. In plaats van dit te doen willen we echter twee bedenkingen weerleggen, die tegen de verkregen uitkomst kunnen worden aangevoerd.

Eerstens moeten natuurlijk de bekende formules

$$h.\ V(G),\ \tfrac{1}{4}\,h.\ V(G),\ \tfrac{1}{4}\,h.\ V(B + \sqrt{B^2G} + \sqrt[3]{BG^2} + G)$$

voor prisma (cylinder), pyramide (kegel) en afgeknotte pyramide (afgeknotten kegel) in het voorgaande begrepen zijn. En nu is het niet onmiddellijk duidelijk, hoe bijv. in het geval van het prisma, waarbij $V(B)$ en $V(M)$ aan $V(G)$ gelijk worden, uit den vorm $\frac{1}{4}\,h.\ V(5\ G - 2\ M_m)$, waarin het tweede lid van 2) dan overgaat, de uitkomst $h.\ V(G)$ volgt. We hebben er ons hier rekenschap van te geven, dat de zijlichamen tot driezijdige driemensionale prisma's samengesmolten zijn, en moeten nu onderzoeken, welk gedeelte daarvan tot $V(M_m)$ behoort. Ontbinden we daartoe (fig. 2) elk dier driezijdige prisma's ($ABC,\ D'E'F'$) op de bekende wijze in drie viervlakken, waarvan het eene ($A\,B\,C,\,D$) een boven-zijlichaam, het tweede ($BC,\,D'F'$) een midden-zijlichaam en het derde ($B,\ D'E'F'$) een grond-zijlichaam is, dan blijkt onmiddellijk, dat de doorsnee ($BD',\ CD',\ CF',\ BF'$) van het midden-zijlichaam met de middelruimte [1]) een parallelogram is, dat de helft uitmaakt van de geheele doorsnee van het prismatische zijlichaam met deze middelruimte. Wijl dit voor alle prismatische zijlichamen geldt, volgt hieruit $V(M_m) = \frac{1}{2}\ V(M)$. Substitueeren we dit in $\frac{1}{4}\,h.\ V(5\ G - 2\ M_m)$, dan vinden we naar behooren $h.\ V(G)$.

Ten tweede komt in de vormen $V(M_b + M_g)$ en $V(M_m)$ het willekeurig in M aangekomen punt P voor en zou men dus kunnen meenen, dat de waarde dier vormen met de plaats van P in M verandert. Uit de uitdrukkingen 2) en 3) blijkt echter, dat dit niet het geval kan zijn. Want de onderstelling, dat de waarde $V(M_b + M_g)$ in 3) met de plaats van P in M verandert, zou meebrengen, dat ook het hypervolume van P afhing. We komen dus tot het volgende besluit:

„De som dér inhouden $V(M_m)$ van de pyramiden, die een willekeurig punt P gelegen binnen de middeldoorsnee van een prismoïde tot gemeenschappelijken top en de uit de midden-zijlichamen voortkomende parallelogrammen van het begrenzend oppervlak dier doorsnee tot grondvlakken hebben, is onafhankelijk vàn de plaats van P binnen de doorsnee."

Stellen we den standvastigen inhoud van deze pyramidensom door $V(S)$ voor, dan gaat 2) over in

$$H = \tfrac{1}{8}\,h.\ V(B + G + 8\ M - 4\ S) \ldots\ldots\ldots\ldots 4)$$

[1]) In de figuur moet BF' met BD' vereenigd worden in plaats van met CD'.

5. De stelling, dat de uitdrukking $V(M_m)$ onafhankelijk is van de plaats van het willekeurig binnen M aangenomen punt P, is hier met behulp van vierdimensionale beschouwingen bewezen. Het is dus wenschelijk van deze stelling ook een bewijs te geven, waarin van geen vierde afmeting sprake is. We denken ons daartoe een veelvlak M, dat de eigenschappen heeft van een middellichaam en dus begrensd wordt 1° door eenige zijvlakken b, die door evenwijdige aaneenschuiving een lichaam B kunnen insluiten (gelijkvormig en gelijkstandig met wat bij het prismoïde het bovenlichaam uitmaakt en op de halve lengte-afmeting), 2° door eenige zijvlakken g, die door deze zelfde bewerking dit een tweede lichaam G kunnen doen, en 3° door eenige parallelogrammen m. En nu bewijzen we, dat de som van de inhouden der pyramiden met deze parallelogrammen m tot grondvlakken en een willekeurig punt P binnen M tot top, van de plaats van P binnen M onafhankelijk is.

We nemen drie onderling loodrechte coördinaatvlakken aan en noemen de projectie van een zijvlak van een willekeurig lichaam L op een coördinaatvlak positief of negatief, naarmate de naar buiten gerichte loodlijn op dit zijvlak met de positieve as behoorende bij het coördinaatvlak een scherpen of een stompen hoek maakt. Dan is de som der projecties van de zijvlakken van L op ieder der coördinaatvlakken nul.

