MÉMOIRE SUR LES MULTIPLICITÉS CANTORIENNES

DEUXIÈME PARTIE :

LES LIGNES CANTORIENNES

PAR

PAUL URYSOHN †

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM

(EERSTE SECTIE)

DEEL XIII, No. 4

UITGAVE VAN DE KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM 1927

MÉMOIRE SUR LES MULTIPLICITÉS CANTORIENNES

PAR

PAUL URYSOHN †.

DEUXIÈME PARTIE : [1]

LES LIGNES CANTORIENNES.

PRÉFACE.

La présente seconde partie de l'oeuvre principal de PAUL URYSOHN a dû devenir son oeuvre posthume...

Les résultats constituant cette seconde partie n'ont pas été obtenus plus tard que ceux de la première : c'est toujours l'hiver 1921—1922 pendant lequel URYSOHN a édifié sa théorie de la dimension et des courbes cantoriennes comme application de ses idées générales sur les caractères divers que peut présenter la séparation locale („ε-séparation") des points des ensembles. Les principaux résultats de toute cette analyse ont été présentés (avec des démonstrations complètes) à la Société Mathématique de Moscou dans les séances du 16 octobre 1921 [2], du 20 novembre 1921 [3], du 19 février 1922 [4]) et du 28 mai 1922 [5]). Tous ces résultats se trouvent exposés sans démonstration dans deux Notes des Comptes Rendus, t. 175 (1. „Les multiplicités cantoriennes", séance du 11 septembre 1922 ; 2. „Sur la ramification des lignes cantoriennes", séance du 25 septembre 1922).

La rédaction suivante de la seconde partie a été faite selon le plan détaillé composé par URYSOHN dès l'été 1922. J'ai suivi ce plan avec le plus grand soin, et ce n'est que pour tenir compte des résultats et des intentions postérieures de l'auteur que j'ai cru devoir y apporter quelques modifications peu importantes.

---

[1]) La première partie de ce mémoire a été publiée dans le journal „Fundamenta Mathematicae", t. VII, pp. 30—137, t. VIII, pp. 225—359.

[2]) Communication „Sur la dimension des ensembles" (définitions générales, analyse complète au point de vue de la dimension des ensembles situés dans les espaces euclidiens à 2 et 3 dimensions, définitions des courbes cantoriennes et de leur indice de ramification ; résultats contenus dans les ch. I et II de la première partie, et définitions du ch. I de la seconde partie).

[3]) Communication „Théorèmes fondamentaux sur la dimension des ensembles" (résultats contenus dans les chapitres IV et VI de la première partie, et dans le ch. I de la seconde partie).

[4]) Communication „Sur la ramification des lignes cantoriennes" (résultats des ch. IV, V et VI de la seconde partie).

[5]) Communication „Sur la dimension des espaces euclidiens à n dimensions" (résultats du ch. V de la première partie et du ch. VII de la seconde partie).

Quant aux démonstrations, j'ai toujours fait une comparaison soigneuse des démonstrations primitives qui se trouvent dans le journal mathématique de PAUL URYSOHN de 1921—1922 (où il inscrivait chacun de ses résultats de cette époque) avec tous les matériaux se rapportant au sujet qu'on pouvait tirer, soit de ses leçons, soit de ses communications personnelles. J'espère avoir ainsi réussi à donner à chacune de ces démonstrations la forme répondant le plus possible aux idées et aux plans de l'auteur tels qu'ils se présentaient à la fin de sa carrière humaine.

Je me suis fait diriger par la même considération en omettant presque toujours les analyses des démonstrations au point de vue de l'application de l'axiome de M. ZERMELO : dans les dernières publications d'URYSOHN on ne trouve plus de pareilles analyses. Elles manquent aussi dans tous les manuscrits se rapportant aux sujets traités dans ce quit suit. Le lecteur désirant faire une analyse de cette sorte, trouvera dans la première partie (notamment dans les §§ 10—14 de l'introduction) tous les renseignements et toutes les méthodes nécessaires. Il m'a donc paru inutile de reprendre ici à nouveau des considérations qui ne diffèrent dans aucun point essentiel de celles qui se trouvent exposées dans la première partie.

Les résultats de la seconde partie provenant des mêmes idées directrices qui ont servi de base à la première partie de ce mémoire, l'étude de cette dernière s'impose d'elle même comme indispensable au lecteur qui voudra s'approprier l'esprit des résultats ci-dessous ; je tiens à remarquer cependant que la plupart de ces résultats sont, au point de vue formel, indépendants des théorèmes de la première partie : en effet, les démonstrations qui vont suivre ne font actuellement usage que des propositions du ch. I de la première partie [6]) et des notations exposées dans les §§ 6, 15—21 de l'Introduction et dans une liste spéciale à la fin de la 1^re^ partie ; ces notations, exposées une fois pour toutes, sont d'un usage permanent dans les deux parties du présent mémoire, leur connaissance est donc absolument indispensable. Il n'y a que la fin du ch. I de la seconde partie qui exige du lecteur en outre la connaissance des résultats des chapitres IV et VI de la première partie.

Quant à la méthode d'exposition de la présente partie du „Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes", elle repose sur les mêmes principes que celle de la première partie. En particulier, le lecteur trouvera ici, comme antérieurement, le grand et le petit texte [7]).

J'ai pu profiter de l'appui de M. BROUWER toutes les fois que j'en éprouvais le besoin dans mon travail de reconstitution de la pensée de l'auteur et quelquefois de mise au point des détails de son développement. Les figures sont dues à M. TSCHERKASSOFF. Dans la correction des épreuves j'étais soutenu par M^me^ J. ROŹAŇSKA et par M. L. TUMARKIN.

PAUL ALEXANDROFF.

