DE MERKWAARDIGE PUNTEN VAN DEN INGESCHREVEN VEELHOEK

DOOR

M. VAN OVEREEM Jr.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(EERSTE SECTIE)

Dl. III. N°. 7.

(MET ÉÉN PLAAT.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1896.

De merkwaardige punten van den ingeschreven Veelhoek.

DOOR

M. v. OVEREEM Jr.

---

§ I.

1. Een zeer bekende eigenschap van den driehoek leert, dat het middelpunt O van den omgeschreven cirkel, het zwaartepunt Z, het middelpunt van den cirkel van Euler N en het hoogtepunt H in één rechte liggen (de rechte van Euler) en wel zóó, dat:

$$OZ : ON : OH = \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{1}$$

Is nu een willekeurige ingeschreven veelhoek gegeven, dan kunnen wij door het middelpunt O van den omgeschreven cirkel en het zwaartepunt der hoekpunten Z eene rechte trekken en op die rechte n punten aannemen, waarvoor de afstanden tot O zich verhouden als: $\frac{1}{n} : \frac{1}{n-1} : \cdots\cdots : \frac{1}{2} : 1$
terwijl het 1[e] punt samenvalt met het zwaartepunt.

Wij wenschen nu in deze verhandeling aan te toonen, dat dan het 2[e] punt het middelpunt is van een cirkel, overeenkomende met den cirkel van Euler eens driehoeks, terwijl de overige $(n-2)$ punten overeenkomen met het hoogtepunt des driehoeks.

Vooraf geven wij eenige bepalingen, die ons in staat zullen stellen de hier na te vinden eigenschappen op eenvoudige wijze te formuleeren.

2. *a.* Als men de hoekpunten van een veelhoek verdeelt in 2 groepen, dan noemen wij de figuur door de eene groep gevormd de *restfiguur* van die, welke door de andere groep gevormd wordt.

b. De restfiguren van de hoekpunten eens n-hoeks heeten zijne *primaire* $(n-1)$-hoeken.

c. De restfiguren van de zijden eens n-hoeks heeten zijne *primaire* $(n-2)$-hoeken.

d. De diagonaal eens n-hoeks, die p of $n-p$ zijden onderspant heet diagonaal der $(p-1)^e$ orde of diagonaal der $(n-p-1)^e$ orde. (Wij nemen steeds het kleine der getallen $(p-1)$ of $n-p-1$).

e. De restfiguren van de diagonalen der 1e orde eens n-hoeks heeten zijne *secundaire* $(n-2)$-hoeken.

f. De restfiguren van de diagonalen der 2e orde eens n-hoeks heeten zijne *tertiaire* $(n-2)$-hoeken; enz.

g. Waar in deze verhandeling gesproken wordt van het zwaartepunt eens n-hoeks, bedoelen wij daarmede overal het zwaartepunt der hoekpunten.

h. Door het middelpunt van den omgeschreven cirkel eens ingeschreven veelhoeks en zijn zwaartepunt trekken wij een rechte.

Op die rechte nemen we n punten aan, allen met het zwaartepunt aan denzelfden kant van het middelpunt O gelegen en waarvan de afstanden tot O evenredig zijn met:

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \cdots\cdots \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

terwijl het 1e punt samenvalt met het zwaartepunt.

Deze punten zullen wij, te beginnen bij het zwaartepunt noemen: 1e, 2e, 3e, ... n^e *merkwaardige punt* des veelhoeks en de volgende notatie invoeren:

$$P_n^m$$

waarin, m = rangorde van het punt
n = aantal zijden van den veelhoek, waartoe het punt behoort.

Blijkens onze definitie heeft men dan

$$O\,P_n^m : O\,P_n^{m'} = \frac{1}{n-m+1} : \frac{1}{n-m'+1} = (n-m'+1):(n-m+1).$$

Het zwaartepunt is het punt P_n^1.

De punten P_3^1, P_3^2, P_3^3 zijn het zwaartepunt, het middelpunt van den cirkel van Euler en het hoogtepunt eens driehoeks.

---

§ II.

Stellingen.

1. De $(n-1)$ merkwaardige punten van de primaire $(n-1)$ hoeken eens ingeschreven n-hoeks zijn de hoekpunten van $(n-1)$ nieuwe

n-hoeken, allen tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken.

a. Deze veelhoeken wijzen wij aan door de notatie.

$$V_n^m.$$

m = rangorde van den nieuwen veelhoek

n = aantal zijden van den oorspronkelijken veelhoek.

b. De kleinste veelhoek verkrijgt de laagste rangorde.

c. Den oorspronkelijken veelhoek wijzen wij aan door Vn.

2. De verhouding van de veelhoeken

$$V_n^1,\ V_n^2,\ V_n^3, \ldots\ldots V_n^m \ldots\ldots V_n^{n-1}$$

tot den oorspronkelijke is respectievelijk

$$\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \frac{1}{n-3}, \ldots\ldots \frac{1}{n-m}, \ldots\ldots 1 \quad \text{(alle negatief genomen).}$$

a. De laatste veelhoek ligt dus symmetrisch met den oorspronkelijken ten opzichte van O en de betrekking tusschen V^n en V_n^{n-1} is wederkeerig.

3. Het punt P_n^m is het gelijkvormigheidspunt van V_n en V_n^m.

4. *Hoofdstelling.*

Alle rechten, die eenig punt P_a^p van een a-hoek, die tot een ingeschreven n-hoek behoort, verbinden met het punt P_b^q van den rest b-hoek, gaan door het punt P_n^{p+q-1} van den n-hoek en worden in dit punt verdeeld in deelen die zich verhouden als $(b + 1 - q) : (a + 1 - p)$.

5. De loodlijnen, uit de punten P_{n-2}^m van de primaire, secondaire, tertiaire, ... $(n - 2)$ hoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen snijden elkander in het punt P_n^{m+2} van den n-hoek.

a. In § I, *h*, is gebleken, dat het hoogtepunt van een driehoek het punt P_3^3 is. In overeenstemming hiermede kunnen de punten P_n^3, P_n^4, ...P_n^n, die ook het gemeenschappelijk snijpunt zijn van $\frac{n(n-1)}{1.2}$ loodlijnen, de *hoogtepunten* van den n-hoek heeten. Een ingeschreven n-hoek heeft dus $(n - 2)$ hoogtepunten.

6. De bovenste stukken der in 5 genoemde loodlijnen zijn $\frac{2}{n-(m+1)}$ van de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

Verdere stellingen eischen nu eerst de volgende bepaling, die wij niet in § I konden opnemen, maar waaraan stelling 1 moest voorafgaan.

Bepaling. De omgeschreven cirkels der veelhoeken V_n^1, V_n^2,...

V_n^{n-1} heeten respectievelijk 1^e, 2^e, 3^e,.... $(n-1)^e$ *2n-puntscirkel*..

a. Deze cirkels wijzen we aan door de notatie

$$O_n^m$$

(d. i. de omgeschreven cirkel van V_n^m)

b. Den omgeschreven cirkel van V_n wijzen we aan door O_n.

c. Als men den straal van O_n gelijk aan R stelt, dan is, zooals uit stelling 2 blijkt, de straal van O_n^m gelijk aan $\dfrac{R}{n-m}$.

7. P_n^{m+1} is het middelpunt van O_n^m.

8. O_n^m deelt de afstanden van P_n^{m+2} tot de hoekpunten van den veelhoek in reden als $1:(n-m-1)$.

a. Zoo deelt bijv. in een driehoek de cirkel van Euler O_3^1 de afstanden van het hoogtepunt P_3^3 tot de hoekpunten in reden als $1:1$. Deze deelpunten vormen dus met de hoekpunten P_2^1 van P_3^1 d. i., met de middens der zijden, 6 punten, waardoor de cirkel van Euler gaan moet. Evenzoo verkrijgt men voor een ingeschreven n-hoek $2n$ punten. Vandaar de naam $2n$-puntscirkels.

b. De eigenschap in stelling 8 gaat niet meer door voor den cirkel O_n^{n-1}, omdat er geen punt P_n^{n+1} bestaat.

9. De $2(n-1)$-puntscirkels O_{n-1}^m van de primaire $(n-1)$-hoeken des oorspronkelijken n-hoeks snijden elkaâr in het punt P_n^{m+2} van den n-hoek.

10. P_n^m is het inwendig gelijkvormigheidspunt van O_n en O_n^m
P_n^{m+2} is het uitwendig gelijkvormigheidspunt van O_n en O_n^m

Vergelijkt men hiermede stelling 7, namelijk:

P_n^{m+1} is het middelpunt van O_n^m, dan verkrijgt men

11. O_n, P_n^m, P_n^{m+1}, P_n^{m+2} liggen harmonisch.

12. De som van de vierkanten der zijden en diagonalen eens ingeschreven veelhoeks vermeerderd met het vierkant van de lijn van Euler is gelijk aan n^2-maal het vierkant van den straal des omgeschreven cirkels.

a. Duidt men de lengte dezer lijn van Euler aan door L, de som van de vierkanten der zijden door S^2, dan is dus

$$S^2 + L^2 = n^2 R^2$$

13. De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten eens ingeschreven veelhoeks tot het punt P_n^m bedraagt:

$$\Sigma (A_p P_n^m)^2 = \frac{(n-2m+2)\, S^2 + n\,(m-1)^2 R^2}{(n-m+1)^2}$$

14. *a*. De punten P_{n-2}^{m} van de primaire (n — 2)-hoeken eens ingeschreven n-hoeks zijn de hoekpunten van een n-hoek, waarvan de zijden evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan $\frac{1}{n-(m+1)}$ van de diagonalen der 1e orde des oorspronkelijken n-hoeks

b. De punten P_{n-2}^{m} van de secundaire (n — 2)-hoeken zijn de hoekpunten van een n-hoek, waarvan de diagonalen der 1e orde evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan $\frac{1}{n-(m+1)}$ van de diagonalen der 3e orde [(n — 5)e orde] des oorspronkelijken n-hoeks.

c. De punten P_{n-2}^{m} van de tertiaire (n — 2)hoeken zijn de hoekpunten van een n-hoek, waarvan de diagonalen der 3e orde evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan $\frac{1}{n-(m+1)}$ van de diagonalen der 5e orde [(n — 7)e orde] des oorspronkelijken n-hoeks. Enz.