Wijl nu de zijvlakkengroep (b) van M door evenwijdige aaneenschuiving het geheele oppervlak van een gesloten veelvlak B vormen kan en het overeenkomstige van de zijvlakkengroep (g) met betrekking tot G geldt, vinden we als l_x, l_y, l_z de projecties zijn van het gerichte zijvlak l op de drie coördinaatvlakken

$$\Sigma\,(b_u) = 0,\ \ \Sigma\,(g_u) = 0,\ \ \Sigma\,(b_u + g_u + m_u) = 0,$$
$$(u = x, y, z).$$

Hieruit volgt door aftrekking

$$\Sigma\,(m_u) = 0,\ \ (u = x, y, z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5),$$

d. w. z. de som der projecties van de parallelogrammen (m) op elk der coördinaatvlakken is nul. Daar nu onmiddellijk blijkt, dat de som $V(M_m)$, als P zich van het punt (x_1, y_1, z_1) naar het punt (x_2, y_2, z_2) verplaatst, met

$$(x_1 - x_2)\,\Sigma\,(m_x) + (y_1 - y_2)\,\Sigma\,(m_y) + (z_1 - z_2)\,\Sigma\, m_z$$

toeneemt, en dit volgens de drie betrekkingen 5) verdwijnt, is de toename van $V(M_m)$, die uit elke verplaatsing van P binnen M voortvloeit, nul en $V(M_m)$ dus onafhankelijk van de plaats van P binnen M.

Uit dit bewijs volgt tevens, dat niet alleen $V(M_b + M_g)$, doch elk der grootheden $V(M_b)$ en $V(M_g)$ afzonderlijk onafhankelijk is van de plaats van P binnen M.

5. Beschouwingen omtrent de ruimte met vier afmetingen worden niet alleen door leeken, maar ook door enkele wiskundigen met schroomvalligheid aanvaard. Daarom kan het zijn nut hebben te doen zien, dat uit deze beschouwingen gevolgen kunnen worden afgeleid, die in de ruimte met drie afmetingen hun bevestiging vinden. Dit doel beoogde ik toen ik bovengevonden eigenschap van het middellichaam en de wijs, waarop ik er toegekomen was, in de vergadering van 18 April meedeelde. Naar aanleiding van deze mededeeling ontving ik twee dagen later een schrijven van ons medelid Dr. D. J. KORTEWEG, waarin bewezen wordt, dat de bekende formule $\frac{1}{6} h (B + 4 M + G)$ eerst bij de vijfde afmeting haar geldigheid verliest. Dit bewijs, dat zeer eenvoudig is, doch wijl het op infinitesimale gronden berust, minder in het kader dezer stereometrische beschouwingen past, komt op het volgende neer. We verdeelen het boven- en grondlichaam van het gegeven prismoïde in een even groot aantal n zeer kleine rechthoekige parallelopipeda p_b en p_g met evenwijdige zijvlakken, stellen vervolgens tusschen deze lichaampjes p_b en p_g een overeenkomst één aan één vast, zoodanig dat met twee door een zijvlak aan elkaar grenzende lichaampjes p_b en p'_b van de bovenruimte twee eveneens door een zijvlak aan elkaar grenzende lichaampjes p_g en p'_g der grondruimte overeenstemmen, en beschouwen eindelijk het gegeven prismoïde als de grens, waartoe de som der zeer kleine prismoïden met p_b en p_g tot boven- en grondlichaam nadert, als n oneindig groot wordt. Dan is het duidelijk, dat de formule $\frac{1}{6} h . V(B + 4 M + G)$ voor het geheele prismoïde geldt, als zij geldt voor elk der aldus bepaalde differentialen. Zijn nu a_1, b_1, c_1 de ribben van p_b en a_2, b_2, c_2 die van p_g en dus

$$\frac{a_1 x + a_2 (h - x)}{h}, \quad \frac{b_1 x + b_2 (h - x)}{h}, \quad \frac{c_1 x + c_2 (h - x)}{h}$$

die van het parallelopipedum p_x volgens welke de ruimte op een afstand x evenwijdig aan de grondruimte het kleine prismoïde snijdt, dan is het volume van dit tusschenlichaam het product dezer drie factoren en dus voor te stellen door $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$. Dus is het hypervolume van het kleine prismoïde voorgesteld door

$$H = \int_0^h (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)\, dx = \alpha h + \tfrac{1}{2} \beta h^2 + \tfrac{1}{3} \gamma h^3 + \tfrac{1}{4} \delta h^4.$$

Voor ditzelfde lichaampje is tevens

$$\begin{aligned} V(B) &= \alpha + \beta h + \gamma h^2 + \delta h^3, \\ V(4\,M) &= 4\,\alpha + 2\,\beta h + \gamma h^2 + \tfrac{1}{2}\,\delta h^3, \\ V(G) &= \alpha \end{aligned}$$

en dus

$$\tfrac{1}{6}\, h.\ V(B + 4\,M + G) = \alpha h + \tfrac{1}{2} \beta h^2 + \tfrac{1}{3} \gamma h^3 + \tfrac{1}{4} \delta h^4 = H,$$

waarmee het beweerde is aangetoond. Tevens blijkt uit deze beschouwing, dat de formule $\frac{1}{6}\, h.\ V(B + 4\,M + G)$ voor alle vierdimensionale vormingen geldt, die tusschen twee evenwijdige ruimten begrepen zijn en met elke evenwijdige tusschenruimte een tusschenlichaam opleveren, waarvan het volume een derdemachtsvorm is in den afstand x van deze tusschenruimte tot grond- of bovenruimte. Werkelijk is trouwens algemeen bekend — en daarop komt dit laatste neer —, dat de gebruikelijke formule $\frac{1}{6}\, h.\ O(B + 4\,M + G)$ in de gewone ruimte met drie afmetingen geldt voor lichamen tusschen evenwijdige vlakken begrepen, als de doorsnee met evenwijdige tusschenvlakken een oppervlak heeft, die door een derdemachts-vorm in x wordt aangegeven.