---

[6]) Surtout du lemme du § 8, Fund. Math. VII, p. 69.

[7]) Cf. I, Introduction, § 22, Fund. Math. VII, p. 64.

Les renvois à la 1^re^ partie de ce mémoire sont indiqués simplement par le chiffre romain I. Les renvois sans le chiffre I se rapportent au chapitre (ou paragraphe, théorème etc.) correspondant de la présente partie. Enfin si l'indication du chapitre manque elle aussi, la référence se rapporte au même chapitre.

Toutes les notations employées dans ce travail se trouvent expliquées dans une liste spéciale insérée à la fin de la première partie de même que dans les §§ 6, 15—21 de l'Introduction de la première partie.

INTRODUCTION

1. La seconde partie du présent mémoire est consacrée aux lignes cantoriennes c. à d. aux continus de dimension 1. Outre la définition donnée au ch. I de la 1re partie, on peut, d'après les résultats des ch. V et VI [1]) définir ces continus d'une quelconque des façons suivantes.

1. Ce sont les continus C qu'on peut représenter, quel que soit $\varepsilon > 0$, comme somme d'un nombre fini d'ensembles fermés de diamètre $< \varepsilon$ et tels que tout point de C appartienne tout au plus à deux de ces ensembles fermés.
2. Ce sont les continus qui se décomposent en une somme de deux ensembles de dimension nulle (l'un de ces ensembles étant un F_σ, et l'autre un G_δ).

La définition ainsi obtenue des lignes cantoriennes coïncide, pour le cas des continus plans, avec la définition classique des lignes cantoriennes (planes). Ceci est demontré dans le ch. II de la 1re partie. Voici une autre démonstration toute simple. Tout d'abord, tout point intérieur d'un ensemble plan C est nécessairement de dimension 2. En effet, si un pareil point était de dimension < 1 le plan ne serait pas connexe; s'il était de dimension 1, on le pourrait ε-séparer par un ensemble *fermé* de dimension 0, contrairement au théorème bien connu de PHRAGMÈN-BROUWER.[2]) Il en résulte que dim $C = 2$ (car a étant un point intérieur de C, il peut être ε-séparé, par rapport à C, par une circonférence de centre a et de rayon assez petit, donc par un continu qui est évidemment de dimension 1).

2. Nous voyons donc que tout continu situé dans le plan E_2 est non dense par rapport à E_2 toutes les fois qu'il est de dimension 1. Reste à montrer qu'inversement tout continu non dense dans E_2 (toute ligne cantorienne au sens classique) est de dimension 1.

Considérons à cet effet la courbe cantorienne (plane) C_0, construite par M. SIERPIŃSKI [3]) et qui a la remarquable propriété de contenir une image biunivoque et bicontinue C^* de toute autre courbe cantorienne (plane) C. Nous avons vu [4]) que $\dim C = \dim C^* \leqslant \dim C_0$; $\dim C$ ne pouvant être nulle, il suffit de prouver qu'on a $\dim C_0 = 1$, c. à d. qu'on

[1]) I, ch. V, § 7, Corollaires, Fund. Math. VIII, p. 300; I, ch. VI, §§ 4 et 10, (th. I et th. III, Fund. Math. VIII, pp. 324, 345.

[2]) A savoir que $E_2 - F$ est connexe, si F est un ensemble fermé discontinu quelconque.

[3]) Comptes Rendus, t. 162, p. 629 (séance du 25 avril 1918); v. aussi ch. I, § 4, ex. 11.

[4]) I, ch. I, §§ 4, 5, Fund. Math. VII, pp. 67, 68.

peut, quel que soit $\varepsilon > 0$, ε-séparer tout point $x \subset C_0$ par un ensemble fermé discontinu. Or ceci est facile à faire. On doit remarquer seulement que tout point x du carré initial Q peut être ε-séparé par un ensemble B^ε formé de six segments-diagonales au plus des carrés d'un certain rang assez élevé [5]). *Si* $x \subset C_0$, l'ensemble $B^\varepsilon \cdot C_0$ est évidemment homéomorphe à l'ensemble parfait de Cantor, il est donc de dimension 0. Cet ensemble est de plus un ensemble ε-séparant le point x par rapport à C, ce qui démontre notre proposition.

3. Nous nous proposons de faire dans ce qui suit une étude approfondie des lignes cantoriennes, étude reposant sur les mêmes principes que la théorie de la dimension exposée dans la première partie de cet ouvrage.

Nous ne considérons toujours que des propriétés intrinsèques (I, Introduction, § 2) des lignes Cantoriennes, ce qui ne nous empêchera pas de faire quelques applications des théorèmes obtenus aux problèmes topologiques non intrinsèques.

C'est encore le principe des propriétés locales des ensembles qui servira de base à presque toutes nos considérations, et la définition de „ε-séparation" sera à peu près le seul instrument de notre analyse (I, Introduction, §§ 3, 4). Cet instrument nous donne tout d'abord la définition de *l'indice de ramification* d'un point quelconque d'une ligne cantorienne (Ch. I, § 1), définition qui est le vrai nerf de toute la théorie dont nous nous occuperons dans la présente partie de notre mémoire.

Il est à remarquer qu'on obtient ainsi, à ce qu'il paraît, pour la première fois une définition précise de ce qu'on doit entendre par „points de ramification d'une ligne". Il est vrai que M. YOUNG a proposé une définition de l'*ordre de ramification* d'un point quelconque d'une ligne donnée et que S. JANISZEWSKI a cherché a préciser cette notion en considérant les points qu'il appelle points réguliers d'ordre k. Or nous verrons par des exemples (ch. I, §§ 7—10) que la définition de M. YOUNG de même que celle de JANISZEWSKI ne permet pas d'analyser la structure locale des lignes même dans des cas très simples.

