

Regelmässige Schnitte und Projektionen des
Hundertzwanzigzelles und des Sechshundertzelles
im vierdimensionalen Raume

(2^{te} ABHANDLUNG)

VON

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

DEEL IX. N^o. 4.

MIT 18 TAFELN.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1907.

Regelmässige Schnitte und Projektionen
des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles
im vierdimensionalen Raume,

VON

P. H. SCHOUTE.

(ZWEITE ABHANDLUNG.)

1. In der ersten Abhandlung, welche 1894 unter dem nämlichen Titel in den *Verhandelingen* dieser Akademie erschien, entwickelte ich zunächst die vier regulären Koordinatenstellungen der beiden Zelle Z^{120} und Z^{600} mit der Absicht aus diesem Materiale die regulären Schnitte und Projektionen dieser beiden Extrapolytope abzuleiten. Bei der Auswertung dieser Anwendung der genannten Vorarbeit beschränkte ich mich aber auf Zentralschnitte und senkrechte Parallelprojektionen; jetzt will ich, diesen engeren Standpunkt verlassend, mehr allgemein die regulären Parallelschnitte und Zentralprojektionen vorführen. Teilweise ist diese Ergänzung schon geliefert worden, zunächst von Frau A. STOTT, der dritten Tochter des berühmten englischen Mathematikers BOOLE ("On certain series of sections of the regular fourdimensional hypersolids", *Verhandelingen* dieser Akademie, 1900), welche die Güte hatte mir ihre Modellensammlung in Bild zuzuschicken, und nachher von mir selbst (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, Leipzig, Göschen, 1905). Was hier gegeben wird soll aber eine mehr systematische Behandlung des ganzen Materials bilden; in einer dritten Abhandlung will ich dann — sei es auch nur für einen Teil der erhaltenen Resultate — ganz leichte Konstruktionen von parallel-perspektivischen Bildern entwickeln.

2. Es handelt sich bei jedem der beiden Zelle Z^{120} und Z^{600} um nicht weniger als acht Reihen dreidimensionaler Körper, vier Reihen von Schnitten und vier Reihen von Scheinen. Versteht man unter O den Zellmittelpunkt und unter E_0, K_0, F_0, R_0 der Reihe nach irgend einen Eckpunkt, eine Kantenmitte, einen Flächenmittelpunkt und einen Grenzraummittelpunkt, so stehen die Räume der Reihen paralleler Schnitte senkrecht auf den Geraden OE_0, OK_0, OF_0, OR_0 , welche Zelldiagonale, erste, zweite, dritte Querlinie und sämtlich Hauptstrahlen heissen, während die Punkte P_e, P_k, P_f, P_r dieser Geraden die Zentra und Räume senkrecht auf OE_0, OK_0, OF_0, OR_0 die Bildräume der Scheinenreihen bilden. Die Untersuchung der sechzehn Polyederreihen reduziert sich aber sofort auf die Hälfte. Denn es lässt sich beweisen, dass irgend eine Zentralprojektion des Z^{120} (oder Z^{600}) mit der Polfigur eines bestimmten Schnittes eines bestimmten Z^{600} (oder Z^{120}) in Bezug auf eine bestimmte Kugel identisch ist. Ist O der Mittelpunkt und OH irgend ein Hauptstrahl eines der beiden Zelle, ist der Raum R_s in M senkrecht zu OH der Schnittraum und P der Schnittpunkt irgend einer Kante AB dieses Zelles Z , ist der Kreis k der Schnitt irgend eines Kugelraumes um O als Zentrum mit der Ebene durch OH und P , welche unsere Bildebene (Fig. 1) bildet, ist p die Polare von P in Bezug auf k und sind S und Q die Pole von PM und PS , so projiziert der in p zur Bildebene senkrechte Raum R_p die Seitenfläche $\alpha\beta$ des in Bezug auf den Kugelraum zu Z reziproken Zelles Z' , welche den Schnitt der zu A und B reziproken Grenzräume R_a und R_b bildet, aus dem Punkte S auf dem Raum R_s als die in Q zur Bildebene senkrechte Ebene, und bildet dies Ebene ε_q die Polare des Punktes P in Bezug auf die Schnittkugel des Raumes R_s mit dem angenommenen Kugelraume. Deshalb ist die Projektion von Z' aus S auf R_s reziprok verwandt mit dem von R_s in Z bestimmten Schnitte in Bezug auf die letztgenannte Kugel und ist die Scheinenreihe von Z' mit Hinsicht auf jeden der Hauptstrahlen OE_0, OK_0, OF_0, OR_0 bekannt, sobald es die Reihen von Schnitten von Z mit Hinsicht auf jeden der Hauptstrahlen OR_0, OF_0, OK_0, OE_0 dieses Zelles sind. Also können wir uns, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, zu den acht Reihen von Schnitten beschränken.

3. Die drei kennzeichnenden Zahlen e, k, f der Eckpunkte, Kanten, Flächen eines Schnittes hängen immer mittels der bekannten Eulerschen Formel zusammen; denn die sämtlichen Schnitte von Z^{120} und Z^{600} sind überall konvex und deshalb Eulersche Körper. Beschränkt man sich auf den Fall, wo der Schnittraum

keinen Eckpunkt des Zelles enthält, d. h. schaltet man für einen Augenblick die sogenannten "Uebergangsformen" aus, so waltet sogar zwischen e, k, f noch eine zweite Beziehung ob, welche sich jedoch bei Z^{120} und Z^{600} verschieden gestaltet. Man findet nämlich $k = \frac{3}{2}e$ bei Z^{120} und $k = \frac{5}{2}e$ bei Z^{600} . Denn die Seitenflächen

der beiden Zelle enthalten reguläre Polygone, d. h. jedes vom Schnitt-raum geschnittene Polygon liefert *eine* Kante und *zwei* Eckpunkte des Schnittes. Ist μ die Zahl dieser Polygone, so hat man also nebst $\mu = k$ entweder $2\mu = 3e$ oder $2\mu = 5e$, je nachdem durch jede Kante drei oder fünf Grenzkörper gehen, d. h. je nachdem entweder Z^{120} oder Z^{600} geschnitten wird. Bei den intermediären, keinen Zelleckpunkt enthaltenden Schnitten genügt es also schon eine einzige der drei Zahlen e, k, f zu kennen.

Die hervorgehobene besondere Eigenschaft der intermediären Schnitte wird auch hierdurch gekennzeichnet, dass ihre Eckpunkte bei Z^{120} sämtlich *dreikantig*, bei Z^{600} sämtlich *fünfkantig* sind. Diese Bemerkung wird uns später nützlich sein.

4. Wir weisen jetzt in allgemeinen Zügen an, wie man jede der drei kennzeichnenden Zahlen e, k, f an und für sich bestimmen kann. Naturgemäss zerfällt die Arbeit dieser Bestimmung in zwei Teile. Zunächst ist den Tabellen der ersten Abhandlung zu entnehmen, wie die Eckpunkte der beiden Zelle sich auf jeden der Hauptstrahlen OE_0, OK_0, OF_0, OR_0 projizieren, und anzugeben, wie diese Eckpunkteprojektionen sich zu zweien zu Kantenprojektionen, zu fünf oder zu drei zu Seitenflächenprojektionen, zu zwanzig oder zu vier zu Grenzkörperprojektionen vereinen. Ist diese Vorarbeit erledigt — und hierauf kommen wir später zurück —, so findet man jede der drei Zahlen e, k, f als Summe zweier Summanden, von welchen der letztere nur bei Uebergangsformen auftritt; man hat nämlich die Formel

$$e = \bar{k} + e', \quad k = \bar{f} + k', \quad f = \bar{r} + f',$$

wo die drei gestrichenen Grössen e', k', f' im Schnitt-raum liegende Elemente des Zelles angeben und die überstrichenen Grössen $\bar{k}, \bar{f}, \bar{r}$ anweisen, wieviel Kanten, Flächen, Räume des Zelles geschnitten werden.

Will man auch die Natur der f Seitenflächen des Schnittes kennen lernen, so hat man zu untersuchen, wie jede der \bar{r} vom Schnitt-räume getroffenen Grenzkörper geschnitten wird; ist einmal bekannt,

wieviel Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, usw. sich unter den f Flächen vorfinden, so führt auch die Bemerkung, dass $2k$ die Summe der Seitenzahlen dieser Polygone bildet, zur Kenntnis von k . Es hat sich gezeigt, dass diese Ableitung der Zahl k wirklich die bequemere ist; also ist die zweite der obigen Formel nicht verwendet worden.

In der tabellarischen Uebersicht der Resultate, welche diese Abhandlung abschliesst, werden wir auch die Vielkantigkeit der Eckpunkte der Schnitte in Betracht ziehen. Auf diesen Punkt kommen wir später zurück.

Nach diesen einführenden Betrachtungen wenden wir uns zur Behandlung der verschiedenen Reihen von Parallelschnitten.

I. Das Z^{120} .

a) Die Stellung OE_0 .

5. Aus der vierten Kolonne (D , dritte Querlinie) der Tabelle I (Koordinatenstellung des Z^{600}) der ersten Abhandlung leiteten wir die Schichtung

(4, 4, 6, 12, 12, 12, 4, 12, 4, 12, 12, 12, 6, 4, 4)

der Eckpunkte des Z^{600} in Bezug auf OR_0 ab, welche zur Konstruktion des Schlegelschen Diagrammes des Z^{600} (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, Fig. 75) verwendet wurde. Mittels Polarisation in Bezug auf einen konzentrischen Kugelraum ergibt sich, dass die 120 begrenzenden Dodekaeder des Z^{120} in Bezug auf einen OE_0 dieses Zelles gelagert sind in fünfzehn Gruppen mit der Eigenschaft, dass die Dodekaeder der nämlichen Gruppe in Projektion auf diesen OE_0 identisch sind und die Zahlen der Dodekaeder dieser Gruppen eben durch obige Eckpunkteschichtung angegeben werden. Hiermit ist nicht nur die erste Zahlenkolonne von Tafel II^a gefunden sondern auch bewiesen, dass die verschiedenen Gruppen von Dodekaedern, welchen wir nach Frau STOTT bestimmte Farben zuweisen, bei Verlängerung der Schnittebenen des Schnitttraums mit den die Dodekaeder tragenden Räumen der Reihe nach ein rechtes ¹⁾ Tetraeder ein linkes Tetraeder, einen Würfel, ein rechtes Triakistetraeder, ein linkes Pyramidentetraeder, ein rechtes Pyramidentetraeder, ein

¹⁾ Die hier gegebene Unterscheidung „rechts“ und „links“ hat nur relativen Wert.

rechtes Tetraeder, ein Rhombendodekaeder, usw. einschliessen, wie dies auf der Tafel angegeben wird. Wir bemerken nun sogleich, dass diese Körper in der gefundenen Stellung zwei verschiedene Drehungsgruppen zulassen, die Drehungsgruppe der Würfeldiagonalen mit der Periode drei und die Drehungsgruppe der Oktaederdiagonalen mit der Periode zwei (Vierergruppe) und dies daher auch mit sämtlichen Parallelschnitten des Z^{120} in Bezug auf OE_0 der Fall sein muss.

6. Die Lage der 120 begrenzenden Dodekaeder des Z^{120} mit Hinsicht auf den Hauptstrahl OE_0 wird in Tafel II^a von den starken Strichen angedeutet. Dabei ist die horizontal angenommene Linie OE_0 in fünfzehn, den Gruppen von Dodekaedern entsprechenden Lagen wiederholt worden und geben die vertikalen Linien mit der Ueberschrift

$$a, b, \dots, o, p, q, p', o', \dots, b', a'$$

die Stellen an, wo die Eckpunkte des Z^{120} sich auf OE_0 projizieren. Die Abstände aq, bq, \dots, pq dieser Projektionen vom Zellmittelpunkte O sind der letzten Kolonne (F , Zelldiagonale) der Tabelle III (Koordinatenstellung des Z^{120})— oder, wenn man will, der Randschrift von Fig. 19 — der ersten Abhandlung entnommen. In dieser Weise giebt Tafel II^a an, dass sich von den zwanzig Eckpunkten irgend eines der vier Dodekaeder der ersten Gruppe der Reihe nach 1, 3, 6, 6, 3, 1 Eckpunkte auf die Vertikallinien a, b, c, d, e, f lagern, was dem Symbole $(a b^3 c^6 d^6 e^3 f)$ entspricht, und dass dieses Symbol für die zweite Gruppe übergeht in $(b c^3 d^6 g^6 h^3 i)$, für die dritte in $(c^2 d^4 e^2 g^4 h^2 i^4 k^2)$, usw.

7. Die fünfzehn Lagen der begrenzenden Dodekaeder, welche in Tafel II^a bildlich vorgeführt werden, können ganz systematisch abgeleitet werden aus der Tabelle II der ersten Abhandlung, welche für jeden Eckpunkt des Z^{600} die zwölf durch Kanten mit ihm verbundenen, oder — wie wir abkürzend sagen wollen — ihm *benachbarten* Eckpunkte kennen tut. Denkt man sich nämlich bei jedem Eckpunkte A (Fig. 2) des Z^{600} das Ikosaeder der zwölf benachbarten Punkte B_i und polarisiert dieses Ikosaeder in Bezug auf die konzentrische Kugel mit M als Mittelpunkt und $\sqrt{AM \cdot MO}$ als Radius, wo M und O die Mittelpunkte des Ikosaeders und des Z^{600} sind, so erhält man die 120 begrenzenden Dodekaeder des Z^{120} , in welchen unsrer Z^{600} übergeht mittels Polarisation in Bezug auf den Kugelraum mit O als Mittelpunkt und $\sqrt{AO \cdot MO}$ als

Radius, und nun ist aus der mit den Tabellen I und II der ersten Abhandlung gegebenen Schichtung der zwölf Eckpunkte des Iksaeders unmittelbar die Schichtung der zwanzig Eckpunkte des entsprechenden Dodekaeders zu finden. Denn die Projektion der Eckpunkte des Iksaeders bestimmt die Lage dieses Körpers in Bezug auf die Projektionsachse und also auch jene des entsprechenden Dodekaeders, usw.

