Over een minimaaloppervlak van tweevoudigen samenhang

DOOR

J. C. KLUYVER.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel III. N°. 9.

(MET 2 PLATEN.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1896.

Over een minimaaloppervlak van tweevoudigen samenhang.

Volgens DARBOUX [1]) is RIEMANN de eerste geweest, die een minimaaloppervlak construeerde, begrensd door twee rechtlijnige convexe veelhoeken in twee evenwijdige vlakken geplaatst [2]). In 1887 is door SCHWARZ [3]) met groote uitvoerigheid dit vraagstuk behandeld in de onderstelling, dat de veelhoeken grond- en bovenvlak vormden van een regelmatig n-zijdig prisma. Buitendien spreekt SCHWARZ elders [4]) over een zeer merkwaardig geval, waarbij voor $n = 4$ de aanwezigheid van acht nieuwe rechte lijnen op het oppervlak kan worden aangetoond, terwijl hij ten slotte er op wijst, dat men door de invoering van ééne constante meer gemakkelijk van het regelmatige, vierzijdige prisma kan opklimmen tot het rechthoekige parallelopipedum met willekeurig rechthoekig grondvlak. In het volgende is gepoogd eene behandeling van dit laatste vraagstuk te geven, voor zoover dit met behulp van elliptische functies geschieden kan.

Is tusschen grond- en bovenvlak van een rechthoekig parallelopipedum met de breedte b, de lengte l en en de hoogte h een minimaaloppervlak O uitgespannen, dan is het in de eerste plaats duidelijk, dat O in vier onderling congruente of symmetrische stukken kan worden verdeeld. Een dezer stukken $ACLDBENFA$ of Ω heeft ongeveer de gedaante, die in fig. 1 is aangegeven. Tot

[1]) Théorie générale des surfaces, I, blz. 427.

[2]) Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung; Ges. W. 2te Aufl. blz. 445.

[3]) Ueber specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen, als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücken; Ges. W. I, blz. 270.

[4]) Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Nachtrag; Ges. W. I, blz. 98 en 99.

coördinatenassen zijn de assen van het parallelopipedum genomen; de coördinatenvlakken zijn dan de symmetrievlakken van O. Daar zij het oppervlak loodrecht snijden, zijn de krommen van doorsnede CLD, ENF, LN kromtelijnen. Men merkt op, dat in de punten C, D, E en F deze kromtelijnen de rechtlijnige begrenzing van Ω loodrecht ontmoeten. Deze punten zijn dus uitzonderingspunten op het oppervlak. Door elk van hen gaan niet twee, maar drie asymptotische lijnen, die met elkander hoeken van 60° zullen maken.

1. *De analytische voorstelling van het oppervlak* Ω. Door eene enkele vergelijking is het oppervlak niet voor te stellen; men moet trachten de drie rechthoekige coördinaten x, y, z in twee onderling onafhankelijke parameters uit te drukken. De methode, die met dit doel gevolgd kan worden, is die der conforme afbeelding, afkomstig van RIEMANN, WEIERSTRASS en SCHWARZ, en onder anderen door DARBOUX [1]) uitvoerig uiteengezet.

Volgens de algemeene formules van WEIERSTRASS zijn de uitdrukkingen voor de drie coördinaten altijd te brengen in den vorm [2])

$$\pm \mu x = \Re \int (1 - s^2) F(s)\, ds, \quad \pm \mu y = \Re \int i (1 + s^2) F(s)\, ds,$$
$$\pm \mu z = \Re \int 2 s F(s)\, ds, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarin s eene complexe veranderlijke, μ een positieve proportionaliteitsfactor beteekent, en het teeken $\Re$ op de gebruikelijke wijze aanduidt, dat alleen het bestaanbare deel der integralen is bedoeld.

De vraag is de nog onbekende functie $F(s)$ te bepalen, hetgeen geschieden kan door de onderlinge vergelijking van eenige conforme afbeeldingen van het oppervlak Ω. De eerste afbeelding wordt verkregen door de complexe s uit te breiden op den eenheidsbol. Volgens bekende theorieën is dat zoo in te richten, dat in overeenkomstige punten op Ω en op den bol de raakvlakken evenwijdig zijn. Derhalve zullen noodzakelijk zoowel de vlakke kromtelijnen CLD, ENF, LN als de rechte lijnen, AC, AF, BD, BE als groote cirkels worden afgebeeld. Een boltweehoek (fig. 2) ontstaat; de punten A en B komen in de uiteinden van de verticale middellijn, L en N zijn de middens der bogen AB, $bg\, CL = bg LD$, $bg\, NE = bg\, NF$, de standhoek van den boltweehoek is recht. In alle punten is de teekening getrouw, in de uitzonderingspunten C, D, E en F echter worden de rechte hoeken van den rand van Ω

---

[1]) Le problème de Plateau; Th. g. d. surf., I, blz. 424.

[2]) Men vergelijke: SCHWARZ en DARBOUX, t. a. p., of WEIERSTRASS, Ueber die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist, Monatsber. der Berl. Ak. 1866, blz. 616. De oorspronkelijke vorm, dien WEIERSTRASS aan deze vergelijkingen gaf, wijkt eenigszins af van de gedaante, waarin zij hier voorkomen.

door gestrekte hoeken weergegeven. De hellingshoeken van de raakvlakken aan Ω in D en E noemen wij in het vervolg 2δ en 2ε; in fig. 2 is dienovereenkomstig $\angle DAB = \delta$, $\angle EAB = \varepsilon$.

Van fig. 2 gaan wij door stereographische projectie uit A op het horizontale diametraalvlak over tot de tweede conforme afbeelding in het complexe s-vlak. Beziet men dit diametraalvlak van de onderzijde, dan vindt men fig. 3, eene rechten hoek B, op welks beenen de overige randpunten C, N, D, E, L, A gelegen zijn, elk met een affix, zooals die in fig. 3 is bijgevoegd.

Naast deze laatste teekening staat een derde in het vlak eener nieuwe complexe σ, bepaald door de vergelijking

$$d\sigma = \sqrt{2\,F(s)}\,ds \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Deze afbeelding heeft de eigenaardigheid, dat alle kromtelijnen op Ω in het σ-vlak zich voordoen als lijnen evenwijdig loopende met de coördinatenassen, terwijl de asymptotische lijnen van het oppervlak worden afgeteekend als rechte lijnen, welke de assen onder hoeken van 45° snijden. Er ontstaat dus in het σ-vlak de zeshoek $ACDBEF$ van fig. 4 met twee rechte hoeken in A en in B, en met hoeken van 135° in de overige hoekpunten.

De vergelijking van fig. 3 en fig. 4 zal nu de onbekende functie $F(s)$ doen kennen, want het vraagstuk om fig. 3 op fig. 4 zoo af te beelden, dat de gelijknamige punten der randen samenvallen, laat eene bepaalde oplossing toe.

Immer zal ten eerste door de substitutie

$$s^2 = t$$

fig. 3 overgaan in de positieve helft van het t-vlak, waarbij de punten A, C, D, B, E, F alle op de as der bestaanbaren geraken en in volgorde de affixen

$$\infty\,,\ -\cot^2\delta,\ -tg^2\delta,\ 0,\ tg^2\varepsilon,\ \cot^2\varepsilon$$

verkrijgen, en in de tweede plaats verandert dit positieve halfvlak door de substitutie [1])

$$\text{const.} \times d\sigma = dt(t+\cot^2\delta)^{-\frac{1}{4}}(t+tg^2\delta)^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{1}{2}}(t-tg^2\varepsilon)^{-\frac{1}{4}}(t-\cot^2\varepsilon)^{-\frac{1}{4}}$$

op de voorgeschreven wijze in den zeshoek van fig. 4. De overeenkomst tusschen s en σ is dus bepaaldelijk

$$d\sigma = \frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi i}{4}}\,ds}{\sqrt[4]{(s^2+\cot^2\delta)(s^2+tg^2\delta)(s^2-tg^2\varepsilon)(s^2-\cot^2\varepsilon)}}.$$

[1]) SCHWARZ. Ueber einige Abbildungsaufgaben, Ges. W. II. blz. 65, of ook FORSYTH. Theory of Functions, blz. 538.

Aan de constante is eenvoudigheidshalve de modulus $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gegeven, het argument moest $-\frac{3\pi}{4}$ zijn, omdat in A (voor $s = \infty$) in de richting FA de differentiaal ds bestaanbaar en positief is, terwijl uit fig. 4 blijkt, dat aldaar $d\sigma$ het argument $\frac{3\pi}{4}$ heeft.

Vergelijkende met (2), besluit men

$$F(s) = \frac{e^{\frac{3\pi i}{2}}}{\sqrt{(s^2 + cot^2\delta)(s^2 + tg^2\delta)(s^2 - tg^2\varepsilon)(s^2 - cot^2\varepsilon)}};$$

daarmede zijn de vergelijkingen (1), die het minimaaloppervlak analytisch voorstellen geheel bekend.

Terloops kan men opmerken, dat

$$F(s) = -\frac{1}{s^4} F_0(s)$$

(met F_0 de aan F toegevoegde complexe functie aanduidend). Dit wijst er op, dat Ω de meetkundige plaats is der middens van alle koorden eener bepaalde minimaalkromme. Zulke oppervlakken zijn door LIE „dubbele" minimaaloppervlakken genoemd [1]).

2. *Herleiding der integralen.* De drie integralen in de vergelijkingen (1) zijn door dezelfde substitutie terug te brengen tot elliptische, echter is het in het algemeen niet doenlijk, die substitutie zoo in te richten, dat het integralen van denzelfden modulus worden. De bedoelde substitutie is

$$s^2 + \frac{1}{s^2} = \xi.$$

Tegelijker tijd voeren wij in de positieve grootheden α en β, grooter dan de eenheid, bepaald door

$$2\alpha = tg^2\delta + cot^2\delta, \qquad 2\beta = tg^2\varepsilon + cot^2\varepsilon,$$

of

$$\alpha - 1 = 2\,cot^2 2\delta, \qquad \beta - 1 = 2\,cot^2 2\varepsilon \ldots\ldots\ldots (3)$$

en vinden nu achtereenvolgens

$$\frac{ds}{\sqrt{(s^2 + cot^2\delta)\ldots(s^2 - cot^2\varepsilon)}} = \frac{ds}{\sqrt{(s^4 + 2s^2\alpha + 1)(s^4 - 2s^2\beta + 1)}} =$$

$$= \frac{d\xi}{2s\sqrt{(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi - 2)(\xi + 2)}},$$

en daarna

[1]) Ueber Minimalflächen; Math. Ann. XV, blz. 346.

$$\pm \mu x = \Re \int \frac{i d\xi}{\sqrt{4(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi + 2)}},$$
$$\pm \mu y = \Re \int \frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi - 2)}},$$
$$\pm \mu z = \Re \int \frac{i d\xi}{\sqrt{(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi + 2)(\xi - 2)}} \quad \ldots\ldots (4)$$

Gedaante en afmetingen van het minimaaloppervlak hangen dus af van de drie positieve constanten μ, α, β, die men in bovenstaande integralen van de eerste soort aantreft. Om die afhankelijkheid nader te onderzoeken is het geschikt de drie integralen om te keeren en $\wp$-functies in te voeren.

Vóór wij daartoe overgaan kan er aan herinnerd worden, dat nu in het vlak der complexe ξ al weder eene afbeelding van Ω is ontworpen. In fig. 5 is deze geteekend; het geheele ξ-vlak is er door bedekt; toch is er een rand, namelijk de rechte lijn, as der bestaanbaren, die het punt $N(\xi = 2)$ door het oneindige heen met het punt $L(\xi = -2)$ verbindt. Die lijn is daarbij tweemaal te doorloopen in de volgorde: *NFACLDBEN*.