15. De punten P_{n-2}^{m} van de primaire, secundaire, tertiaire.... (n — 2)-hoeken eens ingeschreven n-hoeks zijn respectievelijk de middens van de zijden, van de diagonalen der 1e orde, van de diagonalen der 2e orde,.... van een nieuwen n-hoek, tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken. Verhouding: $-\frac{2}{n-(m+1)}$.

a. Aangezien er (n — 2) punten P_{n-2}^{m} in elken (n — 2)-hoek zijn, zijn er ook (n — 2) van de in n°. 15 genoemde veelhoeken. Deze wijzen we in volgorde der grootte aan door:

$$W_{n}^{1},\ W_{n}^{2}, \ldots\ldots W_{n}^{n-2}.$$

16. Het punt P_{n}^{m} van den oorspronkelijken veelhoek V_n is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van W_{n}^{m-2}.

§ III.

1. Alvorens over te gaan tot het bewijs van bovenstaande stellingen moeten wij enkele eigenschappen van het zwaartepunt behandelen, die wij bij het bewijs van genoemde stellingen noodig zullen hebben.

Bedoelde eigenschappen zijn de volgende:

a. De veelhoek die de zwaartepunten van de primaire (n — 1)-hoeken eens willekeurigen n-hoeks tot hoekpunten heeft, is tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken en de verhouding is $-\frac{1}{n-1}$.

b. Het zwaartepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van alle rechten die de zwaartepunten van twee restfiguren verbinden.

c. Deze rechten deelen elkander in deelen, die omgekeerd evenredig zijn met het aantal hoekpunten van de figuren, uit wier zwaartepunt zij getrokken zijn.

d. De som van de vierkanten der afstanden van het zwaartepunt tot de hoekpunten bedraagt $\frac{1}{n}$ van de som der vierkanten van de zijden en diagonalen.

e. Duidt men de hoekpunten van den veelhoek aan door A_p $(p = 1, 2, \ldots\ldots n)$ en is P een willekeurig punt, dan heeft men:

$$\Sigma\,(A_p\,P)^2 = \Sigma\,(P^1_n\,A_p)^2 + n\,(P\,P^1_n)^2$$

waarin P^1_n het zwaartepunt voorstelt.

2. Om de eerste twee eigenschappen te bewijzen nemen wij de tweede als waar aan voor alle veelhoeken van minder dan n zijden.

In fig. 1 zijn A_1 en A_2 twee hoekpunten van een n-hoek, P^1_{n-2} het zwaartepunt van de restfiguur van $A_1 A_2$. Trek $A_1\,P^1_{n-1}$ en $A_2\,P^1_{n-2}$. Dan liggen op deze rechten de zwaartepunten der restfiguren van A_2 en A_1. Om deze punten, die beide aangeduid zouden moeten worden door P^1_{n-1}, van elkander te onderscheiden plaatsen we een tweeden aanwijzer onderaan en duiden het zwaartepunt van de restfiguur van A_1 aan door $P^1_{1,n-1}$ en dat van de restfiguur van A_2 door $P^1_{2,n-1}$.

Men heeft nu: (§ III, 1,*b*)

$$P^1_{n-2}\,P^1_{2,n-1} : P^1_{2,n-1}A_1 = P^1_{n-2}P^1_{1,n-1} : P^1_{1,n-1}A_2 = 1 : (n-2)$$

$$\text{en dus } P^1_{1,n-1}\,P^1_{2,n-1} \,//\, A_1\,A_2 \text{ en } P^1_{1,n-1}\,P^1_{2,n-1} = \frac{A_1\,A_2}{n-1} \quad (1)$$

Nu zijn $P^1_{1,n-1}$ en $P^1_{2,n-1}$ twee hoekpunten van den veelhoek V^1_n, die de zwaartepunten der primaire $(n-1)$-hoeken tot hoekpunten heeft. Uit (1) blijkt nu dat deze veelhoek homothetisch is met den oorspronkelijken en dat de verhouding is $-\frac{1}{n-1}$. Hiermede is III, 1, *a* bewezen.

Omdat de veelhoeken V_n en V^1_n homothetisch zijn, snijden de lijnen, die hun overeenkomstige hoekpunten verbinden, elkander in één punt P^1_n, het zwaartepunt van den oorsponkelijken veelhoek.

Tevens blijkt:

$$A_1\,P^1_n : P^1_n\,P^1_{1,n-1} = A_1\,A_2 : P^1_{1,n-1}\,P^1_{2,n-1} = (n\text{-}1) : 1,$$

waarmede (2, *c*) bewezen is voor een hoekpunt en zijne restfiguur. Trekt men de lijn $P^1_{n-2}P^1_n$ door tot in P^1_2, dan is P^1_2 het midden van $A_1 A_2$, omdat $A_1\,P^1_{2,n-1}\,P^1_{1,n-1}\,A_2$ een trapezium is. Beschouwt men $A^1\,P^1_n\,P^1_{1,n-1}$ als transversaal in $\Delta\,P^1_{n-2}\,P^1_2\,A_2$ dan heeft men $\frac{A_1 P_2^1}{A_1 A_2} \times \frac{P_{1,n-1}^1 A_2}{P_{1,n-1}^1 P_{n-2}^1} \times \frac{P_n^1 P_{n-2}^1}{P_n^1 P_2^1} = 1$

en dus $\frac{P_n^1 P_{n-2}^1}{P_n^1 P_2^1} = \frac{2}{n-2}$, waarmede (2, c) bewezen is voor een zijde of diagonaal en zijn restfiguur. Op dezelfde wijze kan men verder gaan voor een driehoek en zijn restfiguur. Enz.

Wij zullen thans de eigenschappen d en e bewijzen, aannemende dat zij doorgaan voor veelhoeken met minder dan n zijden.

Volgens e heeft men voor A_1 ten opzichte van zijn rest-(n-1)-hoek:

$A_1 A_2^2 + A_1 A_3^2 + A_1 A_4{}^2 + \cdots\cdots A_1 A_n^2 = \frac{1}{n-1} \times$ (De som van de vierkanten der zijden en diagonalen van den rest-(n—1)-hoek van A_1)

$$+ (n-1)\,(A_1\, P_{1,n-1}^1)^2$$

Voor elk der hoekpunten kan men een overeenkomstige betrekking opschrijven.

De som dier gelijkheden is dan een symmetrische functie van de zijden en diagonalen en het is gemakkelijk in te zien dat men zal verkrijgen:

$$2\, S^2 = \tfrac{n-2}{n-1} S^2 + (n-1)\, \Sigma\, (A_p\, P_{p,h-1}^1)^2$$

Nu is $A_p\, P_{p,n-1}^1 = \frac{n}{n-1} \cdot A_p\, P_{1,n-1}^1$ (§ III, 2, 6) en dus

$$2\, S^2 = \tfrac{n-2}{n-1}\, S^2 + (n-1) \times \tfrac{n^2}{(n-1)^2}\, \Sigma\, (A_p\, P_{1,n}^1)^2$$

waaruit, $\Sigma\, (A_p\, P_{1,n}^1)^2 = \frac{1}{n} \cdot S^2$

waarin S^2 de som van de vierkanten der zijden en diagonalen voorstelt.

Dit is de vierde van bovenstaande stellingen van het zwaartepunt.

De vijfde kan als volgt bewezen worden.

Zij P (fig. 1) een willekeurig punt. Past men op driehoek $PA^1\ P_{1,n-1}^1$ het theorema van *Stewart* toe, dan verkrijgt men:

$$(PA_1)^2,\, P_n^1\, P_{1,n-1}^1 + (PP_{1,n-1}^1)^2,\, A_1\, P_n^1 = (PP_n^1)^2,\, A_1\, P_{1,n-1}^1 + A_1\, P_n^1 .\, A_1\, P_{1,n-1}^1 .\, P_n^1\, P_{1,n-1}^1 \quad (1)$$

Aangezien volgens de 2° eigenschap van het zwaartepunt $A_1\, P_n^1 : P_n^1\, P_{1,n-1}^1 = (n\text{-}1) : 1$, kan men voor (1) ook schrijven:

$$(PA_1)^2 + (n-1)\,(PP_{1,n-1}^1)^2 = n\,(PP_n^1)^2 + \tfrac{n-1}{n}\,(A_1\, P_{1,n-1}^1)^2 \quad (2)$$

Omdat wij de stelling als bewezen aannemen voor den (n-1)-hoek, hebben we volgens stelling (4) van het zwaartepunt:

$\Sigma\,(A_p\, P)^2 = \Sigma\,(P_{1,n-1}^1\, A_p)^2 + (n\text{-}1)\ PP_{1,n-1}^1)^2\ (p = 2, 3, 4, \cdots n)$ (2, a)

Telt men deze gelijkheid op bij (2) dan komt er:

$\Sigma\,(A_p\, P)^2 + (A_1\, P)^2 = n\,(PP_n^1)^2 + \frac{n-1}{n}\,(A_1 P_{1,n-1}^1)^2 + \Sigma (P_{1,n-1}^1 A_p)^2$ (3)

Laat ons nu de som van de vierkanten der zijden en diagonalen van den rest-(n—1)-hoek van A_1 aanduiden door S^2_{n-1} dan is blijkens stelling 4 van het zwaartepunt:

$$\Sigma\,(P^1_{1,n-1}\,A_p)^2 = \tfrac{1}{n-1}\,S^2_{n-1} \quad (4)$$

terwijl uit het bewijs van stelling d opgemaakt kan worden:

$$(n-1)\,(A_1\,P^1_{1,n-1})^2 = A_1\,A_2^2 + A_1\,A_3^2 + \cdots\cdots A_1A_n^2 - \tfrac{1}{n-1}S^2_{n-1} \quad (5)$$

Substitueert men (4) en (5) in (3), daarbij opmerkende dat $\Sigma\,(A_p\,P)^2 + (A_1\,P)^2 = \Sigma\,(A_p\,P)^2$ (als in de eerste term van het 1[e] lid $p = 2, 3, 4 \cdots\cdots n$ en in het 2[e] lid $p = 1, 2, 3 \cdots\cdots n$, wat blijkens (2, a) het geval is) dan komt er:

$$\begin{aligned}\Sigma\,(A_p\,P)^2 &= n\,(PP^1_n)^2 + \tfrac{1}{n}\,(A_1\,A_2^2 + A_1\,A_3^2 + \cdots\cdots A_1A_n^2) \\ &\quad - \tfrac{1}{n(n-1)}\,S_{n-1}^2 + \tfrac{1}{n-1}\,S^2_{n-1} \\ &= n\,(PP^1_n)^2 + \tfrac{1}{n}\,S^2_n \\ &= n\,(PP^1_n)^2 + \Sigma\,(P^1_n\,A_p)^2 \text{ (stelling } d).\end{aligned}$$

---

§ IV.