8. Zur Bestimmung der Lage der 120 den Eckpunkten des Z^{600} benachbarten Iksaeders greifen wir zur vierten Kolonne (D , dritte Querlinie) der Tabelle I zurück, wo die Koordinate w_1 der mit dem Hauptstrahle OE_0 des Z^{120} und dem Hauptstrahle OR_0 des Z^{600} zusammenfallenden Projektionsachse der Schichtung entspricht. Es vergehenwärtigen sodann die Eckpunkte

$$\pm 1, \pm 5, \pm 25, \pm 7, \pm 13, \pm 2, \pm 15, \pm 16$$

mit den Abscissen ¹⁾

$$\begin{aligned} \pm (7 + 3e), \pm (5 + 3e), \pm (6 + 2e), \pm (4 + 2e), \\ \pm (3 + e), \pm (1 + e), \pm 2, 0 \end{aligned}$$

die fünfzehn möglichen Fälle, welche in Tafel II^b niedergelegt sind. Dabei ist dann wieder das Ergebnis ($a^3 b^3 c^3 d^3$) des ersten Falles abgeleitet aus der Tatsache, dass die zwölf Nachbarpunkte

$$29, -30, 31, 32, 41, -42, 43, 44, 53, -54, 55, 56$$

des Punktes 1 (siehe die Tabelle II der ersten Abhandlung) sich nach ihren w_1 -Koordinaten in die vier Gruppen

$$(29, 41, 53), (32, 43, 56), (31, 44, 55), (-30, -42, -54)$$

mit den Koordinatenwerten

$$7 + 3e, 5 + 3e, 6 + 2e, 4 + 2e$$

zerlegen lassen, usw.

9. Die fünfzehn Gruppen I, II, ..., VIII, VII', ..., II', I' der Tafel II^b bilden sämtlich nur sechs von einander verschiedene Iksaederschichtungen. Denn die den Farben Rot, Orange, Violett

¹⁾ Auch hier steht e wieder für $\sqrt{5}$.

entsprechenden Schichtungen (3, 3, 3, 3) sind insofern identisch, dass die Projektionen einander ähnlich sind und deshalb in den drei Gruppen I, II, VII und die mit ihnen symmetrisch liegenden Gruppen I', II', VII' die Projektion des Hauptstrahles OR_0 des Z^{600} auf den Raum des Ikosaeders in Bezug auf das Ikosaeder die nämliche ist, obgleich dieser Hauptstrahl mit jenen Räumen verschiedene Winkel bildet. Und diese sechs verschiedene Ikosaederlagen halten nun hierin mit einander wieder gleichen Tritt, dass die Projektion des Hauptstrahles OR_0 des Z^{600} immer auf einen Hauptstrahl OK_0 des Ikosaeders senkrecht steht und also in der Ebene der zwei parallelen Gegenkanten liegt, welche diesen Hauptstrahl OK_0 senkrecht kreuzen. Bei den Schichtungen (3, 3, 3, 3) und (2, 2, 4, 2, 2) der Gruppen I, II, VII und III (gelb) ist dies einleuchtend; denn bei (3, 3, 3, 3) sind die Schnittebenen zweien Seitenflächen des Ikosaeders parallel, und bei (2, 2, 4, 2, 2) enthält die Mittelebene des Parallelebenenbüschels vier Eckpunkte und also zwei Gegenkanten. Für die vier übrigen Fälle betrachte man nun an der Hand der senkrechten Projektion der Ikosaeders auf eine Mittelebene durch vier Eckpunkte (Fig. 3) die von den fünf im Eckpunkte p zusammenstossenden Seitenflächen gebildete reguläre Pyramide mit der sich in die Gerade qsr projizierenden Grundebene, wo der Scheitel p der erste Eckpunkt der Schichtung ist und die zweite Punktzahl der Schichtung nun notwendig von der Grundebene herrührt. Ist diese zweite Zahl 2, so muss die Verbindungslinie dieser zwei Punkte notwendig eine Ikosaederkante sein und kann für ihr die in q auf der Bildebene senkrechte Kante angenommen werden, woraus dann hervorgeht, dass die Schnittebenen bei den Gruppen VI (indigo) und VIII (schwarz) auf der Bildebene senkrecht stehen. Ist diese zweite Zahl wieder 1, so ist dieser zweite Eckpunkt irgend ein Eckpunkt der Grundebene, z. B. r und rührt nun die dritte Punktzahl der Schichtung ebenfalls von der Grundebene her; weil diese Zahl in den übrigen Fällen IV (grün) und V (blau) zwei ist, muss die Verbindungslinie der entsprechenden Eckpunkte in s auf der Bildebene senkrecht stehen. Also ist hiermit der gesuchte Beweis geliefert.

10. Mittels Betrachtung der Abstandsverhältnisse der parallelen Spuren der ersten vier Schichtungsebenen auf der Grundebene der fünfseitigen Pyramide, deren Scheitel p in der ersten Schichtungsebene liegt, bestimmen wir jetzt die Spuren dieser Ebenen auf der Bildebene der Figur 3 für jeden der vier Fälle IV, V, VI, VIII. Es betragen nach Tafel II^b die ersten drei Abstände

im Falle IV (grün).....	2	,	$e - 1$,	2	}
,, „ V (blau).....	$e - 1$,	2	,	$e + 1$	
,, „ VI (indigo)...	2	,	$e + 1$,	2	
,, „ VIII (schwarz) ..	$e + 1$,	2	,	$e - 1$	

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit den Schichtungszahlen sofort, dass die erste Schichtungsebene für die vier verschiedenen Fälle der Reihe nach in pp^I , pp^{II} , pp^{III} , pp^{IV} senkrecht steht auf der Bildebene, wenn die Punkte p^I , p^{II} , p^{III} , p^{IV} in rsq mittels der Beziehungen

$$p^I r = s q, p^{II} s = s q, q p^{III} = r s, q p^{IV} = r q$$

bestimmt sind. Es geben also die Lote aus O auf pq , pr , pp^I , pp^{II} , pp^{III} , pp^{IV} für die sechs verschiedenen Fälle die Projektion des Hauptstrahles OR_0 des Z^{600} auf den Raum des Ikosaeders an.

11. Zur Bestimmung der sechs entsprechenden Dodekaederschichtungen polarisieren wir (Fig. 3) das betrachtete Ikosaeder mit Hinsicht auf die Kugel, welche O zum Zentrum und $\sqrt{Os} \cdot \overline{Ot}$ zum Radius hat, im Dodekaeder, welches in roter Farbe in die Figur eingetragen ist. Es entsprechen dann den zwanzig Eckpunkten 1, 2, ..., 20 dieses Dodekaeders die zwanzig Seitenflächen I, II, ..., XX des Ikosaeders. Dabei wird der auf der Seitenfläche X senkrecht stehende Hauptstrahl OF_0 des Ikosaeders zum mit $(O, 10)$ zusammenfallenden Hauptstrahle OE_0 des Dodekaeders, während der auf pr senkrechte Hauptstrahl OK_0 des Ikosaeders für das Dodekaeder ein Hauptstrahl OK_0 bleibt. Weiter wird der Charakter der vier übrigen Dodekaederschichtungen durch die Bemerkung beherrscht, dass die Geraden pp^I , pp^{II} , pp^{III} , pp^{IV} der Reihe nach den Geraden (1,8), (10,3), (4,13), (3,6) parallel sind. Wir betrachten jetzt jeden der sechs möglichen Fälle an sich.

Fall I = Fall II = Fall VII. Die Schichtung in Bezug auf die Körperdiagonale ist (1, 3, 6, 6, 3, 1); die fünf Abstände der aufeinanderfolgenden Schichten verhalten sich wie

$$e - 1, 2, e + 1, 2, e - 1.$$

Fall III. Die Schichtung in Bezug auf die erste Querlinie ist (2, 4, 2, 4, 2, 4, 2); die sechs Abstände der aufeinanderfolgenden Schichten verhalten sich wie

$$e + 1, 2, e + 1, e + 1, 2, e + 1.$$

Fall IV. Die Dreiecke prp^I und $(1, 2, 8)$ sind ähnlich und ähnlich liegend. Denn aus der Schichtung $(5, 5, 5, 5)$ folgt zunächst, dass die Punkte 6, 2, 8 in einer zu qsr parallelen Gerade liegen, d. h. es ist nicht nur $(1, 2)$ zu pr sondern auch $(2, 8)$ zu rp^I parallel, während ausserdem aus

$$(8,2): p^I r = 2 : 3 + e, (1,2): pr = 2 : 3 + e$$

die Proportionalität der um den gleichen Winkeln (pr, rp^I) und $\{(1,2), (2,8)\}$ liegenden Seiten folgt.

Die der Spurrichtung $(1,8)$ entsprechende Schichtung des Dodekaeders (Fig. 4^a) ist (2212332122) ; die neun Abstände der auf folgenden Schichten verhalten sich wie

$$2, e - 1, 2, e + 1, 2, e + 1, 2, e - 1, 2$$

Fall V. Die Dreiecke psp^{II} und $(3, 4, 10)$ sind ähnlich und entgegengesetzt ähnlich liegend, wie die Beziehungen

$$ps : sp^{II} = 2 : e + 1, (3, 4):(4, 10) = 2 : e + 1$$

beweisen. Die der Spurrichtung $(3, 10)$ entsprechende Schichtung (Fig. 4^b) ist (2231221322) mit den Abstandsverhältnissen

$$e + 1, 2, e + 1, 2, e - 1, 2, e + 1, 2, e + 1.$$

Fall VI. Man hat

$$\begin{aligned} (10, 13):(p, 10) &= (10, 13):(5, 6) = 2 : e + 1, \\ (4, 10):(10, p^{III}) &= rs : sq = 2 : e + 1. \end{aligned}$$

Deshalb sind die Geraden pp^{III} und $(4, 13)$ parallel. Die der Spurrichtung $(4, 13)$ entsprechende Schichtung (Fig. 4^c) ist (1232222321) mit den Abstandsverhältnissen

$$2, e + 1, e + 1, 2, e + 1, 2, e + 1, e + 1, 2.$$

Fall VIII. Hier ist

$$\begin{aligned} (1, 6):pq &= (1, 6):(3, 14) = (13, 6):(13, 14) = e - 1 : e + 1, \\ (3, 1):qp^{IV} &= (3, 1):rq = (2, 1):(2, q) = e - 1 : e + 1. \end{aligned}$$

Also sind die Dreiecke $(1, 3, 6)$ und $qp^{IV}p$ ähnlich und

entgegengesetzt ähnlich liegend, und deshalb ρ^{IV} und (3, 6) parallel. Die der Spurrichtung (3, 6) entsprechende Schichtung (Fig. 4^a) ist (12212421221) mit den Abstandsverhältnissen

$$e - 1, 2, e + 1, 2, e + 1, e + 1, 2, e + 1, 2, e - 1.$$

In jeder der vier Figuren 4^a, 4^b, 4^c, 4^d ist auf einer Parallele zur Projektionsachse die Seitenzahl der Polygone der intermediären Schnitte und Uebergangsformen angegeben worden; dies wird uns bei der Bestimmung der Kantenzahl der Seitenflächenpolygone des Schnittpolyeders nützlich sein.

12. Ist einmal gefunden, wie die Dodekaedergruppen sich auf den gewählten Hauptstrahl OE_0 des Z^{120} projizieren, so erhält man leicht ihre genaue Lage mittels der bekannten Abstandsverhältnisse. Dabei kann noch die Bemerkung nützlich sein, dass die Schwerpunkte der Dodekaeder sich auf diesen Hauptstrahl in Punkte projizieren, deren Mittelpunktsabstände sich wie

$$7 + 3e, 5 + 3e, 6 + 2e, 4 + 2e, 3 + e, 1 + e, 2, 0$$

verhalten, was hieraus hervorgeht, dass die 120 Dodekaederschwerpunkte die Eckpunkte eines Z^{600} in Stellung OR_0 bilden. Hat man z. B. gefunden, dass die Eckpunkte der Dodekaeder der ersten Gruppe sich in der Tafel II^a in a, b, c, d, e, f projizieren und die Projektion des Schwerpunktes also die Mitte der Strecke cd ist, d. h. von Mittelpunkt O die Entfernung $\frac{47 + 21e}{2} = \frac{1}{4}(7 + 3e)^2$ hat, so werden die Abstände der übrigen Schwerpunktsprojektionen

$$20 + 9e, 18 + 8e, \frac{1}{2}(29 + 13e), 9 + 4e, \frac{1}{2}(11 + 5e), \\ \frac{1}{2}(7 + 3e), 0$$

sein, d. h. diese Projektionen liegen in

$$ef, g, hi, lm, no, op, q,$$

wenn ef die Mitte der Strecke ef andeutet, usw. Achtet man nun auf die bekannten Abstandsverhältnisse der Schichtungspunkte, so ist es schon nicht mehr möglich sich zu irren.

Ausserdem gibt es noch andere Kontrollehilfsmittel, deren wir zwei erwähnen, ein allgemeines und ein besonderes.

13. Das allgemeine Hilfsmittel besteht darin, dass man für jede Schicht untersucht, ob die Summe der Dodekaedereckpunkte wirklich das vierfache der Anzahl der in der Schichte liegenden Zelleckpunkte bildet, welche letztere Anzahlen aus der Kolonne F der Tabelle III der ersten Abhandlung hervorgehen. So muss in der Schicht e

$$4 \times 3 + 6 \times 2 + 12 \times 2$$

das vierfache von 12 bilden. Diese Bedingung wird für jede Schicht der Tafel II^a erfüllt.