Le caractère artificiel des définitions de M. YOUNG et de JANISZEWSKI est la vraie cause de ce qu'on a pu formuler jusqu'ici peu de propriétés concernant la ramification. C'est ainsi que JANISZEWSKI, après avoir donné la définition assez générale des points réguliers, la restreint aussitôt en introduisant les points qu'il appelle simples et qui permettent une analyse complète. Nous verrons dans le ch. IV que les points simples forment une classe toute spéciale de points de ramification, classe d'une nature particulièrement élémentaire. Nous croyons donc que nous ne nous sommes pas trompés en disant que c'est pour la première fois qu'une théorie complète et générale de lignes cantoriennes et en particulier de leur points de ramification est presentée au public mathématique.

---

[5]) Nous appellerons pour abréger „carrés de rang n" ($n = 1, 2, 3, \ldots$) ceux qu'on obtient en divisant le carré initial successivement en $9, 9^2, 9^3, \ldots 9^n, \ldots$ carrés égaux.

La définition de l'indice de ramification et ses propriétés élementaires se trouvent exposées dans le premier chapitre, de même que plusieurs exemples pouvant élucider cette notion. Le reste de ce chapitre est consacré à la théorie des points de ramification infinie. On remarquera le rôle exclusif de ces points; autour d'eux une ligne cantorienne présente notamment des propriétés analogues à celles des continus de dimension supérieure. Au ch. I on trouvera résolue en outre la question de la classification des ensembles de points de divers indices (au point de vue de la classification de M. BAIRE).

Pour aller plus loin, des notions d'ordre différent se montrent nécessaires. C'est ainsi que le second chapitre se trouve consacré à une propriété générale les éspaces métriques compacts, à savoir qu'on y peut extraire de toute suite d'ensembles une suite convergente (au sens de M. HAUSDORFF).

La démonstration de ce théorème ne fait aucun appel à la théorie des espaces abstraits. On en trouvera, dans le même chapitre, de nombreuses applications.

Le chapitre III s'occupe d'une théorie complète des continus de condensation, indispensable pour la suite, et présentant, à ce qu'il nous semble, un intérêt intrinsèque. Nous appelons en particulier l'attention du lecteur aux théorèmes VII, VIII et XIV de ce chapitre, de même qu'à la notion nouvelle de continus de condensation complète.

Les chapitres IV et VI contiennent les résultats fondamentaux de toute la théorie permettant de se rendre compte de plusieurs propriétés générales concernant la structure locale et intégrale des lignes cantoriennes.

Le chapitre V est consacré à la théorie des continus irréductibles au point de vue de l'indice. Les résultats de ce chapitre sont utilisés dans le chapitre VI.

Quant au chapitre VII il s'occupe de diverses applications des résultats précédents à certains problèmes de la Topologie du plan.

On trouvera, en outre, à la fin de ce mémoire, plusieurs notes supplémentaires consacrées à des questions diverses se rattachant plus ou moins étroitement à la théorie de la dimension et des courbes cantoriennes.

CHAPITRE I.

Définition de l'indice de ramification. Points de ramification infinie.

1. Soit K une ligne cantorienne, c'est à dire un continu de dimension 1 [1]; soit x un point quelconque de K; le point x étant de dimension 1 sur K, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une ε-séparation [2] du point x par un ensemble B de dimension nulle. Il est naturel de classer les points x d'après la puissance minimale de B.

Remarquons tout d'abord que l'ensemble B peut toujours être supposé fermé: en effet, d'après un théorème démontré dans la 1^{re} partie de ce mémoire (I, § 8), si B n'est pas fermé, il existe un ensemble fermé $B_0 \subset B$, qui est encore un ensemble ε-séparant le point x; en remplaçant alors B par B_0, on ne peut que diminuer la puissance de l'ensemble séparant. Tous les ensembles fermés possédant une puissance finie, dénombrable ou égale à celle du continu, les quatre définitions suivantes se posent immédiatement.

Déf. 1. *Le point $x \subset K$ est dit point d'indice n (n fini) s'il peut être ε-séparé (quel que soit $\varepsilon > 0$) par un ensemble B constitué de n points, tandis qu'un ensemble de $n-1$ points n'y suffit plus:*

$$ind_x K = n.$$

Déf. 2. *Si x peut toujours être ε-séparé par un ensemble fini de points, mais dont la puissance croît nécessairement avec $\frac{1}{\varepsilon}$, x sera dit un point d'indice ω:*

$$ind_x K = \omega.$$

Déf. 3. *Si le point x n'entre pas dans une des deux catégories précédentes et peut être (quel que soit ε) ε-séparé par un ensemble dénombrable, nous dirons que c'est un point d'indice $\aleph_0$:*

$$ind_x K = \aleph_0.$$

Les points d'indice n (quel que soit le nombre naturel n) et ω, seront dits *points d'indice fini;* en particulier, selon qu'on a $ind_x K = n$ ou

[1] Cf. Introduction, p. 6; cf. aussi I, Ch. I, § 1, 2 (Fund. Math., VII, p. 65).

[2] Voir pour les notations la liste insérée à la fin de la première partie. Cf. aussi la préface (de la présente partie).

$ind_x K = \omega$, nous dirons que x possède un indice fini et borné, ou bien que x est d'indice fini non borné [3]).

Déf. 4. *Si l'on n'a pas* $ind_x K \leqq \aleph_0$ *nous aurons*:

$$ind_x K = \mathfrak{c} \qquad (= \text{puissance du continu}).$$

Cela posé, tout point d'indice supérieur à 2 sera dit *point de ramification*, tandis que les points d'indice 1 seront appelés *points d'arrêt*. L'ensemble fermé R constitué de tous les points de ramification et de leurs points limites sera dit *ensemble de ramification* du continu K; un point isolé de l'ensemble R sera dit *point de ramification isolé*.