Wij gaan thans over tot het bewijs der in § II genoemde stellingen.

1 en **2**. $A_1\,A_2$ (fig. 2) is eene zijde eens ingeschreven veelhoeks, O het middelpunt van den omgeschreven cirkel. De punten $P^1_{1,n-1}$ en $P^1_{2,n-1}$ hebben dezelfde beteekenis als in de voorgaande figuur. Laten verder $P^m_{1,n-1}$ en $P^m_{2,n-1}$ de m^e merkwaardige punten zijn van de restfiguren van A_1 en A_2.

Blijkens onze definitie (§ I, 2, h.) hebben wij dan, door in plaats van n te schrijven (n — 1) en voor m' te nemen 1:

$$O\,P^m_{1,n-1} : O\,P^1_{1,n-1} = O\,P^m_{2,n-1} : O\,P^1_{2,n-1} = (n-1) : (n-m).$$

Hieruit volgt, dat $P^m_{1,n-1}\,P^m_{2,n-1} \,//\, P^1_{1,n-1}\,P^1_{2,n-1} \,//\, A_1\,A_2$ en verder dat $P^m_{1,n-1}\,P^m_{2,n-1} = \dfrac{n-1}{n-m}\,P^1_{1,n-1}\,P^1_{2,n-1} = \dfrac{A_1\,A_2}{n-m}$ (Zie § III, 1, a)

Hieruit volgt, in verband met stelling 1, a in § III, onmiddellijk de waarheid der stellingen 1 en 2 in § II.

3. Wij bewijzen thans stelling III.

Uit stelling 1 is het bestaan gebleken van de veelhoeken V^m_n. Tot deze veelhoeken behoort ook de veelhoek V^1_n gevormd door de zwaartepunten van de primaire (n —1)-hoeken des n-hoeks. Het gelijkvormigheidspunt van V_n en V^1_n is, blijkens § III, 1, b, het punt P^1_n. Omdat de veelhoeken V^1_n, V^2_n V^3_n enz. alle tegengesteld homothetisch zijn met V_n zijn ze onderling rechtstreeksch homothetisch en hebben zij het middelpunt O des omgeschreven cirkels tot gelijkvormigheidspunt. Hieruit volgt dat de gelijkvormigheidspunten van V_n^1, V_n^2, V_n^3, enz. met V_n alle met O op een rechte moeten liggen, die dan ook het punt P_n^1 bevat.

Hiermede is aangetoond, dat het gelijkvormigheidspunt van V_n^m en V_n inderdaad op de rechte van Euler ligt. Wij hebben nu nog aan te toonen, dat het juist het punt P_n^m is. Dit bewijzen wij als volgt:

Zij A_1 (fig. 3) een hoekpunt eens ingeschreven veelhoeks, P_n^m en $P_n^{m'}$ de gelijkvormigheidspunten van V_n^m en $V_n^{m'}$ met V_n. Dan zullen wij moeten aantoonen, dat wij inderdaad gerechtigd zijn deze aan te duiden met P_{n-1}^m en $P_{n-1}^{m'}$, en dit zal het geval zijn als:

$$\frac{O\,P_n^m}{O\,P_n^{m'}} = \frac{n - m' + 1}{n - m + 1}.$$

Nu heeft men, als in fig. 3 P_{n-1}^m en $P_{n-1}^{m'}$ respectievelijk het m^e en m'^e merkwaardige punt zijn van den rest-$(n - 1)$hoek van A_1,

$$\frac{A_1\,P_n^m}{P_{n-1}^m\,P_n^m} = -(n - m) \text{ en } \frac{A_1\,P_n^{m'}}{P_{n-1}^{m'}\,P_n^{m'}} = -(n - m') \text{ (§ II, 1 en 2)}$$

waaruit volgt:

$$\frac{P_{n-1}^m\,A_1}{P_{n-1}^m\,P_n^m} = n - m + 1 \text{ en } \frac{P_{n-1}^{m'}\,A_1}{P_{n-1}^{m'}\,P_n^{m'}} = n - m' + 1. \quad (1)$$

Beschouw nu $O\,P_{n-1}^m\,P_{n-1}^{m'}$ als transversaal in $\Delta\, A_1\,P_n^m\,P_{n'}^{m'}$ dan is:

$$\frac{O\,P_n^m}{O\,P_n^{m'}} \times \frac{P_{n-1}^{m'}\,P_n^{m'}}{P_{n-1}^{m'}\,A_1} \times \frac{P_{n-1}^m\,A_1}{P_{n-1}^m\,P_n^m} = +1$$

waaruit in verband met (1) volgt:

$$\frac{O\,P_n^m}{O\,P_n^{m'}} = \frac{n - m' + 1}{n - m + 1}.$$

Omdat voor $m = 1$ het punt P_n^m het zwaartepunt des veelhoeks wordt en dit inderdaad het gelijkvormigheidspunt is van V_n en V_n^1, moet ook $P_n^{m'}$ het gelijkvormigheidspunt zijn van V_n en $V_n^{m'}$.

4. Wij zullen thans overgaan tot het bewijzen van de *Hoofdstelling* (§ II, 4) en beginnen met het geval dat een der getallen p of q gelijk aan één is. Wij hebben dan (voor $p = 1$), te bewijzen, dat de rechte $P_a^1\,P_b^q$ door het punt P_n^q gaat.

In fig. 4 zijn $O\,P_a^1\,P_a^p$ en $O\,P_b^1\,P_b^q$ de rechten van Euler van den in stelling 4 genoemden a-hoek en b-hoek. Deelen wij $P_a^1\,P_b^1$ in reden als $b : a$, dan is het deelpunt het punt P_n^1 (§ III). $O\,P_n^1$ is dan een gedeelte van de lijn van Euler van V_n en wij moeten dus bewijzen, dat het snijpunt van $P^1_a\, P^q_b$ en $O\,P^1_n$ het punt P^q_n is. Duiden wij nu dit snijpunt bij voorbaat reeds aan door P^q_n, dan hebben wij te bewijzen: (Zie § I, Bepaling)

$$O\,P^q_n \,:\, O\,P^1_n = n \,:\, (n - q + 1).$$

Beschouw $O\,P^1_n\,P^q_n$ als transversaal in $\triangle\,P^1_a\,P^1_b\,P^q_b$, dan is:

$$\frac{O\,P^1_b}{O\,P^q_b} \times \frac{P^q_n\,P^q_b}{P^q_n\,P^1_a} \times \frac{P^1_n\,P^1_a}{P^1_n\,P^1_b} = 1.$$

Blijkens § I (Bep.) heeft men $\dfrac{O\,P^1}{O\,P^q_b} = \dfrac{b - q + 1}{b}$ terwijl $\dfrac{P^1_n P^1_a}{P^1_n P^1_b} = -\dfrac{b}{a}$

en dus $$\frac{P^q_n\,P^q_b}{P^q_n\,P^1_a} = -\frac{a}{b - q + 1} \qquad (1).$$

Beschouw $P^1_a\,P^1_n\,P^1_b$ als transversaal in $\triangle\,O\,P^q_n\,P^q_b$ dan is:

$$\frac{P^1_a\,P^q_n}{P^1_a\,P^q_b} \times \frac{P^1_b\,P^q_b}{P^1_b\,O} \times \frac{P^1_n\,O}{P^1_n\,P^q_n} = 1.$$

Uit (1) volgt: $\dfrac{P^1_a\,P^q_n}{P^1_a\,P^q_n} = \dfrac{b - q + 1}{a + b - q + 1} = \dfrac{b - q + 1}{n - q + 1}$

Uit § I, bep. blijkt: $\dfrac{P^1_b\,O}{P^1_b P^q_b} = -\dfrac{b - q + 1}{q - 1}$ en dus

$\dfrac{P^1_n P^q_n}{P^1_n\,O} = -\dfrac{q - 1}{n - q + 1}$, derhalve $\dfrac{O\,P^1_n}{O\,P^q_n} = \dfrac{n - q + 1}{n}$ (2). h. t. b. w.

Reeds vonden wij in (1):

$$P^q_n\,P^q_b \;:\; P^a_1\,P^q_n = a : (b - q + 1).$$

Het 2e gedeelte van stelling vier blijkt dus ook waar te zijn voor $p = 1$.