Das besondere Hilfsmittel stützt sich auf der Tatsache, dass die Projektion des Hauptstrahles OE_0 auf irgend ein begrenzendes Dodekaeder zu einem Hauptstrahle OK_0 dieses Körpers senkrecht ist. Hieraus geht nämlich hervor, dass man sich sämtliche Dodekaeder mittels Drehung um den Hauptstrahl, welche Projektionsachse der Schichtungen ist, auf irgend eine als Bildebene zu verwendende Ebene durch diesen Hauptstrahl senkrecht gestellt denken kann. Ist nun (Fig. 5) der Masstab der Projektion a, b, c, \dots so gewählt, dass die Sehne $A_1 B_1$ des über aa' geschlagenen Kreises, welche sich in af projiziert, in Länge dem Körperdiagonale des Dodekaeders der vier Figuren $4^a, 4^b, 4^c, 4^d$ gleich kommt, wird sodann um q als Zentrum mit dem aus q auf $A_1 B_1$ gefällten Lote qM_1 als Radius den Schnittkreis des Inkugelraums des Z^{120} mit der Bildebene beschrieben, werden weiter auf diesem Kreise die Punkte M_2, M_3, \dots, M_8 bestimmt, welche sich in den Schwerpunktsprojektionen der Gruppen II, III, \dots , VIII projizieren und in diesen Punkten an diesem Kreise die Tangente II, III, \dots , VIII, gezogen, so sind die sich der Reihe nach auf $bi, ck, dn, gg, ho', in', ll'$ projizierenden Segmente $A_2 B_2, A_3 B_3, \dots, A_8 B_8$ dieser Tangenten die Projektionen der Dodekaeder der Gruppen II, III, \dots , VIII auf die Bildebene. Und nun findet man, dass die Segmente $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_8 B_8$ mit den von den vertikalen Linien auf sie eingeschnittenen Punktreihen genau die in den Figuren 3, $4^a, 4^b, 4^c, 4^d$ gefundenen Punktschichtungen liefern.

14. Aus Tafel II^a wird nun leicht die in Tafel III angegebene Kantenprojektion abgeleitet. Dabei sind die Kanten in zwei Gruppen eingeteilt. Zunächst sind die Kanten eingetragen, welche in Projektion nur ein Segment ab, bc, \dots des Hauptstrahles über-

decken, sodann die Kanten dg, eh, \dots , welche sich in Projektion über zwei oder mehrere Segmente erstrecken; nur die Kanten der zweiten Gruppe liefern Eckpunkte der sogenannten Uebergangsformen. In Berechnungsweise der Anzahlen stimmen beide Gruppen mit einander überein; deshalb können wir mit einem einzigen Beispiele vollstehen. Wir wählen die Kante hk .

Die Kante hk tritt scheinbar bei der dritten, vierten, fünften und sechsten Dodekaedergruppe auf; denn die beiden Punkte h und k des Hauptstrahles tragen in Tafel II^a Eckpunktenprojektionen der Dodekaeder dieser vier Gruppen. Weil die sich in h und k projizierenden Eckpunkte bei der dritten und der fünften Gruppe aber nicht durch Kanten verbunden sind und hk , wie die Figuren 4^a und 4^c zeigen, Projektion ist von *zwei* Kanten jedes der 12 Dodekaeder der vierten und von *einer* Kante jedes der 12 Dodekaeder der sechsten Gruppe, so ist

$$\text{die Zahl der Kanten } hk = \frac{1}{3} (2 \times 12 + 1 \times 12) = 12,$$

wobei der Faktor $\frac{1}{3}$ von der Tatsache herrührt, dass jede Kante des Z^{120} in drei verschiedenen Dodekaedern liegt.

15. Ist die Lage der Kantenprojektionen in der angegebenen Weise tabellarisch dargestellt, so können die drei kennzeichnenden Zahlen e, k, f von intermediären Schnitten und Uebergangsformen unmittelbar bestimmt werden. Wir zeigen dies mit zwei Beispielen an.

Der intermediäre Schnitt zwischen h und i. Der Schnittraum begegnet 88 Kanten, nämlich:

$$36 hi, 4 fi, 24 gi, 12 hk, 12 hl;$$

also ist $e = 88$.

Es werden im ganzen 46 Dodekaeder geschnitten; denn eine vertikale Linie zwischen h und i trifft auf Tafel II^a die Dodekaeder der Gruppen II, III, IV, V, VI, also $4 + 6 + 12 + 12 + 12 = 46$ Dodekaeder; deshalb ist $f = 46$.

Es bestimmt der Schnittraum in den Dodekaedern der Gruppen II, III, IV, V, VI der Reihe nach Dreiecke, Achtecke, abermals Achtecke, Sechsecke und Dreiecke. Also wird der Schnittkörper

von sechszehn Dreiecken, zwölf Sechsecken, achtzehn Achtecken eingeschlossen, und ist

$$\frac{1}{2} (16 \times 3 + 12 \times 6 + 18 \times 8) = 132$$

die Kantenzahl, d. h. man findet $k = 132$.

Kontrolle liefern die Beziehungen $k = \frac{3}{2}e$, $f = \frac{1}{2}e + 2$.

Der Uebergangsform h. Der Schnittraum enthält 24 Zelleckpunkte und begegnet 4 Kanten fi und 24 Kanten gi ; deshalb ist $e = 52$.

Es werden nach Tafel II^a die Dodekaeder der Gruppen II, III, IV, V geschnitten; also hat der Schnitt $4 + 6 + 12 + 12$ Seitenflächen, d. h. man findet $f = 34$.

Der Schnittraum bestimmt in den Dodekaedern der Gruppen II, III, IV, V der Reihe nach Dreiecke, Sechsecke, abermals Sechsecke und Vierecke; derhalb wird das Schnittpolyeder von vier Dreiecken, zwölf Vierecken, achtzehn Sechsecken eingeschlossen, und ist

$$\frac{1}{2} (4 \times 3 + 12 \times 4 + 18 \times 6) = 84$$

die Kantenzahl, also $k = 84$.

Kontrolle liefert nur die Eulersche Formel.

16. Die Bestimmung der Vielkantigkeitszahlen der Eckpunkte des Schnittpolyeders liefert keine Schwierigkeit. Einerseits fanden wir schon (vergleiche Nr. 3 am Schluss), dass sämtliche Eckpunkte der intermediären Schnitte dreikantig sind; derhalb können wir uns weiter auf die Uebergangsformen beschränken. Andererseits ergibt sich aber sofort, dass die von den Zelleckpunkten herrührenden Eckpunkte des Schnittpolyeders entweder dreikantig oder vierkantig sind; denn einem Zelleckpunkte A des Z^{120} sind vier Eckpunkte B_i benachbart und das reguläre Tetraeder dieser vier Eckpunkte B_i wird von der Schnittebene des dieses Tetraeder tragenden Raumes mit dem Schnitttraume entweder in einem Dreieck oder in einem Viereck geschnitten. Werden die Zahlen der dreikantigen und vierkantigen Ecken der Uebergangsform durch x und y angedeutet, so tut Lösung der beiden Gleichungen

$$x + y = f, \quad 3x + 4y = 2k$$

nach x und y den Wert dieser Grössen kennen, d. h. man hat

$$x = 2(2f - k), \quad y = 2k - 3f.$$

Die letztere Grösse, welche (vergleiche meine *Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 56) als „Grad der Flächensingularität“ des Polyeders gelten kann, kann verschwinden; in diesem Falle kommt der Uebergangsform das Charakter des intermediären Schnittes zu. Verschwindet y aber nicht — und diese sieben Fälle sind auf Tafel III mit einem Sternchen bezeichnet —, so ist diese Zahl entweder der Zahl e' der im Schnittraum liegenden Zelleckpunkte gleich oder man hat $y < e'$. Im Falle $y = e'$ sind sämtliche im Schnittraume liegende Zelleckpunkte gleicher Natur; für $y < e'$ teilt sich die Gruppe dieser e' Punkte in Untergruppen, wie sich später auch zeigen wird.

Die Zahlen x und y sind nicht auf Tafel III angegeben; sie werden in die tabellarische Uebersicht der Resultate am Schluss dieser Abhandlung erscheinen.

17. Es führt Fig. 5 zu einer leichten Berechnung der Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ welche von dem Hauptstrahle $abc\dots$ mit den Räumen der Dodekaeder der Gruppen I, II, \dots , VIII gebildet werden. Man findet zunächst

$$\begin{aligned} A_1 M_1^2 &= \frac{1}{4} (56 + 24e)(9 + 3e) = 6(7 + 3e)(3 + e), \\ M_1 q^2 &= (28 + 12e)^2 - 6(7 + 3e)(3 + e) = \\ &= (14 + 6e)(47 + 21e). \end{aligned}$$

Also ist

$$M_1 q = 2(9 + 4e)\sqrt{2}.$$

Deshalb hat man

$\cos \alpha_1 = \frac{1}{8}(3 + e)\sqrt{2},$	$\cos \alpha_5 = \frac{1}{4}\sqrt{2},$
$\cos \alpha_2 = \frac{1}{8}e\sqrt{2},$	$\cos \alpha_6 = \frac{1}{8}(-1 + e)\sqrt{2},$
$\cos \alpha_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2},$	$\cos \alpha_7 = \frac{1}{8}(3 - e)\sqrt{2},$
$\cos \alpha_4 = \frac{1}{8}(1 + e)\sqrt{2},$	$\cos \alpha_8 = 0.$

18. Bei einer parallelen Verschiebung des Schnitttraumes ändern die Zahlen e, k, f des Schnittes sich selbstverständlich nicht, so lange nicht eine Zelleckpunkte aufnehmende Lage des Schnitttraumes erreicht wird; eben deshalb heissen die den letzteren Lagen des Schnitttraumes entsprechenden Schnittpolyeder „Uebergangsformen“. Wir bemerken noch, dass eine parallele Verschiebung des Schnitttraumes innerhalb der erwähnten Grenzen nicht nur die Zahlen e, k, f sondern auch die Richtung der Kanten des Schnittes nicht ändert. Deshalb sind zwei parallele Schnitte, zwischen welchen kein Zelleckpunkt liegt, nicht nur isomorph nach der von V. EBERHARD eingeführten Bezeichnungsweise (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 23) sondern isomorph mit parallelen einander entsprechenden Kanten. Die Frage, ob zwei solche Schnitte vielleicht ähnlich und ähnlich liegend seien, ist nun leicht zu beantworten. Da die Dodekaeder der verschiedenen Gruppen in Bezug auf die Projektionsachse verschiedene Neigung haben, sind zwei solche parallele Schnitte dann und nur dann ähnlich und ähnlich liegend, falls nur eine Gruppe von Dodekaedern geschnitten wird, d. h. für die intermediären Schnitte zwischen a und b (und zwischen b' und a').

b) Die Stellung OK_0 .

19. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind niedergelegt in die Tafeln IV^a, IV^b, V welche der Reihe nach den Tafeln II^a, II^b, III der vorhergehenden Betrachtungen entsprechen. Um Wiederholungen zu vermeiden beschränken wir uns bei der Besprechung dieser neuen Tafeln auf die Punkte, welche wesentlich abweichen von den bisher behandelten.

Die Ueberschrift a, b, c, \dots der Tafel IV^a und die Mittelpunktsabstände $33 + 15 e, 32 + 14 e, 30 + 14 e, \dots$ sind der Randschrift der Fig. 16 der ersten Abhandlung entnommen. Die erste Reihe der Anzahlen der Dodekaeder der verschiedenen Gruppen ist aus der dritten Kolonne (C , zweite Querlinie) der Tabelle I der ersten Abhandlung abgeleitet. Dabei tritt aber etwas ganz besonderes auf. Bei der in Tafel IV^b schematisierten Vorarbeit der Bestimmung der von den zwölf einem Eckpunkte des Z^{600} in Stellung OF_0 benachbarten Eckpunkten gelieferten Ikosaeder findet man, dass die einem Punkte mit verschwindender z_1 -Koordinate entsprechenden Ikosaeder in Bezug auf den angenommenen Hauptstrahl nicht sämtlich die nämliche Lage besitzen, sondern sich in zwei Untergruppen, eine von sechs Ikosaedern mit der Schichtung (11222211) und eine von zwei

Ikosaedern mit der Schichtung (3333), zerlegen; die erste dieser beiden Untergruppen rührt von den Punkten ± 3 , ± 58 , ± 59 , die zweite rührt von den Punkten ± 4 her.

Die verschiedenen Ikosaederschichtungen der Tafel IV^b sind teilweise schon bekannt. Deutet man die neuen Gruppen mit I_2 , II_2 , \dots , XI_2 , \overline{XI}_2 an und legt den alten Gruppen den Fussindex 1 bei, so ist der Schichtung nach

$$I_2 = VII_2 = III_1 \text{ (gelb)}, II_2 = \overline{XI}_2 = I_1 \text{ (rot)}, IV_2 = V_1 \text{ (blau)}, \\ V_2 = VIII_1 \text{ (schwarz)},$$

während die Schichtungen von III_2 , VI_2 , $VIII_2$, IX_2 , X_2 , XI_2 neu sind. Von diesen ist $VIII_2$ gekennzeichnet durch die Eigenschaft, dass keine zwei Ikosaederpunkte die nämliche Projektion haben; während die Projektionsachse der Gruppen III_2 , VI_2 , IX_2 , X_2 , XI_2 nach Nr. 9 in einer zwei Gegenkanten enthaltende Ebene angenommen werden kann, ist dies also bei der Gruppe $VIII_2$ unmöglich. Es betragen die ersten drei Abstandsverhältnisse

$$\begin{array}{llll} \text{im Falle } III_2 & \dots & 2, & 1 + e, 1 + e, \\ \text{,, ,, } VI_2 & \dots & 2, & 2, 1 + e, \\ \text{,, ,, } IX_2 & \dots & e - 1, & 3 + e, 2, \\ \text{,, ,, } X_2 & \dots & 1 + e, & 1 + e, 2, \\ \text{,, ,, } XI_2 & \dots & 4, & e - 1, 2. \end{array}$$

In Verbindung mit den Schichtungssymbolen ergibt sich hieraus, dass die Schichtungsebenen (Fig. 3) in diesen Fällen der Reihe nach in Parallelen zu pp_2^I , pp_2^{II} , up_2^{III} , qp_2^{IV} , Op^{IV} auf der Bildebene senkrecht stehen, wo p_2^I , p_2^{II} , p_2^{III} , p_2^{IV} die Mittelpunkte der Segmente qs , rs , sv , ps sind.