2. En laissant de côté les points d'indice ω, on peut résumer comme il suit les quatre définitions précédentes:

L'indice du point x sur K est le plus petit nombre cardinal $\mathfrak{m}$ *fini ou infini tel qu'il existe (quel que soit $\varepsilon > 0$) un ensemble B de puissance* $\mathfrak{m}$ *ε-séparant le point x.*

On voit ainsi que pour tout point x[4]) d'une ligne cantorienne quelconque K, $ind_x K$ est un nombre cardinal bien déterminé égal, s'il est infini, à la puissance $\aleph_0$ des ensembles dénombrables, ou bien à celle du continu.

Remarque. L'exception admise pour les points d'indice ω semble peut-être mal motivée au premier abord; or les points d'indice ω présentent, comme nous le verrons plusieurs fois dans la suite de ce mémoire, bien plus d'analogie avec les points d'indice fini et borné qu' avec les points d'indices $\aleph_0$ ou $\mathfrak{c}$; il semble donc plus pratique de n'attribuer l'indice infini qu'aux points des deux dernières catégories mentionnées; le cas de l'indice ω est en quelque sorte intermédiaire entre ceux des indices finis et bornés d'un côté, et ceux des indices $\aleph_0$ et $\mathfrak{c}$ de l'autre: il est vrai qu'aucun nombre cardinal $< \aleph_0$ ne suffit pour tous les ε, nous devrions donc poser (au sens précis de la définition du § 2) $\mathfrak{m} = \aleph_0$; d'autre part, pour toute valeur donnée d' ε on a besoin seulement d'un nombre fini de points de B.

3. Indiquons quelques conséquences immédiates des définitions adoptées.

I. *L'indice de ramification est un invariant topologique.*

II. *L'indice de ramification en un point exprime une propriété locale de l'ensemble* autour de ce point, c. à d. que deux lignes Cantoriennes C_1 et C_2 localement identiques au point x[5]) possèdent en ce point le même indice de ramification.

III. *Si* $x \subset C_1 \subset C$, on a toujours $ind_x C_1 \leqq ind_x C$.

Il est à peine nécessaire de donner une démonstration de ces propositions analogues aux théorèmes I, II, III de I, ch. I.

---

[3]) Nous ferons enfin une fois pour toutes la convention de poser $\aleph_0 > \omega > n$ quel que soit l'entier n.

[4]) Sauf pour les points d'indice ω; l'indice ω n'est, au fond, qu'un symbole d'une suite d'ensembles ε-séparants, dont les nombres cardinaux sont finis, mais infiniment grandissants.

[5]) Cf. I, ch. I, § 6.

4. Quelques exemples rendront plus intuitives les définitions précédentes.

Ex. 1. Soit K le segment rectiligne $\overline{ab}$ (ou ce qui est topologiquement la même chose, un arc simple arbitraire). On a évidemment

$$ind_a K = ind_b K = 1, \quad \underset{a \neq x \neq b}{ind_x K} = 2.$$

De même, tout point d'une circonférence (ligne simple fermée) possède l'indice 2.

Ex. 2. Le continu C de la fig. 1 est formé du segment $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$ et des segments

$$x = \frac{p}{2^n} \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2^n},$$

p étant un nombre impair quelconque inférieur à 2^n et n un entier positif arbitraire.

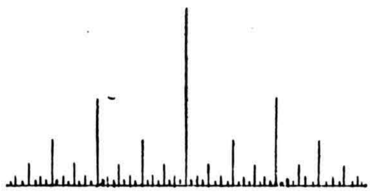

Fig. 1.

Tout point de C est d'indice 1, 2 ou 3 (les derniers points sont ceux d'abscisse $\frac{p}{2^n}$ situés sur le segment horizontal).

Cet exemple est dû à JANISZEWSKI.

Ex. 3. K est formé de n segments rectilignes $\overline{aa_1}, \overline{aa_2}, \ldots, \overline{aa_n}$, n'ayant en commun que le seul point a.

$$\underset{\substack{a \neq x \neq a_i \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}{ind_x K} = 2 \quad , \quad \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{ind_{a_i} K} = 1 \quad , \quad ind_a K = n.$$

Ex. 4. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ des circonférences successivement tangentes l'une à l'autre, dont les rayons tendent vers 0, et les centres convergent vers un point a n'appartenant à aucune de ces circonférences.

$ind_a K$ est encore égal à 1.

Ex. 5. K est composé d'une infinité dénombrable de segments rectilignes $K_n = \overline{oa_n}$, situés dans le plan yox, de longueur $\frac{1}{n}$ et formant avec la direction de l'axe ox l'angle $\frac{1}{n}$; $K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n$; $ind_o K = \omega$.

Ex. 6. Supposons dans l'exemple précédent, que la longueur de tous les $K_n = \overline{oa_n}$ est égal à 1 et que $K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n + K_0$, K_0 étant le segment $[0,1]$ de l'axe ox. On a pour tout point ξ de K_0:

$$ind_\xi K = \aleph_0.$$

Ex. 7. K est formé de la ligne $y = \sin \frac{1}{x}$ et du segment $[-1, +1]$ de l'axe oy. Tout point $x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant +1$ possède l'indice $\aleph_0$. Il est quelquefois commode de remplacer, dans cet exemple, la ligne $y = \sin \frac{1}{x}$ par la ligne polygonale généralisée $\varLambda = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ de façon à obtenir le continu de la fig. 2 (formé de $\varLambda$ et du segment $[-1, +1]$ de l'axe oy).