3. *Omkeering der elliptische integralen.* Aanvangende met de eerste integraal, verstaan wij onder τ_1 eene positieve constante, onder e'_1, e'_2, e'_3 de drie bestaanbare wortels eener functie $\wp w_1$ met de perioden $2\omega_1$ en $2\omega'_1$, en stellen

$$\xi + 2\alpha = \tau_1^2 (e_1' - \wp w_1),$$
$$\xi + 2 \quad = \tau_1^2 (e_2' - \wp w_1),$$
$$\xi - 2\beta = \tau_1^2 (e_3' - \wp w_1),$$

zoodat men heeft

$$\tau_1^2 (e_1' - e_3') = 2(\alpha + \beta),$$
$$\tau_1^2 (e_1' - e_2') = 2(\alpha - 1),$$
$$\tau_1^2 (e_2' - e_3') = 2(\beta + 1),$$
$$\pm \frac{i d\xi}{\sqrt{4(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi + 2)}} = \frac{1}{\tau_1} dw_1,$$

en
$$\pm \mu \tau_1 x = \Re w_1 + \text{const.}$$

In deze vergelijking moet het nog onbekende teeken en de waarde der integratieconstante afgeleid worden uit den van te voren aangenomen stand van het oppervlak Ω in verband met het veld, dat men door het argument w_1 laat doorloopen. Na eenig overleg en na raadpleging van fig. 5, blijkt spoedig, dat men alle voorwaarden bevredigt door aan te nemen

$$\mu \tau_1 x = -\Re w_1 + \omega_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

indien men tegelijkertijd het argument w_1 zich denkt binnen den rechthoek $BDCA$ in fig. 6 met de rechthoekszijden $BD = \omega$ en $BA = \frac{2\omega_1'}{i}$. In deze afbeelding worden alle rechte hoeken aan den rand van Ω behoorlijk teruggegeven; de dubbele lijn FNE moet echter als eene begrenzende insnijding beschouwd worden. In fig. 6 zijn de affixen der verschillende punten op den rand bijgevoegd. Bij N behoort een argument $-\omega_1' + v_1$, hetwelk bepaald is door de vergelijking

$$\tau_1^2 (\wp v_1 - e_3') = \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Achtereenvolgens stellende $w_1 = \omega_1, o, -\omega_1' + v_1$, vindt men voor de halve breedte $BD = \frac{1}{2} b$ van het grondvlak van O (fig. 1)

$$\mu \tau_1 b = 2\omega_1,$$

en voor de halve as $MN = \rho_1$ der middendoorsnede

$$\mu \tau_1 \rho_1 = \omega_1 - v_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Op volkomen dezelfde wijze wordt de tweede integraal behandeld. Men gebruikt de functie $\wp w_2$ [1]) met de bestaanbare wortels e_1'', e_2'', e_3'' en de perioden $2\omega_2$ en $2\omega_2'$, en stelt weder onder invoering eener positieve constante τ_2

$$\begin{aligned} \xi - 2\beta &= \tau_2^2 (\wp w_2 - e_1''), \\ \xi - 2 \quad &= \tau_2^2 (\wp w_2 - e_2''), \\ \xi + 2\alpha &= \tau_2^2 (\wp w_2 - e_3''). \end{aligned}$$

Dit levert eerst

$$\begin{aligned} \tau_2^2 (e_1'' - e_3'') &= 2(\alpha + \beta), \\ \tau_2^2 (e_1'' - e_2'') &= 2(\beta - 1), \\ \tau_2^2 (e_2'' - e_3'') &= 2(\alpha + 1), \end{aligned}$$

en vervolgens

$$\pm \frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi - 2)}} = \frac{1}{\tau_2} dw_2,$$

of

$$\pm \mu \tau_2 y = \Re w_2 + \text{const.}$$

Het oppervlak Ω verschijnt in den gewenschten stand, wanneer voor $\mu \tau_2 y$ het minusteeken wordt geplaatst en de constante door $-\omega_2$ wordt vervangen, zoodat men heeft

$$\mu \tau_2 y = -\Re w_2 + \omega_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

[1]) Het zal tot geen misverstand aanleiding geven, dat hetzelfde teeken $\wp$ gebruikt wordt tot aanwijzing van verschillende elliptische functies, daar deze door de bijvoeging van het argument w_1, w_2 en later w voldoende zijn onderscheiden.

Het argument w_2 moet dan beperkt worden tot den rechthoek $BEFA$ van fig. 7 met de zijden $BE = \omega_2$, $BA = \frac{2\omega_2'}{i}$. De dubbele lijn CLD is wederom eene insnijding, die tot de grens der figuur moet worden gerekend. De argumenten, zooals zij aan de verschillende punten van den rand van Ω zijn toegevoegd, zijn in de figuur aangegeven. Zij worden weder met behulp van fig. 5 gemakkelijk bepaald. Op te merken is het argument $\omega_2' + v_2$, behoorende bij L; het is bepaald door de vergelijking

$$\tau_2^2 (\wp v_2 - e_3'') = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Voor de halve lengte $BE = \frac{1}{2}\, l$ van de basis van O (fig. 1) en voor de halve as $ML = \rho_2$ der middendoorsnede vindt men door eenvoudige substitutie

$$\mu\, \tau_2\, l = 2\omega_2,$$
$$\mu\, \tau_2\, \rho_2 = \omega_2 - v_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

De omkeering der derde integraal berust op eenigszins ingewikkelder vergelijkingen. Van de in te voeren functie $\wp w$ zullen e_1, e_2, e_3 de bestaanbare wortels zijn, 2ω en $2\omega'$ de perioden; onder v verstaan wij een positief imaginair argument, kleiner dan ω', zoodat $i\wp' v$ positief uitvalt; ten slotte is τ eene positieve constante. Wij kunnen nu aannemen:

$$\xi - 2\beta = -\tau i \wp' v \times \frac{1}{\wp w - \wp v},$$
$$\xi + 2\alpha = -\tau \frac{i\wp' v}{\wp v - e_3} \times \frac{\wp w - e_3}{\wp w - \wp v},$$
$$\xi + 2 = -\tau \frac{i\wp' v}{\wp v - e_2} \times \frac{\wp w - e_2}{\wp w - \wp v},$$
$$\xi - 2 = -\tau \frac{i\wp' v}{\wp v - e_1} \times \frac{\wp w - e_1}{\wp w - \wp v}.$$

Daaruit leidt men af

$$\tau^3 \wp' v = -2i(\beta - 1)(\beta + 1)(\alpha + \beta), \qquad \tau^2 (e_1 - e_3) = (\beta + 1)(\alpha + 1),$$
$$\tau^2 (\wp v - e_1) = -(\beta + 1)(\alpha + \beta), \qquad \tau^2 (e_1 - e_2) = 2(\alpha + \beta)$$
$$\tau^2 (\wp v - e_2) = -(\beta - 1)(\alpha + \beta), \qquad \tau^2 (e_2 - e_3) = (\beta - 1)(\alpha - 1),$$
$$\tau^2 (\wp v - e_3) = -(\beta + 1)(\beta - 1),$$

$$\frac{i\, d\xi}{\sqrt{(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi + 2)(\xi - 2)}} = \frac{dw}{\tau},$$

of

$$\pm \mu \tau z = \Re w + \text{const.}$$

Al spoedig blijkt, dat men

$$\mu \tau z = \Re w - \omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

kan nemen, mits w blijft binnen den rechthoek $EFCD$ van fig. 8, met de zijden $EF = 2\omega$ en $ED = \frac{\omega'}{i}$. Uit die figuur zijn af te lezen de argumentwaarden behoorende bij de verschillende punten op den rand van Ω, welk oppervlak in fig. 8 geheel conform is afgebeeld met uitzondering van de punten A en B. Met behulp van fig. 8 vindt men dadelijk voor de hoogte $AB = h$ van het minimaaloppervlak (fig. 1)

$$\mu \tau h = 2\omega.$$

De drie integralen zijn daarmede omgekeerd, echter zijn drie verschillende $\wp$-functies gebruikt, drie argumenten w_1, w_2, w, bij eene zelfde waarde van ξ behoorende, moeten te gelijk worden beschouwd. De verschillende wortels der $\wp$-functies zijn niet onafhankelijk van elkander, zij zijn allen in α en β uitgedrukt, wat tengevolge heeft de homogene vergelijking

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{e_1' - e_2'}{e_1' - e_3'} \times \frac{e_1'' - e_2''}{e_1'' - e_3''}, \ldots\ldots\ldots (12)$$

want beide leden zijn gelijk aan $\frac{(\beta - 1)(\alpha - 1)}{(\beta + 1)(\alpha + 1)}$.

Daarnaast is te plaatsen de betrekking

$$\tau_1 \sqrt{e_1' - e_3'} = \tau_2 \sqrt{e_1'' - e_3''} = \tau \sqrt{e_1 - e_2},$$

met behulp waarvan wij uit de gevonden uitkomsten afleiden

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}\sqrt{e_1' - e_3'}}} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}\sqrt{e_1'' - e_3''}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}\sqrt{e_1 - e_2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Voor latere berekeningen is het wenschelijk deze vergelijkingen ook in de notatie van Jacobi voor oogen te hebben. Dan worden gebruikt de grootheden K, K', E, E' en de toegevoegde moduli $k = \sin\varphi$, $k' = \cos\varphi$, wier kwadraten wel door c en c' worden voorgesteld. In deze schrijfwijze worden (12) en (13) van de gedaante

$$k = \frac{k_1' \, k_2'}{k_1 \, k_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\frac{2K_1}{\pi}}} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\frac{2K_2}{\pi}}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}} \ldots\ldots (15)$$

Er moge op gewezen worden, dat doorloopend de aanwijzers 1 en 2 gebruikt zijn voor de grootheden, die op $\wp w_1$ en op $\wp w_2$ betrekking hebben, voor de wortels e_1, e_2, e_3 echter zijn die aanwijzers door accenten vervangen. Door α en β zijn de moduli k_1, k_2 en k bepaald, men heeft

$$k_1^2 = \frac{\beta + 1}{\alpha + \beta}, \quad k_2^2 = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta}, \quad k^2 = \frac{(\beta - 1)(\alpha - 1)}{(\beta + 1)(\alpha + 1)} \ldots (16)$$

Men kan ten slotte nog de exponentiaalgrootheden

$$q_1 = e^{-\frac{\pi \omega_1'}{i \omega_1}} = e^{-\frac{\pi K_1'}{K_1}}, \text{ enz.}$$

invoeren, waardoor (15) overgaat in

$$\frac{\sqrt{b}}{1 + 2q_1^4 + 2q_1^4 + 2q_1^9 + \ldots} = \frac{\sqrt{l}}{1 + 2q_2 + 2q_2^4 + 2q_2^9 + \ldots} =$$

$$= \frac{\sqrt{h}}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}, \ldots\ldots (9)$$

om tot de overtuiging te geraken, dat het in het algemeen mogelijk moet zijn om tusschen grond- en bovenvlak van een parallelopipedum van gegeven afmetingen b, l, h een minimaaloppervlak te construeeren. Immers ook in (14) zou men de grootheden q kunnen invoeren, zoodat in (14) en (17) drie vergelijkingen zouden verkregen worden met de onbekenden q_1, q_2 en q, die daaruit, zij het ook met groote moeite, zouden kunnen worden opgelost. En waren q_1, q_2, q eens bekend, dan waren ook de $\wp$-functies gevonden en het oppervlak Ω zou door bruikbare vergelijkingen (5), (8), (11) analytisch zijn voorgesteld. Eer wij echter tot de discussie dezer vergelijkingen overgaan, zullen nog eenige andere afmetingen van het oppervlak Ω worden berekend.

4. *Het lijnelement dS op Ω en het oppervlakelement $d\Omega$.* Het lijnelement dS zal afhangen van de toegevoegde complexen ξ en ξ_0. Om het te bepalen kan men uitgaan van de algemeen geldige uitdrukking in s

$$\mu^2 \, dS^2 = (1 + s s_0)^2 \, mod \, {}^2F(s) \, ds \, ds_0,$$

even eenvoudig echter is de rechtstreeksche berekening uit (4)

$$\pm \mu dx = \Re \frac{i d\xi}{\sqrt{4(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi + 2)}} = \Re \frac{i d\xi}{\sqrt{Q_1}},$$

$$\pm \mu dy = \Re \frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi - 2)}} = \Re \frac{d\xi}{\sqrt{Q_2}},$$

$$\pm \mu dz = \Re \frac{i d\xi}{\sqrt{(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi + 2)(\xi - 2)}} = \Re \frac{i d\xi}{\sqrt{Q}},$$

waarbij te letten is op de identiteit

$$-\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q} = 0.$$

Men vindt onmiddellijk uit de voorafgaande vergelijkingen

$$\mu^2 dS^2 = \tfrac{1}{2} d\xi\, d\xi_0 \left(\frac{1}{mod\ Q_1} + \frac{1}{mod\ Q_2} + \frac{1}{mod\ Q}\right) \ldots\ldots \quad (18)$$

Daarnaast plaatsen wij de uitdrukking voor het oppervlakelement $d\Omega$, die onmiddellijk uit (18) volgt. Noemende dV het vlakte-element in het complexe ξ-vlak, komt er

$$\mu^2 d\Omega = \tfrac{1}{2} dV \left(\frac{1}{mod\ Q_1} + \frac{1}{mod\ Q_2} + \frac{1}{mod\ Q}\right) \ldots\ldots\ldots (19)$$

Van 18 maken wij gebruik om de lengte van de drie kromtelijnen, CLD, ENF en NL uit fig. 1 te bepalen.

Ter berekening van $CLD = b_1$, beschouwen wij tegelijk met fig. 1 de conforme afbeelding op het ξ-vlak in fig. 5, en merken op dat de helft CL der bedoelde kromtelijn wordt afgebeeld door het gelijknamige stuk van de as der bestaanbaren, gerekend van het punt $\xi = -2\alpha$ tot $\xi = -2$. Bij het doorloopen van dit gedeelte der as is $\xi = \xi_0$, $mod\ Q_1 = Q_1$, $mod\ Q_2 = Q_2$, $mod\ Q = -Q$; de vergelijking (18) geeft dus

$$\mu^2 dS^2 = \tfrac{1}{2} d\xi^2 \left(\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q}\right) = \frac{d\xi^2}{Q_1},$$

of

$$\mu \tau_1 dS = \pm i dw_1.$$

Uit fig. 6 echter maakt men op, dat voor de halve kromtelijn CL het argument w_1 zich rechtlijnig van $\omega_1 - 2\omega_1'$ naar $\omega_1 - \omega_1'$ beweegt, zoodat

$$\frac{1}{2} \mu \tau_1 b_1 = -i \int_{\omega_1 - 2\omega_1'}^{\omega_1 - \omega_1'} dw_1,$$

of

$$\mu \tau_1 b_1 = \frac{2\omega_1'}{i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Op dezelfde wijze wordt de lengte l_1 der kromtelijn ENF gevonden. In fig. 5 ziet men, dat de helft NF wordt afgebeeld als de rechte lijn tusschen $\xi = 2$ en $\xi = 2\beta$, de afbeelding van NF in fig. 7 is de rechte lijn, die van $w_2 = \omega_2''$ naar $w_2 = \omega_2 + \omega_2'$ gaat. Men heeft alzoo $\xi = \xi_0$, $mod\ Q_1 = -Q_1$, $mod\ Q_2 = -Q_2$, $mod\ Q = -Q$,

$$\mu^2 dS^2 = \tfrac{1}{2} d\xi^2 \left(-\frac{1}{Q_1} - \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q}\right) = -\frac{d\xi^2}{Q_2},$$

$$\mu \tau_2 dS = \pm i dw_2,$$

$$\tfrac{1}{2} \mu \tau_2 l_1 = i \int_{\omega_2''}^{\omega_2 + 2\omega_2'} dw_2,$$

$$\mu \tau_2 l_1 = \frac{2\omega_2'}{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Ten laatste wordt nog de lengte h_1 der kromtelijn LN bepaald. Thans is met fig. 5 de fig. 8 te raadplegen. Daar ξ gaat van $\xi = -2$ tot $\xi = +2$, en het argument w van $w = \omega''$ naar $w = \omega$, is nu $\xi = \xi_0$, $mod\ Q_1 = -Q_1$, $mod\ Q_2 = Q_2$, $mod\ Q = Q$,

$$\mu^2 dS^2 = \tfrac{1}{2} d\xi^2 \left(-\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + \frac{1}{Q}\right) = \frac{d\xi^2}{Q},$$

$$\mu \tau dS = \pm i dw,$$

$$\mu \tau h_1 = -i \int_{\omega''}^{\omega} dw = \frac{\omega'}{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Wij zien derhalve, dat ook de drie imaginaire perioden der gebruikte $\wp$-functies voor het minimaaloppervlak eene eenvoudige beteekenis hebben, wat nog nader bevestigd zal worden door de uitdrukking voor het gebogen oppervlak Ω, die wij thans gaan afleiden. Eene eenvoudige uitkomst kan verwacht worden, ingevolge eener door SCHWARZ [1]) bewezen stelling, waaruit blijkt, dat voor elk minimaaloppervlak het gebogen oppervlak door eene randintegraal kan worden voorgesteld.