Zur Deutung der Ikosaederschichtung des Ausnahmefalles der Gruppe $VIII_2$ betrachten wir die ersten fünf Abstandsverhältnisse

$$1 + e, 2, 1 + e, 1 + e, 2.$$

Sind nun in der Projektion auf die Mittelebene senkrecht zur Ikosaederdiagonale (1,12) (Fig. 6) die Eckpunkte 1 und 2 der erste und der zweite Schnittpunkt, so ergibt sich aus dem zweiten, dritten, vierten und fünften der fünf Abstände, dass die Ebene durch die Eckpunkte 2, 3, 4, 5, 6 von der zweiten, vierten, sechsten, fünften und dritten Schichtungsebene in durch diese Punkte gelegte Parallelen a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 zur Projektion der Kante (1,3) geschnitten wird. Weiter bestimmt dann das erste Schichtungssegment

1 + e die Lage der Spur a₁ der ersten Schichtungsebene durch den Eckpunkt 1 und findet man, in Verbindung mit dem bekannten Wert der Entfernung des Punktes 1 von der Ebene durch 2, 3, 4, 5, 6, für den Winkel φ zwischen dieser Ebene und den Schichtungsebenen

$$\text{tang } \phi = \frac{1}{5} \sqrt{250 - 110 e} \dots\dots\dots 1)$$

Das hinzugefügte Dodekaeder in polarreziproken Stellung wird uns bei der Bestimmung der entsprechenden Dodekaederschichtungen sogleich nützlich sein.

20. Wir bestimmen jetzt die den Schichtungen der Ikosaedergruppen III₂, VI₂, VIII₂, IX₂, X₂, XI₂ entsprechenden Dodekaederschichtungen mittels der Bemerkung, dass die Geraden pp₂^I, pp₂^{II}, up₂^{III}, qp₂^{IV}, Op^{IV} der Fig. 3, welche die Ikosaedergruppenschichtungen kennzeichnen, der Reihe nach zusammenfallen oder parallel sind zu den Verbindungslinien

- des Eckpunktes 6 mit der Mitte des Segmentes (5, 10),
- „ „ 3 „ „ „ „ „ (4, 5),
- „ „ 3 „ „ „ „ „ (1, 7),
- „ „ 6 „ „ „ „ „ (4, 8),
- der Eckpunkte 8 und 13.

Hieraus sind die Dodekaederschichtungen abgeleitet und in die Figuren 7^a, 7^b, 7^c, 7^d, 7^e niedergelegt; in diesen Figuren sind auch wieder die Seitenzahlen der Schnittpolygone angegeben.

Die der Gruppe VIII₂ entsprechende Dodekaederschichtung ist in Fig. 8 gegeben; dabei ist die Ebene pq der Fig. 6 Bildebene. Wirklich ist die Neigung der Verbindungslinie (9, 18) durch die Gleichung 1) bestimmt.

21. Sind die Dodekaederschichtungen richtig in die Tafel IV^a eingetragen — und diese Arbeit wird wieder erleichtert durch die Bemerkung, dass die doppelten Mittelpunktsabstände

$$58 + 26 e, 54 + 24 e, 47 + 21 e, 40 + 18 e, 36 + 16 e, \\ 29 + 13 e, 22 + 10 e, 18 + 8 e, 11 + 5 e, 7 + 3 e, 0$$

sich verhalten wie die Koordinaten

$$6 + 2 e, 3 + 3 e, 4 + 2 e, 5 + e, 2 + 2 e, 3 + e, 4, \\ 1 + e, 2, e - 1, 0$$

der Eckpunkte des Z^{600} in Stellung OF_0 (vergleiche die Randschrift der Figur 8 der ersten Abhandlung) und kontrolliert mit Hilfe der Zahl der in den Schichten enthaltenen Eckpunkte des Z^{120} —, so kann man zur Tafel V der Kantenprojektionen aufsteigen und angeben wie die intermediären Schnitte und die Uebergangsformen gebildet sind, und welche die Vielkantigkeit der Eckpunkte der Uebergangsformen ist. Dabei ist nur zu bemerken, dass es Kanten giebt, welche sich als Punkte projizieren und also senkrecht stehen auf dem als Projektionsachse verwendeten Hauptstrahle OK_0 des Z^{120} . Für die einzige sich in α projizierende Kante ist dies aus der angenommenen Stellung des Z^{120} einleuchtend.

c) Die Stellung OF_0 .

22. Diesem Falle entsprechen die Tafeln VI^a, VI^b, VII.

Die in der Ueberschrift der Tafel VI^a auftretenden Mittelpunktsabstände stimmen mit der Randschrift der Figur 14 der ersten Abhandlung überein, die erste Reihe der Anzahlen der Dodekaeder der verschiedenen Gruppen III₁, III₂, . . . ist der zweiten Kolonne (B , erste Querlinie) der Tabelle I der ersten Abhandlung entnommen. Auch hier tritt die Besonderheit zweier Untergruppen von Dodekaedern mit einem sich im Nullpunkte projizierenden Schwerpunkt auf, wie dies sich bei der in Tafel VI^b schematisierten Vorarbeit der Bestimmung der benachbarten Ikosaeder ergibt. Von den 12 Ikosaedern der Mittelgruppe erhalten zehn das Schichtungssymbol ($e f^2 h^2 i^2 h'2 f'^2 e'$), zwei das Schichtungssymbol ($d g^5 g^5 d'$).

23. Die hier auftretenden Ikosaederschichtungen I₃, II₃, . . . , VIII₃, IX₃, \overline{IX}_3 sind fast alle bekannt; es ist nämlich I₃ = IV₃ = \overline{IX}_3 die Körperdiagonalschichtung des Ikosaeders und

$$\begin{aligned} \text{II}_3 = \text{V}_3 = \text{III}_1, \quad \text{III}_3 = \text{VI}_1, \quad \text{VI}_3 = \text{X}_2, \quad \text{VII}_3 = \text{III}_2, \\ \text{VIII}_3 = \text{IV}_1. \end{aligned}$$

Nur die Schichtung der Gruppe IX₃ ist neu; ihr entspricht offenbar das Büschel auf der Bildebene von Fig. 3 senkrecht stehender Ebenen, deren Spuren der Gerade Or parallel sind.

Die entsprechenden Dodekaederschichtungen sind also für I₃, IV₃, \overline{IX}_3 die Schichtung (5555) parallel zweier Seitenflächen, für II₃, V₃ die Schichtung (2424242) parallel einer Mittelebene durch zwei parallele Kanten, für III₃, VI₃, VII₃, VIII₃ der Reihe nach die Schichtungen der Figuren 4^c, 7^d, 7^a, 4^a und für IX₃ die neue

Schichtung (121222222121), wobei (Fig. 9) die in der Ebene durch zwei parallele Kanten liegende Mittelpunktsparallele zu (4,8) Projektionsachse ist.

24. Bei der Ableitung der in Tafel VII niedergelegten Kantenprojektionen ergeben sich wieder sich in Punkte projizierende Kanten; die Zahl dieser in den Punkt a auftretenden Kant ist selbstverständlich fünf, da eine fünfkantige Seitenfläche in a auf der Projektionsachse senkrecht steht.

In Bezug auf die Ableitung der Zahl f der Uebergangsformen ist etwas besonderes zu erwähnen; es tritt hier zum ersten Male die Grösse f' der in Nr. 4 gegebenen Formel $f = \bar{r} + f'$ auf. Bei den Uebergangsformen ereignet es sich hier nämlich, dass der Schnittraum bisweilen eine Seitenfläche eines Dodekaeders aufnimmt. In diesem Falle ist, weil jede Seitenfläche zwei Dodekaedern angehört, die Dodekaedernanzahl mit einer im Schnitttraume liegenden Seitenfläche bei der Berechnung von f für die Hälfte in Rechnung zu bringen. So ist $f = 1$ bei a die Hälfte der Anzahl der Dodekaeder der ersten Gruppe und man hat für d

$$17 = \frac{2}{2} + 5 + 10 + \frac{2}{2},$$

usw. Wo dieser besondere Umstand auftritt, ist die Seitenzahl der entsprechenden Fläche überstrichen.

d) Die Stellung OR_0 .

25. In ganz derselben Weise findet man hier die einfachen Resultate der Tafeln VIII^a, VIII^b, IX. Dabei treten keine neue Schichtungen und überhaupt keine neue Bemerkenswürdigkeiten auf.

Während die Gruppe I_4 nur ein Dodekaeder enthält, bilden die Schnittebenen des Schnitttraumes senkrecht auf OR_0 mit den die Dodekaeder der Gruppen II_4 , III_4 , IV_4 , V_4 tragenden Räumen der Reihe nach bei II_4 ein Dodekaeder, bei III_4 ein Ikosaeder, bei IV_4 ein Dodekaeder und bei V_4 das halbbreguläre gleichflächige Polyeder (32, 60, 30), welches der Kombination (30, 60, 32) von Dodekaeder und Ikosaeder in Gleichgewicht (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 189 und 195) polarreziprok verwandt ist. Dies wird leicht abgeleitet aus der Schichtung der Eckpunkte des Z^{600} in Stellung OE_0 (vergleiche Tafel X).

II. Das Z^{600} .

a.) Die Stellung OE_0 .

26. Die in Tafel X angegebene Projektionen der 600 begrenzenden Tetraeder, auf den gewählten Hauptstrahl OE_0 als Achse, kann, unabhängig von den vorhergehenden Entwicklungen, aus den Tabellen der ersten Abhandlung abgeleitet werden. Es gibt die Tabelle I (Koordinatenstellung des Z^{600}) in der ersten Kolonne (A , Zelldiagonale) die Entfernung x_1 der 120 Eckpunkte vom Zellmittelpunkt, während aus der Tabelle II (Kanten des Z^{600}) zu entnehmen ist, wie die Eckpunkte sich zu vieren zu Tetraedereckpunkten verbinden. Mehr braucht man offenbar nicht.

Nachdem das Z^{120} schon in der in Rede stehende Richtung untersucht worden ist, führen jedoch beim Z^{600} einfache Reziprozitätsbetrachtungen schneller zum Ziele. Und gerade im Falle der Lageverhältnisse der 600 Tetraeder des Z^{600} in Stellung OE_0 ist diese Reziprozität am durchsichtlichsten. So ist wirklich Tafel X unmittelbar aus Tafel VIII^a abzulesen, wie wir zunächst betonen wollen; dabei sprechen wir, mit Unterdrückung des Wortes „Tafel“, der Kürze wegen von VIII^a und X.

Die neun Horizontalreihen und die fünfzehn Vertikalreihen von VIII^a gehen in die neun Vertikalreihen und die fünfzehn Horizontalreihen von X über; dabei tauschen die Anzahlgruppen (1, 12, 20, 12, 30, 12, 20, 12, 1) und (20, 20, 30, 60, 60, 60, 20, 60, 20, 60, 60, 60, 30, 20, 20) ihre Rollen um. Bemerkte man noch, dass die Mittelpunktsabstände

$$2 + 2e, 3 + e, 1 + e, 2, 0$$

der Vertikalreihen von X proportional sind zu den Schwerpunktsabständen

$$11 + 5e, 9 + 4e, \frac{11 + 5e}{2}, \frac{7 + 3e}{2}, 0$$

der Dodekaedergruppen von VIII^a vom Mittelpunkt des Z^{120} , so ist man völlig imstande das tragende Gitter von X zu zeichnen.

27. Wie die 600 Tetraeder des Z^{600} in das nun fertige Gitter einzutragen sind, wird vielleicht am leichtesten verstanden mittels Tafel XI, worin VIII^a (schwarz) und X (rot) mit einander zur Dec-

kung gebracht sind. Ist zunächst VIII^a wiederholt worden mit dieser besondern Anordnung der Horizontalreihen, dass die Zwischenräume nicht mehr einander gleich sondern den Zwischenräumen der Vertikalreihen von X proportional erscheinen, so hat man weiter nur (in Rot) auf jeder Vertikalreihe die Punkte zu verbinden, welche schon Eckpunkte des Z^{120} tragen, und endlich bei jedem Punkte des Gitters, welcher schon eine schwarze Zahl trägt, eine bestimmte rote Zahl hinzuschreiben, welche folgendermassen gefunden wird. Multipliziert man die schwarze Zahl (z. B. den 5 der vierten Reihe und sechsten Kolonne) mit der Zahl (12) der Reihe und dividiert die Zahl (60) der Kolonne in das erhaltene Produkt (60), so bestimmt man das rote Ziffer (1), welches dem betrachteten Gitterpunkte beizulegen ist.

28. Ist Tafel X einmal gefunden, so leitet man aus ihr die Anordnung der Kanten und die Schnitte ab, wie dies beim Z^{120} geschah. Diese Arbeit ist leicht, weil das Tetraeder von einer Ebene nur in Dreiecken und Vierecken geschnitten werden kann; die Resultate gibt Tafel XII. Wir bemerken noch, dass die genaue Form der Seitenflächen unmittelbar aus Tafel X abzulesen ist. So wird (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 225) der Schnitt (12, 30, 20) begrenzt von 20 roten gleichseitigen Dreiecken und ist dieser also ein rotes Ikosaeder; so wird der Schnitt (72, 180, 110) eingeschlossen von 20 orangefarbigen gleichseitigen Dreiecken, 30 gelben Rechtecken und 60 grünen gleichschenkligen Dreiecken, der erste Schnitt (132, 330, 200) von 60 grünen gleichschenkligen Dreiecken, 60 blauen gleichschenkligen Trapezen, 60 indigo gleichschenkligen Dreiecken und 20 violetten gleichseitigen Dreiecken, der zweite Schnitt (132, 330, 200) von 60 blauen gleichschenkligen Dreiecken, 60 indigo gleichschenkligen Trapezen, 20 violetten gleichseitigen Dreiecken und 60 schwarzen gleichschenkligen Dreiecken, usw.

Auch hier kann wieder leicht angegeben werden, welches Polyeder die Schnittebenen des Schnitttraumes senkrecht auf OE_0 mit den die Tetraeder einer Gruppe tragenden Räumen bei Verlängerung zusammen einschliessen. Man findet, wieder mit Hilfe der Schichtung der 600 Ecken des Z^{120} in Stellung OR_0 (Tafel VIII_a) für die

Gruppen I (rot), II (orange), VII (violett) ein Ikosaeder,

Gruppe III (gelb) das schon in Nr. 25 vorgeführte Polyeder (32, 60, 30),

Gruppen IV (grün), V (blau) das halbbreguläre gleichflächige Polyeder (32, 90, 60),

Gruppen VI (indigo), VIII (schwarz) das halbreguläre gleichflächige Polyeder (62, 120, 60).

Die neuen halbregulären gleichflächigen Polyeder (32, 90, 60) und (62, 120, 60) sind (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 189) dem sechsten und dem fünfzehnten der Archimedischen Vielfache polarreziprok verwandt.