6. Om aan te toonen, dat de formule $\frac{1}{6}\, h.\ V(B + 4\,M + G)$ ook uit de ontwikkelde stereometrische beschouwingen volgt, herhalen we onze verdeeling van het vierdimensionale prismoïde met deze wijziging, dat we in plaats van een punt P in de middelruimte een punt Q in de bovenruimte aannemen, dit punt door de noodige lijnen, vlakken en ruimten met de hoekpunten, ribben en zijvlakken van grond-, boven- en zijlichamen verbinden en nu aanwijzen, dat de aangegeven formule geldt voor elk der deelen, waarin het prismoïde hierdoor verdeeld is. Deze deelen zijn dan 1° een vierdimensionale pyramide met Q tot top en G tot grondlichaam en, wijl Q met B geen hypervolume vormt, 2° verder alleen vijfcellen. Deze vijfcellen hebben vier, drie of twee hoekpunten in de bovenruimte en dus één, twee of drie hoekpunten in de grondruimte liggen, naarmate ze uit een boven-zijlichaam, een midden-zijlichaam of een grond-zijlichaam ontstaan. Wijl de eerste pyramide te verdeelen is in vijfcellen

met één hoekpunt in de bovenruimte en vier hoekpunten in de grondruimte, kan beweerd worden, dat de uitdrukking in kwestie voor het vierdimensionale prismoïde geldt, als ze dit doet voor twee soorten van vijfcellen, waarvan de vijf hoekpunten of als één en vier, of als twee en drie over de beide begrenzende ruimten van het prismoïde verdeeld zijn. Voor het eerste geval is $B = 0$, $M = \frac{1}{8} G$, $S = 0$ en herleiden dus de uitdrukkingen $\frac{1}{8} h. V(B + G + 8 M - 4 S)$ en $\frac{1}{6} h. V(B + 4 M + G)$ zich beide tot $\frac{1}{4} h. V(G)$. Voor het tweede geval is $B = 0, G = 0$ en, zoo als aanstonds nader blijken zal, $S = \frac{2}{3} M$, zoodat de beide bedoelde uitdrukkingen weer dezelfde waarde $\frac{2}{3} h. V(M)$ aannemen. Dus kunnen deze uitdrukkingen in beide gevallen voor elkaar in de plaats treden en is het hypervolume van het prismoïde werkelijk door $\frac{1}{6} h. V(B + 4 M + G)$ voorgesteld.

De voor het tweede geval geldende betrekking $S = \frac{2}{3} M$ wordt onmiddellijk gevonden, als we het middellichaam van de bedoelde vijfcel teekenen. Dit is (fig. 3) een driezijdig prisma, waarvan de opstaande ribben $(A C', B C')$, $(A D', B D')$, $(A E', B E')$ evenwijdig zijn aan $A B$ en half zoo groot als deze in de bovenruimte liggende ribbe, terwijl de boven- en grondvlakken $(A C', A D', A E')$, $(B C', B D', B E')$ driehoeken zijn gelijkstandig en gelijkvormig met $C'D'E'$ en lineair half zoo groot als dit in de grondruimte liggende zijvlak. Neemt men nu binnen dit prisma een punt P aan, dan is de som der beide viervlakken $(P, A C', A D', A E')$, $(P, B C', B D', B E')$ een derde gedeelte van het prisma en blijft er dus voor S twee derde van het prisma over. We vinden ook stereometrisch dus de volgende eenvoudige uitkomst:

Het hypervolume van een vierdimensionaal prismoïde wordt gevonden door de som van het volume van het bovenlichaam, het volume van het grondlichaam en viermaal het volume van het middellichaam met het zesde gedeelte der hoogte te vermenigvuldigen.

7. De door Dr. Korteweg gegevene infinitesimale bepaling van het hypervolume van een vierdimensionaal prismoïde laat zich onmiddellijk op de ruimte met n afmetingen uitbreiden. In zulk een ruimte R_n wordt het n-dimensionale prismoïde begrensd door boven-, grond- en zijfiguren gelegen in ruimten R_{n-1} van $n-1$ afmetingen. De ruimten R_{n-1} van grond- en bovenfiguur zijn weer evenwijdig; de figuren G en B zelf worden begrensd door ruimten R_{n-2}. De zijfiguren hebben, als er geen versmelting van zijruimten plaats vindt, n hoekpunten, die als 1 en $n-1$, 2 en $n-2$, enz. over grond- en bovenruimte verdeeld zijn, zoodat er $n-1$ ver-

schillende soorten van zij-figuren voorkomen; ze worden begrensd door de n hoekpunten met hun $\binom{n}{2}$ verbindingslijnen, hun $\binom{n}{3}$ verbindingsvlakken, hun $\binom{n}{4}$ verbindingsruimten R_3, enz. en hun n verbindingsruimten R_{n-2}. Wijl elk verbindend element tot de begrenzing behoort, noemt men ze simplissima. Verdeelt men nu boven- en grond-figuur in een even groot aantal zeer kleine figuren, die elk voor zich begrensd worden door $n-1$ paren van evenwijdige ruimten R_{n-2}, die paar aan paar loodrecht op elkaar staan ($n-2^{de}$ term in de reeks rechthoek, rechthoekig parallelopipedum, enz.) en past men de boven ontwikkelde beschouwing toe, dan vindt men, dat het hypervolume van de doorsnee met een evenwijdige ruimte R_{n-1} op een afstand x van de grondruimte een $n-1^{ste}$ machts-vorm in x is. Hiermee is de bepaling van het hypervolume van een n-dimensionaal prismoïde teruggebracht tot een vraagstuk van het platte vlak en wel tot het zoeken van den inhoud eener vlakke figuur, begrensd door de parabool $y = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ van den $n-1^{sten}$ graad, de x-as en de beide ordinaten overeenkomende met $x = 0$ en $x = h$. We beschouwen daarom dit laatste vraagstuk wat nader.