Door integratie, uitgestrekt over het geheele ξ-vlak, wordt dadelijk uit (19) gevonden:

$$\mu^2 \Omega = \tfrac{1}{2} \int \frac{dV}{mod\ Q_1} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dV}{mod\ Q_2} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dV}{mod\ Q}.$$

Om echter die integratie werkelijk uit te voeren, moet men van het ξ-vlak in fig. 5 overgaan tot de afbeeldingen fig. 6, 7 en 8, waarin de argumenten w_1, w_2 en w zich bewegen.

[1]) Ges. W. I, Anmerkungen und Zusätze, blz. 327.

Door $d\Sigma_1$, $d\Sigma_2$ en $d\Sigma$ stellen wij voor de vlakte-elementen in die figuren, zij zijn aan dV verbonden door de betrekkingen

$$d\Sigma_1 = dV \; mod^2 \frac{dw_1}{d\xi} = \tau_1^{\,2} \frac{dV}{mod\, Q_1},$$

$$d\Sigma_2 = dV \; mod^2 \frac{dw_2}{d\xi} = \tau_2^{\,2} \frac{dV}{mod\, Q_2},$$

$$d \;\; = dV \; mod^2 \frac{dw}{d\xi} = \tau^2 \frac{dV}{mod\, Q}.$$

Daarom kan ook geschreven worden

$$\mu^2 \Omega = \frac{1}{2\tau_1^{\,2}} \int d\Sigma_1 + \frac{1}{2\tau_2^{\,2}} \int d\Sigma_2 + \frac{1}{2\tau^2} \int d\Sigma,$$

waarbij over de volledige figuren 6, 7 en 8 wordt geintegreerd. Die bewerking geeft

$$\Omega = \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{\omega_1 \omega_1'}{i\tau_1^{\,2}} + \frac{\omega_2 \omega_2'}{i\tau_2^{\,2}} + \frac{\omega\omega'}{i\tau^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(b^2 \, log \frac{1}{q_1} + l^2 \, log \frac{1}{q_2} + h^2 \, log \frac{1}{q} \right), \ldots . (23)$$

of ook

$$4\,\Omega = b b_1 + l l_1 + 2 h h_1,$$

eene uitkomst, die later gebruikt zal worden om de grootten van de verschillende minimaaloppervlakken te vergelijken, die ontstaan wanneer men twee congruente rechthoeken telkens op verschillende afstanden van elkander plaatst.

Men kan hieraan toevoegen de waarden, die de kromtestraal in eenige bijzondere punten aanneemt. Wij beschouwen dien kromtestraal R als gegeven door de formule [1])

$$\mu\, dS^2 = 2\, R \; mod \; F(s)\, ds^2.$$

Daar men nu heeft

$$mod \; F(s) ds^2 = \tfrac{1}{4} \; mod \; \frac{\sqrt{(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)}}{Q} \, d\xi^2,$$

volgt uit de uitdrukking van het lijnelement

$$\mu R = \frac{mod\,(\xi - 2) + mod\,(\xi + 2) + 4}{4\; mod \sqrt{(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)}} \ldots\ldots\ldots (24)$$

Voor de punten A, B, L en N leidt men hieruit door de substitutie $\xi = \infty$, -2, $+2$ af:

---

[1]) Darboux, Th. g. d. surf., I, blz. 312, formule (4).

$$\mu R_A = \mu R_B = \tfrac{1}{2}\,,\ \mu R_L = \frac{1}{\sqrt{(\alpha - 1)(\beta + 1)}} = \tfrac{1}{2}\, tg\, 2\delta\, sin\, 2\varepsilon\,,$$

$$\mu R_N = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + 1)(\beta - 1)}} = \tfrac{1}{2}\, tg\, 2\varepsilon\, sin\, 2\delta\,.$$

In de punten C, E, D, F is de kromming nul, zooals te verwachten was. Ten laatste kan men nog op de kromtelijn LN het punt P ($\xi = 0$) vinden, waar het raakvlak met de X-as en de Y-as gelijke hoeken maakt. Voor dit punt is

$$R_P = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\,,$$

waaruit men de eenvoudige betrekking afleidt

$$\frac{8}{R_P{}^2} = \frac{1}{R_A{}^2} + \frac{4}{R_N{}^2} + \frac{1}{R_B{}^2} + \frac{4}{R_L{}^2}.$$

5. *Voorloopig onderzoek naar de bestaanbaarheid der beschouwde minimaaloppervlakken.*

Wij denken ons twee congruente rechthoeken met de breedte b en de lengte l op verschillende afstanden h van elkander geplaatst, en stellen de vraag of in elken stand een minimaaloppervlak te construeeren is; daarbij noemen wij voorloopig minimaaloppervlak elk oppervlak met constante gemiddelde kromming nul.

Blijkbaar is het geoorloofd $b = 1$ te stellen, en aan te nemen $l > 1$. De vergelijkingen (14) en (15), waar alles van afhangt, en die wij thans schrijven

$$\frac{1}{K_1} = \frac{l}{K_2} = \frac{h}{\sqrt{c'\,K}}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

$$c = \frac{c_1{}'\,c_2{}'}{c_1\,c_2} \text{ of } sin\,\varphi = cot\,\varphi_1\, cot\,\varphi_2, \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

leeren bij oppervlakkige beschouwing vooreerst, dat $K_2 > K_1$ en $\varphi_2 \geqq \varphi_1$, omdat $l > 1$, ten tweede, dat

$$c_1{}' \leqq c_2\,,\ c_2{}' \leqq c$$

moet zijn, daar c eene echte breuk is.

Daaruit volgt evenwel, dat

$$K_1{}' \leqq K_2,\ K_2{}' < K_1$$

is, of ook

$$\frac{K_1{}'}{K_1} \leqq l \leqq \frac{K_2}{K_2{}'},$$

$$q_1 > e^{-\varkappa l} > q_2{}' > o.$$

Hoe grooter l is, des te kleiner is de ruimte, waarbinnen q_2' moet vallen, de beweeglijkheid van den hulphoek φ_2 wordt meer en meer beperkt. Deze hoek zal zeer weinig van 90° gaan verschillen; zooals uit eene hieronder medegedeelde tabel blijkt is voor $l = 3$ reeds $90° > \varphi_2 > 87° 30'$. Daarentegen wordt het veld van den hoek φ_1 met l steeds grooter, voor $l = 3$ zal φ_1 reeds alle waarden tusschen 4° en 90° kunnen aannemen.

Laat echter bij gegeven l alleen h veranderen, terwijl als onafhankelijk veranderlijke naar gelang van omstandigheden φ of $c = sin^2 \varphi$ wordt genomen. Eene eerste gevolgtrekking uit (26) is dan, dat φ_1 en φ_2 beide afnemende functies zijn, want uit (25) volgt, dat deze grootheden in denzelfden zin veranderen.

Alle mogelijke gevallen nu liggen tusschen de twee grensgevallen $\varphi = 0$ en $\varphi = 90°$. In de eerste onderstelling volgt uit (26) $\varphi_1 = 90$, $\varphi_2 = 90$, $K_1 = \infty$, $c' = 1$, $K = \frac{\pi}{2}$, dus $h = 0$.

In de tweede onderstelling is $c' = 0$, volgens (26) is nu $\varphi_1 + \varphi_2 = 90°$, maar beide hoeken verschillen van 0° en 90°, K_1 is derhalve eindig en zeker niet nul, de hoogte h wordt gevonden uit

$$h = \frac{1}{K_1} \underset{c'=0}{Lim} \sqrt{c'} K.$$

Dit levert, als men gebruik maakt van de bekende formule van LEGENDRE.

$$\underset{c'=0}{Lim} K = \underset{c'=0}{Lim} log \frac{4}{\sqrt{c'}},$$

wederom $h = 0$. Blijkbaar kan voor eene waarde van φ tusschen 0 en 90° de hoogte h, zooals die uit (25) en (26) kan worden benaderd, noch oneindig, noch onbestaanbaar worden, en kan men wel aannemen, dat in dit interval h eene doorloopende functie van φ is, die nu, zooals de beschouwing der grensgevallen leert, noodzakelijk minstens ééne maximumwaarde H bezit.

Gerechtigd is men derhalve tot de gevolgtrekkingen: Opdat tusschen twee rechthoeken van gegeven gedaante op de aangegeven wijze een minimaaloppervlak O gespannen zal kunnen worden, moet hun afstand h een van hunnen vorm en afmetingen afhangend bedrag niet overschrijden. Zoodra de rechthoeken door één minimaaloppervlak O_I verbonden kunnen worden, is er minstens nog één dergelijk oppervlak O_{II} te construeeren.

Volkomen gelijkluidend zijn deze uitkomsten met die van het bekende vraagstuk, dat op cirkels in plaats van op rechthoeken betrekking heeft. De beide catenoïden, die in het algemeen de op-

lossing vormen, worden onbestaanbaar, zoodra de cirkels te ver uit elkander geraken.

De onderstaande tabellen, geldig voor $l = 1$ en $l = 3$, geven eenig denkbeeld van de wijze, waarop h verandert. Uit de medegedeelde getallen zou men wel willen afleiden, dat h slechts ééne maximumwaarde H kan bereiken, die altijd kleiner dan de eenheid is, om pas voor $l = \infty$ die grenswaarde te naderen. De waarden van φ en φ_1, die bij H behooren, nemen oogenschijnlijk met toenemende l af, de overeenkomstige waarde van φ_2 echter neemt zeer sterk toe.

$l = 1$

φ_1	φ	$h = \frac{k' K}{K_1}$
45°	90°	0.
50°	44°45′	0.68162
55°	29°22′	0.71975
60°	19°28′	0.70713
65°	12°34′	0.67212
70°	7°37′	0.62433
75°	4° 7′	0.56670
80°	1°44′	0.49803
85°	0°26′	0.40995
90°	0°	0.

$l = 3$

φ_1	φ_2	φ	$h = \frac{k' K}{K_1}$
4°	78°57′	30°47′	0.92436
9°10′	88°	12°30′	0.98178
14°57′	85° 6′	7° 8′	0.97918
19°11′	88°12′	5°11′	0.97454
28°52′	88°30′	2°43′	0.93623
36°53′	88°48′	1°36′	0.89694
44°30′	89° 6′	0°55′	0.85053
52°28′	89°24′	0°28′	0.79260
70°47′	89°42′	0° 6′	0.61826
90°	90°	0°	0

6. *De hoogte h als functie van c.* Van eenig belang voor het volgende is het een nauwkeuriger inzicht in het verloop van de hoogte h te verkrijgen. Vooreerst kost het weinig moeite om aan te toonen, dat die hoogte

$$h = \frac{\sqrt{c'}\,K}{K_1}$$

altijd kleiner dan de eenheid is. Daartoe beginnen wij met den teller $\sqrt{c'}\,K$ naar c te differentieeren, waardoor met behulp van de bekende formule

$$\frac{dK}{dc} = \frac{E}{2cc'} - \frac{K}{2c}$$

gevonden wordt

$$\frac{d}{dc}(\sqrt{c'}\,K) = \frac{K}{2c\sqrt{c'}}\left(\frac{E}{K} - 1\right).$$

Altijd is $E < K$, dit differentiaalquotient is dus voortdurend negatief, $\sqrt{c'}\,K$ is eene afnemende functie, en is altijd kleiner dan

de maximumwaarde $\frac{\pi}{2}$, bereikt voor $c = 0$. De noemer K_1 is altijd grooter dan $\frac{\pi}{2}$, en daaruit volgt dan vanzelf, dat $h < 1$ is.

De hoogte bereikt, zooals bleek, minstens éénmaal eene maximumwaarde; bewezen moet er worden, en dit is bewerkelijker, dat er geen maxima meer zijn. Eene uitdrukking voor het differentiaalquotient $\frac{dh}{dc}$ moet worden gezocht, het is dus noodig de drie vergelijkingen

$$c = \frac{c_1' c_2'}{c_1 c_2}, \quad K_2 = l K_1, \quad h = \frac{\sqrt{c'} K}{K_1}$$

te differentieeren.