29. War die Bestimmung der Seitenzahl der den Schnittkörper des Z^{600} begrenzenden Polygone leichter als bei Z^{120} , bei der Bestimmung der Vielkantigkeit der Eckpunkte der Schnitte, zu welcher wir uns jetzt wenden, tritt das umgekehrte Verhältnis ein. Allerdings können wir uns auch hier wieder auf die Uebergangsformen beschränken, weil die Eckpunkte der intermediären Schnitte (vergleiche Nr. 3 am Schluss) sämtlich *fünfkantig* sind. Aber die von den Zelleckpunkten herrührenden Eckpunkte eines intermediären Schnittes können von fünf- bis zwölfkantig sein. Denn das einem Zelleckpunkte des Z^{600} benachbarte Ikosaeder wird vom diesen Punkt enthaltenden Schnittraum in einem Polygone geschnitten, welches von fünf bis zwölf Seiten und also auch von fünf bis zwölf Eckpunkte hat, und die Verbindungslinien dieser Eckpunkte mit dem angenommenen Zelleckpunkte bilden die durch diesen Punkt gehenden Kanten des Schnittes. Allein diese Formulierung der Frage der Vielkantigkeitszahlen enthält auch sogleich ihre Lösung. Denn die oben erwähnten Polygone werden unmittelbar aus Tafel VIII^b abgeleitet als die Schnitte der dort auf $abc\dots$ projizierten Ikosaeder mit in bestimmten Punkten — und zwar für das zweite, dritte, vierte und fünfte Ikosaeder der Reihe nach in b, c, d, e — auf dieser Gerade senkrecht stehenden Räumen. So findet man, in Verbindung mit den bekannten Ikosaederschichtungen, dass die in den vier Uebergangsformen liegenden Zelleckpunkte der Reihe nach fünfkantig, sechskantig, zehnkantig und sechskantig sind. Diese nicht in Tafel XII erwähnten Resultate werden in die tabellarische Uebersicht am Schluss dieser Abhandlung aufgenommen werden.

Die oben erhaltenen sich auf die Vielkantigkeit der Eckpunkte des Schnittes beziehenden Resultate können wieder auf verschiedene Weisen kontrolliert werden. Zunächst ist, wenn x und y die Zahlen der fünfkantigen und t -kantigen Eckpunkte des Schnittes angeben

$$x + y = e, \quad 5x + ty = 2k.$$

Und weiter ist die Zahl y im Allgemeinen entweder Null oder der Zahl e' der Zelleckpunkte des Schnittes gleich. Nur wenn die

Gruppe dieser e' Zelleckpunkte sich zerlegt in Untergruppen verschiedenen Charakters, welcher Fall hier noch nicht auftritt, wird es notwendig sein für jede dieser Untergruppen, welche dann auch in die Tafel der benachbarten Ikosaeder erscheinen wird, eine eigene Vielkantigkeitszahl zu suchen.

b) Die Stellung OK_0 .

30. Bei der Ableitung der in Tafel XIII angegebenen Projektionen der 600 Tetraeder des Z^{600} auf einen Hauptstrahl OK_0 als Achse aus der Tafel VI^a, welche für die 120 Dodekaeder des Z^{120} in Stellung OP_0 das nämliche leistet, begegnet uns eine Schwierigkeit. Multipliziert man die Zahlen (5, 4, 3, 5, 2) der vierten Kolonne der Reihe nach mit den Zahlen (2, 5, 10, 2, 5) der entsprechenden Horizontalreihen, so erhält man die Produkte (10, 20, 30, 10, 10), welche bei Teilung durch die Zahl 20 der Kolonne die Quotiente $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ liefern, deren Summe richtig vier ist. Hieraus ist zu entnehmen, dass die Gruppe der zwanzig Tetraeder der vierten Reihe der Tafel XIII in zwei (= dem gemeinsamen Nenner der gebrochenen Quotiente) Untergruppen von zehn Tetraedern zerlegt werden muss, welche Untergruppen, obgleich sie die nämliche Schwerpunktsprojektion besitzen in der Projektion ihrer Eckpunkte von einander verschieden sind. Aus der bekannten Mittelpunktsentfernung des Schwerpunktes, $\frac{1}{4}(11 + 5e)$ nach dem Masstabe der Ueberschrift der Tafel XIII, findet man dann weiter, dass man zwischen den beiden in Fig. 10 vorgeführten Anordnungen zu wählen hat und von diesen ist dann, wie sich aus den Tabellen der ersten Abhandlung ergibt, die zweite die wirkliche. Wie Tafel XIII anzeigt, wiederholt sich die Zerlegungsnotwendigkeit der Gruppen in Untergruppen mit gemeinschaftlicher Schwerpunktsprojektion sehr oft, ist aber jedesmal die Zahl der Untergruppen zwei.

Bei der Ableitung von Tafel XIV aus Tafel XIII ist nur zu bemerken, dass die beiden Untergruppen von 10 und 2 Dodekaedern, welche zusammen die Mittelgruppe von Tafel VI^a bilden, sich zu einer Gruppe mit den auf (l, m, n, o, p, q) fallenden Produkte (10, 30, 10, 20, 20, 30) vereinen, während die bei der Vielkantigkeit der Zelleckpunkte zu betrachtende Mittelgruppe von zwölf Ikosaedern sich umgekehrt in zwei Untergruppen von zehn und zwei Ikosaedern

zerlegt, wie Tafel VI^b zeigt, woraus hervorgeht, dass zehn der zwölf Zelleckpunkte achtkantig, die beiden übrigen zehnkantig sind.

c) **Die Stellung OF_0 .**

31. Bei der Ableitung der Projektionen der 600 Tetraeder des Z^{600} auf einen Hauptstrahl OF_0 als Achse aus Tafel IV^a haben wir wieder die oben schon beschriebene Schwierigkeit der Zerlegung der Gruppen in Untergruppen zu bekämpfen. Wie Tafel XV zeigt, ereignet es sich hier sogar, dass eine Gruppe, die Mittelgruppe, sich in *drei* Untergruppen zerlegt.

Die Konstruktion der Tafel XV gibt zu keiner Bemerkung Anlass. Ebenso wenig die Ableitung der Tafel XVI, welche wieder die Kantenprojektionen und die Charaktere der Schnittpolyeder kennen thut, und die Berechnung der Vielkantigkeitzahlen. Nur mag noch betont werden, dass in Tafel XVI die überstrichenen Seitenflächen wieder erscheinen und die Mittelgruppe der acht benachbarten Ikosaeder sich in zwei Untergruppen von sechs und zwei Ikosaedern zerlegt.

d) **Die Stellung OR_0 .**

32. Diesem letzten Falle entsprechen die Tafeln XVII und XVIII, von welchen die erste aus Tafel II^a abgeleitet werden kann. Dabei ist es nicht nur die Mittelgruppe sondern sind es auch zwei in gleicher Entfernung von der Mitte liegende Gruppen, welche in drei Teile zerfallen. In diesen der Reziprozitätsanwendung innewohnenden Schwierigkeiten geben die Tabelle der ersten Abhandlung immer sichere und zuverlässige Auskunft.

Auch hier mag wieder angewiesen werden, welche Polyeder die Schnittebenen der die Tetraeder einer Gruppe tragenden Räume mit dem Schnitttraume senkrecht auf OR_0 bilden. Man findet, wieder mit Hilfe der Schichtung der Ecke des Z^{120} in Stellung OE_0 (vergleiche Tafel II^a), der Reihe nach bei der Gruppe mit

4 Tetraedern ..	(4, 6, 4)	ein l. Tetraeder,
12 „ ..	(8, 18, 12)	„ l. Pyramidentetraeder,
24 „ ..	(14, 36, 24)	„ Pyramidenhexaeder.
12 „ ..	(8, 18, 12)	„ r. Pyramidentetraeder,
4 „ ..	(4, 6, 4)	„ r. Tetraeder,
24 „ ..	(14, 36, 24)	„ l. Hexakistetraeder,
12 „ ..	(8, 18, 12)	„ r. Pyramidentetraeder,
12 „ ..	(14, 24, 12)	„ l. Triakistetraeder,
4 „ ..	(4, 6, 4)	„ l. Tetraeder,
24 „ ..	(14, 36, 24)	„ Pyramidenhexaeder,
4 „ ..	(4, 6, 4)	„ r. Tetraeder,
12 „ ..	(8, 18, 12)	„ l. Pyramidentetraeder,
12 „ ..	(8, 18, 12)	„ r. Pyramidentetraeder,
12 „ ..	(14, 24, 12)	„ l. Triakistetraeder,
24 „ ..	(14, 36, 24)	„ Pyramidenhexaeder,
24 „ ..	(14, 36, 24)	„ r. Hexakistetraeder,
4 „ ..	(4, 6, 4)	„ l. Tetraeder,
12 „ ..	(8, 18, 12)	„ l. Pyramidentetraeder,
12 „ ..	(14, 24, 12)	„ l. Triakistetraeder,
24 „ ..	(14, 36, 24)	„ l. Hexakistetraeder,
24 „ ..	(14, 36, 24)	„ l. Hexakistetraeder,
6 „ ..	(8, 12, 6)	„ Hexaeder,
24 „ ..	(14, 36, 24)	„ r. Hexakistetraeder,
usw.		

Die Ableitung dieser Formen liefert keine Schwierigkeit, wenn die bei der Schichtung der Eckpunkte des Z^{120} in Stellung OE_0 auftretenden polarreziproken Polyeder bekannt sind; weil diese Polyeder in der dritten Abhandlung in Bild erscheinen werden, erörtern wir diesen Punkt hier nicht weiter.

III. Tabellarische Uebersicht der Resultate.

33. Wird ein Schnitt vom Symbole

$$a^b c^d \dots (P, Q, R) \alpha^\beta \gamma^\delta \dots$$

gekennzeichnet, so soll dies aussagen, dass das Schnittpolyeder von b Vielecken mit a Seiten, d Vielecken mit c Seiten, usw. begrenzt wird, P Eckpunkte, Q Kanten, R Seitenflächen hat und dass durch β von den Eckpunkten α Kanten, durch δ von den

Eckpunkten γ Kanten gehen, usw. Diesem Schnitte irgend eines der beiden Zelle Z^{120} , Z^{600} ist dann der Schein

$$\alpha^\beta \gamma^\delta \dots (R, Q, P) a^b c^d \dots$$

des andren polarreziprok verwandt, welcher von β Vielecken mit α Seiten, δ Vielecken mit γ Seiten, usw. eingeschlossen wird, R Eckpunkte, Q Kanten, P Seitenflächen zählt, während b der Eckpunkte a -kantig, d der Eckpunkte c -kantig sind, usw. Weil diese Scheine sich unmittelbar aus den Schnitten ablesen lassen beschränken wir die tabellarische Uebersicht der Resultate auf die Schnitte.

Zur leichteren Orientirung der Schnittstelle lassen wir dem Symbole einer Uebergangsform die entsprechende Buchstabe des betreffenden Hauptstrahles, dem Symbole eines intermediären Schnittes die Buchstaben der beiden benachbarten Uebergangsformen vorangehen.

34. Die Schnitte des Z^{120} .

a) Stellung $0E_0$.

ab	$3^4(4, 6, 4) 3^4$	i . . .	$3^{12} 4^6 5^{12} 6^{12} (56, 96, 42) 3^{32} 4^{24}$
b	$3^4(4, 6, 4) 3^4$	ik . . .	$3^4 4^6 5^{12} 7^{24} (88, 132, 46) 3^{88}$
bc	$3^4 6^4 (12, 18, 8) 3^{12}$	k . . .	$3^4 5^{24} 6^{12} (64, 102, 40) 3^{52} 4^{12}$
c	$3^4 6^4 (12, 18, 8) 3^{12}$	kl	$5^{12} 6^{28} (76, 114, 40) 3^{76}$
cd	$4^6 6^8 (24, 36, 14) 3^{24}$	l	$5^{12} 6^{28} (76, 114, 40) 3^{76}$
d	$4^6 6^8 (24, 36, 14) 3^{24}$	lm . . .	$3^{12} 6^{28} 8^{12} (100, 150, 52) 3^{100}$
de	$4^{12} 6^8 8^6 (48, 72, 26) 3^{48}$	m . . .	$3^{12} 4^{12} 6^{28} (76, 126, 52) 3^{52} 4^{24}$
e	$3^4 4^{12} 6^{10} (36, 60, 26) 3^{24} 4^{12}$	mn . . .	$4^{12} 5^{12} 6^{16} 8^{12} (100, 150, 52) 3^{100}$
ef	$3^4 6^{22} (48, 72, 26) 3^{48}$	n	$5^{12} 6^{28} (76, 114, 40) 3^{76}$
f	$5^{12} 6^{10} (40, 60, 22) 3^{40}$	no . . .	$3^4 5^{12} 6^{16} 7^{12} (84, 126, 44) 3^{84}$
fg	$5^{12} 6^{10} (40, 60, 22) 3^{40}$	o . . .	$3^4 5^{24} 6^{16} (72, 114, 44) 3^{60} 4^{12}$
g	$5^{12} 6^{10} (40, 60, 22) 3^{40}$	op . . .	$3^{12} 6^{32} 8^{12} (108, 162, 56) 3^{108}$
gh	$4^{12} 6^{10} 7^{12} (64, 96, 34) 3^{64}$	p . . .	$3^{12} 4^{12} 6^{32} (84, 138, 56) 3^{60} 4^{24}$
h	$3^4 4^{12} 6^{18} (52, 84, 34) 3^{40} 4^{12}$	pq . . .	$4^{12} 5^{12} 6^{20} 8^{12} (108, 162, 56) 3^{108}$
hi	$3^{16} 6^{12} 8^{18} (88, 132, 46) 3^{88}$	q	$5^{24} 6^{20} (78, 120, 44) 3^{72} 4^6$

b) Stellung OK_0 .