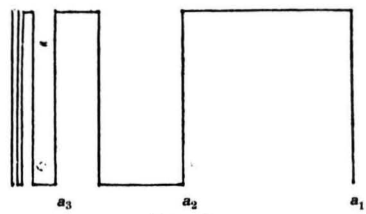

Fig. 2.

Ex. 8. K est composé des demi-circonférences C_n, $x^2 + y^2 = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $y \geqslant 0$ et de leurs rayons faisant avec ox les angles $\pi \cdot \frac{p}{2^n}$, ou p prend toutes les valeurs impaires $\leqslant 2^n - 1$. L'origine possède l'indice ω.

Ex. 9. Soit P l'ensemble parfait non dense de Cantor situé sur ox et a le point $(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2})$; posons

$$K = \sum_{\xi \subset P} \overline{a\xi},$$

$\overline{a\xi}$ étant le segment rectiligne entre a et ξ. Tout point de K possède l'indice $\mathfrak{c}$.

Ex. 10. Tout continu indécomposable (en particulier, les exemples bien connus de M. BROUWER[6]), de JANISZEWSKI[7]), de M. WADA[8])) ne contient que des points d'indice $\mathfrak{c}$[9]).

Ex. 11. La courbe S de M. SIERPIŃSKI[10]) (qui est en même temps une courbe jordanienne et une courbe Cantorienne) ne contient que des points d'indice $\mathfrak{c}$.

Pour s'en apercevoir il suffit de montrer que $S - F$ reste connexe quel que soit l'ensemble fermé dénombrable F. Supposons par contre qu'il existe un ensemble fermé dénombrable F tel que $S - F = G_1 + G_2$, $G_1 \neq 0 \neq G_2$, $H(G_1, G_2) = 0$. Désignons par Q le carré $[0,1]$, par C son contour, par $Q_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, 8)$, les carrés d'ordre k. Démontrons d'abord que le contour $C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ de chaque $Q_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ appartient tout entier à un seul des deux ensembles G_1 ou G_2. La partie de la courbe S située dans $Q_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ ayant absolument la même structure que la courbe S toute entière, il suffit de montrer que C ne peut pas avoir des points communs avec les deux ensembles G_1 et G_2.

Appelons D^x (resp. D^y) tout segment rectiligne de longueur 1, parallèle à l'axe ox (resp. oy), contenu dans S et ne contenant aucun point de F. L'ensemble somme P de tous les D^x et tous les D^y est contenu dans un des deux ensembles G_1 ou G_2.

6) Math. Ann.. 68, p. 426.

7) Loc. cit. p. 36.

8) Dans le mémoire de M. YONEYAMA, Tôhoku. Math. Journ. XII (1917), p. 60.

9) Voir pour la démonstration le § 5 du présent chapitre.

10) Comptes Rendus, t. 162, p. 629, séance du 25 avril 1916. Voir aussi Introduction, § 2

En effet, soit D_0^x un D^x quelconque. D'après la relation $D_0^x . F = 0$, D_0^x est agrégé à G_1 ou à G_2, soit $D_0^x \subset G_1$.

Tout D^y est, lui aussi, agrégé à l'un des deux ensembles G_1 ou G_2, or D^y ayant un point commun avec D_0^x, tout $D^y \subset G_1$; enfin tout D^x, ayant un point commun avec D^y, appartient aussi à G_1. Donc $P \subset G_1$; tout point de C étant point limite de P, on a $C \subset G_1$. En remarquant enfin que $C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$. i_{k+1} a des points communs avec $C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, on trouve successivement que tous les $C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ appartiennent à G_1, et par suite, l'ensemble somme de tous les $C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ étant dense sur S, S tout entière appartient à G_1, de sorte que G_2 serait vide, contrairement à notre supposition.

Ex. 12 (de M. SIERPIŃSKI). On obtient le continu C (fig. 3) en effectuant successivement les opérations (1), (2), ..., (n), ... L'opération (1) consiste en

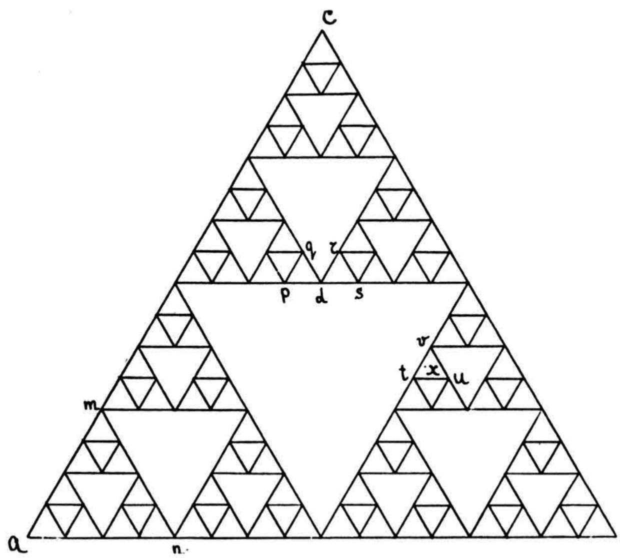

Fig. 3.

ce qu'on supprime du triangle équilatère donné, le triangle obtenu en joignant par des segments rectilignes les milieux des côtés du triangle donné. L'opération (n) consiste dans l'application de l'opération (1) à chacun des triangles restés après l'operation (n—1). On voit de suite que les points a, b, c, ont l'indice 2 (les couples de points tels que (m, n) ε-séparent p. ex. le point a), les sommets de tous les autres triangles possèdent l'indice 4 (ε-séparation du sommet d par les points p, q, r, s), enfin les points restants sont d'indice 3 (ε-séparation du point x par l'ensemble des points t, u, v). Il est facile à voir que le continu C que nous venons de construire ne peut être obtenu en faisant la somme d'une infinité dénombrable quelconque d'arcs simples.