Uit de eerste leidt men af

$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{c_1 c_1'} \frac{dc_1}{dc} - \frac{1}{c_2 c_2'} \frac{dc_2}{dc}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

uit de tweede.

$$K_1 \frac{dK_2}{dc_2} \cdot \frac{dc_2}{dc} = K_2 \frac{dK_1}{dc_1} \cdot \frac{dc_1}{dc}.$$

Dit geeft tezamen genomen

$$\frac{dc_1}{dc} = \frac{-\frac{K_1}{c} \frac{dK_2}{dc_2}}{\frac{K_1}{c_1 c_1'} \cdot \frac{dK_2}{dc_2} + \frac{K_2}{c_2 c_2'} \cdot \frac{dK_1}{dc_1}} < 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Met behulp hiervan zal men eindelijk uit de derde vergelijking vinden

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dc} = -\frac{d}{dc} \log K_1 \times \frac{d}{dc} \log \sqrt{c'} K \times$$
$$\times \left\{ \frac{c K_1}{c_1 c_1' \frac{dK_1}{dc_1}} + \frac{c K_2}{c_2 c_2' \frac{dK_2}{dc_2}} + \frac{K}{\frac{dK}{dc} - \frac{K}{2c'}} \right\}.$$

Bij maximumhoogte is het differentiaalquotient nul, en daar de eerste beide factoren voor geen waarde van φ tusschen 0 en 90° nul worden, moet men zich richten tot den laatsten factor.

De vergelijking

$$\frac{c K_1}{c_1 c_1' \frac{dK_1}{dc_1}} + \frac{c K_2}{c_2 c_2' \frac{dK_2}{dc_2}} + \frac{K}{\frac{dK}{dc} - \frac{K}{2c'}} = 0,$$

of wat hetzelfde is

$$\frac{cK_1}{E_1 - K_1 c_1'} + \frac{cK_2}{E_2 - K_2 c_2'} + \frac{cc' K}{E' - K} = 0 \ldots\ldots (29)$$

waarin φ de onbekende is, levert alle wortels φ_0, die bij eene maximumwaarde van h behooren. Dat één wortel φ_0 aanwezig is, besluit men uit het voorafgaande; door elk der drie termen in de vergelijking afzonderlijk na te gaan, zal het duidelijk worden, dat die wortel de eenige is.

Aanvangende met den eersten term

$$\frac{cK_1}{E_1 - K_1 c_1'}$$

bewijzen wij, dat de teller met c toeneemt. Men heeft namelijk, lettende op (28),

$$\frac{d}{dc}\, cK_1 = \frac{K_1}{\frac{K_1}{c_1 c_1'} \cdot \frac{dK_2}{dc_2} + \frac{K_2}{c_2 c_2'} \cdot \frac{dK_1}{dc_1}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{K_1 K_2}{c_1 c_1' \, c_2 c_2'} - \left(\frac{K_1}{c_1 c_1'} - \frac{dK_1}{dc_1}\right)\left(\frac{K_2}{c_2 c_2'} - \frac{dK_2}{dc_2}\right) \right\}.$$

In deze uitdrukking is

$$\frac{K_1}{c_1 c_1'} - \frac{dK_1}{dc_1} = \frac{1}{c_1 c_1'}\,(K_1 - \tfrac{1}{2} E_1) + \frac{K_1}{2 c_1}$$

steeds positief, hetzelfde geldt van

$$\frac{K_2}{c_2 c_2'} - \frac{dK_2}{dc_2},$$

derhalve is $\frac{d}{dc}\, cK_1$ positief en cK_1 toenemende van nul af.

Anders is het met den noemer $E_1 - K_1 c_1'$ gesteld, wel is deze positief, veranderend tusschen nul ($\varphi_1 = 0$) en één ($\varphi_1 = 90°$), maar het differentiaalquotient

$$\frac{d}{dc}\,(E_1 - K_1 c_1') = \tfrac{1}{2} K_1 \frac{dc_1}{dc}$$

doet zien (28), dat de noemer eene afnemende functie is. De geheele term

$$\frac{cK_1}{E_1 - K_1 c_1'}$$

is derhalve positief en toenemende met c, wat nu meteen ook voor den tweeden term is aangetoond. Blijft over de derde term te onderzoeken, die men al dadelijk als negatief herkent. Na eenige rekening komt er voor het differentiaalquotient van

$$M = \frac{cc'K}{E - K},$$

$$\frac{1}{M^2} \cdot \frac{dM}{dc} = \frac{c - c'}{c^2 c'^2}\left(1 - \frac{E}{K}\right) + \frac{1}{2cc'}\left(\frac{1}{c} + \frac{E^2}{K^2 cc'}\right) =$$

$$= \frac{1}{cc'^2}\left(1 - \frac{E}{K}\right) + \frac{E^2}{2K^2c^2c'^2} + \frac{1}{2c^2c'}\left(\frac{2E}{K} - 1\right)$$

Uit de eerst verkregen waarde volgt $\frac{dM}{dc} > 0$ voor $\varphi > 45°$ of $c > c'$, de tweede dient om te laten zien, dat dit waar blijft voor $\varphi < 45°$, omdat alsdan $2 > \frac{2E}{K} > 1{,}4$ en dus $\frac{2E}{K} - 1$ zeker positief is; men besluit, dat de derde term uit (29) met c aangroeit.

Alles tezamen nemende, moet nu ook het geheele eerste lid van (29) eene met φ toenemende functie zijn en kan in het vak $\varphi = 0$ tot $\varphi = 90°$ die vergelijking ook maar één wortel φ_0 hebben, bijgevolg heeft de hoogte h slechts ééne maximumwaarde H. Van nul af, voor $\varphi = 0$, groeit h regelmatig aan tot H voor $\varphi = \varphi_0$, om daarna af te nemen tot nul voor $\varphi = 90°$.

7. *De beide groepen van minimaaloppervlakken O_I en O_{II} en het grensoppervlak O_0.*

Men is thans in staat om met zekerheid te beweren, dat, zoo de beide rechthoeken met de breedte 1 en de lengte l geplaatst zijn op een afstand $h < H$, er twee en niet meer dan twee minimaaloppervlakken bestaan, die deze rechthoeken verbinden.

Van de bijbehoorende waarden van φ is de eerste φ_I kleiner dan φ_0, de tweede φ_{II} is noodzakelijk grooter dan φ_0. Met deze onderscheiding zijn alle oppervlakken O bij veranderlijke h in twee afzonderlijke groepen gesplitst, de oppervlakken O_I, en de daarmede één voor één overeenkomende oppervlakken O_{II}. Voor de waarde $\varphi = \varphi_0$ is $h = H$, en de beide figuren O_I en O_{II} vallen samen in het grensoppervlak O_0.

Ook door hunne algemeene gedaante zijn twee oppervlakken O_I en O_{II} van dezelfde hoogte gemakkelijk te onderscheiden. Voor de hellingshoeken der raakvlakken in D en E (fig. 1) geldt (3)

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha - 1}} = tg\,2\delta, \qquad \sqrt{\frac{2}{\beta - 1}} = tg\,2\varepsilon,$$

of met behulp van (16), overgaande op de moduli k_1, k_2, k,

$$tg\,2\delta = \frac{k_1 k_2 k'}{k_1'}, \quad tg\,2\varepsilon = \frac{k_1 k_2 k'}{k_2'}.$$

Met toenemende φ worden k_1, k_2, k' kleiner, k_1' en k_2' grooter, derhalve nemen 2δ en 2ε af, anders gezegd, voor O_I zijn deze hoeken altijd grooter dan voor O_{II}.

Ook de middendoorsnede MLN (fig. 1) levert verschil op. Voor de halve assen ρ_1 en ρ_2 is gevonden (6), (7), (9), (10).

$$\frac{\rho_1}{b} = 1 - \frac{v_1}{\omega_1}, \qquad \frac{\rho_2}{l} = 1 - \frac{v_2}{\omega_2},$$

$$\frac{\varphi v_1 - e_3'}{e_1' - e_3'} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1} = \left(\frac{k_1}{k_2'}\right)^2, \qquad \frac{\varphi v_2 - e_3''}{e_1'' - e_3''} = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \left(\frac{k_2}{k_1'}\right)^2.$$

Hieruit blijkt dat voor aangroeiende φ, waarbij k_1 en k_2 afnemen, k_1' en k_2' toenemen, het argument v_1 meer en meer nadert tot ω_1, evenzoo v_2 tot ω_2, zoodat ρ_1 en ρ_2 kleiner worden voor grooter wordende φ. Voor het oppervlak O_I zijn dus de assen der middendoorsnede grooter dan voor het bijbehoorend oppervlak O_{II}.

Het duidelijkst is dit alles op te merken aan de oppervlakken O_I en O_{II}, die bij de hoogte $h = 0$ behooren. Voor O_I is $\varphi = 0$, $2\delta = 2\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\rho_1 = b$, $\rho_2 = l$; het oppervlak is samengevallen met het zijdelingsch oppervlak van het parallelopidedum van de breedte 1, de lengte l en oneindig kleine hoogte. Daarentegen is voor O_{II}, $\varphi = 90°$, $2\delta = 2\varepsilon = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$. In de grens valt het oppervlak samen met grond- en bovenvlak van het zooeven bedoelde parallopipedum. Tusschen deze beide oppervlakken vertoonen zich nu de andere, waarvoor h niet nul is. Wij gaan ze vergelijken ten aanzien van hunne grootte, die evenals het oppervlak zelf door het teeken O wordt aangeduid. Uit (23)

$$O = 4\,\Omega = \frac{K_1'}{K_1} + l^2 \frac{K_2'}{K_2} + h^2 \frac{K'}{K}.$$

volgt door differentieeren, waarbij te letten is op de bekende formule

$$\frac{d}{dc}\left(\frac{K'}{K}\right) = -\frac{\pi}{4\,K^2 cc'},$$

$$\frac{dO}{dh} = -\frac{\pi}{4\,K_1^2 c_1 c_1'} \cdot \frac{dc_1}{dh} - \frac{\pi\, l^2}{4\,K_2^2 c_2 c_2'} \cdot \frac{dc_2}{dh} - \frac{\pi\, h^2}{4\,K^2 cc'} \cdot \frac{dc}{dh} + \\ + 2h\frac{K'}{K},$$

of daar

$$K_2 = l K_1, \qquad K\sqrt{c'} = h K_1,$$

$$\frac{dO}{dh} = -\frac{\pi}{4\,K_1^2}\left\{\frac{1}{c_1 c_1'}\frac{dc_1}{dh} + \frac{1}{c_2 c_2'}\frac{dc_2}{dh} + \frac{1}{cc'}\frac{dc}{dh}\right\} + 2h\frac{K'}{K},$$

wat, door gebruik te maken van (27), geeft

$$\frac{dO}{dh} = 2h\frac{K'}{K}.$$

De gevonden uitdrukking is altijd positief, het oppervlak O is dus met h aangroeiend, het grensoppervlak O_0 met de maximumhoogte H is grooter dan alle andere. Laat h afnemen van H tot nul en beschouw steeds een paar oppervlakken O_I en O_{II}. Voor het eerste is φ kleiner en dus $\frac{K'}{K}$ grooter dan voor het tweede oppervlak. Altijddoor is dientengevolge $O_0 - O_I$ grooter dan $O_0 - O_{II}$, anders gezegd van een paar oppervlakken O_I en O_{II} is O_I het kleinste. Eene graphische voorstelling van de vergelijking $O = f(h)$ is min of meer schematisch licht te maken (fig. 9). Men vindt eene kromme uit twee takken bestaande, die in een keerpunt ($h = H$) samenkomen. De bovenste tak snijdt de O-as in $O = 2l$ en wel is daar blijkbaar $\frac{dO}{dh} = 0$; deze tak geldt voor de oppervlakken O_{II}. De andere tak, betrekking hebbende op O_I, gaat door den oorsprong. Aldaar is

$$\frac{dO}{dh} = \underset{h=0}{Lim}\frac{O}{h} = \underset{h=0}{Lim}\frac{2h(1+l)}{h} = 2(1+l).$$

Overigens is

$$\frac{d^2O}{dh^2} = 2\frac{K'}{K} - \frac{\pi}{4K^2c'} \times \frac{h}{c\frac{dh}{dc}}$$

bepaaldelijk positief voor den tak O_{II}, omdat daar $\frac{dh}{dc}$ negatief is. Door het oneindige heen wisselt voor $h = H$, $\frac{dh}{dc} = 0$ de uitdrukking van teeken, om in den oorsprong, waar

$$\frac{h}{c} = \frac{dh}{dc}$$

is, weder positief oneindig te worden. De kromming der takken is dus die in fig. 9, de tak O_I heeft een buigpunt.

Eindelijk kan men het oppervlak O vergelijken met het zijdelingsch oppervlak van het parallelopipedum met hetzelfde grond- en bovenvlak, en nagaan op welke wijze het quotient

$$U = \frac{O}{2h(1+l)}$$

van $U = 1$ voor $\varphi = 0$ tot $U = \infty$ voor $\varphi = 90°$ verandert. Door differentieeren komt er

$$\frac{dU}{dc} = \frac{1}{2(1+l)h^2}\left(h\frac{dO}{dh} - O\right)\frac{dh}{dc}.$$

De uitdrukking

$$h\frac{dO}{dh} - O = 2h^2\frac{K'}{K} - O = h^2\frac{K'}{K} - \frac{K_1'}{K_2} - l^2\frac{K_2'}{K_2},$$

die hier voorkomt, is nul voor $\varphi = 0$ en wordt dan positief; zij heeft echter, zooals later zal worden bewezen voor $l \geqq 3$, weder eene negatieve waarde als $h = H$. Dat dit ook geldt voor $l = 1$, volgt wel uit de getallen, die over deze onderstelling zijn medegedeeld. Met groote waarschijnlijkheid kan men dit laatste dan ook wel aannemen voor $1 < l < 3$. Dat voor $\varphi > \varphi_0$ de beschouwde uitdrukking negatief blijft, blijkt daaruit, dat het differentiaalquotient naar c

$$\frac{d^2O}{dh^2}\cdot\frac{dh}{dc},$$

zooals het voorafgaande doet zien, negatief is.