ab $3^2 4^3 (6, 9, 5) 3^6$
b $3^2 4^3 (6, 9, 5) 3^6$
bc $3^6 6^2 8^3 (18, 27, 11) 3^{18}$
c $3^6 6^5 (15, 24, 11) 3^{12} 4^3$
cd $4^6 6^5 (18, 27, 11) 3^{18}$
d $4^6 6^5 (18, 27, 11) 3^{18}$
de $4^6 6^{11} (30, 45, 17) 3^{30}$
e $4^6 6^{11} (30, 45, 17) 3^{30}$
ef . . . $3^6 4^6 6^2 8^9 (42, 63, 23) 3^{42}$
f $3^6 4^9 6^8 (30, 51, 23) 3^{18} 4^{12}$
fg $4^3 5^6 6^{14} (42, 63, 23) 3^{42}$
g $5^{12} 6^8 (36, 54, 20) 3^{36}$
gh . . . $4^6 5^6 6^8 7^6 (48, 72, 26) 3^{48}$
h . . . $3^2 4^6 5^6 6^{12} (42, 66, 26) 3^{36} 4^6$
hi $3^2 4^3 6^{24} (54, 81, 29) 3^{54}$
i $4^3 5^6 6^{18} (50, 75, 27) 3^{50}$
ik . $3^{12} 4^3 5^6 8^{18} (74, 111, 39) 3^{74}$
k . . . $4^3 5^6 6^{12} 8^6 (62, 99, 39) 3^{50} 4^{12}$
kl . $4^{15} 6^{12} 7^6 8^6 (74, 111, 39) 3^{74}$
l $4^{21} 6^{12} 7^6 (62, 99, 39) 3^{50} 4^{12}$
lm $3^6 4^6 5^{12} 7^{12} 8^9 (86, 129, 45) 3^{86}$
m . $3^{12} 5^{12} 6^6 7^6 8^9 (80, 123, 45) 3^{74} 4^6$

mn . $3^{12} 6^{18} 7^6 8^9 (86, 129, 45) 3^{86}$
n $3^6 5^{18} 6^{15} (62, 99, 39) 3^{50} 4^{12}$
no . . $3^6 5^6 6^{27} 8^6 (86, 129, 45) 3^{86}$
o . . $3^6 4^6 5^{12} 6^{21} (71, 114, 45) 3^{50} 4^{21}$
op $4^6 5^{12} 6^{15} 7^{12} (86, 129, 45) 3^{86}$
p . $4^6 5^{12} 6^{15} 7^{12} (86, 129, 45) 3^{86}$
pq $3^2 4^6 5^{12} 6^9 7^{18} (90, 135, 47) 3^{90}$
q . $3^2 5^{12} 6^{21} 7^6 (78, 117, 41) 3^{78}$
qr $3^2 4^6 5^{12} 6^9 7^{18} (90, 135, 47) 3^{90}$
r . $3^8 4^6 5^{12} 6^{21} (72, 117, 47) 3^{54} 4^{18}$
rs . . $3^6 5^6 6^{29} 8^6 (90, 135, 47) 3^{90}$
s $5^{12} 6^{29} (78, 117, 41) 3^{78}$
st . $3^6 5^6 6^{23} 7^{12} (90, 135, 47) 3^{90}$
t . . $3^6 4^6 5^6 6^{29} (78, 123, 47) 3^{66} 4^{12}$
tu $3^6 4^6 5^{12} 6^8 7^{12} 8^9 (102, 153, 53) 3^{102}$
u . $3^6 4^3 5^{12} 6^{26} (78, 123, 47) 3^{66} 4^{12}$
uv . . $4^3 5^{12} 6^{26} 7^6 (90, 135, 47) 3^{90}$
v . . $4^3 5^{24} 6^{14} 7^6 (84, 129, 47) 3^{78} 4^6$
vw $3^{12} 4^3 6^{26} 7^6 8^{12} (114, 171, 59) 3^{114}$
w $3^{12} 4^3 5^{12} 6^{20} 8^6 9^6 (102, 159, 59) 3^{90} 4^{12}$
wx $4^{15} 5^{12} 6^{20} 8^6 9^6 (114, 171, 59) 3^{114}$
x . . . $4^{24} 6^{26} 8^6 (96, 150, 56) 3^{84} 4^{12}$

c) Stellung OF_0 .

ab $4^5 5^2 (10, 15, 7) 3^{10}$
b $4^5 5^2 (10, 15, 7) 3^{10}$
bc $3^{10} 8^5 10^2 (30, 45, 17) 3^{30}$
c $3^{10} 5^2 6^5 (20, 35, 17) 3^{10} 4^{10}$
cd $5^{12} 6^5 (30, 45, 17) 3^{30}$
d $5^{12} 6^5 (30, 45, 17) 3^{30}$
de $4^5 5^2 6^{15} (40, 60, 22) 3^{40}$
e $4^5 5^2 6^{15} (40, 60, 22) 3^{40}$
ef . . $3^{10} 4^5 5^2 8^{15} (60, 90, 32) 3^{60}$
f . $3^{10} 4^{10} 5^2 6^{10} (40, 70, 32) 3^{20} 4^{20}$
fg . . $4^5 5^{12} 6^{10} 8^5 (60, 90, 32) 3^{60}$

g $5^{12} 6^{15} (50, 75, 27) 3^{50}$
gh $3^{10} 5^{10} 6^5 8^{10} 10^2 (70, 105, 37) 3^{70}$
h . $3^{10} 5^{10} 6^{15} 10^2 (60, 95, 37) 3^{50} 4^{10}$
hi . . $4^{10} 6^{25} 10^2 (70, 105, 37) 3^{70}$
i $4^{10} 5^{12} 6^{15} (60, 95, 37) 3^{50} 4^{10}$
ik . $4^{10} 5^{12} 6^{15} 8^{10} (90, 135, 47) 3^{90}$
k . $3^{10} 4^{10} 5^2 6^{25} (70, 115, 47) 3^{50} 4^{20}$
kl . $3^{10} 5^2 6^{25} 8^{10} (90, 135, 47) 3^{90}$
l $5^{12} 6^{25} (70, 105, 37) 3^{70}$
lm $3^{10} 5^{12} 6^{10} 8^{15} (90, 135, 47) 3^{90}$
m . $3^{10} 4^5 5^{12} 6^{20} (70, 115, 47) 3^{50} 4^{20}$

mn	$4^5 5^{12} 6^{20} 7^{10} (90, 135, 47) 3^{90}$	p	$3^{10} 4^{10} 5^2 6^{30} (80, 130, 52) 3^{60} 4^{20}$
n	$4^5 5^{22} 6^{10} 7^{10} (85, 130, 47) 3^{80} 4^5$	pq	$3^{20} 5^2 6^{10} 7^{10} 8^{20} (120, 180, 62) 3^{120}$
no	$4^5 5^{12} 6^{20} 7^{10} (90, 135, 47) 3^{90}$	q	$3^{10} 5^{12} 6^{20} 7^{10} (90, 140, 52) 3^{80} 4^{10}$
o	$\dots 5^{12} 6^{30} (80, 120, 42) 3^{80}$	qr	$4^{10} 5^{10} 6^{20} 7^{10} 10^2 (100, 150, 52) 3^{100}$
op	$4^{10} 5^{12} 6^{20} 8^{10} (100, 150, 52) 3^{100}$	r	$4^{20} 5^{12} 6^{10} 10^{10} (80, 130, 52) 3^{60} 4^{20}$

d) Stellung OR_0 .

a	$\dots 5^{12} (20, 30, 12) 3^{20}$	e	$\dots 5^{12} 6^{20} (60, 90, 32) 3^{60}$
ab	$\dots 5^{12} (20, 30, 12) 3^{20}$	ef	$4^{30} 6^{20} 10^{12} (120, 180, 62) 3^{120}$
b	$\dots 5^{12} (20, 30, 12) 3^{20}$	f	$\dots 3^{20} 4^{30} 5^{12} (60, 120, 62) 4^{60}$
bc	$\dots 3^{20} 10^{12} (60, 90, 32) 3^{60}$	fg	$3^{20} 5^{12} 8^{30} (120, 180, 62) 3^{120}$
c	$\dots 3^{20} 5^{12} (30, 60, 32) 4^{30}$	g	$\dots 5^{12} 6^{30} (80, 120, 42) 3^{80}$
cd	$\dots 5^{12} 6^{20} (60, 90, 32) 3^{60}$	gh	$\dots 5^{12} 6^{30} (80, 120, 42) 3^{80}$
d	$\dots 5^{12} 6^{20} (60, 90, 32) 3^{60}$	h	$\dots 5^{12} 6^{30} (80, 120, 42) 3^{80}$
de	$\dots 5^{12} 6^{20} (60, 90, 32) 3^{60}$		

35. Die Schnitte des Z^{600} .a) Stellung OE_0 .

ab	$\dots 3^{20} (12, 30, 20) 5^{12}$	cd	$\dots 3^{140} 4^{60} (132, 330, 200) 5^{132}$
b	$\dots 3^{20} (12, 30, 20) 5^{12}$	d	$\dots 3^{140} (72, 210, 140) 5^{60} 10^{12}$
bc	$\dots 3^{80} 4^{30} (72, 180, 110) 5^{72}$	de	$\dots 3^{140} 4^{60} (132, 330, 200) 5^{132}$
c	$\dots 3^{60} (32, 90, 60) 5^{12} 6^{20}$	e	$\dots 3^{80} (42, 120, 80) 5^{12} 6^{30}$

b) Stellung OK_0 .

ab	$\dots 3^{30} 4^5 (22, 55, 35) 5^{22}$	ef	$\dots 3^{120} 4^{50} (112, 280, 170) 5^{112}$
b	$\dots 3^{30} (17, 45, 30) 5^{12} 6^5$	f	$\dots 3^{120} 4^{10} (72, 200, 130) 5^{62} 9^{10}$
bc	$\dots 3^{60} 4^{20} (52, 130, 80) 5^{52}$	fg	$\dots 3^{130} 4^{55} (122, 305, 185) 5^{122}$
c	$\dots 3^{60} (32, 90, 60) 5^{22} 7^{10}$	g	$\dots 3^{130} 4^{25} (92, 245, 155) 5^{32} 8^{10}$
cd	$\dots 3^{100} 4^{40} (92, 230, 40) 5^{92}$	gh	$\dots 3^{150} 4^{65} (142, 355, 215) 5^{142}$
d	$\dots 3^{100} 4^{30} (82, 210, 130) 5^{80} 10^2$	h	$\dots 3^{150} 4^{15} (92, 255, 165) 5^{82} 10^{10}$
de	$\dots 3^{100} 4^{40} (92, 230, 140) 5^{92}$	hi	$\dots 3^{150} 4^{65} (142, 355, 215) 5^{142}$
e	$\dots 3^{110} 4^{20} (77, 205, 130) 5^{72} 10^5$	i	$3^{140} 4^{20} (92, 250, 160) 5^{80} 8^{10} 10^2$

c) Stellung OF_0 .

$ab \dots 3^{38} 4^9 (30, 75, 47) 5^{30}$	$fg \dots 3^{122} 4^{51} (114, 285, 173) 5^{114}$
$b \dots 3^{42} 4^3 (26, 69, 45) 5^{24} 9^2$	$g \dots 3^{128} 4^{39} (105, 270, 167) 5^{102} 10^3$
$bc \dots 3^{50} 4^{15} (42, 105, 65) 5^{42}$	$gh \dots 3^{134} 4^{57} (126, 315, 191) 5^{126}$
$c \dots 3^{56} (30, 84, 56) 5^{24} 8^6$	$h \dots 3^{134} 4^9 (78, 219, 143) 5^{66} 9^{12}$
$cd \dots 3^{80} 4^{30} (72, 180, 110) 5^{72}$	$hi \dots 3^{146} 4^{63} (138, 345, 209) 5^{138}$
$d \dots 3^{92} 4^6 (54, 150, 98) 5^{48} 10^6$	$i \dots 3^{152} 4^{36} (114, 300, 188) 5^{108} 10^6$
$de \dots 3^{104} 4^{42} (96, 240, 146) 5^{96}$	$ik \dots 3^{152} 4^{66} (144, 360, 218) 5^{144}$
$e \dots 3^{104} 4^{18} (72, 192, 122) 5^{66} 9^6$	$k \dots 3^{152} 4^{36} (114, 300, 188) 5^{108} 10^6$
$ef \dots 3^{110} 4^{45} (102, 255, 155) 5^{102}$	$kl \dots 3^{152} 4^{66} (144, 360, 218) 5^{144}$
$f \dots 3^{110} 4^{27} (84, 219, 137) 5^{78} 8^6$	$l \dots 3^{156} 4^{24} (104, 282, 180) 5^{96} 10^6 12^2$

d) Stellung OR_0 .

$a \dots 3^4 (4, 6, 4) 3^4$	$e \dots 3^{116} 4^{12} (72, 198, 128) 5^{60} 8^{12}$
$ab \dots 3^{44} 4^{12} (36, 90, 56) 5^{36}$	$ef \dots 3^{140} 4^{60} (132, 330, 200) 5^{132}$
$b \dots 3^{52} (28, 78, 52) 5^{24} 9^4$	$f \dots 3^{140} 4^{12} (84, 234, 152) 5^{72} 9^{12}$
$bc \dots 3^{68} 4^{24} (60, 150, 92) 5^{60}$	$fg \dots 3^{152} 4^{66} (144, 360, 218) 5^{144}$
$c \dots 3^{80} (42, 120, 80) 5^{36} 10^6$	$g \dots 3^{160} 4^{92} (124, 324, 202) 5^{120} 12^4$
$cd \dots 3^{92} 4^{36} (84, 210, 128) 5^{84}$	$gh \dots 3^{152} 4^{66} (144, 360, 218) 5^{144}$
$d \dots 3^{92} (48, 138, 92) 5^{36} 8^{12}$	$h \dots 3^{152} 4^6 (84, 240, 158) 5^{72} 10^{12}$
$de \dots 3^{116} 4^{48} (108, 270, 164) 5^{108}$	

36. *Schlussbemerkungen.* Die tabellarische Uebersicht der Schnittresultate bleibt in einem Rücksicht bei den Tafeln zurück: aus den Tafeln liest man ab, wie die von den verschiedenen Gruppen begrenzender Dodekaeder und Tetraeder herrührenden Seitenflächen bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes in einander übergehen, was den Nrn. 34 und 35 nicht so leicht zu entnehmen ist.

Im ganzen treten

$$\begin{aligned} \text{bei } Z^{120} & \dots 30 + 44 + 32 + 15 = 121, \\ \text{,, } Z^{600} & \dots 8 + 16 + 20 + 15 = 59 \end{aligned}$$

Schnittpolyeder auf.