Thans overgaande tot het algemeene geval, hebben wij aan te toonen, dat het snijpuut van $O\,P^q_n$ en $P^p_a\,P^q_b$ het punt P^{p+q-1}_n is. Duiden we nu het snijpunt van $P^p_a\,P^q_b$ en $O\,P^q_n$ reeds bij voorbaat aan door P^{p+q-1}_n, dan zullen wij moeten bewijzen: (Zie § I, Bep. voor $m = q$ en $m' = p + q - 1$):

$$O\,P^q_n : O\,P^{p+q-1}_n = (n - p - q + 2) : (n - q + 1).$$

Beschouw daartoe $O\,P^q_n\,P^{p+q-1}_n$ als transversaal in $\triangle\,P^1_a\,P^p_a\,P^q_b$ dan is:

$$\frac{O\,P^1_a}{O\,P^p_a} \times \frac{P^{p+q-1}_n\,P^p_a}{P^{p+q-1}_n\,P^q_q} \times \frac{P^q_n\,P^q_b}{P^q_n\,P^1_a} = 1.$$

Blijkens § I, bep. is: $\dfrac{OP^1}{OP^p_a} = \dfrac{a - p + 1}{a}$ (3)

en volgens (1): $\dfrac{P^q_n\,P^q_b}{P^q_n\,P^1_a} = -\dfrac{a}{b - q + 1}$, derhalve

$$\frac{P^{p+q-1}_n\,P^p_a}{P^{p+q-1}_n\,P^q_b} = -\frac{b - q + 1}{a - p + 1} \quad (4)$$

Beschouw thans $P_b^q\ P_n^q\ P_a^1$ als transversaal in $\Delta\ O\,P_a^p\,P_n^{p+q-1}$, dan is:

$$\frac{P_b^q\,P_n^{p+q-1}}{P_b^q\,P_a^p}\times\frac{P_a^1\,P_a^p}{P_a^1\,O}\times\frac{P_n^q\,O}{P_n^q\,P_n^{p+q-1}}=1$$

Uit (4) volgt: $\dfrac{P_b^q\,P_n^{p+q-1}}{P_b^q\,P_a^p}=\dfrac{a-p+1}{a+b-p-q+2}=\dfrac{a-p+1}{n-p-q+2}$

Uit (3) volgt: $\dfrac{P_a^1\ P_a^p}{P_a^1\ O}=-\dfrac{p-1}{a-p+1}$ en dus:

$\dfrac{P_n^q\ O}{P_n^q\ P_n^{p+q-1}}=-\dfrac{n-p-q+2}{p-1}$ derhalve: $\dfrac{O\ P_n^q}{O\ P_n^{p+q-1}}=\dfrac{n-p-q+2}{n-q+1}$

Uit (4) blijkt verder de waarheid van het 2° gedeelte der stelling.

5. Gemakkelijk kunnen we thans stelling V aantoonen.

In fig. 5 is $A_1\ A_2$ eene zijde eens ingeschreven veelhoeks, P_{n-2}^m en P_{n-2}^{m+2} zijn 2 merkwaardige punten van de restfiguur van A_1A_2, P_2^1 is het midden (zwaartepunt) van $A_1\ A_2$. Trek $P_{n-2}^{m+2}\,P_n^{m+2}$, dan ligt op deze lijn het punt P_n^{m+2} (§ II, 4) en wel zóó, dat:

$$P_{n-2}^{m+2}\ P_n^{m+2} : P_n^{m+2}\ P_2^1 = 2 : (n-m-3)$$

en dus: $P_{n-2}^{m+2}\ P_n^{m+2} : P_{n-2}^{m+2}\ P_2^1 = 2 : (n-m-1)$. (1)

Verder is volgens § I, Bep.

$$P_{n-2}^{m+2}\ O : P_{n-2}^m\ O = (n-m-1) : (n-m-3)$$

en dus: $P_{n-2}^{m+2}\ P_{n-2}^m : P_{n-2}^{m+2}\ O = 2 : (n-m-1)$ (2)

Uit (1) en (2) volgt:

$$P_{n-2}^m\ P_n^{m+2} \,/\!/\, O\,P_2^1 \text{ en dus } P_{n-2}^m\ P_n^{m+2} \perp A_1\ A_2.$$

6. Uit (1) of (2) van het vorige bewijs volgt onmiddellijk:

$$P_{n-2}^m\,P_n^{m+2}=\frac{2\ O\ P_2^1}{n-(m+1)}.$$

7. In § II, 6, bep., hebben we gezegd, dat we den omgeschreven cirkel van V_n^m zouden aanduiden door O_n^m. We zullen thans stelling 7 bewijzen.

In stelling 2, § II is gebleken dat de verhouding tusschen V_n^m en V_n gelijk is aan $-(n-m)$. Verder is P_n^m het gelijkvormigheidspunt van V_n^m en V_n. Nu heeft men:

$$O\,P_n^m : O\,P_n^{m+1} = (n-m) : (n-m+1)$$

en dus $$\frac{P_n^m\,O}{P_n^m\,P_n^{m+1}}=-(n-m)$$

Hieruit blijkt, dat O en P_n^{m+1} overeenkomstige punten zijn van de veelhoeken V_n en V_n^m. Omdat O het middelpunt is van den omgeschreven cirkel van V_n, is P_n^{m+1} het middelpunt van den omgeschreven cirkel van V_n^m.

8. De straal van O^m_n zal gelijk zijn aan $\frac{R}{n-m}$, als R de straal van den omgeschreven cirkel van V_n is. Het behulp hiervan valt het gemakkelijk, stelling 8 te bewijzen.

In fig. 6 hebben we namelijk:

$$P^{m-1}_n O : P^{m+2}_n O = (n-m+1) ; (n-m) \quad (1)$$

Zij A_1 een hoekpunt van V_n en nemen we het punt Q zóó, dat

$$P^{m+2}_n Q : P^{m+2}_n A_1 = 1 : (n-m) \quad (2)$$

Uit (1) volgt dan:

$$P^{m+2}_n P^{m+1}_n : P^{m+2}_n O = 1 : (n-m) \quad (3)$$

Uit (2) en (3) blijkt : $P^{m+1}_n Q = \frac{O A_1}{n-m} = \frac{R}{n-m}$.

Omdat P^{m+1}_n het middelpunt en $\frac{R}{n-m}$ de straal van O^m_n is ligt Q op O^m_n. Stelling 8 is hiermede bewezen. Blijkens het bewijs geldt zij niet alleen voor de hoekpunten van V_n, maar voor alle punten van zijn omgeschreven cirkel.

9. De straal van O^m_{n-1} is blijkens § II, 6, c gelijk aan $\frac{R}{n-(m+1)}$, zijn middelpunt is het punt P^{m+1}_{n-1} (Stelling 7). Nu is P^{m+1}_{n-1} een der hoekpunten van V^{m+1}_n en, aangezien de straal van O^{m+1}_n ook gelijk is aan $\frac{R}{n-(m+1)}$, gaat de cirkel O^m_{n+1} door het middelpunt van O^{m+1}_n d. i. door het punt P^{m+2}_n (Stelling 7). Hiermede is stelling 9 bewezen.

10. Bewijs van stelling 10.

P^m_n is het gelijkvormigheidspunt van O_n en O^m_n, want de ingeschreven veelhoeken V_n en V^m_n hebben hetzelfde inwendig gelijkvormigheidspunt als hunne omgeschreven cirkels O_n en O.

Verder heeft men:

$$O P^{m+2}_n : O P^{m+1}_n = (n-m) : (n-m-1) \text{ en dus}$$

$$O P^{m+2}_n : P^{m+1}_n P^{m+2}_n = (n-m) : 1.$$

En aangezien de straal van O_n staat tot den straal van O^m_n als $(n-m) : 1$ is P^{m+2}_n het uitwendig gelijkvormigheidspunt van O_n en O_m.

11. Uit deze stelling blijkt tevens dat O, P^{m+1}_n en P^m_n, P^{m+2}_n harmonische puntenparen zijn.

12. Blijkens § 1, bep. heeft men:

$$O P^1_n = \tfrac{1}{n} O P^n_n \quad (1)$$

Past men de stelling in § III, 1, f toe op het punt O, dan heeft men:

$$\Sigma\,(O\,A_p)^2 = \Sigma\,(P^1_n\,A_p)^2 + n\,(O\,P^1_n)^2$$

Omdat O het middelpunt is van V_n is $\Sigma\,(O\,A_p)^2 = n.\,R^2$.

Verder is $\Sigma\ (P^1_n\,A_p)^2 = \frac{1}{n}\,S^2$. (§ III, 1, d)

en blijkens (1), $(O\,P^1_n)^2 = \frac{1}{n^2}\,(O\,P^n_n)^2$ en dus

$$n\,R^2 = \frac{1}{n}\,S^2 + (O\,P^n_n)^2.$$

Duidt men nu de lengte van $O\,P^n_n$ aan door L, dan heeft men

$$S^2 + L^2 = n^2\,R^2.$$

13. (Zie fig. 7)

A_p is een hoekpunt eens ingeschreven n-hoeks, $O\,P^n_n$ de rechte van Euler die wij weer aanduiden door L.

Dan is: $O\,P^1_n = \frac{L}{n}$, $O\,P^m_n = \frac{L}{n-m+1}$ en dus $P^1_n\,P^m_n = \frac{(m-1)L}{n(n-m+1)}$.