Soit en effet $C_0 \subset C$ un arc simple quelconque situé sur C, et $x \subset C$ un point quelconque de C_0 autre que a, b, c; $ind_x\, C_0$ est égal à 1 ou 2, tandis que $ind_x\, C$ est 3 ou 4; il en résulte que tout point $x \subset C_0$ est un point limite de $C—C_0$, c. à d. que C_0 est non dense sur C. Or aucun ensemble fermé ne pouvant être obtenu par la réunion d'une infinité dénombrable de ses sous-ensembles non denses [11], notre assertion sur C se trouve démontrée.

On peut obtenir par une modification légère de l'exemple précédent un continu jouissant de la même propriété et dont tous les points sont d'indice $\leqslant 3$. La construction de ce continu C^* est indiquée dans la fig. 4.

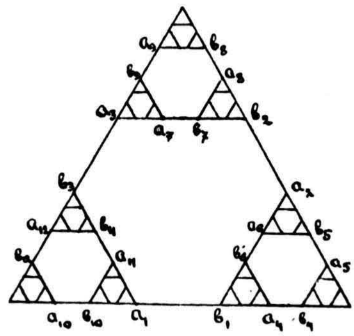

Fig. 4.

Montrons que C^* n'est pas somme d'une infinité dénombrable d'arcs simples.

On a tout d'abord

$$C^* = F + G,$$

ou G est le domaine relatif de C^*, composé d'une infinité dénombrable d'intervalles rectilignes ouverts $(a_i b_i)$ n'ayant deux à deux aucun point commun et $F = C^* - G$.

Désignons par C_0 un arc simple quelconque agrégé à C^* et ayant avec F au moins un point x en commun; soit $S(x, \varepsilon)$ une sphère de centre x et de rayon arbitraire $\varepsilon > 0$. On a $ind_x\, C^* = 3 > 2 \geqslant ind_x\, C_0$, le domaine (rel C^*) $S(x, \varepsilon) \,.\, (C^* - C_0)$ est par suite non vide. Si l'on avait $S(x, \varepsilon) \,.\, (C^* - C_0) \subset G$, il en résulterait [12] que C^* est contenu dans la somme d'un arc simple S et d'une infinité dénombrable d'intervalles rectilignes [13] $(a_i b_i)$ sans points communs, dont les extrémités (toutes différentes) appartiennent à F.

Cette conclusion est évidemment absurde (p. ex. parce que dans ce cas C^* ne contiendrait qu'une infinité dénombrable de points d'indice 3), donc $S(x, \varepsilon) \,.\, [(C^* - C_0) \,.\, F] \neq 0$; ε étant arbitraire, il en résulte que $x \subset [(C^* - C_0) \,.\, F]'$ dès que $x \subset C_0 \,.\, F$, c. à d. que $C_0 \,.\, F$ est non dense sur F quel que soit l'arc simple $C_0 \subset C^*$. L'ensemble F étant fermé, il n'est pas somme d'une infinité dénombrable de ses sous-ensembles non denses, donc C^* n'est pas somme d'une infinité dénombrable d'arcs simples.

Nous venons de voir qu'il existe des continus (même dans le plan) dont tout les points possèdent un indice $\leqslant 3$ et qui ne peuvent être construits par une réunion quelconque d'arcs simples en infinité dénombrable. Nous verrons par contre dans le ch. IV que chaque continu, dont tous les points possèdent un indice $\leqslant 2$ est un arc simple ou une ligne simple fermée.

---

11) Théorème de M. BAIRE; voir pour la démonstration au cas général, HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, p. 327 (théorème VII).

12) Un voisinage quelconque du point x contenant un sous-continu homothétique à C^* tout entier.

13) De longueurs convergeant vers 0.

Ex. 13. Le continu C de la fig. 5 est formé du segment rectiligne $[0,1]$ situé sur (ox) et d'une infinité dénombrable de segments verticaux (resp. horizontaux) indiqués dans la figure. Il est facile à démontrer que l'ensemble de ramification du continu C est formé du segment $[0,1]$ et d'une infinité dénombrable de points de ramification isolés. Ces derniers points sont tous d'indice 3; quant aux points du segment $[0,1]$, nous trouvons: $ind_x\, C = 4$ si x est de la forme $x = \frac{p}{2^n}$, $0 \neq x \neq 1$, $ind_x\, C = 2$ si $x = 0$, ou $x = 1$, et $ind_x\, C = 3$ si x ne rentre dans aucune des catégories précédentes.

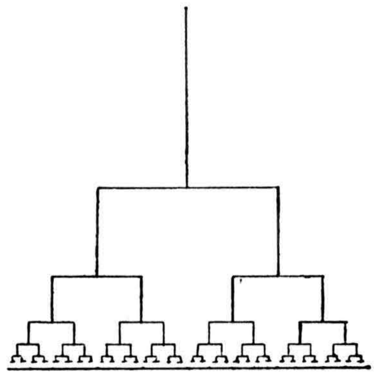

Fig. 5.