De vorm $a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ bevat n standvastigen a; de inhoud $\int_0^h y\,dx$ bevat dus h en n standvastigen a. Daarom heeft men getracht deze inhoud in h en n bij bepaalde waarden van x behoorende waarden van y uit te drukken met behulp van n standvastigen b. Het meest voor de hand ligt dan zeker de handelwijs van COTES, die de hoogte h, hier den afstand h langs de x-as, in $n-1$ gelijke deelen verdeelt en van de bij de grenspunten en de $n-2$ deelpunten behoorende waarden van y gebruik maakt. Dan komt het er op aan in de vergelijking.

$$\int_0^h y\,dx = \frac{a_1}{n} h^n + \frac{a_2}{n-1} h^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} h^2 + \frac{a_n}{1} h =$$

$$= h\,[b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_n y_n]$$

de uit $y = a_1 x^{n-1} + \dots a_n$ volgende waarden van $y_1, y_2 \cdot \cdot y_n$ in te voegen en door gelijkstelling van de coëfficiënten der verschillende machten van h de onbepaalde multiplicatoren b_i ($i = 1, 2, \dots n$) te bepalen. Dit vraagstuk echter wordt veel vereenvoudigd als men bedenkt, dat $a_1 y^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots a_{n-1} y + a_n$ vervangen kan worden door $A \sum_{i=1}^{i=n-1} (x + d_i)^{n-1}$. Want dan blijkt, dat het doel reeds bereikt zal zijn, als we de multiplicatoren b_i voor het geval $y = (x + a)^{n-1}$ bepaald hebben. Immers, is een voor dit geval geldende uitdrukking gevonden, dan blijkt door optelling, dat deze uitdrukking ook voor het algemeene geval geldt. We hebben dus in

$$\frac{(h + a)^n - a^n}{n} = h \left\{ b_1 a^n + b_2 \left(\frac{h}{n-1} + a\right)^n + \right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + b_n (h + a)^n \right\},$$

d. i. in

$$\frac{(h + a)^n - a^n}{h} = n \left\{ b_1 a^n + b_2 \left(\frac{h}{n-1} + a\right)^n + \right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + b^n (h + a)^n \right\}$$

door gelijkstelling van de coëfficiënten van de gelijknamige machten van h de onbepaalde grootheden b_i te bepalen. Deze handelwijs geeft de n vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{llllll}
B_0 \equiv b_1 + b_2 + & b_3 + & b_4 + \ldots\ldots & b_n = & 1 \\
B_1 \equiv \quad\; b_2 + & 2 b_3 + & 3 b_4 + \ldots (n-1) & b_n = & \dfrac{n-1}{2} \\
B_2 \equiv \quad\; b_2 + & 2^2 b_3 + & 3^2 b_4 + \ldots (n-1)^2 & b_n = & \dfrac{(n-1)^2}{3} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
B_{n-2} \equiv \; b_2 + & 2^{n-2} b_3 + & 3^{n-2} b_4 + \ldots (n-1)^{n-2} & b_n = & \dfrac{(n-1)^{n-2}}{n-1} \\
B_{n-1} \equiv \; b_2 + & 2^{n-1} b_3 + & 3^{n-1} b_4 + \ldots (n-1)_{n-1} & b_n = & \dfrac{(n-1)^{n-1}}{n}
\end{array}\right\} \ldots 6),$$

waarin de n grootheden b_i lineair voorkomen. Vervangt men dit stelsel door

$$B_0 = 0,\; B_1 = 0,\; B_2 - B_1 = 0,\; B_3 - 3 B_2 + 2 B_1 = 0,$$
$$B_4 - 6 B_3 + 11 B_2 - 6 B_1 = 0, \text{ enz.},$$

waarbij de coëfficiënten, die optreden in de vergelijking, die $B_k = 0$

vervangt, aan die van het product $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-k+1)$ gelijk zijn, dan vindt men

$$\left.\begin{array}{l}\sum_1^n {}_k b_k = 1, \quad \sum_2^n {}_k (k-1)\, b_k = \frac{1}{2}\, n\,(n-1) \\ \sum_3^n {}_k (k-2)(k-1)\, b_k = \frac{1}{6}\,(n-1)(2\,n-5) \\ \sum_4^n {}_k (k-3)(k-2)(k-1)\, b_k = \frac{1}{4}\,(n-3)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots 7),$$

dat eenvoudiger op te lossen is als het voorgaande. Voeren we voor de som der producten k aan k van de getallen 1, 2, 3.. n de notatie $T_{k,n}$ in, dan is de laatste vergelijking van het stelsel 7)

$$(n-1)!\, b_n = \frac{(n-1)^{n-1}}{n} - \frac{(n-1)^{n-2}}{n-1}\, T_{1,n-1} + \frac{(n-1)^{n-3}}{n-2}\, T_{2,n-1} - \ldots,$$

waardoor b_n gevonden wordt. Daarna geeft de voorlaatste vergelijking tusschen b_{n-1} en b_n na invoeging der waarde van b_n die van b_{n-1}, enz.