Past men het theorema van Stewart toe op $\triangle\ A_p\ O\ P^m_n$ dan verkrijgt men:

$$A_p\,O^2 \times P^1_n\,P^m_n + (A_p\,P^m_n)^2 \times O\,P^1_n = (A_p\,P^1_n)^2 \times O\,P^m_n + O\,P^1_n \times O\,P^m_n \times$$
$$\times\, P^1_n\,P^m_n$$

$$R^2\,\frac{(m-1)\,L}{n(n-m+1)} + (A_p\,P^m_n)^2 \times \frac{L}{n} = (A_p\,P^1_n)^2 \times \frac{L}{n-m+1} + \frac{m-1)\,L^3}{n^2(n-m+1)^2}$$

$$(m-1) \times n\,(n-m+1)\,R^2 + n\,(n-m+1)^2\,(A_p\,P^m_n)^2 =$$
$$n^2\,(n-m+1)\,(A_p\,P^1_m)^2 + (m-1)\,L^2.$$

Vormt men deze betrekking voor elk hoekpunt, dan verkrijgt men door optelling:

$$(m-1) \times n^2\,(n-m+1)\,R^2 + n\,(n-m+1)^2\,\Sigma\,(A_p\,P^m_n)^2 =$$
$$n^2\,(n-m+1)\,\Sigma\,(A_p\,P^1_n)^2 + n\,(m-1)\,L^2.$$

Nu is $\Sigma\,(A_p\,P^1_n)^2 = \frac{1}{n}\,S^2$ en $L^2 = n^2\,R^2 - S^2$ en dus: (tevens door n deelende) $n\,(n-m+1)\,(m-1)\,R^2 + (n-m+1)^2\,\Sigma\,(A_p\,P^m_n)^2$

$$= (n-m+1)\,S^2 + (m-1)\,(n^2\,R^2 - S^2).$$

$$(n-m+1)^2\,\Sigma\,(A_p\,P^m_n)^2 = (n-m+1-m+1)\,S^2 + n(m-1)$$
$$(n-n+m-1)\,R^2 = (n-2\,m+2)\,S^2 + n\,(m-1)^2\,R^2$$

$$\Sigma\,(A_p\,P^m_n)^2 = \frac{(n-2\,m+2)\,S^2 + n\,(m-1)^2\,R^2}{(n-m+1)^2}$$

In den veelhoek met een even aantal zijden vindt men voor het punt $P_n^{\frac{n}{2}+1}$

$$\Sigma (A_p P_n^{\frac{n}{2}+1})^2 = n R^2.$$

14. *a.* A_1, A_2, A_3 (fig. 8) zijn drie hoekpunten van een ingeschreven n-hoek. De m^e merkwaardige punten van de restfiguren van $A_1 A_2$ en $A_2 A_3$ duiden we aan door $(P_{n-2}^m)_{1,2}$ en $(P_{n-1}^m)_{2,3}$. De restfiguren van $A_1 A_2$ en $A_2 A_3$ zijn primaire $(n - 2)$-hoeken van de restfiguur, $\{(n - 1)\text{-hoek}\}$, van A_2. Derhalve: (St. III en IV) $(P_{n-2}^m)_{1,2} (P_{n-2}^m)_{2,3} // A_1 A_3$ en $(P_{n-2}^m)_{1,2} (P_{n-2}^m)_{2,3} = \frac{A_1 A_3}{n - m + 1}$.

b. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (fig.) 6) zijn 6 hoekpunten van een ingeschreven n-hoek $(P_{n-2}^m)_{1,3}$, $(P_{n-2}^m)_{2,4}$, $(P_{n-2}^m)_{3,5}$, $(P_{n-2}^m)_{4,6}$ de m^e merkwaardige punten van de restfiguren van $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, $A_3 A_5$, $A_4 A_6$. Uit stelling III en IV volgt nu op overeenkomstige wijze als hier boven van XVII,*a*.

$$(P_{n-2}^m)_{1,3} (P_{n-2}^m)_{3,5} // A_1 A_5 \text{ en } (P_{n-2}^m)_{1,3} (P_{n-2}^m)_{3,5} = \frac{A_1 A_5}{n - m + 1}, \text{ enz.}$$

Evenzoo bewijst men de stelling voor de tertiaire figuren.

15. $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ (fig. 10) is een gedeelte van V_n, de punten $(P_{n-2}^m)_{1,2}$, $(P_{n-2}^m)_{2,3}$ enz. hebben de door de notatie aangeduide beteekenis. Dan is: (XVII)

$(P_{n-2}^m)_{1,2} (P_{n-2}^m)_{2,3} // A_1 A_3$, $(P_{n-2}^m)_{2,3} (P_{n-2}^m)_{3,4} // A_2 A_4$, $(P_{n-2}^m)_{3,4} (P_{n-2}^m)_{4,5} // A_3 A_5$, en de verhouding tot $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, $A_3 A_5$, is als $1 : (n - m + 1)$.

Trek door $(P_{n-2}^m)_{2,3}$, $(P_{n-2}^m)_{3,4}$, $(P_{n-2}^m)_{4,5}$ de rechten $Q_2 Q_3 // A_2 A_3$, $Q_3 Q_4 // A_3 A_4$ en $Q_4 Q_5 // A_4 A_5$ dan is $\triangle Q_3 (P_{n-2}^m)_{2,3} (P_{n-2}^m)_{3,4} \sim A_3 A_2 A_4$ dus $(P_{n-2}^m)_{3,4} Q_3 = \frac{A_3 A_4}{n - m + 1}$.

Evenzoo is $(P_{n-2}^m)_{3,2} Q_4 = \frac{A_3 A_4}{n - m + 1}$ en dus $(P_{n-2}^m)_{3,4}$ het midden van $Q_3 Q_4$ terwijl $Q_3 Q_4 = \frac{2 A_3 A_4}{n - m + 1}$. De veelhoek, gevormd door de rechten $Q_1 Q_2$, $Q_2 Q_3$ enz. is dus homothetiseh met V_n naar de

$$\text{verhouding } - \frac{2}{n - m + 1}.$$

Hieruit blijkt reeds, dat de punten P_{n-2}^m van de restfiguren der zijden de middens zijn der zijden van een veelhoek W_n^m, die homothetisch is met V_n. Wij zullen nu bewijzen dat het midden van de diagonaal $Q_3 Q_5$ het punt $(P_{n-2}^m)_{3,5}$ is.

Duiden nu het midden dier diagonaal reeds weer bij voorbaat aan door $(P^m_{n-2})_{3,5}$ en trekken we $A_4(P^m_{n-2})_{3-5}$ en $A_5(P^m_{n-2})_{3,5}$. Nu is $(P^m_{n-2})_{3,4}\,(P^m_{n-2})_{3,5} \parallel Q_4\,Q_5 \parallel A_3\,A_5$ en $(P^m_{n-2})_{3-4}\,(P^m_{n-2})_{3,5} =$

$$\tfrac{1}{2}\,Q_3\,Q_5 = \frac{A_3\,A_5}{n-m+1}.$$

Hieruit volgt dat $A_5(P^m_{n-2})_{3,5}$ de lijn $A_4(P^m_{n-2})_{3,4}$ verdeelt in reden als $1:(n-m+1)$ zoodat het snijpunt van $A_5(P^m_{n-2})_{3,5}$ en $A_4(P^m_{n-2})_{3,4}$ het punt $(P^m_{n-1})_3$ is (st. VI). (Want $(P^m_{n-2})_{3,4}$ is het m^e merkwaardige punt in een veelhoek, die de restfiguur is van A_4 in een anderen veelhoek, die zelf weer de restfiguur is van A_3 in V_n.

Omdat nu ook $A_5\,(P^m_{n-2})_3 : (P^m_{n-2})_3\,(P^m_{n-2})_{3,5} = (n-m+1):1$ moet $(P^m_{n-2})_{3,5}$ volgens stelling VI, het m^e merkwaardige punt zijn van een veelhoek, die de restfiguur is van A_5 in veelhoek $A_1\,A_2\,A_4\,A_5$ en dus de restfiguur van $A_3\,A_5$ in Vn. Hieruit blijkt, dat $(P^m_{n-2})_{3,5}$ werkelijk de door de notatie aangeduide beteekenis heeft.

Op dezelfde wijze blijkt de waarheid der stelling voor de punten P^m_{n-2} van de tertaire $(n-2)$-hoeken V_n.

16. Uit het voorgaande volgt nu onmiddelijk, dat de loodlijnen uit de punten P^m_{n-2} op de restzijden en restdiagonalen neergelaten, de middelloodlijnen zijn van de zijden en diagonalen van W^m_n. En aangezien deze loodlijnen elkander blijkens stelling 5 in het punt P^{m+2}_n snijden, is P^{m+2}_n het middelpunt van den omgeschreven cirkel van W^m_n.

§ V.

TOEPASSINGEN.

In deze paragraaf zullen wij de voorgaande stellingen toepassen op bepaalde gevallen. Vooraf herinneren wij er aan dat wij door P^1_n verstaan het zwaartepunt van de figuur waartoe het punt behoort. Hieruit volgt:

De punten P^1_1 zijn niet anders als de hoekpunten des veelhoeks.

De punten P^1_2 zijn de middens der zijden en diagonalen.

De punten P^2_2 zijn de punten, die symmetrisch liggen met O, ten opzichte van de zijde of diagonaal, waartoe zij behooren.

Aan deze punten zullen we in het vervolg den naam geven van *tegenpunten* der zijden en diagonalen.

Den veelhoek V^1_n zullen we voor alle veelhoeken *zwaarteveelhoek* noemen. De cirkel van Euler in een driehoek is de omgeschreven cirkel van zijn zwaartedriehoek. In overeenstemming hiermede zullen we in het vervolg den omgeschreven cirkel van den zwaarteveelhoek eens ingeschreven veelhoeks *den cirkel van Euler* in dien veelhoek noemen en zijn middelpunt P^2_n *het punt van Euler.*

Zooals we reeds vroeger zeiden, noemen we de rechte $O\,P^n_n$ waarop de n merkwaardige punten eens ingeschreven veelhoeks liggen *de rechte van Euler* in den veelhoek.

In een driehoek is het hoogtepunt het snijpunt van de loodlijnen uit de zwaartepunten van de restfiguren der zijden op die zijden neergelaten. Volkomen hetzelfde geldt volgens stelling 5, § II voor het punt P^3_n van een willekeurigen ingeschreven veelhoek. Daarom komt P^3_n overeen met het hoogtepunt eens driehoeks en zullen wij het den naam geven van 1° *hoogtepunt des ingeschreven veelhoeks.* De punten P^4_n, P^5_n,..... enz. heeten het 2°, 3°,..... hoogtepunt des veelhoeks.