5. Démontrons maintenant l'énoncé de l'ex. 10, à savoir que:

IV. *Tout point d'un continu indécomposable C possède l'indice* $\mathfrak{c}$.

On sait, en effet, que tout continu indécomposable C est somme d'une infinité non-dénombrable de sémicontinus[14] $\mathfrak{P}_{a,C}$ sans points communs, tout $\mathfrak{P}_{a,C}$ étant de plus dense sur C. Cela rappelé, soit

$$C = A + B + D$$

une décomposition quelconque du continu C (où, comme d'habitude $A \neq 0 \neq D$, $A \cdot B = B \cdot D = H(A, D) = 0$ et B est un ensemble fermé). S'il y avait dans C un $\mathfrak{P}_{a,C}$ tel que $\mathfrak{P}_{a,C} \cdot B = 0$, on aurait $\mathfrak{P}_{a,C} \subset A$, ou bien $\mathfrak{P}_{a,C} \subset D$, c. à d. que l'un au moins des ensembles A, D serait dense sur C, ce qui est en contradiction avec nos suppositions. Il s'ensuit qu'on a toujours $\mathfrak{P}_{a,C} \cdot B \neq 0$; or l'ensemble de tous les $\mathfrak{P}_{a,C}$ étant indénombrable, l'ensemble fermé B est, lui aussi, indénombrable ce qui démontre notre proposition.

Corollaire. *Si sur un continu indécomposable C, l'ensemble $C - B$ n'est pas connexe, l'ensemble B contient un sous-ensemble parfait.* En effet, si $C = A + B + D$, $H(A, D) = 0$, on peut trouver[15] un ensemble fermé $B_0 \subset B$ tel que

[14]) JANISZEWSKI et KURATOWSKI, *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math. I, pp. 215, 219.

[15]) Par le raisonnement de I, ch. I, § 8.

$C = A_0 + B_0 + D_0$, $H(A_0, D_0) = 0$. Or, d'après ce que nous avons vu. B_0 est non-dénombrable, donc B_0 contient un ensemble parfait

$$P \subset B_0 \subset B$$

c. q. f. d.

Les exemples précédents nous montrent en particulier qu'un point limite de points de ramification peut avoir un quelconque des indices $1, 2, \ldots, n \ldots$; ω, $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$.

6. REMARQUE. Dans la définition du § 1 nous avions supposé que K est une ligne cantorienne. Or la notion d'indice de ramification resterait absolument inaltérée si l'on ne supposait rien sur la nature de l'ensemble fermé K. Il est seulement à remarquer que si $dim_x K < 1$, $ind_x K = 0$ et $ind_x K = \mathfrak{c}$, si $dim_x K > 1$.

Remarquons que, si K n'est pas connexe, l'indice d'un point x de K peut être supérieur à l'indice du même point x par rapport au composant de x dans K, comme le montre l'exemple suivant: L'ensemble K est formé d'une infinité non-dénombrable de segments rectilignes $x = \xi$, $0 \leqq y \leqq 1$, ξ étant un point arbitraire de l'ensemble parfait de Cantor situé sur ox. En appelant C_x le composant du point $x \subset K$ (C_x est alors un de ces segments rectilignes), on a

$$ind_x K = \mathfrak{c}, \quad ind_x C_x = 2 \text{ ou } 1.$$

7. Nous allons indiquer maintenant les relations qui existent entre la notion d'indice de ramification et quelques autres notions introduites dans le même ordre d'idées.

M. YOUNG [15bis] a proposé la définition suivante pour caractériser la ramification des courbes cantoriennes (dans le plan): Il dit que le point $x \subset C$ est un point de ramification d'ordre n, $ord_x C = n$, s'il existe sur C n continus $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tels que $C_i \cdot C_k = x$ $(i \neq k)$ tandis qu'on ne peut pas trouver, sur C, $n+1$ continus jouissant de la même propriété. Il est à remarquer qu'il n'est pas supposé dans cette définition que l'ensemble des continus C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, remplisse un voisinage quelconque du point x.

On généralise immédiatement cette notion de façon à obtenir $ord_x C = \aleph_0$, et $ord_x C > \aleph_0$. On pourrait même obtenir un analogue à l'indice ω en supposant que les continus C_i (en infinité dénombrable) aient des diamètres tendant vers 0.

On voit facilement qu'on a toujours (en conservant la même convention $\aleph_0 > \omega > n$) $ind_x C \geqq ord_x C$. En effet, si l'on a $ord_x C = n$, $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta(C_i)$, $1 \leqq i \leqq n$, et si B est un ensemble ε-séparant le point x sur C, aucun des ensembles $B \cdot C_i$ n'est vide, B contient donc au moins n points. Au cas $ord_x C = \omega$ l'entier n du raisonnement précédent peut être

---

[15bis]) YOUNG, The theory of sets of points, pp. 219—221.

pris arbitrairement grand. Le raisonnement reste toujours le même dans le cas où $ord_x C \geq \aleph_0$. L'ordre de ramification peut coïncider avec l'indice, p. ex. dans le cas d'une ligne simple fermée, ou dans le cas du continu formé des segments $(0 \leq x \leq 1,\ y = 0)$, $(x = 0,\ 0 \leq y \leq 1)$, et des arcs de circonférence $r = \frac{1}{n}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Mais, dans beaucoup de cas, on a $ord_x C < ind_x C$, comme le montre p. ex. le continu C de l'exemple 7 du § 4: pour x situé sur le segment limite $[-1, +1]$ de l'axe Oy, on a $ord_x C = 2$ tandis que $ind_x C = \aleph_0$.

8. On peut construire des exemples où l'indice de ramification prend une valeur $\mathfrak{m}$ quelconque, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{c}$, tandis que l'ordre de ramification est égal à 1. Il suffit de prendre une suite infinie de circonférences concentriques $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ de centre x, le rayon de C_n étant égal p. ex. à $\frac{1}{n}$; designons par Q_n la couronne circulaire comprise entre C_n et C_{n+1} et soit F_n un ensemble fermé non vide, d'ailleurs quelconque, situé sur C_n. Construisons dans Q_n un continu indécomposable quelconque K_n de sorte que $K_n \cdot C_{n+1} = K_{n+1} \cdot C_{n+1} = F_{n+1}$ et que K_n soit irréductible entre tout couple de points $y \subset F_n$, $y' \subset F_{n+1}$.