Bei Z^{120} findet man nur ein einziges von Dreiecken eingeschlossenes Schnittpolyeder, 3^4 ; bei Z^{600} giebt es deren neun, nämlich

$$3^4, 3^{20}, 3^{30}, 3^{52}, 3^{56}, 3^{60}, 3^{80}, 3^{140},$$

von welchen 3^{60} in den beiden Stellungen OE_0 und OK_0 von Z^{600} angetroffen wird.

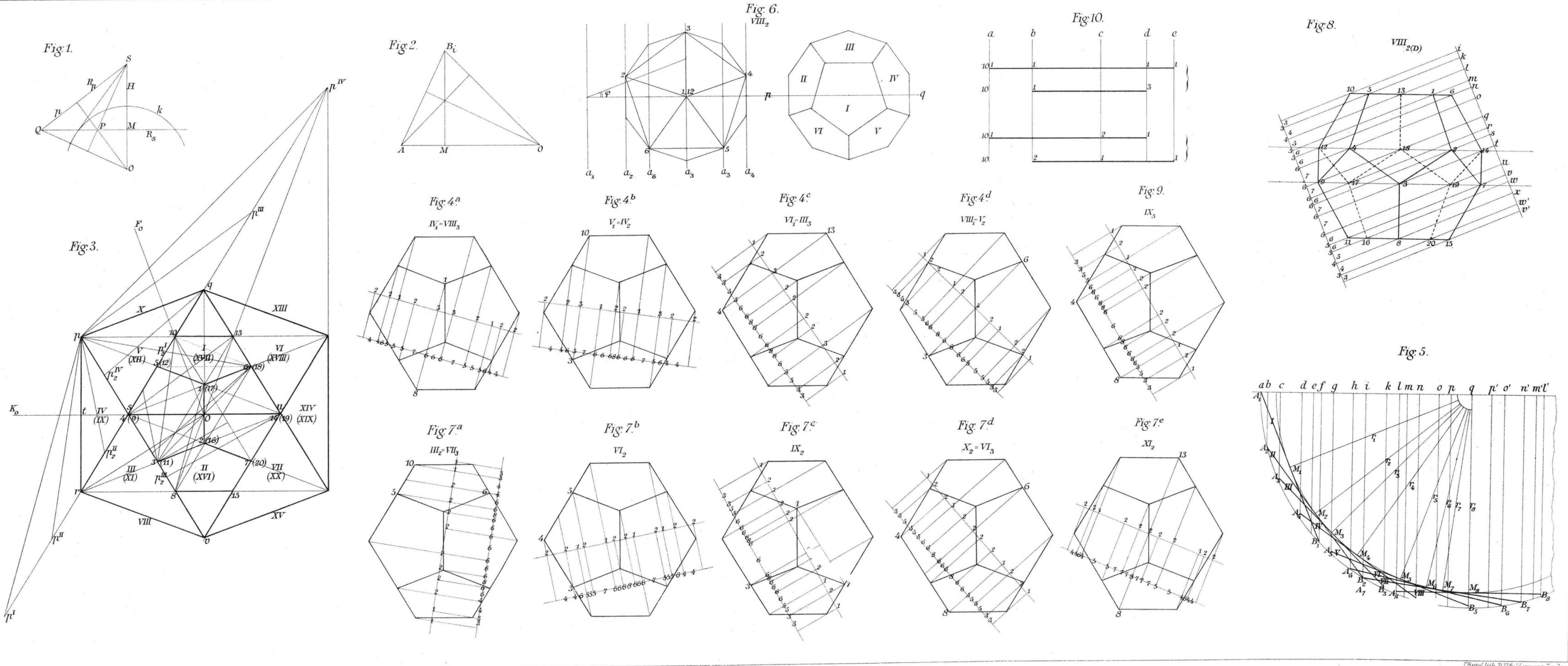
Von den 15 Scheinen von Z^{600} in Stellung OE_0 werden 13 nur von Dreiecken, die beiden übrigen nur von Vierecken begrenzt.

Will man zu den wirklichen Formen der Schnittfiguren aufsteigen, so reichen die hier erhaltenen Resultate noch nicht aus, muss man vielmehr noch zweierlei bedenken. Zunächst muss man für jede der acht Schnittrihen tun, was hier nur geschah für die vier Reihen der extremen Stellungen OE_0 , OR_0 : die Polyeder bestimmen, welche eingeschlossen werden von den Schnittebenen des Schnitttraumes mit den die Grenzpolyeder einer jeglichen Gruppe tragenden Räumen. Sind diese Polyeder bestimmt, so müssen die Schnittpolygone in ihren wirklichen Lagen in die Seitenflächen dieser Polyeder hineingezeichnet werden. Dieser Gedanken soll in der dritten Abhandlung für einzelne Schnittpolyederreihen verwirklicht werden. Dort wird sich dann ergeben, ob zwei Schnitte mit dem nämlichen Symbole — wie z.B. die Schnitte (Z^{120}, OF_0, o) , (Z^{120}, OR_0, g) mit dem Symbole

$$5^{12} 6^{30} (80, 120, 42) 3^{80} —$$

nur *allomorph* (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 23) oder aber auch *isomorph* sind, usw.

Auch wenn diese Arbeit für die sämtlichen acht Schnittrihen erbracht wäre, würde das Thema dieser Schnitte und Scheine noch nicht ganz erschöpft sein. Um nur noch einen Punkt zu streifen bemerken wir, dass es nur noch *wahrscheinlich* ist aus den hier gegebenen Entwicklungen, dass das Polyeder (120, 180, 62) für Z^{120} und das Polyeder (144, 360, 218) für Z^{600} den Schnitt mit der grössten Eckpunkten- und Seitenanzahl bildet; vielleicht würde die Entscheidung dieser Frage zu neuen Problemen Anlass geben.



		a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q		
Kanten.		4																	
			12																
				24															
					24														
						12													
							24												
								24											
									12										
										36									
											36								
												24							
													24						
														24					
															12				
															24				
																24			
																	24		
																		24	
																			24
		Allgemeine Formel der intermediären Schnitte $k = \frac{3}{2}e, f = \frac{1}{2}e + 2.$																	
Intermediäre Schnitte	e	4	12	24	48	48	40	64	88	88	76	100	100	84	108	108			
	k	6	18	36	72	72	60	96	132	132	114	150	150	126	162	162			
	f	4	8	14	26	26	22	34	46	46	40	52	52	44	56	56			
	rot	4	3	6	6	6	3												
	orange	4		3	6	6	6	6	3										
	gelb	6			4	8	6	6	6	8	4								
	grün	12				4	6	5	7	8	7	5	6	4					
	blau	12							4	6	7	6	8	6	7	6	4		
	indigo	12								3	5	6	6	8	6	8	6		
	violett	4									3	6	6	6	6	6	6		
	schwarz	12											3	5	5	6	8		
	violett'	4													3	6	6		
	indigo'	12								*	*	*	*		*	3	*		
Uebergangsformen.	e	4	12	24	36	40	40	52	56	64	76	76	76	76	72	84	78		
	k	6	18	36	60	60	60	84	96	102	114	126	114	114	114	138	120		
	f	4	8	14	26	22	22	34	42	40	40	52	40	40	44	56	44		
	rot	4	3	6	6	3													
	orange	4		3	6	6	6	6	3										
	gelb	6			4	6	6	6	6	4									
	grün	12				4	5	5	6	6	5	5	4						
	blau	12							4	5	6	6	6	6	5	4			
	indigo	12								4	5	6	6	6	6	6	5		
	violett	4									3	6	6	6	6	6	6		
	schwarz	12											3	5	5	6	6		
	violett'	4													3	6	6		
	indigo'	12														3	5		
Zelleckp.	1	4	12	24	12	4	24	24	32	24	12	24	28	24	24		54		

Lage der Kanten des Z^{120} in Stellung OE_0 und Schnitte.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r			
Kanten.	5			15			5		10			10		15						
	10																			
		20																		
			10			20														
				10			20													
					10			10		20										
						20					20									
							10					20			20					
								10									20			
									20											
										10										
											20									
												10								
													20							
														10						
															10					
																20				
																	10			
																		20		
																			20	
																			10	
																				20
Intermediäre Schmitte.	e	10	30	30	40	60	60	70	70	90	90	90	90	90	100	120	100			
	k	15	45	45	60	90	90	105	105	135	135	135	135	135	150	180	150			
	f	7	17	17	22	32	32	37	37	47	47	47	47	47	52	62	52			
	2	5	10	5																
	5	4	8	6	6	8	4													
	10		3	5	6	8	6	8	6	5	3									
	2				5	5	5	10	10	5	5	5								
	5				4	4	8	6	6	6	6	8	4	4						
	10					3	5	5	6	8	6	8	6	5	5	3				
	10							3	4	6	8	6	6	6	6	8	6			
	10									4	6	5	7	7	8	7	7			
	10											5	5	6	6	8	6			
	2												5	5	5	5	10			
	10														4	6	5			
	10*																			
Uebergangsformen.	e	5	10	20	30	40	40	50	60	60	70	70	70	85	80	80	90	80		
	k	5	15	35	45	60	70	75	95	95	115	105	115	130	120	130	140	130		
	f	1	7	17	17	22	32	27	37	37	47	37	47	47	42	52	52	52		
	2	5	5	5	5															
	5	4	6	6	6	4														
	10		3	5	6	6	6	6	5	3										
	2			5	5	5	5	10	5	5	5	5	5							
	5				4	4	6	6	6	6	6	4	4							
	10					3	5	5	6	6	6	6	5	5	3					
	10							3	4	6	6	6	6	6	6	6	6	4		
	10									4	5	5	7	6	6	7	5			
	10											3	5	6	6	6	6			
	2												5	5	5	5	10			
	10															4	5	5		
	10																3	4		
Zellekn.	5	10	10	20	10	20	20	10	30	20	20	30	5	30	30	20	20			

Allgemeine Formel der intermediären Schmitte $k = \frac{3}{2}e, f = \frac{1}{2}e+2$

Lage der Kanten des Z^{120} in Stellung OF_0 und Schmitte.

	$11+5e$	$10+4e$	$8+4e$	$7+3e$	$4+2e$	$3+e$	$1+e$	0	$-(1+e)$	$-(3+e)$	$-(4+2e)$	$-(7+3e)$	$-(8+4e)$	$-(10+4e)$	$-(11+5e)$		$2+2e$	$3+e$	$1+e$	2	0	-2	$-(1+e)$	$-(3+e)$	$-(2+2e)$
	a	b	c	d	e	f	g	h	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'		a	b	c	d	e	d'	c'	b'	a'
1^{20}																I_4	$2+2e$	12							1
12	5	5	5	5												II_4	$3+e$	1	5	5	1				12
20		1	3	6	6	3	1									III_4	$1+e$	3	3	3	3				20
12			5	5	5	5	5									IV_4	2	1	5		5	1			12
30				2	4	2	4	2	4	2	4	2				V_4	0		2	2	4	2	2		30
12								5	5	5	5	5				IV'_4	-2			1	5	5	1		12
20									1	3	6	6	3	1		III'_4	$-(1+e)$				3	3	3	3	20
12												5	5	5	5	II'_4	$-(3+e)$					1	5	5	12
1																$20 I'_4$	$-(2+2e)$							12	1

a) Lage der begrenzenden Dodekaeder des Z^{120} in Stellung OR_0 .

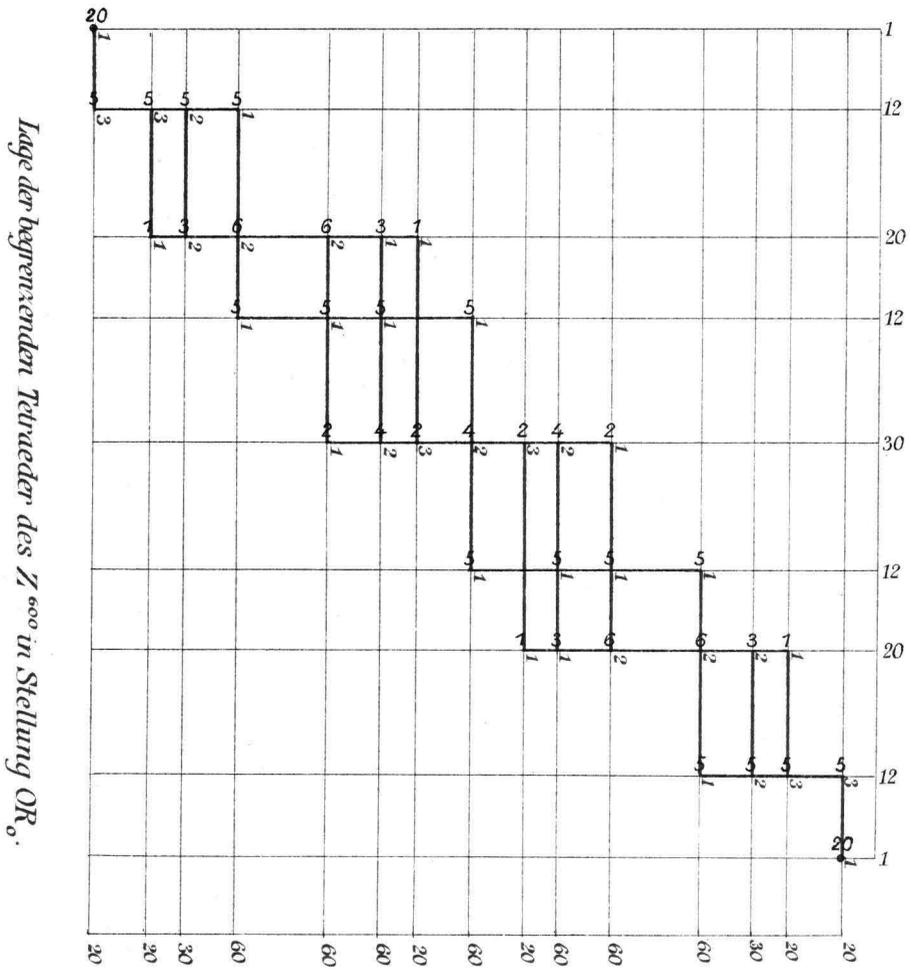
b) Lage der Nachbarikosaeder des Z^{600} in Stellung OE_0 .

	a	b	c	d	e	f	g	h	
Kanten.	30			60	30			60	
	20								
		60							
			60						
				60					
					60	120			
<i>Allgemeine Formel der intermediären Schmitte $k = \frac{3}{2}e, f = \frac{1}{2}e + 2$.</i>									
						60		60	
								20	
Intermediäre Schmitte.	e	20	60	60	60	120	120	80	
	k	30	90	90	90	180	180	120	
	f	12	32	32	32	62	62	42	
	12	5	10	5					
	20		3	6	6	6	3		
	12				5	10	5	5	
	30			*		4	* 8	6	
Uebergangsformen.	e	20	20	30	60	60	60	80	80
	k	30	30	60	90	90	120	120	120
	f	12	12	32	32	32	62	42	42
	12	5	5	5	5				
	20			3	6	6	3		
	12				5	5	5	5	5
	30						4	6	6
	12								5
Zelleckp.	20	20	30	60	60	60	20	60	

Lage der Kanten des Z^{120} in Stellung OR_0 und Schmitte.