De veelhoek V^2_n, die de Eulersche punten der primaire $(n-1)$-hoeken van V_n tot hoekpunten heeft, zal *de veelhoek van Euler* heeten. De veelhoeken V^3_n, V^4_n...... enz. die de hoogtepunten der primaire $(n-1)$lhoeken van V_n tot hoekpunten hebben, zullen de *hoogteveelhoeken* van V_n genoemd worden.

Wij gaan thans over tot het verifieeren van de stellingen in § II voor den ingeschreven drie-, vier- vijf- en zeshoek.

a. Driehoek.

In een driehoek heeft men: het zwaartepunt P^1_3, het punt van Euler P^2_3 en het hoogtepunt P^3_3, die zoo gelegen zijn dat:

$$O\,P^1_3 : O\,P^2_3 : O\,P^3_3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1 \quad \text{(Bep. § I, } h\text{).}$$

1. De zwaartedriehoek is tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken driehoek. Evenzoo de driehoek, die de tegenpunten der zijden tot hoekpunten heeft.

2. De verhouding bedraagt achtereenvolgens voor de bovengenoemde driehoeken $-\frac{1}{2}$ en -1.

3*a*. Het zwaartepunt is het gelijkvormigheidspunt van den driehoek en zijn zwaartedriehoek.

b. Het punt van Euler is het gelijkvormigheidspunt van den oorspronkelijken driehoek en den driehoek, die de tegenpunten der zijden tot hoekpunten heeft.

4*a*. De zwaartelijnen eens driehoeks deelen elkander in het zwaartepunt in reden als 1 : 2.

b. De lijnen, die de hoekpunten verbinden met de tegenpunten der overstaande zijden, deelen elkaar in het punt van Euler middendoor.

5. Het hoogtepunt eens driehoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de loodlijnen uit de hoekpunten op de overstaande zijden neergelaten.

6. De bovenste stukken dezer loodlijnen zijn gelijk aan tweemaal de middelloodlijnen der overeenkomstige zijden.

7*a*. Het punt van Euler is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van den zwaartedriehoek. (cirkel van Euler)

b. Het hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel des driehoeks, die de tegenpunten der zijden tot hoekpunten heeft.

8. De cirkel van Euler eens driehoeks deelt de afstanden van het hoogtepunt tot de hoekpunten middendoor.

9. Stelling 9, § II verliest haar beteekenis voor den driehoek.

10. Het zwaartepunt is het inwendig en het hoogtepunt het uitwendig gelijkvormigheidspunt van den omgeschreven cirkel en den cirkel van Euler.

11. Het middelpunt van den omgeschreven cirkel, het zwaartepunt, het punt van Euler en het hoogtepunt zijn 4 harmonisch gelegen punten.

12. De som van de vierkanten der zijden eens driehoeks is gelijk aan 9-maal het vierkant van den straal des omgeschreven cirkels verminderd met het vierkant van de lijn van Euler.

13*a*. De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten eens driehoeks tot het zwaartepunt is $\frac{1}{3}$ van de som van de vierkanten der zijden.

b. De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten tot het middelpunt van den cirkel van Euler is $\frac{1}{4}$ $(S^2 + 3\, R^2)$.

c. De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten tot het hoogtepunt is $12\, R^2 - S^2$.

14. Stelling 14, § II is voor den driehoek van geen belang, maar gaat desniettemin door. De 2 driehoeken vallen samen, omdat de punten P^1_1 de hoekpunten zelf zijn.

16. De hoekpunten eens driehoeks zijn de middens der zijden van een tweeden driehoek, tegengesteld homothetisch met de oorspronkelijken. Verhouding — 2.

17. Het middelpunt des omgeschreven cirkels van dezen nieuwen driehoek is het hoogtepunt des oorspronkelijken.

b. Ingeschreven vierhoek.

In een ingeschreven vierhoek heeft men:
Het zwaartepunt P_4^1, het punt van Euler P_4^2, het 1° en 2° hoogtepunt P_4^3 en P_4^4, welke vier punten op één rechte zóó gelegen zijn, dat:

$$O\,P_4^1 : O\,P_4^2 : O\,P_4^3 : O\,P_4^4 = \frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1. \qquad \text{(Bep. § I, } h\text{).}$$

1. De zwaartevierhoek, de vierhoek van Euler en de hoogtevierhoek eens ingeschreven vierhoeks zijn tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken.

2. De verhouding bedraagt achtereenvolgens $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$ en -1.

3*a*. Het zwaartepunt is het gelijkvormigheidspunt van den vierhoek en zijn zwaartevierhoek.

b. Het gelijkvormigheidspunt van een ingeschreven vierhoek en zijn vierhoek van Euler is het punt van Euler.

c. Het gelijkvormigheidspunt van een ingeschreven vierhoek en zijn hoogtevierhoek is zijn 1° hoogtepunt.

4*a*. Het zwaartepunt eens vierhoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 7 rechten.

1°. Die, welke de hoekpunten verbinden met de zwaartepunten hunner restfiguren. Verhouding der deelen 3 : 1.

2°. Die, welke de middens van twee overstaande zijden en van de diagonalen vereenigen. Verhouding der deelen 1 : 1.

b. Het punt van Euler eens ingeschreven vierhoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 10 rechten. (De verhouding der deelen wordt telkens aangewezen achter de stelling).

1°. Die welke de hoekpunten verbinden met de Eulersche punten der primaire restdriehoeken (2 : 1).

2° Die welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de middens hunner restfiguren (2 : 1).

c. Het 1° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 7 rechten.

1° Die, welke de hoekpunten verbinden met de hoogtepunten hunner restdriehoeken (1 : 1).

2°. Die, welke de tegenpunten der overstaande zijden en der diagonalen vereenigen. (1 : 1).

5. *a*. De 6 loodlijnen, uit de middens der zijden en diagonalen eens ingeschreven vierhoeks neergelaten op hunne restfiguren, snijden elkander in het 1° hoogtepunt.

b. De 6 loodlijnen, uit de tegenpunten der zijden en diagonalen neergelaten op hunne restfiguren, snijden elkander in het 2° hoogtepunt.

6. *a*. De bovenste stukken van de loodlijnen, in 5*a* genoemd, zijn gelijk aan de middelloodlijnen der overeenkomstige zijden en diagonalen.

b. De bovenste stukken van de loodlijnen in 5*b* genoemd zijn gelijk aan tweemaal de middelloodlijnen der overeenkomstige zijden en diagonalen.

7. *a*. Het punt van Euler is het middelpunt van den omgeschreven cirkel des zwaartevierhoeks d. i. van den cirkel van Euler.

b. Het 1° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van den vierhoek van Euler.

c. Het 2° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van den hoogtevierhoek.

8. *a*. De cirkel van Euler eens ingeschreven vierhoeks deelt de afstanden van het 1° hoogtepunt tot de hoekpunten in reden als 1 : 2. Zijn straal is $\frac{1}{3}$ R.

b. De omgeschreven cirkel van den vierhoek van Euler deelt de afstanden van het 2° hoogtepunt tot de hoekpunten middendoor. Straal $\frac{1}{2}$ R.

9. *a*. De cirkels van Euler van de primaire driehoeken eens ingeschreven vierhoeks snijden elkander in zijn 1° hoogtepunt.

b. De cirkels die gaan door de tegenpunten van de primaire driehoeken snijden elkander in het 2° hoogtepunt des vierhoeks.

10 *a*. Het zwaartepunt is het inwendig, het 1° hoogtepunt het uitwendig gelijkvormigheidspunt van den omgeschreven cirkel en den cirkel van Euler.

b Het punt van Euler is het inwendig en het 2° hoogtepunt het uitwendig gelijkvormigheidspunt van den omgeschreven cirkel des oorspronkelijken vierhoeks en van dien van zijn vierhoek van Euler.

11. *a*. O, P_4^1, P_4^2, P_4^3 zijn 4 harmonisch gelegen punten.

b. Evenzoo O, P_4^2, P_4^3, P_4^4.

12. De som van de vierkanten der zijden en diagonalen eens ingeschreven vierhoeks, vermeerderd met het vierkant van de lijn van Euler, is 16 maal het vierkant van den straal des omgeschreven cirkels.

13. Voor de som van de vierkanten der afstanden van de hoek-

punten tot het zwaartepunt, het punt van Euler, het 1° en 2° hoogtepunt vindt men achtereenvolgens.

$\frac{1}{4} S^2$, $\frac{2}{9} (S^2 + 2 R^2)$, $4 R^2$, $36 R^2 - 2 S^2$.

14. *a.* De middens der zijden en diagonalen eens vierhoeks zijn de hoekpunten van een vierhoek, waarvan de zijden evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de helft van de diagonalen des vierhoeks.

b. De tegenpunten der zijden vormen eveneens een vierhoeks, waarvan de zijden evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de diagonalen des vierhoeks.

15. *a.* De middens der zijden en diagonalen eens vierhoeks zijn tevens de middens der zijden en diagonalen van een anderen vierhoek, tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken. Verhouding —1.

b. De tegenpunten der zijden en diagonalen eens ingeschreven vierhoeks zijn de middens der zijden en diagonalen van een nieuwen vierhoek, tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken. Verhouding —2.

16. *a.* Het 1° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel des nieuwen vierhoeks, vermeld in 15 *a.*

b. Het 2° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel des nieuwen vierhoeks vermeld in 15 *b.*

c. *De ingeschreven vijfhoek.*

In een ingeschreven vijfhoek heeft men:

Het zwaartepunt P_5^1, het punt van Euler P_5^2, het 1°, 2° en 3° hoogtepunt P_5^3, P_5^4 en P_5^5, welke 5 punten op één rechte zóó liggen, dat:

$$O P_5^1 : O P_5^2 : O P_5^3 : O P_5^4 : O P_5^5 = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{1}{1} : 1.$$

1. De zwaartevijfhoek, de vijfhoek van Euler en de twee hoogtevijfhoeken eens ingeschreven vijfhoeks zijn tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken.