Uit dit alles volgt, dat er tusschen 0 en H eene waarde van h bestaat, waarvoor $\frac{dU}{dc}$ van positief negatief, ten tweede, dat voor $h = H$ hetzelfde differentiaalquotient van negatief positief wordt.

Er is derhalve een minimaaloppervlak O_I, waarvoor het quotient U een maximumwaarde aanneemt, terwijl ditzelfde quotient voor het grensoppervlak O_0 zoo klein mogelijk wordt.

8. *Opmerking over minimaaloppervlakken in engeren zin.* Of de oppervlakken, die hier werden nagegaan, werkelijk den naam van minimaaloppervlakken verdienen, dat wil zeggen of hun gebogen oppervlak inderdaad een analytisch minimum vormt, is eene vraag, die moeielijk volledig zal kunnen beantwoord worden. Men zal kunnen beproeven of het mogelijk is den weg te volgen, dien SCHWARZ heeft aangewezen, in de aangehaalde verhandeling, betreffende de minimaaloppervlakken door grond- en bovenvlak van een regelmatig n-zijdig prisma gebracht. Die bewijsvoering van SCHWARZ berust op eigenschappen eener partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde, welke algemeene stellingen ook in het hier beschouwde zeer bijzondere geval wellicht zijn toe te passen. Ten aanzien hiervan moge naar de voorafgaande verhandeling [1]) van

[1]) Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung, Ges. W., I, blz. 223.

SCHWARZ verwezen worden, waar deze eigenschappen worden bewezen. Een gedeeltelijk resultaat echter is gemakkelijker te verkrijgen, daarom zal hier op het voetspoor van SCHWARZ [1]) nog worden aangetoond, dat de oppervlakken O_{II} in geen geval tot de eigenlijke minimaaloppervlakken kunnen worden gerekend. Gebruik kan hier gemaakt worden van eene min of meer meetkundige redeneering, door MOIGNO [2]) en LINDELÖF aangewend om de beide catenoïden van het overeenkomstige cirkelvraagstuk te onderscheiden.

Men denke zich in fig. 1 alle oppervlakken O aangebracht, die voor $b = 1$ bij dezelfde waarde van l, maar verschillende waarden van h behooren. Al die oppervlakken geve men hetzelfde middelpunt M en dezelfde symmetrie-assen MX, MY, MZ. Ten aanzien van de oppervlakken O_{II} besluit men onmiddellijk, dat twee willekeurige oppervlakken dezer groep elkaar snijden. Immers, zooals tevoren werd aangetoond, nemen de halve assen ρ_1 en ρ_2 der middendoorsnede af, als φ toeneemt. Het oppervlak O_{II} met de kleinste hoogte, heeft dus ook de kleinste halve assen ρ_1, ρ_2, daarom snijdt dit oppervlak elk ander oppervlak van dezelfde groep. Van de oppervlakken O_I kan niet hetzelfde worden beweerd, daar met eene grootere waarde van de hoogte kleinere assen in de middendoorsnede gepaard gaan.

Alle oppervlakken O_{II} hebben dus een omhullend oppervlak Φ_0, dat, daar ρ_1 en ρ_2 tot in het oneindige afnemen, in den oorsprong M een kegelpunt bezit, en verder uit twee trechtervormige stukken bestaat, die eindigen in de beide rechthoekige begrenzingen van het oppervlak O_0, op afstand H. Elk oppervlak O_{II} raakt de omhullende Φ_0 volgens eene kromme Γ, waarvan het voor de hand ligt om aan te nemen, dat zij uit twee ten opzichte van het XY-vlak symmetrische stukken bestaat, die elk voor zich om de Z-as gaan, en in zich zelf terugkeeren.

In fig. 10 is gepoogd een en ander op te helderen, door eene schematische voorstelling te geven van de figuur, die het grensoppervlak O_0, de oppervlakken O_{II} en de omhullende Φ_0 in het XZ-vlak afteekenen.

Wij beschouwen nu in fig. 10 twee opvolgende oppervlakken O_{II} en O_{II}', het laatste met de kleinste hoogte; zij raken Φ_0 volgens de krommen Γ en Γ'. Laatstgenoemde krommen begrenzen elk op Φ_0 de stukken Φ en Φ', het verschil $d\Phi$ dezer stukken bestaat uit twee ringvormige zonen, eveneens door de krommen Γ en Γ'

---

[1]) Ges. W., I, blz. 313.

[2]) Calcul des Variations, blz. 213.

ingesloten. Het stuk van O_{II}, begrensd door Γ, mag genoemd worden S, het overeenkomstige stuk van O_{II}' op dezelfde wijze S'. Het komt er dan op aan de oppervlakken S en $S' + d\phi$ met den zelfden rand Γ met elkander te vergelijken, en door eene redeneering van SCHWARZ te laten zien, dat $S = S' + d\phi$. Men denke zich hiertoe S in vlakte-elementen dS verdeeld, en brenge door de randen dezer elementen buisvormige oppervlakken, die alle oppervlakken O_{II} loodrecht snijden. Twee elementen nu dS en dS' van de oppervlakken S en S' binnen dezelfde buis zijn gelijk, omdat het gedeelten van oneindig dicht bij elkander geplaatste minimaalvlakken zijn, die de wanden der buis loodrecht ontmoeten. Ligt echter dS aan den rand Γ, dan zal het buisvormige oppervlak door dS niet langer op S', maar op $d\phi$ een vlakte-element uitsnijden, en wederom zijn de beschouwde vlakte-elementen gelijk, omdat zij op den rand elkander overal aanraken. Daaruit volgt echter $S = S' + d\phi$. Tot nu toe was S' een oppervlak oneindig dicht bij S gelegen; men kan zich echter S' als functie denken van de bijbehoorende hoogte h', en nu ten opzichte van h' integreeren. Alsdan blijkt voor twee niet opvolgende oppervlakken te gelden

$$S - S' = \phi - \phi'.$$

Laat men in het bijzonder h' tot nul naderen, dan komt er niet anders dan $O_0 = \phi_0$. Het grensoppervlak is even groot als de omhullende. Intusschen doet de gevonden vergelijking

$$S = S' + (\phi - \phi')$$

zien, dat er twee gelijke oppervlakken S en $S' + (\phi - \phi')$ door denzelfden rand Γ gaan, waarvan het eerste over zijne geheele uitgestrektheid, het tweede slechts ten deele een minimaaloppervlak is. In de onmiddellijke nabijheid van laatstgenoemd oppervlak ligt dus stellig een derde V, dat kleiner is dan $S' + (\phi - \phi')$ en dat toch door den rand Γ gaat. Laat men nu de hoogte h' meer en meer tot h naderen, dan wordt V een oppervlak, dat oneindig weinig van S afwijkt, denzelfden rand Γ heeft en kleiner oppervlak heeft dan S. Daarom is het gedeelte S van O_{II} geen analytisch minimum, en kan dit ook niet van het gansche oppervlak O_{II} worden beweerd. De oppervlakken O_{II}, waartoe in de grens ook het oppervlak O_0 is te rekenen, kunnen op den naam van eigenlijke minimaaloppervlakken geen aanspraak maken. Aannemende, dat deze laatste bestaan, kunnen het geen andere zijn dan de oppervlakken O_I.

9. *Benaderde bepaling van de maximumhoogte H.* Voor eene

benadering van de maximumhoogte H zijn moeielijk in het algemeen vaste regels aan te geven. Zij wordt pas uitvoerbaar als voor $b = 1$, l eene bepaalde waarde aanneemt. Is echter l vrij aanzienlijk, dan worden, zooals uit de tabel voor $l = 3$ wel is op te maken, φ_2 zeer groot, φ en φ_1 vrij klein. Van de drie exponentiaalgrootheden q_1, q_2' en q kan dus ook ondersteld worden, dat zij geringe waarden verkrijgen. Ingevoerd in de vergelijkingen (25) en (26), nemen deze de gedaanten aan van

$$\frac{1}{(1+2q_1+2q_1^4+2q_1^9+\cdots)^2} = \frac{\pi l}{(1+2q_2'+2q_2'^4+2q_2'^9+\cdots)^2 \log\frac{1}{q_2'}} =$$

$$= \frac{h}{(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^2},$$

$$\frac{2\sqrt[4]{q}\,(1+q^2+q^6+\cdots)}{(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)} = \frac{(1-2q_1+2q_1^4-2q_1^9+\cdots)}{2\sqrt[4]{q_1}\,(1+q_1^2+q_1^6+\cdots)} \times$$

$$\times \frac{2\sqrt[4]{q_2'}\,(1+q_2'^2+q_2'^6+\cdots)}{(1-2q_2'+2q_2'^4-2q_2'^9+\cdots)},$$

waaruit nu de maximumwaarde van h is te zoeken. De eerste vergelijking geeft als benadering $q_2' = e^{-\pi l} = A^2$, eene grenswaarde, die strikt genomen pas voor $\varphi = 90°$ bereikt wordt. De derde vergelijking levert op dezelfde wijze door machtsverheffing

$$16 q_1 q = q_2',$$

en daar de verhouding van q_1 en q eindig is, en zij ten slotte zelfs weinig verschillen, ligt het voor de hand om q_1^2, q^2, q_2', A^2 te beschouwen als grootheden, die bij steeds toenemende l van dezelfde orde oneindig klein worden. Eene eerste oplossing wordt derhalve verkregen door overal de eerste macht van q_2', de eerste en tweede machten van q_1 en q in de rekening te behouden. In die onderstelling heeft men

$$\sqrt{h} = 1 - 2q - 2q_1 + 4qq_1 + 4q_1^2,$$

$$16 q q_1 = q_2',$$

$$\frac{1}{\pi l} \log \frac{1}{q_2'} = (1 + 4q_1 + 4q_1^2 - 4q_2')$$

Deze laatste vergelijking kan met den aangegeven graad van benadering niet anders leveren dan $q_2' = A^2$. Men heeft dus een maximum te zoeken van

$$\sqrt{h} = 1 - 2q - 2q_1 + \tfrac{1}{4} A^2 + 4q_1^2,$$

onder de voorwaarde

$$16 q q_1 = A^2.$$

Op de gewone wijze zal men vinden

$$q = \tfrac{1}{4} A - \tfrac{1}{8} A^2,$$
$$q_1 = \tfrac{1}{4} A + \tfrac{1}{8} A^2,$$
$$H = 1 - 2 A + 2 A^2 = 1 - 2 e^{-\frac{1}{2}\pi l} + 2 e^{-\pi l},$$

Reeds voor $l = 3$ geeft dit $H = 0.98220$, eene uitkomst, die zeer voldoende met de medegedeelde getallen overeenstemt. Men ziet, dat H tot één nadert als de rechthoeken tot in het oneindige gestrekt worden. De hier gevonden waarden van q_1, q_2', q en H veroorloven zonder moeite, zich er van te overtuigen, dat voor $l \leqq 3$ de uitdrukking $h \frac{dO}{dh} - O$, in art. 7 beschouwd, inderdaad negatief is voor $h = H$, gelijk aldaar werd aangenomen.

10. *Beschouwing van bijzondere gevallen.* Er zijn eenige bijzondere gevallen, die de aandacht verdienen. Zoo komt in aanmerking de onderstelling $b = l = 1$, en dientengevolge $\alpha = \beta$, $c_1 = c_2$, $K_1 = K_2$. De rechthoeken zijn vierkanten geworden en het minimaaloppervlak behoort tot die, welke in de reeds meermalen genoemde verhandeling van SCHWARZ zijn beschouwd. Ook hier is het mogelijk om vrij gemakkelijk de maximumhoogte H te bepalen, die kleiner is dan bij rechthoeken, waarvoor $l > 1$.

De vergelijking (29), waaruit φ_0 is op te lossen

$$\frac{K_1}{E_1 - K_1 c_1'} + \frac{K_2}{E_2 - K_2 c_2'} + \frac{c' K}{E - K} = O,$$

kan hier eenvoudig geschreven worden

$$F = 2 (E - K) + h \sqrt{c'} (E_1 - K_1 c_1') = o.$$

Vrij nauwkeurig is aan deze vergelijking voldaan door

$$\varphi = 30^\circ, c = \tfrac{1}{4}, c' = \tfrac{3}{4}, c_1 = \tfrac{2}{3}, c_1' = \tfrac{1}{3}, \varphi_1 = 54^\circ\, 44'\, 6''.$$

De noodige correctie wordt bepaald door de aangroeiing δF te berekenen, die F ondergaat, wanneer c met δc toeneemt. Daar in deze omgeving h weinig verandert en bijna gelijk is aan H, is bij de berekening van δF de hoogte h als onveranderlijk te beschouwen. Na eenige herleiding wordt benaderend gevonden

$$\delta F = - \delta c \left\{ \frac{1}{c'} + \frac{c_1^3 c'}{4 c_1'} \right\} K \quad ;$$

men heeft hier $\delta F = -$ F, zoodat de aan te brengen correctie δc bepaald is door

$$\delta c = + \frac{4 c_1' c'}{(4 c_1' + c_1^3 c'^2) K} F$$
$$= - \frac{4 c_1' c'}{4 c_1' + c_1^3 c'^2} \left\{ 2 \left(1 - \frac{E}{K}\right) + c' \left(c_1' - \frac{E_1}{K_1}\right) \right\}.$$

Achtereenvolgens komt er nu:

φ_1	φ	c	F	δc
54° 44′ 6″	30°	0.25000	$0.03526 \times K$	— 0.02351
55° 24′	28° 25′ 6″	0.22649	$0.00787 \times K$	— 0.00525
55° 33′ 24″	28° 3′ 30″	0.22124	$0.00041 \times K$	— 0.00027
55° 33′ 51″	28° 2′ 22″	0.22097	$0.00004 \times K$	— 0.00003
55° 33′ 56″	28° 2′ 13″	0.22094	0	0

$$H = \frac{\sqrt{c'}\,K}{K_1} = 0.72015.$$

De gevonden maximumhoogte stemt overeen met die, welke langs anderen weg door SCHWARZ is afgeleid.