	$2+2e$	$3+e$	$1+e$	2	0	-2	$-(1+e)$	$-(3+e)$	$-(2+2e)$	
	a	b	c	d	e	d'	c'	b'	a'	
rot	20	1	3							
orange	20		3	1						
gelb	30		2	2						
grün	60		1	2	1					
blau	60			2	1	1				
indigo	60			1	1	2				
violett	20			1		3				
schwarz	60				1	2	1			
violett'	20					3		1		
indigo'	60					2	1	1		
blau'	60					1	1	2		
grün'	60						1	2	1	
gelb'	30							2	2	
orange'	20							1	3	
rot'	20								3	1
Zellekz.	600	1	12	20	12	30	12	20	12	1

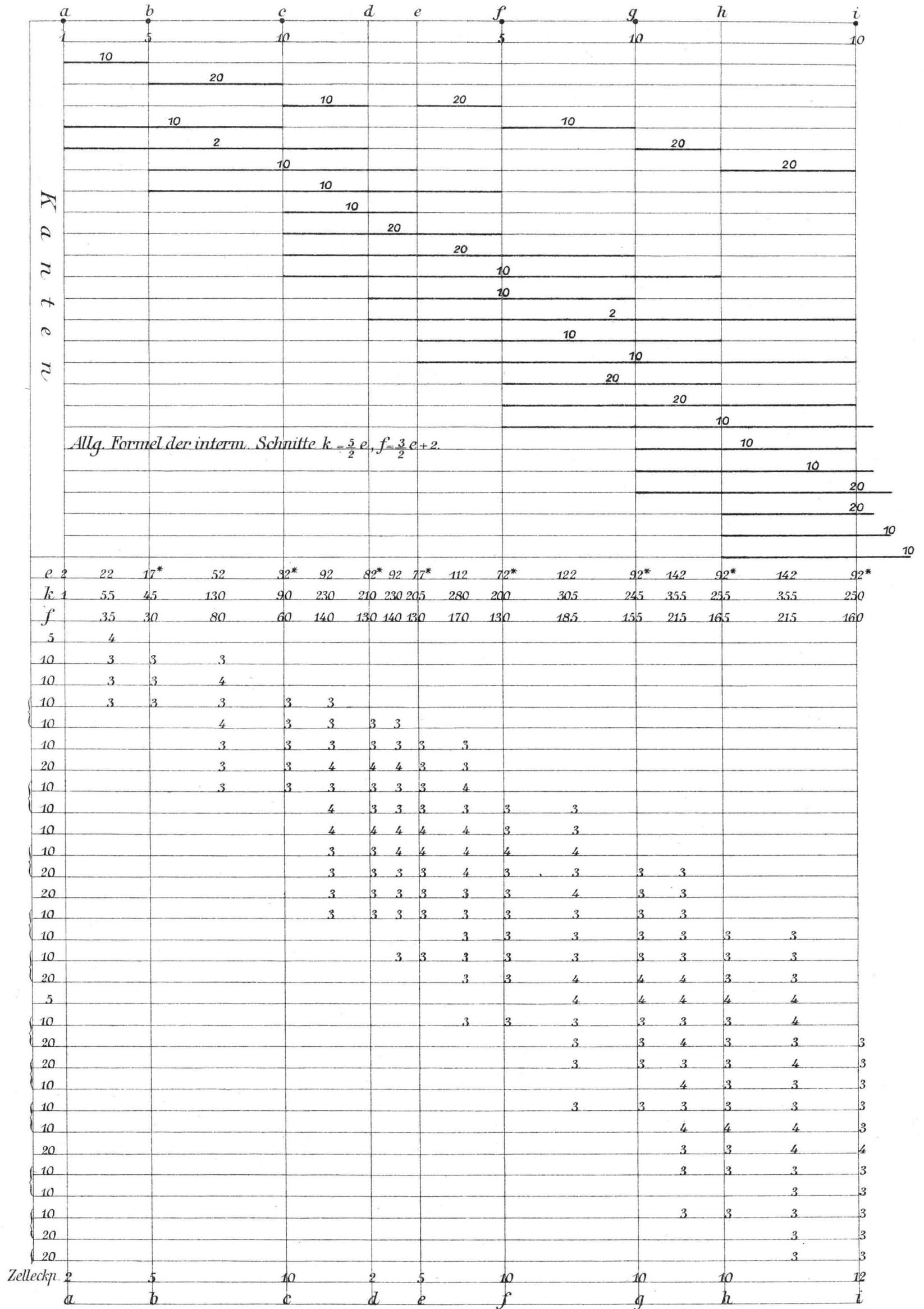
Lage der begrenzenden Tetraeder des Z^{600} in Stellung OE_0 .



Lage der begrenzenden Dodekaeder des Z^{120} in Stellung OE_0 .

	$5+2c$	$2+2c$	$3+c$	$2c$	4	$1+c$	2	$-1+c$	0	$1-c$	-2	$-(1+c)$	-4	$-2c$	$-(3+c)$	$-(2+2c)$	$-(5+c)$
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	h'	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'
5	2	2															
10	1	2	1														
10	1	1	2														
10	1		2	1													
10		2	1		1												
10		1	2			1											
20		1	1		1	1											
10		1			1	2											
10			2	1			1										
10			2			1	1										
10			1	1			2										
20			1		1	1		1									
20			1			1	1	1									
10			1				2	1									
10				1	2				1								
10				1			2			1							
20					1	1		1		1							
20						2		1		1							
10						1			2	1							
10							2			1		1					
20							1	1		1	1						
10							1		1		2						
10								1	2			1					
10								1		1	1						
20									1	1		1					
20									1	1	1						
10										2			1				
10										1				1			
10											2			1			
10												2	1			1	
20												1	1	1		1	
10												1		2		1	
10													1	1		2	
10															1	2	1
10																2	1
5																2	2
600	2	5	10	2	5	10	10	10	12	10	10	10	5	2	10	5	2
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	h'	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'

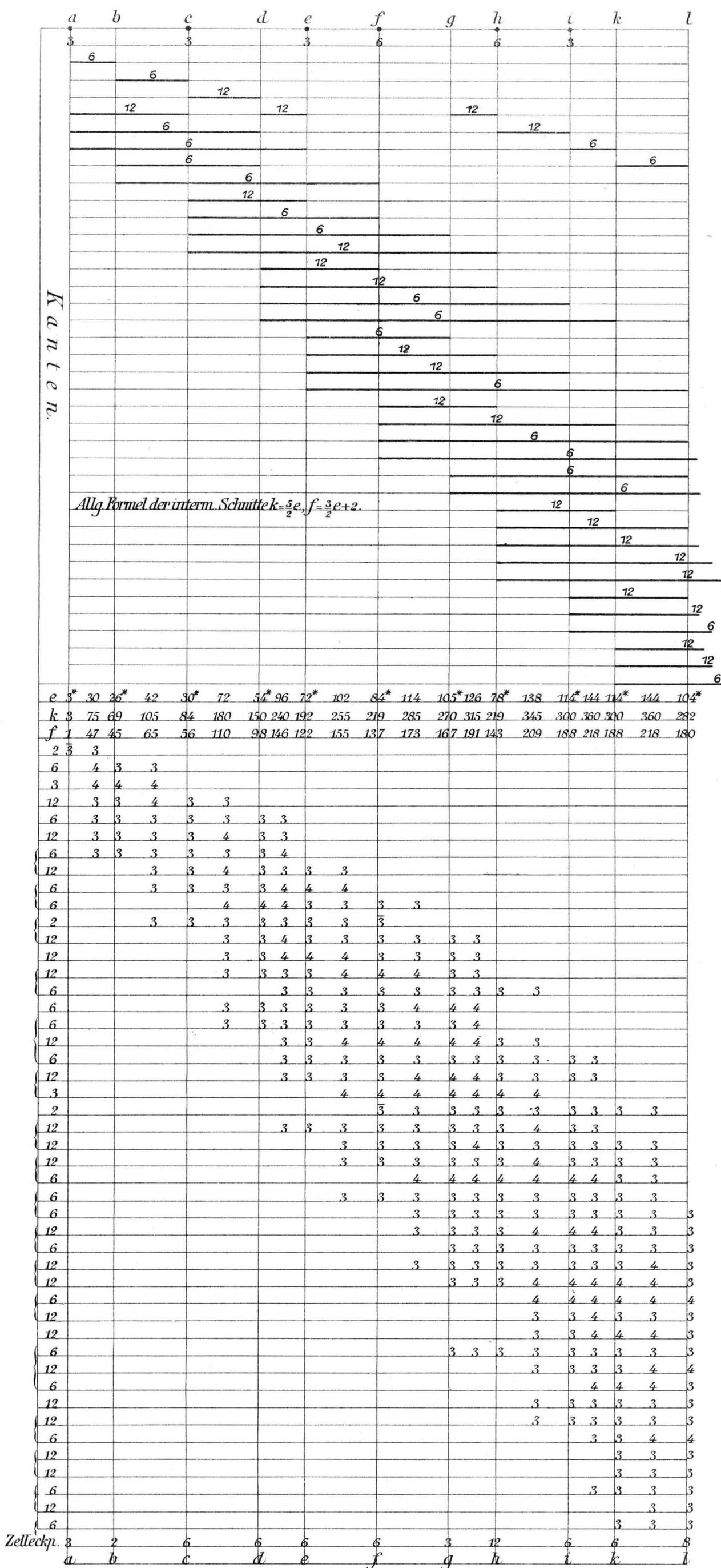
Lage der begrenzenden Tetraeder des Z^{600} in Stellung OK_0 .



Lage der Kanten des Z^{600} in Stellung OK_0 und Schnitte.

	$6+2e$	$3+3e$	$4+2e$	$5+e$	$2+2e$	$3+e$	4	$1+e$	2	$-1+e$	0	$1-e$	-2	$-(1+e)$	-4	$-(3+e)$	$-(2+2e)$	$-(5+e)$	$-(4+2e)$	$-(3+3e)$	$-(6+2e)$	
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	k'	i'	h'	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'	
2	3	1																				
6	2	1	1																			
3	2		2																			
12	1	1	1	1																		
6	1		2		1																	
12	1		1	1	1																	
6	1			1	2																	
12	1	1	1	1		1																
6	1			1		2																
6		2		1			1															
2	1					3																
12		1	1	1				1														
12		1	1		1			1														
12		1		1			1	1														
6			1	2					1													
6		1			1				2													
6		1					1	2														
12			1	1				1	1													
6			1		1					1												
12			1			2					1											
6			1					1	2													
6				1				2				1										
12				1	1			1	1				1									
6				1		2																
12				1				1	1													
12				1				1		1												
3				2						2												
2					3						1											
12			1					1	1	1												
12			1					1	1													
12			1					1		1												
6				1	2						1											
6				1						2												
6				1							2											
12				1				1	1													
12				1				1		1												
12				1				1			1											
6					1	2						1										
6					1								1									
12					1			1	1													
12					1			1		1												
12					1			1			1											
6						1				1												
12						1				1												
12						1				1												
6							1				1											
12							1				1											
12							1				1											
6								1				1										
12								1				1										
12								1				1										
6									1				1									
12									1				1									
12									1				1									
6										1				1								
12											1				1							
12												1				1						
6													1				1					
12														1				1				
12															1				1			
2																3						
3																2						
12																1	1	1				
6																1	2					
12																1	1	1	1			
6																2	1					
6																2						
6																1		2	1			
12																1	1					
12																1	1	1	1			
12																1	1	1	1			
2																	3					1
6																1		1	2			
6																2		1				
12																1		1	1	1		
6																	2	1				1
12																	1	1	1			1
6																	1		2			1
12																		1	1	1	1	
3																				2		2
6																				1	1	2
2																						1 3
600	3	2	6	6	6	6	3	12	6	6	8	6	6	12	3	6	6	6	6	2	3	
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	k'	i'	h'	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'	

Lage der begrenzenden Tetraeder des Z^{600} in Stellung OF_0 .



Lage der Kanten des Z^{600} in Stellung OF_0 und Schnitte.

	$7+3c$	$5+3c$	$6+2c$	$4+2c$	$3+c$	$1+c$	2	0	-2	$-(1+c)$	$-(3+c)$	$-(4+2c)$	$-(6+2c)$	$-(5+3c)$	$-(7+3c)$
	a	b	c	d	e	f	g	h	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'
1	4														
4	3	1													
12	2	1	1												
24	1	1	1	1											
12	1		1	2											
4	1			3											
24		1	1	1	1										
12		1		1	2										
12			1	2		1									
4		1			3										
24			1	1	1	1									
4				3			1								
12			1		1	2									
12				2		1	1								
12				1	2			1							
24				1	1	1		1							
24				1		1	1		1						
4					3					1					
12					2			1	1						
12					1	2				1					
24					1	1		1		1					
24					1		1	1	1	1					
6						2				2					
24						1	1	1			1				
24						1		1		1	1				
12						1			2	1					
12							1	1			2				
4							1				3				
24								1	1	1		1			
24								1		1	1		1		
12								1			2		1		
12									1	1		2			
12										2	1			1	
4									1			3			
24										1	1	1	1		
4											3			1	
12										1		2	1		
12											2	1		1	
24											1	1	1	1	
4												3			1
12												2	1		1
24												1	1	1	1
12													1	1	2
4														1	3
1															4
600	4	4	6	12	12	12	4	12	4	12	12	12	6	4	4
	a	b	c	d	e	f	g	h	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'

Lage der begrenzenden Tetraeder des Z^{600} in Stellung OR_0 .