2. De verhouding bedraagt achtereenvolgens $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$ en -1.

3*a*. Het zwaartepunt is het gelijkvormigheidspunt van den vijfhoek en zijn zwaartevijfhoek.

b. Het punt van Euler is het gelijkvormigheidspunt van den vijfhoek en zijn vijfhoek van Euler.

c. Het 1° hoogtepunt is het gelijkvormigheidspunt van den vijfhoek en zijn 1^{en} hoogtevijfhoek.

d. Het 2° hoogtepunt is het gelijkvormigheidspunt van den vijfhoek en zijn tweeden hoogtevijfhoek.

4*a*. Het zwaartepunt eens vijfhoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 15 rechten.

1°. Die, welke de hoekpunten verbinden met de zwaartepunten hunner restvierhoeken. Verhouding der deelen 4 : 1.

2°. Die welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de zwaartepunten hunner resthoeken (3 : 2)

b. Het punt van Euler eens ingeschreven vijfhoeks is het snijpunt van de volgende 25 rechten.

1°. Die, welke de hoekpunten verbinden met de punten van Euler hunner restvierhoeken (3 : 1).

2°. Die, welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de punten van Euler der restdriehoeken (1 : 1).

3°. Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de zwaartepunten hunner restdriehoeken.

c. Het 1° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 25 rechten.

1°. Die, welke de hoekpunten verbinden met de 1° hoogtepunten hunner restvierhoeken. (2 : 1).

2°. Die, welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de hoogtepunten hunner restdriehoeken (1 : 2).

3°. Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de middelpunten van de cirkels van Euler hunner restdriehoeken (2 : 1).

d. Het 2° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 15 rechten.

1°. Die, welke de hoekpunten verbinden met de 2° hoogtepunten hunner restvierhoeken (1 : 1).

2°. Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de hoogtepunten hunner restdriehoeken (1 : 1).

5*a*. De loodlijnen, uit de zwaartepunten der primaire en secundaire driehoeken eens ingeschreven vijfhoeks neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het 1° hoogtepunt.

b. De loodlijnen, uit de punten van Euler der primaire en secundaire driehoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het 2° hoogtepunt.

c. De loodlijnen, uit de hoogtepunten der primaire en secundaire driehoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het 3° hoogtepunt.

6*a*. De bovenste stukken der loodlijnen in 5*a* zijn $\frac{2}{3}$ van de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

b. De bovenste stukken van de loodlijnen in 5*b* zijn gelijk aan de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

c. De bovenste stukken der loodlijnen in 5*c* zijn gelijk aan tweemaal de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

7*a*. Het punt van Euler eens ingeschreven vijfhoeks is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn zwaartevijfhoek. (Cirkel van Euler).

b. Het 1° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn vijfhoek van Euler.

c. Het 2° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn 1^en^ hoogtevijfhoek.

d. Het 3° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn 2^en^ hoogtevijfhoek.

8*a*. De cirkel van Euler eens ingeschreven vijfhoeks deelt de afstanden van het 1° hoogtepunt tot de hoekpunten in reden als 1 : 3.

b. De omgeschreven cirkel van den vijfhoek van Euler deelt de afstanden van het 2° hoogtepunt tot de hoekpunten in reden als 1 : 2. enz.

9*a*. De cirkels van Euler van de primaire vierhoeken eens ingeschreven vijfhoeks snijden elkander in het 1° hoogtepunt. Enz.

10*a*. Het zwaartepunt is het inwendig en het 1° hoogtepunt het uitwendig gelijkvormigheidspunt van den omgeschreven cirkel des vijfhoeks en zijn cirkel van Euler. Enz.

11*a*. Het middelpunt van den omgeschreven cirkel, het zwaartepunt, het punt van Euler en het 1° hoogtepunt eens ingeschreven vijfhoeks liggen harmonisch. Enz.

12. De som van de vierkanten der zijden en diagonalen eens ingeschreven vijfhoeks, vermeerderd met het vierkant van de lijn van Euler, is gelijk aan 25 maal het vierkant van den straal des omgeschreven cirkels.

13. De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten eens ingeschreven vijfhoeks tot het zwaartepunt, het punt van Euler en de 3 hoogtepunten bedraagt achtereenvolgens:

$$\frac{1}{5}S^2\,,\ \frac{1}{16}(3S^2+5R^2)\,,\ \frac{1}{9}(S^2+20\,R^2)\,,\ \frac{1}{4}(-\,S^2+45\,R^2)\,,$$
$$-\,3\,S^2+80\,R^2.$$

14*a*. De hoogtepunten van de primaire driehoeken eens inge-

ingeschreven vijfhoeks zijn de hoekpunten van een nieuwen vijfhoek, wiens zijden evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de diagonalen des vijfhoeks.

b. De hoogtepunten van de secundaire driehoeken eens ingeschreven vijfhoeks zijn de hoekpunten van een nieuwen vijfhoek, wiens diagonalen evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de zijden des oorspronkelijken.

Overeenkomstige eigenschappen gelden voor de zwaartepunten en de punten van Euler der primaire en secundaire driehoeken.

15. De hoogtepunten van de primaire en secundaire driehoeken eens ingeschreven vijfhoeks zijn de middens der zijden en diagonalen van een nieuwen vijfhoek, tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken, volgens de verhouding —2.

(Zie verder de opmerking bij 14*b*).

16. Het 3° hoogtepunt is het middelpunt van den nieuwen vijfhoek genoemd in 15. Soortgelijke beteekenis hebben het 1° en 2° hoogtepunt.

d. *De ingeschreven zeshoek.*

In een ingeschreven zeshoek heeft men:

Het zwaartepunt P_6^1, het punt van Euler P_6^2, de 4 hoogtepunten P_6^3, P_6^4, P_6^5, P_6^6, welke 6 punten op één rechte zóó liggen, dat:

$$O\,P_6^1 : O\,P_6^2 : O\,P_6^3 : O\,P_6^4 : O\,P_6^5 : O\,P_6^6 = \frac{1}{6} : \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1.$$

1. De zwaartezeshoek, de zeshoek van Euler en de drie hoogtezeshoeken van een ingeschreven zeshoek zijn tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken.

2. De verhouding bedraagt achtereenvolgens $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, -1.

3*a*. Het zwaartepunt is het gelijkvormigheidspunt van den zeshoek en zijn zwaartezeshoek.

b. Het punt van Euler is het gelijkvormigheidspunt van den zeshoek en zijn zeshoek van Euler.

c. d. e. Het 1°, 2° en 3° hoogtepunt zijn achtereenvolgens de gelijkvormigheidspunten van den zeshoek en zijn 1°, 2° en 3° hoogtezeshoek.

4*a*. Het zwaartepunt eens zeshoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 31 rechten.

1°, Die, welke de hoekpunten verbinden met de zwaartepunten hunner restvijfhoeken. (5 : 1).

2° Die, welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de zwaartepunten der restvierhoeken. (2 : 1).

3° Die, welke de zwaartepunten van twee restdriehoeken verbinden (1 : 1).

b. Het punt van Euler eens ingeschreven zeshoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 56 rechten.

1° Die, welke de hoekpunten verbinden met de punten van Euler der restvijfhoeken. (4 : 1).

2° Die, welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de punten van Euler der restvierhoeken. (3 : 2).

3° Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de zwaartepunten van de restvierhoeken. (4 : 1).

4° Die, welke de zwaartepunten der verschillende driehoeken verbinden met de punten van Euler der restdriehoeken.

c. Het 1° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 66 rechten.

1° Die, welke de hoekpunten verbinden met de 1° hoogtepunten hunner restvijfhoeken. (3 : 1).

2° Die welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de 1° hoogtepunten der restvierhoeken. (1 : 1).

3° Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de punten van Euler der restvierhoeken. (3 : 1).

4° Die, welke de zwaartepunten der verschillende driehoeken verbinden met de hoogtepunten der restdriehoeken. (1 : 3).

5°. Die, welke de punten van Euler der verschillende driehoeken verbinden met de punten van Euler der restdriehoeken. (1 : 1).

d. Het 2° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 56 rechten.

1° Die, welke de hoekpunten verbinden met de 2° hoogtepunten hunner restvijfhoeken. (2 : 1).

2° Die, welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de 2° hoogtepunten der restvierhoeken. (1 : 2).

3° Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de 1° hoogtepunten der restvierhoeken. (2 : 1).

4° Die, welke de punten van Euler der verschillende driehoeken verbinden met de punten van Euler der restfiguren. (1 : 1).

e. Het 3° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 31 rechten.

1° Die, welke de hoekpunten verbinden met de 3° hoogtepunten hunner restvijfhoeken. (1 : 1).

2° Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de 2° hoogtepunten der restvierhoeken. (1 : 1).

3° Die, welke de hoogtepunten der verschillende driehoeken verbinden met de hoogtepunten hunner restfiguren.

5*a*. De loodlijnen, uit de zwaartepunten der verschillende vierhoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het 1° hoogtepunt.

b. De loodlijnen, uit de punten van Euler der verschillende vierhoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het 2° hoogtepunt.

c. De loodlijnen, uit de 1° hoogtepunten der verschillende vierhoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het 3° hoogtepunt.

d. Het 4° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de 15 loodlijnen uit de 2° hoogtepunten der verschillende vierhoeken, neergelaten op de restzijden en restdiagonalen.

6*a*. De bovenste stukken in 5*a* zijn de helften van de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

b. De bovenste stukken der loodlijnen in 5*b* zijn $\frac{2}{3}$ van de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

c. De bovenste stukken der loodlijnen in 5*c* zijn gelijk aan de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

d. De bovenste stukken der loodlijnen in 5*d* zijn gelijk aan tweemaal de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

7*a*. Het punt van Euler eens ingeschreven zeshoeks is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn zwaartezeshoek.

b. Het 1° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn zeshoek van Euler.

c. Het 2° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van den 1° hoogtezeshoek. Enz.