Onder de overige minimaaloppervlakken, die door twee vierkanten zijn gebracht, is er nog een, dat zich van de overige onderscheidt, omdat het behalve de zijden der vierkanten nog acht andere rechte lijnen bevat. Men kan zich namelijk afvragen, of het mogelijk is eene zoodanige hoogte h te kiezen, dat op het oppervlak Ω uit fig. 1 de rechte lijnen EC en DF vallen. Die lijnen zouden voor de punten C, D, E, F de derde asymptotische lijn leveren, die men aldaar moet aantreffen, zooals reeds in den aanvang werd opgemerkt. Noodzakelijk is het dus, dat EC en DF, die elkaar in Q snijden, aldaar loodrecht op elkaar staan, en verder met de zijden van de vierkanten hoeken van 60° maken. Dit is alleen mogelijk, als men heeft $b = l$, $h = \frac{1}{\sqrt{2}}\,b$, in welke onderstelling men heeft

$$tg\,2\delta = tg\,2\varepsilon = \sqrt{2},$$
$$tg\,\delta = tg\,\varepsilon = \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$
$$\alpha = \beta = 2,$$
$$F(s) = \frac{e^{\frac{3\pi i}{2}}}{\sqrt{s^8 - 14s^4 + 1}}.$$

Wij hebben nu omgekeerd aan te toonen, dat een oppervlak, hetwelk bij deze functie $F(s)$, bekend uit de theorie van den octaeder, behoort, werkelijk de bedoelde rechte lijnen bevat. Dit geschiedt met behulp van de spherische afbeelding in fig. 2, waar nu C, D, E, F de hoekpunten worden van een zijvlak van een in den bol beschreven kubus. De groote cirkels CE en DF snijden derhalve elkander op het midden Q van LN. In fig. 11 is de afbeelding op het s-vlak voor dit bijzondere geval gegeven. De

groote cirkel DF uit fig. 2 wordt in fig. 11 afgebeeld door den cirkel DQF met straal $\sqrt{2}$ en het middelpunt $s = e^{-\frac{\pi i}{4}}$. Het komt er nu op aan te laten zien, dat deze cirkel de afbeelding is van eene asymptotische lijn. Indien wij s bepaaldelijk op den cirkel DQF aannemen, is

$$\left(s - e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)\left(s_0 - e^{\frac{\pi i}{4}}\right) = 2.$$

Deze betrekking tusschen s en s_0 is echter een der 24 octaedersubstituties, [1]) zoodat men heeft

$$\frac{\sqrt[4]{s^8 - 14s^4 + 1}}{\left(s - e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)} = -\frac{\sqrt[4]{s_0^{\,8} - 14s_0^{\,4} + 1}}{\left(s_0 - e^{\frac{\pi i}{4}}\right)}.$$

Door de substitutie $s = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $s_0 = e^{-\frac{\pi i}{4}}$ bevestigt men gemakkelijk de juistheid dezer vergelijking.

Tevens is
$$\frac{ds}{s - e^{-\frac{\pi i}{4}}} = -\frac{ds_0}{s_0 - e^{\frac{\pi i}{4}}}$$

zoodat
$$\frac{ds}{\sqrt[4]{s^8 - 14s^4 + 1}} = \frac{ds_0}{\sqrt[4]{s_0^{\,8} - 14s_0^{\,4} + 1}},$$

of
$$\sqrt{F(s)}\, ds = e^{\frac{3\pi i}{2}} \sqrt{F_0(s_0)}\, ds.$$

Voldaan is derhalve aan de differentiaalvergelijking der asymptotische lijnen [2]), de groote cirkel DF in fig. 2 is inderdaad de spherische afbeelding van eene asymptotische lijn, wier osculatievlakken, raakvlakken aan Ω, nu alle loodrecht staan op het vlak van den grooten cirkel DF uit fig. 2. Dit vereischt bepaaldelijk, dat die asymptotische lijn recht is, waardoor dus voor het geval $\alpha = \beta = 2$ de aanwezigheid van acht nieuwe rechte lijnen is bewezen [3]) Wanneer deze lijnen op het oppervlak O worden getrokken, is dit verdeeld in twaalf congruente dubbel symmetrische scheeve vierhoeken met twee rechte hoeken en twee hoeken van 60°. Ook dit oppervlak is door SCHWARZ [4]) in eene zijner eerste verhandelingen over de minimaaloppervlakken uitvoerig onderzocht. Men behoeft nu in fig. 11 nog slechts de cirkels DE, CF en de rechte lijn

---

[1]) KLEIN, Ikosaeder, blz. 43, formule (31*b*).

[2]) DARBOUX, Th. g. d. Surf., I, blz. 303.

[3]) Dat alleen in het geval $\alpha = \beta = 2$ en in geen ander dergelijke nieuwe rechte lijnen op het oppervlak kunnen voorkomen, volgt wel uit de bekende stelling van SCHWARZ, volgens welke elke rechte lijn op het oppervlak eene as van symmetrie wordt.

[4]) Bestimmung einer speciellen Minimalfläche; Ges. W. I., blz. 90.

BQA als afbeelding van gelijknamige kromtelijnen in fig. 1 te trekken, om onmiddellijk het vierde gedeelte van de bekende octaederfiguur, namelijk de aaneensluiting van 48 cirkeldriehoeken met hoeken van 45°, 90° en 60° te herkennen.

Eindelijk is het nog mogelijk om te laten zien, dat uit de vergelijkingen (25) en (26) voor $\alpha = \beta = 2$ werkelijk volgt $h = \frac{1}{\sqrt{2}}\, b$.

Men heeft hier $k = \frac{1}{3}$, $k' = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $k_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

dus ook
$$k = \frac{1 - k_1'}{1 + k_1'},$$
tusschen K en K_1 bestaat derhalve de betrekking van Landen
$$K_1 = (1 + k)\, K = \tfrac{4}{3}\, K,$$
zoodat de algemeene vergelijking
$$\frac{b}{K_1} = \frac{h}{k'\, K}$$
werkelijk geeft $h = \frac{1}{\sqrt{2}}\, b$.

Omdat $\varphi = 19°28' < 28°2'13''$ is, behoort het oppervlak tot de groep O_I en is het dus door eene proef van PLATEAU te verwezenlijken. Door de zeer bijzondere betrekking tusschen K en K_1 was het hier mogelijk om ten slotte de drie coördinaten x, y, z in $\wp$-functies van dezelfde perioden uit te drukken.

Zulke gevallen zijn nog in willekeurig aantal te vinden, het is echter moeielijk om na te gaan, of dit steeds van grooten invloed is op de algemeene gedaante van het oppervlak.

11. *Ontaardingen van het oppervlak.* Eenige wijziging ondergaan de voorafgaande beschouwingen, als de lengte-afmeting der beide rechthoeken meer en meer toeneemt.

Door die lengte l te laten aangroeien, kan men uit O twee nieuwe en van elkander verschillende oppervlakken afleiden. Ten eerste kan men aannemen, dat in fig. 1 de punten E, N en F zich in de richting der Y-as in het oneindige verwijderen; van elken rechthoek blijven dan drie zijden over, en het middelpunt M van het oppervlak verdwijnt uit de figuur. In de tweede onderstelling blijft het middelpunt M behouden, de zijden AC en BD verdwijnen in de richting van de Y-as evenals de tegenoverliggende, zoodat van elken rechthoek nu slechts twee zijden behouden blijven. De tot hiertoe gebruikte elliptische functies ontaarden gedeeltelijk, men zal thans met eene enkele $\wp$-functie kunnen volstaan. Vandaar, dat het nu geschikter is het elliptisch argument op eenigszins andere wijze in te voeren.

Uit de formules (25) blijkt, dat $l = \infty$ vereischt $q_2 = 1$, $k_2' = 0$, en dus volgens (16) $\beta = 1$ of $\alpha = \infty$.

Deze beide onderstellingen zullen afzonderlijk worden nagegaan.

12. *Eerste ontaarding*, $\beta = 1$. Het oppervlak is voorgesteld door

$$\pm \mu x = \Re \int \frac{i\,d\xi}{\sqrt{4(\xi+2\alpha)(\xi-2)(\xi+2)}}, \quad \pm \mu y = \Re \int \frac{d\xi}{2(\xi-2)\sqrt{(\xi+2\alpha)}},$$

$$\pm \mu z = \Re \int \frac{i\,d\xi}{(\xi-2)\sqrt{(\xi+2\alpha)(\xi+2)}}.$$

De herleiding dezer integralen is zeer eenvoudig, slechts de eerste is elliptisch, men verkrijgt echter het gemakkelijkst een inzicht in de wijze, waarop die integralen veranderen, indien men eene zeer bijzondere substitutie gebruikt, en een argument w invoert van eene $\wp$-functie met de wortels e_1, e_2, e_3 en de periode 2ω en $2\omega'$, verbonden aan ξ door de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \xi - 2 &= \tau^2 [\wp(2w+\omega) - e_1], \\ \xi + 2 &= \tau^2 [\wp(2w+\omega) - e_2], \\ \xi + 2\alpha &= \tau^2 [\wp(2w+\omega) - e_3]. \end{aligned}$$

Deze substitutie levert eerst

$$\begin{aligned} \tau^2 (e_1 - e_2) &= 4 \quad , \\ \tau^2 (e_1 - e_3) &= 2(\alpha + 1), \\ \tau^2 (e_2 - e_3) &= 2(\alpha - 1), \end{aligned}$$

en eindelijk $\qquad \pm \mu\tau x = \Re\, 2\, iw + const.,$

$$\left.\begin{aligned} \pm \mu\tau y &= \Re \int d2w \sqrt{\frac{\wp(2w+\omega)-e_2}{\wp(2w+\omega)-e_1}} = \Re \int d2w \sqrt{\frac{\wp 2w - e_3}{e_1 - e_3}} = \\ &= \Re \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} log\,(\sqrt{\wp 2w - e_1} + \sqrt{\wp 2w - e_2}) + const., \\ \pm \mu\tau z &= \Re \int \frac{2\,i\,d2w}{\tau\sqrt{\wp(2w+\omega)-e_1}} = \Re \int i\,d2w \sqrt{\frac{\wp 2w - e_1}{e_1 - e_3}} = \\ &= \Re \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} log(\sqrt{\wp 2w - e_2} + \sqrt{\wp 2w - e_3}) + const. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

De hier voorkomende logarithmische uitdrukkingen kunnen nu echter veel eenvoudiger worden geschreven. Juist met het oog hierop is het argument w ingevoerd door eene substitutie, die afwijkt van de gewone.

In de eerste plaats is de functie

$$f(w) = \sqrt{\wp 2w - e_1} + \sqrt{\wp 2w - e_2},$$

ondanks de wortelteekens, éénwaardig [1]) en dubbelperiodiek met de perioden 2ω en $2\omega'$; zij heeft tot polen 0 en ω', niet ω en ω'', zooals men licht zou vermoeden. De substitutie $w = \omega + \delta$ geeft.

$$f(\omega+\delta) = +\sqrt{\frac{1}{4\delta^2} - e_1} - \sqrt{\frac{1}{4\delta^2} - e_2} = -(e_1 - e_2)\,\delta.$$

Daaruit blijkt, dat ω een nulpunt is van $f(w)$, noodzakelijk is dan ω'' het andere, en is $f(w)$ op een constanten factor na identiek met

$$\frac{(\wp w - e_1)(\wp w - e_2)}{\wp' w} = \pm \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{\wp(w - e_1)(\wp w - e_2)}}{\sqrt{\wp w - e_3}},$$

eene functie, die dezelfde polen en nulpunten heeft.

Wij stellen nu in het vervolg

$$pw - e_k = R_k e^{-i\psi_k}, \; (k = 1, 2, 3)$$

en voeren dus in den modulus R_k en het negatieve argument ψ_k van $\wp w - e_k$; dit zijn grootheden, waarvan men zich vrij gemakkelijk een denkbeeld maakt, met behulp van de bekende teekening [2]), die een vierde gedeelte van het periodenparallelogram conform afbeeldt op het positieve of negatieve halfvlak der complexe grootheid $\wp w$. Gemakshalve is hier in fig. 12 die teekening toegevoegd. Naast elkander geplaatst ziet men daar ten eerste het vierde gedeelte $acfh$ van het periodenparallelogram met de rechthoekszijden $ac = \omega$ en $ah = \frac{\omega'}{i}$, door twee symmetrie-assen bg en kd in vier stukken verdeeld, ten tweede in het negatieve $\wp w$-vlak de conforme afbeelding, eveneens in vier stukken gedeeld, welke door cirkelbogen met h en c tot middelpunten zijn begrensd. Daar in deze laatste figuur de grootheden, R_k en ψ_k dadelijk kunnen worden afgelezen, is het met een oogopslag te zien, welke waarden deze grootheden krijgen, indien het argument w zich beweegt op de zijden of op de symmetrie-assen van den rechthoek $acfh$ in het w-vlak. Dit nu is bij het onderzoek naar de gedaante van het minimaaloppervlak van belang. Ten slotte mogen hier ook nog vermeld worden de uitdrukkingen, die voor R_k en ψ_k worden gevonden, als gesteld wordt $w = u + iv$. Men heeft alsdan

$$R_1 = \frac{[\wp(iv + \omega) - \wp u](\wp iv - e_1)}{\wp u - \wp iv},$$

---

[1]) HALPHEN, Traité des fonctions elliptiques, I, blz. 190.