Zooals bekend is (vergelijk o. a. LOBATTO's *Integraalrekening*, § 190—197), laten de vergelijkingen 6) echter een vereenvoudiging toe van geheel anderen aard. Wijl de inhoud der parabool niet verandert, als men de volgorde der ordinaten omkeert, moeten b_1 en b_n, b_2 en b_{n-1}, in het algemeen b_k en $b_{n-(k-1)}$ aan elkaar gelijk zijn. Hierdoor wordt het aantal onbepaalde coëfficiënten b_i voor even n met de helft, voor oneven n met de kleinste helft verminderd, waarmee dan gepaard gaat, dat een zeker aantal der vergelijkingen 6) afhankelijk wordt van de overigen, Zoo herleidt $2B_1 = 0$ zich tot $(n-1)\, B_0 = 0$, enz. En dat het aantal overblijvende vergelijkingen gelijk is aan dat der overblijvende onbekenden, kan blijken als we in de bron

$$\frac{(h+a)^n - h^n}{h} = n\left\{b_1 a^n + b_2\left(\frac{h}{n-1} + a\right)^n + \ldots + b_n\,(h+a)^n\right\}$$

der betrekkingen 6) de substituties

$$a = a' - \tfrac{1}{2}\, h,\ b_1 + b_n = b'_1,\ b_2 + b_{n-1} = b'_2, \text{ enz.}$$

invoeren. We vinden dan

$$\frac{(a' + \frac{1}{2}h)^n - (a' - \frac{1}{2}h)^n}{h} = n\left[b'_1\left\{(a' + \tfrac{1}{2}h)^n + (a' - \tfrac{1}{2}h)^n\right\} + \right.$$
$$\left. + b'_2\left\{(a' + \tfrac{1}{2}h - \frac{1}{n-1}h)^n + (a' - \tfrac{1}{2}h + \frac{1}{n-1}h)^n\right\} + \text{enz.}\right],$$

waarin alleen evene machten van h blijven voorkomen; zoodat het aantal onbekenden b' weer gelijk is aan het aantal hieruit af te leiden betrekkingen, nl. $\frac{1}{2}n$ of $\frac{1}{2}(n-1)$ naarmate n even of oneven is.

Tot en met het geval $n = 11$ worden de uitkomsten der aldus vereenvoudigde vergelijkingen in LOBATTO's *Integraalrekening* (vergelijk ook CARR's *Synopsis of pure mathematics*, blz. 438) opgegeven. Gemakkelijk verifieert men nu, dat de voor $n = 2k-1$ gegeven uitdrukkingen tevens gelden voor $n = 2k$. Liever stellen we voor deze verificatie, die zich dan toch maar tot $n = 12$ uitstrekken kan, een algemeen bewijs in de plaats, vooral wijl dit bewijs zeer eenvoudig is.

Uit de verkregen uitkomsten

$$I_{2k-1} = h\,[b'_1\,(y_1 + y_{2k-1}) + b'_2\,(y_2 + y_{2k-2}) + \ldots\ldots + b'_k\,y_k],$$
$$(n = 2k-1),$$

$$I_{2k} = h\,[b''_1\,(y_1 + y_{2k}) + b''_2\,(y_2 + y_{2k-1} + \ldots + b''_k\,(y_k + {}_{k+1})],$$
$$(n = 2k)$$

volgt eerstens, dat het aantal in I_{2k-1} en I_{2k} optredende onafhankelijke coëfficiënten b hetzelfde is en I_{2k} dus ook moet kunnen worden voorgesteld door

$$I'_{2k} = h\,[c'_1\,(y_1 + y_{2k-1}) + c'_2\,(y_2 + y_{2k-2}) + \ldots\, c'_k\,y_k],$$

waarbij y_1, y_2, ... y_k volkomen dezelfde beteekenis hebben als in I_{2k-1} en dus weer bij een in $2k-2$ deelen verdeelde hoogte behooren. Doch als dit het geval is, moeten de coëfficiënten c_i ook aan de overeenkomstige coëfficiënten b'_i gelijk zijn. Denkt men zich namelijk het geval van het prismoïde in R_{2k}, dat door het algemeene prismoïde in R_{2k-1} doorloopen wordt, als dit laatste in een nieuwe richting, die van de n^{de} afmeting, over een weg p wordt voortbewogen, dan geeft $p.\ I_{2k-1}$ het hypervolume aan, terwijl $p\,y_1$, $p\,y_2$, enz. in de nieuwe y'_1, y'_2, enz. overgaan. Wijl nu, omdat de k grootheden b'_1, b'_2, ... b'_k uit onderling onafhankelijke lineaire vergelijkingen gevonden zijn, $p.\ I_{2k-1}$ de eenige uitdrukking voor het hypervolume in y'_1, y'_2, enz. wezen kan, moeten de coëfficiënten c_i der tweede uitdrukking identisch zijn met de overeenkomstige coëfficiënten b'_1. We vinden dus:

De formule voor het hypervolume van een $2k$—1-dimensionaal prismoïde geldt onveranderd voor dat van een $2k$-dimensionaal prismoïde.

In het voorbijgaan merken we op, dat hiermee de volgende steling is aangetoond:

De inhoud der vlakke figuur begrensd door een parabool $y = f_{2n-1}(x)$ van oneven graad, de x-as en de bij $x = 0$ en $x = h$ behoorende ordinaten wordt uitgedrukt door dezelfde formule, welke op overeenkomstige wijze bij de parabool $y = f_{2n-2}(x)$ van naast lageren graad behoort.

Deze uitkomst schijnt nieuw te zijn. Merkwaardig is in elk geval, dat ze uit hypergeometrische beschouwingen is afgeleid. [1]) Zij is de uitbreiding van de bekende uitkomst, die zegt, dat de formule $\frac{1}{6} h (B + 4 M + G)$ geldt voor lichamen begrepen tusschen twee evenwijdige vlakken, waarvan de doorsneden met vlakken evenwijdig aan deze een inhoud hebben, die een derdemachts-vorm is van den afstand dier vlakken tot grond- of bovenvlak.