8*a*. De cirkel van Euler eens ingeschreven zeshoeks deelt de afstanden van het 1° hoogtepunt tot de hoekpunten in reden als 1 : 4. Enz.

9*a*. De cirkels van Euler van de primaire vijfhoeken eens ingeschreven zeshoeks snijden elkander in zijn 1° hoogtepunt. Enz.

10*a*. Het zwaartepunt is het inwendig en het 1° hoogtepunt het uitwendig gelijkvormigheidspunt van den omgeschreven cirkel des zeshoeks en zijn cirkel van Euler. Enz.

11*a*. Het middelpunt van den omgeschreven cirkel, het zwaartepunt van Euler en het 1° hoogtepunt liggen harmonisch.

12. De som van de vierkanten der zijden en diagonalen van een ingeschreven zeshoek, vermeerderd met het vierkant van de lijn van Euler, is gelijk aan 36 maal het vierkant van den straal des ingeschreven cirkels.

13. De sommen van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten tot het zwaartepunt, het punt van Euler en het 1°, 2°, 3° en 4° hoogtepunt bedragen achtereenvolgens:

$$\frac{1}{6}S^2,\ \frac{2}{25}(2\,S^2+3\,R^2),\ \frac{1}{8}(S^2+12\,R^2),\ 6\,R^2,\ \frac{1}{2}(48\,R^2-S^2),$$
$$150\,R^2-4\,S^2.$$

14*a*. De 2° hoogtepunten der primaire vierhoeken eens ingeschreven zeshoeks zijn de hoekpunten van een nieuwen zeshoek, waarvan de zijden evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de diagonalen der 1° orde van den oorspronkelijken.

b. De 2° hoogtepunten der secundaire vierhoeken eens ingeschreven zeshoeks zijn de hoekpunten van een nieuwen zeshoek, waarvan de diagonalen der 1° orde evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de diagonalen der 1° orde van den oorspronkelijken.

Overeenkomstige eigenschappen gelden voor de zwaartepunten, de punten van Euler en de 1° hoogtepunten der primaire en secundaire vierhoeken.

15*a*. De 2° hoogtepunten van de primaire, secundaire en tertiaire vierhoeken eens ingeschreven zeshoeks zijn de middens der zijden, der diagonalen van de 1° orde en der hoofddiagonalen van een nieuwen zeshoek, tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken, volgens de verhouding —2,

b. *c*. *d*. Zie de opmerking bij 14.

16*a*. Het 4° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van den nieuwen zeshoek bedoeld in 15*a*.

Met behulp van de voorgaande eigenschappen kan men nog gemakkelijk de volgende stellingen bewijzen, die evenwel niet in de stellingen 1—16 van § II vervat zijn.

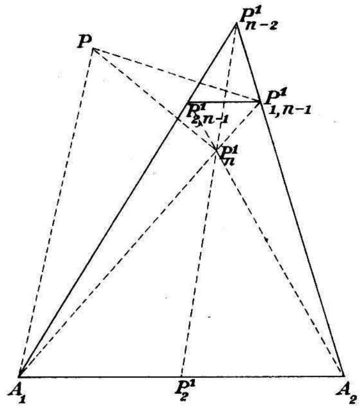
1. De hoogtepunten van de zes driehoeken, die 3 opeenvolgende hoekpunten eens ingeschreven zeshoeks tot hoekpunten hebben, zijn de hoekpunten van een zeshoek, waarvan de overstaande zijden twee aan twee evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de hoofddiagonalen des zeshoeks. (Zeshoekig parallelogram).

2. De hoogtepunten van de zes driehoeken, die men verkrijgt door drie niet opeenvolgende zijden des zeshoeks tot bases en de uiteinden der overstaande zijden tot toppen te nemen, zijn de hoekpunten van een zeshoekig parallelogram, waarvan de overstaande zijden twee aan twee evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de drie andere niet opeenvolgende zijden des zeshoeks.

N.B. Men kan 2 zulke zesh. parall. verkrijgen.

3. De drie zeshoekige parallelogrammen hierboven genoemd, hebben het 2° hoogtepunt des zeshoeks tot gemeenschappelijk middelpunt.

Fig. 1.



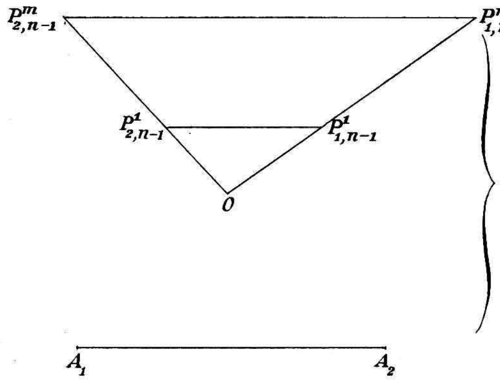


Fig. 2.

Fig. 3.

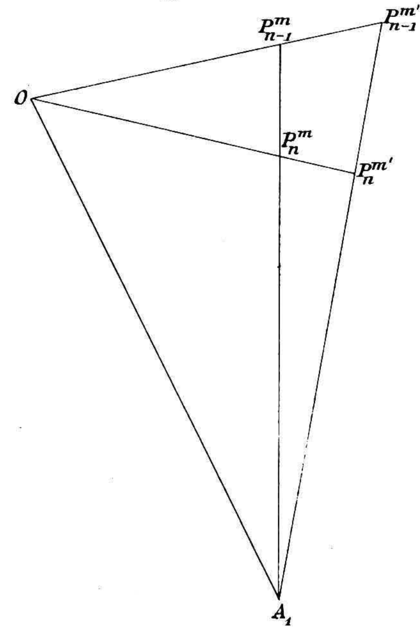


Fig. 4.

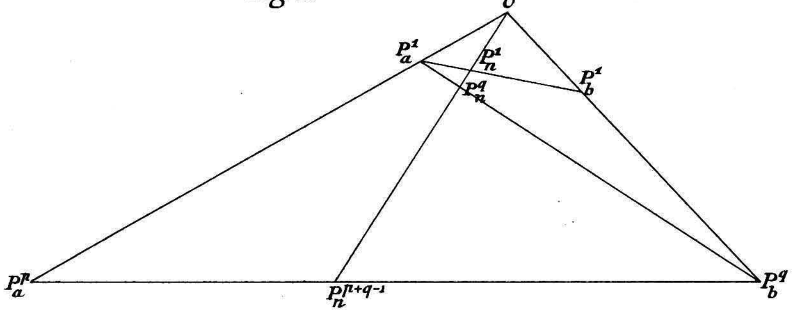


Fig. 5.

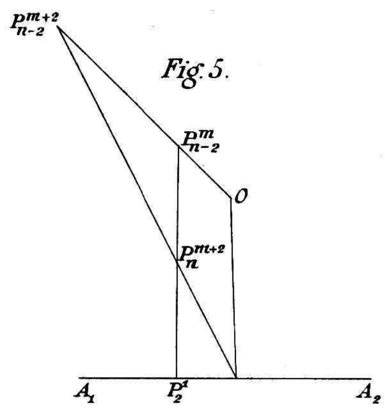


Fig. 6.

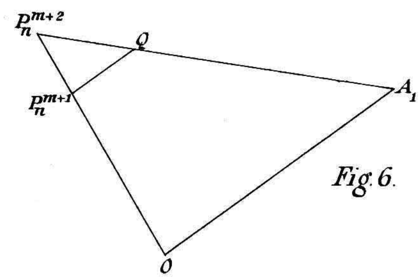


Fig. 7.

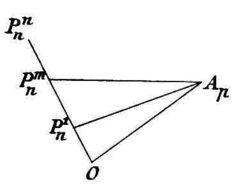


Fig. 8.

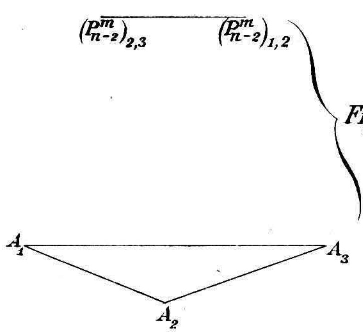


Fig. 9.

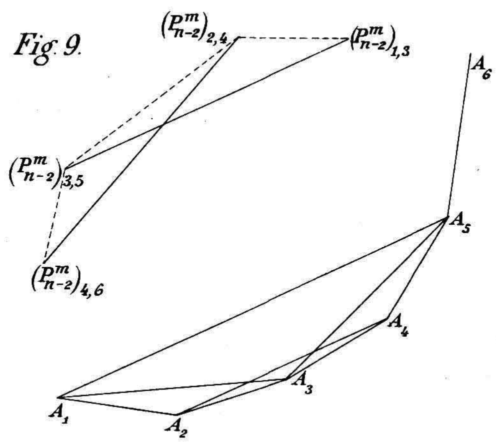
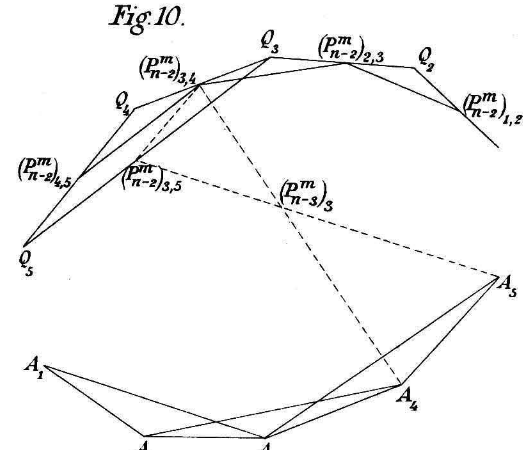


Fig. 10.



J. Bijtel, lith. P.J. Mulder, impr. Leiden.