[2]) SCHWARZ, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, blz. 74.

$$\psi_1 = 2\, bgtg \sqrt{\frac{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)(e_1 - \wp iv)}{(e_2 - \wp iv)(e_3 - \wp iv)(\wp u - e_1)}};$$

door verwisseling van aanwijzers worden de overige grootheden afgeleid. Na deze uitwijding over de grootheden R_k en ψ_k kunnen wij terugkeeren tot de vergelijkingen (30), die nu na eene doelmatige keuze der integratieconstanten en der voorloopig nog willekeurige teekens overgaan in

$$\left.\begin{aligned} \mu\tau x &= \frac{\omega'}{i} + 2\,\Re iw, \\ \mu\tau y &= \frac{1}{2\sqrt{e_1 - e_3}}\, log \frac{R_1 R_2}{R_3 (e_1 - e_2)}, \\ \mu\tau z &= \frac{1}{2\sqrt{e_1 - e_3}} (\pi + \psi_1 - \psi_2 - \psi_3). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (31)$$

Daarbij zal dan w zich moeten bewegen binnen den rechthoek $BACD$ van fig. 13, met de zijden $BA = \omega$ en $BD = \frac{\omega'}{2i}$, om thans de helft van het minimaaloppervlak O te verkrijgen, welke voorgesteld [1]) is in fig. 14. Het middelpunt is verdwenen, maar het YZ-vlak is een vlak van symmetrie gebleven; daarom is de coördinaten-oorsprong M naar het midden van CD verlegd. Na de gegeven toelichting omtrent R_k en ψ_k is dit spoedig uit de analytische voorstelling van het oppervlak af te leiden. Tevens is het hier zeer eenvoudig om de belangrijkste afmetingen te bepalen. Uit (31) volgt vooreerst

$$b = 2\, BD = \frac{2\,\omega'}{i\,\mu\tau}, \qquad h = AB = \frac{\pi}{\mu\tau\sqrt{e_1 - e_3}},$$

$$\frac{h}{b} = \frac{1}{\frac{2\,\omega'}{i\pi}} \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{1}{(1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + \ldots)^2} < 1.$$

Nog steeds is $h < b$, om pas voor $q' = 0$ gelijk aan b te worden. Zijn h en b vooraf bekend en is hunne verhouding $\frac{h}{b}$ kleiner dan de eenheid, dan is er ééne oplossing voor q', en dus ook altijd één minimaaloppervlak. Eene verdere berekening geeft

---

[1]) Deze en de volgende fig. zijn schematisch. Dikwijls is voor het af te beelden oppervlak geen *schijnbare omtrek* geteekend en zijn alleen eenige belangrijke vlakke doorsneden (bijv. met de coördinatenvlakken) aangegeven.

$$tg\, 2\delta = \left(\frac{dz}{dy}\right)_{w=\frac{\omega'-\omega}{2}} = \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_2}},$$

$$ML = \frac{1}{2\mu\tau\sqrt{e_1-e_3}} \log \frac{\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_2-e_3}} = \frac{h}{\pi} \log cot(45^\circ - \delta)$$

De vroeger gevonden uitdrukking (24) voor den kromtestraal R geeft thans voor $\beta = 1$

$$R_L = \frac{1}{\mu\tau\sqrt{e_2-e_3}} = \frac{h}{\pi \sin 2\delta},$$

$$R_A = \frac{1}{\mu\tau\sqrt{e_1-e_2}} = \frac{h}{\pi \cos 2\delta}.$$

Eindelijk wordt de lengte b_1 der vlakke kromtelijn CLD door de periode ω uitgedrukt.

Voor het lijnelement dS geldt thans

$$\mu^2 \tau^2 dS^2 = 2dw\, dw_0 \left\{1 + mod \frac{\wp 2w - e_3}{e_1 - e_3} + mod \frac{\wp 2w - e_1}{e_1 - e_3}\right\}.$$

Op CLD is dw bestaanbaar, $mod\ (p\ 2w - e_3) = \wp\ 2w - e_3$, $mod\ (\wp\ 2w - e_1) = e_1 - \wp\ 2w$ en dus

$$\mu\tau\, dS = 2\, dw.$$

Integreerende van $\frac{\omega'-\omega}{2}$ tot $\frac{\omega''}{2}$, komt er

$$\mu\tau\, b_1 = 2\omega.$$

Het hier besproken oppervlak kan nog verder ontaarden; ook α kan tot de eenheid naderen, de breedte b wordt grooter en grooter, ten slotte blijven van elk der rechthoeken slechts twee aangrenzende zijden over, zoodat de Z-as naar AB verlegd moet worden. Daar voor $\alpha = 1$, $e_2 = e_3$, $\tau^2(e_1 - e_3) = 4$, volgt

$$\frac{\wp w - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{1}{\sin^2(w\sqrt{e_1-e_3})}, \quad \frac{\wp w - e_1}{e_1 - e_3} = \cot^2(w\sqrt{e_1-e_3}),$$

worden de vergelijkingen van het oppervlak met invoering van $u = w\sqrt{e_1-e_3}$ en aannemende $\mu = \frac{1}{2}$,

$$x = 2\Re\, i\, u, \quad e^y = mod \cot u, \quad 2z = \pi - 2\, arg.\, \sin 2u,$$

of ook

$$x = i(u - u_0), \quad e^{2y} = \cot u \cot u_0, \quad -e^{2iz} = \frac{\sin 2u}{\sin 2u_0}.$$

De eliminatie van u en u_0 voert, zooals wel te verwachten was,

tot een der bekende oppervlakken van SCHERK [1]), en wel komt hier te voorschijn het oppervlak met de vergelijking

$$\cos z = \tfrac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}),$$

waarvan het vierde gedeelte, dat hier de ontaarding van fig. 14 voorstelt, in fig. 15 is afgebeeld.

13. *Tweede ontaarding*, $\alpha = \infty$. Om de tweede ontaarding te beschouwen, is in (4) $\alpha = \infty$ te substitueeren, waardoor verkregen worden de vergelijkingen

$$\pm \mu x = \Re \int \frac{i\,d\xi}{\sqrt{4(\xi - 2\beta)(\xi + 2)}}, \quad \pm \mu y = \Re \int \frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi - 2\beta)(\xi - 2)}},$$

$$\pm \mu z = \Re \int \frac{i\,d\xi}{\sqrt{4(\xi - 2\beta)(\xi + 2)(\xi - 2)}}.$$

Als te voren maakt men van eene eenigszins ongewone substitutie gebruik, en stelt

$$\begin{aligned} \xi - 2\beta &= \tau^2(\wp\, 2w - e_1), \\ \xi - 2 &= \tau^2(\wp\, 2w - e_2), \\ \xi + 2 &= \tau^2(\wp\, 2w - e_3), \end{aligned}$$

wat tengevolge heeft

$$\begin{aligned} \tau^2(e_1 - e_3) &= 2(\beta + 1), \\ \tau^2(e_1 - e_2) &= 2(\beta - 1), \\ \tau^2(e_2 - e_3) &= 4. \end{aligned}$$

Er komt nu eerst

$$\pm \mu\tau x = 2\Re \int i\,d2w \sqrt{\frac{\wp 2w - e_2}{e_2 - e_3}}, \quad \pm \mu\tau y = 2\Re \int d2w \sqrt{\frac{\wp 2w - e_3}{e_2 - e_3}},$$

$$\pm \mu\tau z = 2\Re \int i\,d2w,$$

en daarna, wanneer men integratieconstanten kiest, passende bij den gewenschten stand van het oppervlak ten opzichte van het coördinatenstelsel, en tegelijk daarmede in overeenstemming over de dubbele teekens beslist,

$$\left.\begin{aligned} \mu\tau x &= \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}}(\psi_1 + \psi_3 - \psi_2 + \pi), \\ \mu\tau y &= \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} \log \frac{R_1 R_2}{R_3(e_1 - e_2)}, \\ \mu\tau z &= \frac{2\omega'}{i} - 4\Re i w. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (32)$$

[1]) Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Begrenzung; Crelle's Journal, XIII, blz. 198.

Met weinig moeite overtuigt men zich er nu van, dat, indien w beperkt is tot den rechthoek $AFEB$ in fig. 16 met de zijden $AF = \frac{\omega}{2}$ en $AB = \frac{\omega'}{i}$, deze vergelijkingen het vierde gedeelte voorstellen van een oppervlak O, hetwelk in fig. 17 is afgebeeld. Van de rechthoekige grond- en bovenvlakken zijn telkens twee zijden in de richting van de Y-as verdwenen. De coördinatenoorsprong M is een middelpunt, de coördinatenvlakken zijn vlakken van symmetrie. De voornaamste afmetingen nagaande, vindt men vooreerst uit (32) voor de breedte $b = 2BD$ en de hoogte $h = AB$

$$\mu\tau b = \frac{2\pi}{\sqrt{e_2 - e_3}},$$

$$\mu\tau h = \frac{4\omega'}{i},$$

en dus

$$\frac{h}{b} = \frac{2\omega'}{i\pi}\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{2kK'}{\pi} = (1 - 2q' + 2q'^4 - 2q'^9 + \ldots)^2.$$

De vraag is hoeveel minimaaloppervlakken bij bepaalde waarden van h en b behooren.

Uit de vergelijking

$$\frac{d}{dc}(\sqrt{c}\,K') = \frac{1}{2c'\sqrt{c}}(K - E)$$

volgt, dat $\frac{h}{b}$ eene met c of k aangroeiende functie is, die blijkbaar alle waarden tusschen nul en één aanneemt. Voor elke gegeven verhouding $\frac{h}{b}$, mits deze kleiner dan één is, zal men derhalve één minimaaloppervlak vinden.

De oplossing van q' en de bepaling der $\wp$-functie zal geen groote moeielijkheden opleveren.

Verdere berekening levert nog voor den hellingshoek 2ε

$$tg\,2\varepsilon = -\left(\frac{dz}{dy}\right)_{w = \frac{\omega}{2} + \omega'} = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}}$$

en voor de halve assen $\rho_1 = MN$, $\rho_2 = ML$ der middendoorsnede

$$\mu\tau\rho_1 = \frac{2}{\sqrt{e_2 - e_3}}\,bgtg\sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}},\quad \rho_1 = \frac{2\varepsilon}{\pi}b,$$

$$\mu\tau\rho_2 = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}}\,log\,\frac{\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3}},\quad \rho_2 = \frac{b}{\pi}\,log\,cot\,(45^\circ - \varepsilon).$$

Eindelijk komt er voor de kromtestralen in L en N met behulp van (24)

$$R_L = \frac{2}{\mu\tau\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{b}{\pi} \sin 2\varepsilon, \quad R_N = \frac{2}{\mu\tau\sqrt{e_1 - e_2}} = \frac{b}{\pi} tg 2\varepsilon.$$

Met behulp van de algemeene uitdrukking voor het lijnelement

$$\mu^2\tau^2 dS^2 = 8\, dw\, dw_0 \left\{ mod \frac{\wp 2w - e_2}{e_2 - e_3} + mod \frac{\wp 2w - e_3}{e_2 - e_3} + 1 \right\}$$

bepalen wij nog de lengten der kromtelijnen LN en ENF.

Op LN is $dw = dw_0$, $mod\ (\wp 2w - e_2) = e_2 - \wp 2w$, $mod\ (\wp 2w - e_3) = \wp 2w - e_3$ en derhalve

$$\mu\tau\, dS = 4\, dw,$$

wat geintegreerd tusschen de grenzen $-\frac{\omega'}{2}$ en $\frac{\omega - \omega'}{2}$ geeft.

$$\mu\tau h_1 = 2\omega.$$

Daarentegen is op ENF de differentiaal dw imaginair, $mod\ (\wp 2w - e_2) = \wp 2w - e_2$, $mod\ (\wp 2w - e_3) = \wp 2w - e_3$ en dus

$$\mu\tau\, dS = 4 i\, dw \sqrt{\frac{\wp 2w - e_3}{e_2 - e_3}},$$

integreert men hier tusschen $\frac{\omega}{2}$ en $\frac{\omega}{2} - \omega'$ dan komt er

$$\mu\tau l_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{e_2 - e_3}},$$

en dus de zeer bijzondere uitkomst $l_1 = b$.

Ook de hier beschouwde ontaarding kan nog tot nieuwe grensgevallen naderen. De hoogte h kan meer en meer aan de breedte b gelijk worden. Dan zal q', en ook $e_1 - e_2$, oneindig klein worden, MN nadert tot de de halve breedte BD, de halve as ML wordt oneindig, het middelpunt M gaat verloren in de richting der Y-as, en het is noodig L tot oorsprong te nemen. Men heeft $\beta = 1$ en de $\wp$-funtie ontaardt, thans wordt.

$$\frac{\wp w - e_1}{e_1 - e_3} = \frac{1}{Sh^2(w\sqrt{e_1 - e_3})}, \qquad \frac{\wp w - e_3}{e_1 - e_3} = Cth^2(w\sqrt{e_1 - e_3}),$$

zoodat er voor $\mu = 1$, en met invoering van $u = w\sqrt{e_1 - e_3}$, komt

$$2x = \pi + 2\, arg\, Cth\, u, \quad y = -\log mod\, Sh\, 2u, \quad 2z = \pi + 4\, \Re i u,$$

of ook

$$-e^{2ix} = \frac{Cth\, u}{Cth\, u_0}, \quad e^{-2y} = Sh\, 2u\, Sh\, 2u_0, \quad z = \frac{\pi}{2} + i\,(u - u_0).$$ [1])

Eliminatie van u en u_0 geeft

$$e^y = \frac{\cos x}{\cos z},$$

het tweede oppervlak van SCHERK [2]), waarvan het gedeelte, dat nu fig. 17 vervangt, in fig. 18 is voorgesteld. Breedte en hoogte zijn elk gelijk aan 2π, het onderscheid tusschen die afmetingen is geheel verdwenen. Op het oppervlak zijn twee nieuwe rechte lijnen gekomen; zij liggen in het raakvlak in L, en snijden AF en BE loodrecht.