9. We eindigen deze beschouwingen met enkele opmerkingen omtrent nadere bijzonderheden.

a. Wil men vierdimensionale prismoïden voortbrengen, die geen versmelting van de midden-zijlichamen met de overige zijlichamen vertoonen, dan kan men tot grond- en bovenlichaam twee veelvlakken aannemen, die dualistisch verwant zijn en waarvan het eene dus evenveel hoekpunten, ribben, zijvlakken heeft als het andere zijvlakken, ribben, hoekpunten, bijv. oktaëder en kubus. De daarbij behoorende middeldoorsnee is in fig. 4 voorgesteld. De drie assen van het oktaëder zijn evenwijdig met de ribben van den kubus aangenomen; alle ribben zijn even groot. Ieder hoekpunt van den kubus is verbonden met de drie hoekpunten van den gelijkzijdigen driehoek des oktaëders, die in het overeenkomstige kwadrant ligt. Deze middeldoorsnee is een combinatie van oktaëder, kubus en rhomben-dodekaëder in evenwicht. Zij is op drie wijzen te verdeelen in een regelmatig achtzijdig prisma en twee gelijke prismoïden en kan o. a. uit de middeldoorsnee van fig. 1 afgeleid worden door in deze de middens der ribben te zoeken en behoorlijk door ribben en zijvlakken te vereenigen. Zij is dualistisch tegengesteld aan het leucitoëder.

---

[1]) Een bewijs onafhankelijk van hypergeometrie gaf ik in de *Comptes rendus* van 18 Mei 1896; men vergelijke ook het nummer van 15 Juni.

Het spreekt van zelf, dat de uitdrukking 4) alleen dan geldt, als de verschillende zijlichamen elkaar niet doordringen. Dit toch is bij het driedimensionale prismoïde met de bekende formule $V = \frac{1}{6} h . O (B + 4 M + G)$ ook het geval. Vereenigen we bijv. van de congruente en rechtstreeks gelijkstandige driehoeken ABC en $D'E'F'$ (fig. 5), die in evenwijdige vlakken liggen, A met E' en F', B met F' en D', C met D' en E', dan zullen de zes zijvlakken door deze paren van verbindingslijnen elkaar doordringen en de middeldoorsnee een driehoek zijn gelijkvormig en bij tegenoverstand gelijkstandig met grond- en bovenvlak van de halve lengte-afmeting. De formule geeft dan $\frac{1}{2} h G$, terwijl de som der inhouden van de twee tegen elkaar aanliggende prismoïden $\frac{5}{4} h G$ bedraagt. Door de bewerking van fig. 1 op twee congruente en rechtstreeks gelijkstandige tetraëders, die in evenwijdige ruimten liggen, toe te passen vindt men een overeenkomstige doordringing bij het vierdimensionale prismoïde; de middeldoorsnee (fig. 6) wordt dan het oktaëder, waaruit door hemiëdrie de grond- en bovenlichamen weer te voorschijn komen.

We stippen hierbij aan, dat uit twee congruente en gelijkstandig in evenwijdige ruimten liggende tetraëders vier verschillende vormingen kunnen ontstaan, naarmate we òf van rechtstreeks òf van bij tegenoverstand gelijkstandige tetraëders uitgaan en we òf gelijknamige òf ongelijknamige hoekpunten verbinden. Deze zijn:

1° (rechtstreeks, gelijknamig) : het vier-zijlichamig prisma,

2° (bij tegenoverstand, gelijknamig) : twee vier-zijlichamige pyramiden,

3° (rechtstreeks, ongelijknamig) : twee tegen elkaar geplaatste prismoïden (fig. 5),

4° (bij tegenoverstand, ongelijknamig) : het zestienlichamig prismoïde (fig. 1), dat begrensd wordt door acht paar evenwijdige viervlakken.

Deze uitkomsten worden gemakkelijk afgelezen uit die, welke zich bij het overeenkomstige geval in de ruimte met drie dimensies voordoen.

c. Niet alleen de middeldoorsnee, ook de doorsnee met elke willekeurige ruimte evenwijdig aan grond- en bovenruimte is langs den boven aangegeven weg te verkrijgen. Men heeft daartoe de verbindingslijnen in plaats van in twee gelijke slechts in evenredige deelen te verdeelen. Uit fig. 1 ontstaat dan een door vier kleine gelijkzijdige driehoeken, vier groote gelijkzijdige driehoeken en zes rechthoeken begrensd veertienvlak (vergelijk *Verh.* dezer Akademie, sectie 1, deel 2, n°. 2, fig. 15.)

Tusschen de verschillende evenwijdige doorsneden bestaan natuurlijk betrekkingen. Als één eigenaardig voorbeeld hiervan diene het volgende. Nemen we op een willekeurige lijn, die een punt B van het bovenlichaam met een punt G van het grondlichaam verbindt, de punten L, M, N zoodanig aan, dat

$$BL = 2\,LM = 2\,MN = NG$$

is, en stellen b, l, m, n, g de loodlijnen uit de vijf op deze lijn gelegen punten op een willekeurige ruimte voor, dan gelden de betrekkingen

$$\begin{aligned} b + 4\,m &= 4\,l + n, \\ l + 4\,n &= 4\,m + g, \\ l + n &= 2\,m. \end{aligned}$$

Zijn nu $V(L_b)$, $V(L_m)$, $V(L_g)$ de drie verschillende deelen der evenwijdige doorsnee door het punt L, die bij het punt L als gemeenschappelijke top der verschillende pyramiden behooren, en hebben $V(N_b)$, $V(N_m)$, $V(N_g)$ de overeenkomstige beteekenis voor de doorsnee door het punt N, dan vindt men gemakkelijk

$$\begin{aligned} 16\,V(M_b) &= 9\,V(L_b) + 9\,V(N_b) - V(B), \\ 16\,V(M_g) &= 9\,V(L_g) + 9\,V(N_g) - V(G), \\ 16\,V(M_m) &= 9\,V(L_m) + 9\,V(N_m) \end{aligned}$$

en verder door optelling met weglating van het teeken V

$$B - 9\,L + 16\,M - 9\,N + G = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8).$$

Men bewijst gemakkelijk, dat ook aan de grootheden $V(L_b)$, $V(L_m)$, $V(L_g)$ en $V(N_b)$, $V(N_m)$, $V(N_g)$ en in het algemeen aan de drie deelen, waaruit iedere evenwijdige doorsnee bestaat, de eigenschap toekomt van de plaats van het aangenomen punt onafhankelijk te zijn.

Het bestaan van de betrekking 8) was te voorzien. Want uit de beschouwing van de parabolen van den derden graad volgt

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{8}\,h\,(B + 3\,L + 3\,N + G), \\ I &= \tfrac{1}{6}\,h\,(B + 4\,M + G) \end{aligned}$$

en dus ook

$$3\,(B + 3\,L + 3\,N + G) = 4\,(B + 4\,M + G).$$

Wijl de formules geldende voor de prismoïden in de ruimten met meer dan vier afmetingen ook voor het vierdimensionale gelden, is hiermee een bron tot het opsporen van betrekkingen als 8) aangewezen.

d. In de regelmatige gevallen door de fig. 1 en 4 voorgesteld is het onmiddellijk duidelijk, dat de waarde van $V(M_m)$ onafhankelijk zijn moet van de plaats van P in het middellichaam M. Want de pyramiden, waaruit $V(M_m)$ bestaat, hebben twee aan twee evenwijdige en gelijke grondvlakken en de som der inhouden van twee zulke pyramiden hangt niet van de plaats van het tusschen deze grondvlakken gelegen punt P af. Door een eenvoudige berekening, die hier achterwege kan blijven, vindt men in de beide gevallen voor de verhoudingen $V(M_b) : V(M_m) : V(M_g)$ achtereenvolgens $1 : 3 : 1$ en $2 : 4 : 1$, wat aantoont dat deze verhoudingen van den bijzonderen bouw van het prismoïde afhangen. Trouwens bij het prisma vonden we reeds $1 : 2 : 1$ en bij de pyramide behoort $0 : 0 : 1$.

e. Een enkele blik op de middeldoorsneden der fig. 1 en 4 doet zien, dat uit boven- of grondlichaam een lichaam gelijkvormig met de middeldoorsnee is af te leiden door in de zijvlakken hiervan met de omtrekken der zijvlakken gelijkvormige en gelijkstandige veelhoeken te teekenen, die met deze hetzelfde zwaartepunt hebben en in eene bepaalde verhouding van grootte tot deze staan, om daarna de hoekpunten van deze nieuwe veelhoeken op een bepaalde wijs te vereenigen. In het geval van fig. 1 geeft uitbreiding van de vier bij $V(B)$ behoorende driehoeken van M een viervlak van de dubbele lengte-afmeting van B; wijl AB', AC' de helft is van $B'C'$ moet de zijde der nieuwe in de zijvlakken van $(A'B'C'D')$ in te teekenen driehoeken dus een vierde van die der oorspronkelijke driehoeken bedragen. In het geval van fig. 4 moet de zijde in de verhouding $1 : 1 + \sqrt{2}$ verkleind worden.

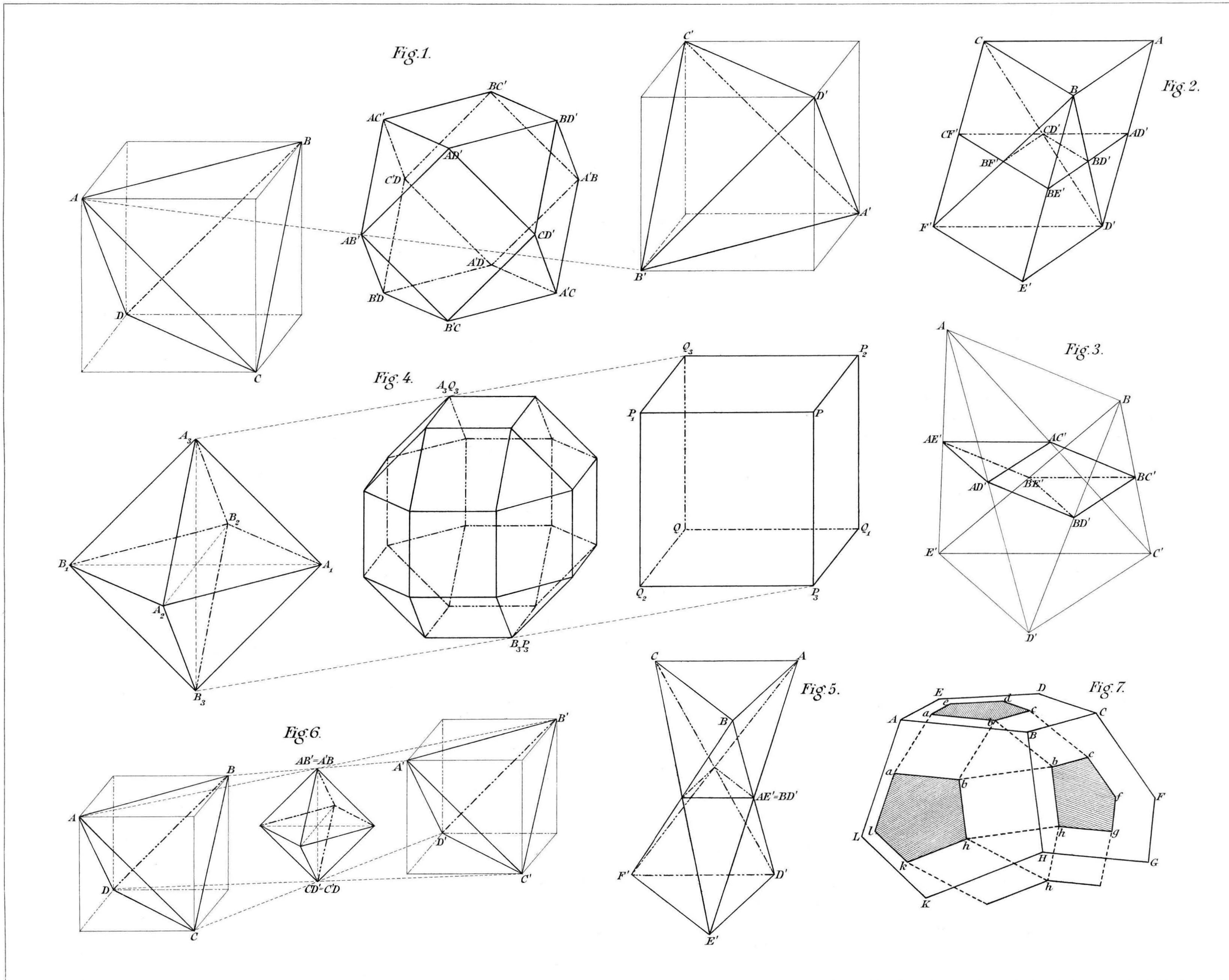
Past men op het regelmatig twaalf- of twintigvlak dezelfde bewerking toe, dan vindt men een middeldoorsnee van een prismoïde bepaald door regelmatig twaalf- en twintigvlak met evenwijdige dwarslijnen (verbindingslijnen der middens van overstaande ribben) in evenwijdige ruimten gelegen als grond- en bovenlichaam.