Maar de fig. 17 kan ook nog anders vervormd worden. Laat β oneindig worden, en laat dus e_2 tot e_3 naderen. Daardoor verdwijnt in het oneindige al wat van de rechthoeken nog in fig. 17 aanwezig was. De nieuwe vergelijkingen van het oppervlak worden

$$\pm \mu x = \Re \sqrt{\xi + 2}, \qquad \pm \mu y = \Re i \sqrt{\xi - 2},$$
$$\pm \mu z = \Re \log(\xi + \sqrt{\xi^2 - 4}),$$

en dit stelt blijkbaar eene catenoïde voor met de vergelijking

$$x^2 + y^2 = (e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}})^2.$$

14. *De toegevoegde oppervlakken van Bonnet.* Het is bekend, dat men uit elk minimaaloppervlak door buiging eene geheele groep van minimaaloppervlakken kan afleiden, die men de „geassocieerde" oppervlakken noemt. In die groep is door BONNET [3]) er een aangewezen, het zoogenaamde toegevoegde oppervlak, dat op zeer merkwaardige wijze met het oorspronkelijke oppervlak samenhangt.

Namelijk zijn voor beide oppervlakken in toegevoegde punten de raakvlakken evenwijdig, terwijl twee overeenkomstige raaklijnen rechte hoeken met elkaar maken.

Uit de vergelijkingen (5), (8), (11)

$$\mu\tau_1\, x = \omega_1 - \Re w_1,$$
$$\mu\tau_2\, y = \omega_2 - \Re w_2,$$
$$\mu\tau\, z = \Re w - \omega,$$

die gelden voor het oppervlak Ω uit fig. 1, leidt men onmiddellijk, door den factor i achter het teeken $\Re$ te plaatsen, de vergelijkingen

---

[1]) Met *Sh* en *Cth* zijn de hyperbolische functies bedoeld.

[2]) t. a. p. blz. 196.

[3]) Note sur la théorie générale des surfaces, Comptes rendus de l'Ac. d. Sc., XXXVII, blz. 529.

van het aan Ω toegevoegde oppervlak Ω' af. Laatstgenoemd oppervlak zal dus voorgesteld worden door

$$\left.\begin{aligned} \mu\tau_1\, x &= -\, i\omega_1' - \Re\, iw_1, \\ \mu\tau_2\, y &= \quad i\omega_2' - \Re\, iw_2, \\ \mu\tau\, z &= \quad \Re\, iw - \frac{\omega' i}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Daarbij zijn andere integratieconstanten ingevoerd, dat wil zeggen men heeft aan Ω' eene verschuiving gegeven, om het oppervlak in een regelmatigen stand ten opzichte van het assenstelsel te brengen. Om zich een denkbeeld te maken van de algemeene gedaante van Ω', heeft men te bedenken, dat als Ω eenig vlak loodrecht snijdt, het oppervlak Ω' noodzakelijk eene rechte lijn bevat, die loodrecht op dit vlak is gericht, en omgekeerd. Nu sneed Ω volgens CLD, LN, ENF de coördinatenvlakken loodrecht, Ω' bevat dus drie gelijknamige rechte lijnen, evenwijdig aan de coördinatenassen. Daarentegen bevatte Ω de lijnen BD en AC evenwijdig aan de X-as, BE en AF evenwijdig aan de Y-as. Het nieuwe oppervlak doorsnijdt dus volgens gelijknamige kromtelijnen loodrecht twee vlakken evenwijdig aan MYZ, en twee vlakken evenwijdig aan MXZ. Dit alles wordt door substitutie in de vergelijkingen (33) bevestigd. Men heeft weer de argumenten w_1, w_2 en w te beperken tot de rechthoeken van fig. 6, 7 en 8, die weer als conforme afbeeldingen van Ω' dienst doen. Eenige substituties zullen voldoende zijn, om in te zien dat Ω' ongeveer gevormd is, zooals fig. 19 aangeeft. Het midden van NL is nu de oorsprong, de ribben van het parallelopipedum, hetwelk men om Ω' kan beschrijven, loopen evenwijdig aan de coördinatenassen.

De afmetingen van dit parallelopipedum worden aangegeven door de lengten der lijnen CLD, ENF, NL, welke lijnen door de buiging niet van lengte zijn veranderd. Voor breedte, lengte en hoogte volgt dus uit het voorafgaande, (20), (21), (22)

$$\mu\tau_1 b_1 = \frac{2\omega_1'}{i}\ , \quad \mu\tau_2 l_1 = \frac{2\omega_2'}{i}\ , \quad \mu\tau h_1 = \frac{\omega'}{i}.$$

De lengten der kromtelijnen $BD = AC$, $BE = AF$ worden blijkbaar door b en l aangegeven. De afmeting h daarentegen uit fig. 1 heeft voor fig. 19 geen eenvoudige beteekenis. Nauw verwant met het vraagstuk, om door twee evenwijdig geplaatste rechthoeken een minimaaloppervlak te brengen, is dus het volgende:

Indien een rechthoekig parallelopipedum met de hoogte h_1, de lengte l_1 en de breedte b_1 gegeven is, vraagt men een minimaaloppervlak te construeeren, dat de hoogte-as van het parallelopipedum

bevat, de vier opstaande zijvlakken loodrecht snijdt, en verder grond- en bovenvlak ontmoet volgens twee lijnen, evenwijdig aan de twee opvolgende ribben van het grondvlak.

Ieder geval van het oorspronkelijke vraagstuk, komt met eene oplossing van het tweede overeen. Gebruik makende van de notatie van JACOBI, heeft men te behandelen de vergelijkingen

$$\frac{b_1}{2K_1'} = \frac{b_1}{2K_2'} = \frac{h_1}{k'K'}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$
$$k = \frac{k_1' k_2'}{k_1 k_2}.$$

Hier is geen grens gesteld voor de hoogte h_1 van het parallelopipedum; bij elk stel waarden van b_1, l_1, h_1 is eene oplossing mogelijk.

Wordt $b = l$ in fig. 1, dan is er in fig. 1 in het vlak $x = y$ nog eene vlakke kromtelijn AB, in fig. 19 ontstaat dus voor $b_1 = l_1$ eene nieuwe rechte lijn AB, loodrecht op het genoemde vlak. De punten A en B komen dan, zooals de symmetrie medebrengt, op de halve hoogte van het parallelopipedum. In fig. 19 volgt dan onmiddellijk voor de lengte van AB de waarde $b_1\sqrt{2}$; ook in fig. 1 is dus voor $b = l$ de verhouding der kromtelijnen AB en CLD eveneens gelijk aan $\sqrt{2}$, eene uitkomst die men rechtstreeks niet zoo gemakkelijk vindt.

Als zeer bijzonder geval, waarin $b = l$, vermelden wij nog het oppervlak in fig. 20 afgebeeld, toegevoegd aan het oppervlak Ω, waarvoor $h = \frac{b}{\sqrt{2}}$ is, en dat de rechte lijnen EC en DF, benevens de drie vlakke kromtelijnen AB, DE en CF bevat. In fig. 20 zal men dan aantreffen de vlakke kromtelijnen EC en FD, en verder de rechte lijnen AB, DE en CF. Daar in de uitzonderingspunten C, D, E en F telkens de drie asymptotische lijnen hoeken van 60° met elkander maken, is $ED = CF = CF = CD$ en dus noodzakelijk $h_1 = \frac{b_1}{\sqrt{2}}$. Het aldus ontstane oppervlak kan men gespannen denken tusschen twee paar overstaande ribben van een regelmatig viervlak. In dien vorm is het door SCHWARZ [1]) beschouwd. Dat de hier geldende formules voor $\alpha = \beta = 2$ inderdaad geven $h_1 = \frac{b_1}{\sqrt{2}}$

[1]) Ueber die Minimalfläche, deren Begrenzung als ein von vier Kanten eines regulären Tetraeders gebildetes räumliches Vierseit gegeben ist; Ges. W., I, blz. 1.

is spoedig in te zien. Men heeft toch

$$k = \tfrac{1}{3},\ k' = \sqrt{\tfrac{8}{9}},\ k_1' = k_2' = \tfrac{1}{2},\ k_1 = k_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

en dus $$k_1' = \frac{1-k}{1+k},$$

dientengevolge $$K' = (1+k_1')\,K_1' = \tfrac{3}{2}\,K_1',$$

en dan geeft (34) $$h_1 = \frac{b_1}{\sqrt{2}}.$$

Ten slotte moge in het kort nog worden nagegaan, welke oppervlakken toegevoegd zijn aan de besproken ontaardingen. De vergelijkingen (31) van het oppervlak, voorgesteld in fig. 14, waarbij $\beta = 1$ is, gaan door de invoeging van i en na eenige wijziging der integratieconstanten, waardoor de coördinatenoorsprong in L wordt verlegd, over in

$$\left.\begin{aligned} \mu\tau\, x &= -2\,\Re w, \\ \mu\tau\, y &= \frac{1}{2\sqrt{e_1-e_3}}(\pi+\psi_3-\psi_1-\psi_2), \\ \mu\tau\, z &= \frac{1}{2\sqrt{e_1-e_3}}\, log\, \frac{R_2 R_3}{R_1\,(e_2-e_3)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (35)$$

waarbij het argument w zich beweegt binnen den rechthoek van fig. 13. Men ziet in fig. 21 een oppervlak ontstaan, dat slechts weinig van fig. 19 verschilt. De hoogte h_1 is oneindig geworden, de punten F, N, E zijn verdwenen in de richting der Z-as. Eene oppervlakkige vergelijking met fig. 14 leert, dat werkelijk voldaan is aan de eigenschappen van overeenkomstige raakvlakken en raaklijnen op toegevoegde oppervlakken. De afmetingen volgen onmiddellijk uit vorige berekeningen; men heeft

$$\mu\tau b_1 = 2\omega, \qquad \mu\tau l_1 = \mu\tau h = \frac{\pi}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Ook hier is de constructie van het oppervlak uit gegeven afmetingen b_1 en l_1 vrij gemakkelijk uitvoerbaar. Zij levert steeds ééne oplossing.

Wordt nu ook $\alpha = 1$, gaat dus fig. 14 over in fig. 15, dan verdwijnen ook de punten C, L, D in de richting van de Z-as. Het oppervlak van fig. 21 gaat over in een oppervlak, dat de zijvlakken $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $y = \pm\frac{\pi}{2}$ van een prisma met vierkante doorsnede loodrecht snijdt, de as van het prisma, benevens de lijn $z = 0$, $x = -y$ bevat en de vlakken $x = 0$ en $y = 0$ asymptotisch nadert. Dit oppervlak, dat nu toegevoegd is aan het oppervlak van SCHERK

$$\cos z = \tfrac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})(e^{y} - e^{-y}),$$

is niet anders dan het tweede oppervlak van SCHERK

$$e^{-z} = -\frac{\sin x}{\sin y},$$

voorgesteld in fig. 18. Echter komt hier dit oppervlak in een anderen stand te voorschijn, en moet ook een ander stuk hier worden beschouwd, dan in fig. 18 is weergegeven.

Meer regelmatig is de figuur, die men door buiging uit fig. 17 afleidt. De invoering van i in (32) geeft na toevoeging van doelmatige integratieconstanten

$$\left.\begin{aligned} \mu\tau x &= -\frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} \log \frac{R_1 R_3}{R_2 (e_1 - e_3)}, \\ \mu\tau y &= \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} (\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 + \pi), \\ \mu\tau z &= 4\,\Re i w; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (36)$$

het argument w is daarbij steeds gelegen binnen den rechthoek van fig. 16.

Door verschillende argumentwaarden in (36) te substitueeren, overtuigt men zich spoedig, dat een oppervlak ontstaat, ongeveer als in fig. 22 is geteekend. Het bevat, zooals verwacht kon worden, de drie rechte lijnen FNE, NL en CLD, benevens twee vlakke kromtelijnen EB en AC. Het ontstaat uit fig. 19 door twee zijvlakken van het parallelopipedum loodrecht op de X-as tot in het oneindige te verschuiven. De punten A en B dalen daarbij voortdurend, het oppervlak gaat het grondvlak asymptotisch naderen in de richting der X-as. Wat de afmetingen $l_1 = FE$, $h_1 = LN$ betreft, is weder

$$\mu\tau l_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{e_2 - e_3}}, \quad \mu\tau h_1 = 2\omega.$$

Na het buigen doet de fig. 22 zien, dat $EF = 2BD$, dit geldt dus ook van dezelfde lijnen in fig. 17, wat daar niet dadelijk in het oog viel. Waar fig. 17 nu verder kon ontaarden in fig. 18, een der oppervlakken van SCHERK, daar zal fig. 22 tegelijk in het andere oppervlak van SCHERK overgaan, en als het oppervlak van fig. 17 nadert tot eene catenoïde, zal terzelfdertijd het oppervlak van fig. 22 meer en meer op een schroefvlak met verticale as gaan gelijken; men behoeft slechts de vlakken $y = \pm \frac{1}{2} l$, die het oppervlak loodrecht moet ontmoeten, meer en meer in de richting der Y-as van elkander te verwijderen.

Leiden, September 1895.