f. Beschrijft men in de zijvlakken $ABCDE$, $BCFGH$, $ABHKL$, enz. (fig. 7) van een willekeurig lichaam T zonder op zwaartepunten te letten veelhoeken *abcde*, *bcfgh*, *abhkl*, enz. gelijkvormig en gelijkstandig met de omtrekken der gelijknamige zijvlakken en op dezelfde lengtemaat verkleind, dan doet vereeniging der gelijknamige hoekpunten door ribben (aa), (bb), enz. en door zijvlakken $(aabb)$, (bbb), enz. een meer algemeen middellichaam M ontstaan. Vooreerst volgt uit de eenvoudigste gronddenkbeelden omtrent gelijkvormigheid, dat door evenwijdige aaneenschuiving der kleine zijvlakken *abcde*, enz. een veelvlakkig lichaam t gelijkvormig en gelijkstandig met T' verkregen kan worden. En verder toonen we als volgt aan, dat de driehoeken (bbb), (hhh), enz. gelijk en gelijkstandig zijn met de zijvlakken van een tweede lichaam u. We nemen in t een willekeurig punt P aan en verdeelen dit lichaam in pyramiden, die de zijvlakken van t tot grondvlak en P tot gemeenschappelijken top hebben. Daarna verplaatsen we deze pyramiden evenwijdig aan zich zelf zoo, dat de grondvlakken de in fig. 7 aangewezen plaats hernemen. Daardoor heeft men dan binnen T' evenveel punten P verkregen, als T' zijvlakken heeft. En nu is het onmiddelijk in te zien, dat de drie punten P, die bij de drie aangrenzende zijvlakken *abcde*, *bcfgh*, *abhkl* behooren, een met driehoek (bbb) gelijkvormigen en gelijkstandigen driehoek vormen en er dus door vereeniging van elk bij twee aangrenzende zijvlakken behoorend paar punten P een geraamte van ribben ontstaat, waarin de driehoeken (bbb), (hhh), enz. door evenwijdige verplaatsing kunnen worden ingepast. In evenwijdige ruimten gelegen veelvlakken T'' en U' gelijkvormig en gelijkstandig met t en u en van de dubbele lengte-afmeting zijn dan weer boven en grondlichaam van een prismoïde, dat M tot middellichaam heeft.

g. Evenwel is het aldus voortgebrachte middellichaam M nog niet het meest algemeene. Want het heeft nog altijd de bijzondere eigenschap, dat door uitbreiding der bij T'' behoorende zijvlakken *abcde*, enz. een met T'' gelijkvormig en gelijkstandig veelvlak T' verkregen wordt, waarmee dan dezelfde eigenschap met betrekking tot U' al of niet gepaard kan gaan. Uit de beschouwing van het overeenkomstige vraagpunt bij het driedimensionale prismoïde kan reeds blijken, dat de bedoelde betrekking in het algemeen niet voorkomt. Nemen we bijv. een driehoek ABC en een vierkant $DEFG$ als de projecties aan van grond- en bovenvlak van zulk een prismoïde op het middelvlak, dan is het duidelijk, dat de zevenhoekige middeldoorsnee met betrekking tot het vierkant de besproken hoedanigheid mist. Want bij verlenging der vier aan de zijden van het vierkant evenwijdige zijden ontstaat klaarblijkelijk een rechthoek, geen vierkant.

In het algemeene geval levert de verlenging der zijvlakken $V(M_b)$ of $V(M_g)$ van M geen lichaam gelijkvormig met B of G op. De eenvoudigste handelwijs ter verkrijging der algemeenste middeldoorsnee zal dus wel hierin bestaan, dat men van twee willekeurig aangenomen lichamen B en G uitgaat en hiermee handelt als in fig. 1 en 4 is aangewezen.

Groningen, 20 Juni 1896.



J. Bijtel, lith., P. J. Mulder, impr. Leiden.