On voit aussitôt que l'ensemble $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n = K$ est un continu, tel que $ord_x K = 1$ [16]. Or si tous les ensembles F_n étaient finis et contenaient chacun le même nombre p de points, on aurait $ind_x K = p$; si F_n etait composé de n points, on aurait $ind_x K = \omega$; enfin on aurait $ind_x K = \aleph_0$ ou $\mathfrak{c}$, si tous les ensembles F_n étaient infinis dénombrables ou non respectivement.

Remarquons en passant que le continu K possède (en tout cas) x comme le seul point de connexité locale [17] („point de premier genre" [18]).

9. JANISZEWSKI a modifié la définition de M. YOUNG en exigeant en particulier que les continus C_i de la définition de M. YOUNG soient irréductibles et que leur somme remplisse tout un voisinage du point donné (de façon qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $C \cdot S(x, \varepsilon) \subset \Sigma C_i$ [19]).

Or on voit que d'après cette définition on ne pourrait attribuer aucun ordre de ramification au point (0,0) du continu de l'exemple du § 7. Il est à remarquer que la modification de JANISZEWSKI n'apporte que peu de précision à la définition de M YOUNG; on se heurte en effet aux même difficultés si l'on veut considérer par exemple les continus du § 8,

[16] En effet, K est irréductible entre le point x et un point arbitraire $y \subset F_1$; de même $T_k = x + \sum\limits_{n=k}^{\infty} K_n$ est irréductible entre x et tout point $y \subset F_k$. Il en résulte que, si $x \subset C^*$ (C^* étant un sous-continu quelconque de K), C^* contient nécessairement tous les points de K suffisamment rapprochés du point x; la relation $ord_x K = 1$ est une simple conséquence de ce dernier fait.

[17] HAHN, Wiener Berichte, 1914. On trouvera d'ailleurs la définition de la connexité locale au chapitre II, § 9.

[18] MAZURKIEWICZ, Sur les lignes de Jordan, Fund. Math. I, pp. 166—210.

[19] La définition complète de JANISZEWSKI se trouve sur la p. 63 de sa thèse.

où en général les continus C possédant des sous-continus non denses (rel. C).

JANISZEWSKI à spécialisé sa définition en introduisant les points qu'il appelle simples. Un point a est dit point simple d'ordre n du continu C s'il existe n (et pas plus) arcs simples aboutissant au point a, n'ayant deux à deux aucun autre point commun et remplissant un certain voisinage de ce point. Nous verrons dans la suite que la notion des points simples d'ordre > 2 de JANISZEWSKI coïncide avec celle des points de ramification isolés (au sens de notre définition du § 1) d'indice fini (il est évident que tout point simple d'ordre $n > 2$ est un point de ramification isolé et possède l'indice n; la réciproque sera démontré dans le ch. IV). Nous obtiendrons aussi dans le même chapitre comme cas particulier d'une proposition bien plus générale les résultats suivants faciles à démontrer directement :

1°. *Un continu ne contenant que des points simples est somme d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant qu'un nombre fini de points d'intersection.*

2°. *Un continu ne contenant que des points simples d'ordre $\leqslant 2$ est un arc simple ou une ligne simple fermée.*

10. Un ensemble fermé quelconque C étant donné, ses points se distribuent d'une façon naturelle en une infinité dénombrable d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$; M_ω, $M_{\aleph_0}$, $M_\mathfrak{c}$ (qui peuvent être en partie vides), où M_i est l'ensemble de tous les points d'indice i (i étant un nombre naturel, ou bien le symbole ω ou $\aleph_0$ ou $\mathfrak{c}$). Le problème se pose de savoir quelle est la structure de ces ensembles au point de vue de la classification de M. BAIRE [20]). Ce problème est résolu par la proposition suivante :

V. *L'ensemble de tous les points de C d'indice $\leqslant i$ est un ensemble $\mathfrak{G}_\delta$ par rapport à C.*

La démonstration de ce théorème est absolument analogue à celle du théor. IV (§§ 13 et 14 du ch. IV de la 1re partie). La seule modification à apporter consiste en ce que l'expression „*dim* $B \leq k - 1$" doit être partout remplacée par „puissance de $B \leq i$" [21]) de même que „$dim_x\, C \leq k - 1$" par „$ind_x\, C \leq i$" (resp. les mots „points qui sont de dimension $\leq i - 1$" par „points qui sont d'indice $\leq i$").

Nous avons aussi des corollaires analogues à ceux de I, ch. IV :

Cor. I. *L'ensemble des points de C d'indice $> i$ de même que l'ensemble des points d'indice $\geqslant i$ (i étant un nombre naturel, $\aleph_0$ ou $\mathfrak{c}$) est un $\mathfrak{F}_\sigma$ (rel. C.)* [22])

[20]) Voir I, ch. IV, § 12, note.

[21]) Le sens de cette expression est bien déterminé si i est un nombre cardinal fini ou égal a $\aleph_0$ ou à $\mathfrak{c}$; si i est le symbole conventionnel ω, la condition que nous venons de formuler veut dire que B est constitué d'un nombre fini (d'ailleurs quelconque) de points.

[22]) Car pour i naturel, le dernier ensemble coïncide avec $\mathfrak{E}(x, ind_x\, C > i-1)$, pour $i = \aleph_0$ resp. $= \mathfrak{c}$ cet ensemble coïncide, avec $\mathfrak{E}(x, ind_x\, C > \omega)$ resp. $\mathfrak{E}(x, ind_x\, C > \aleph_0)$. (L'expression $\mathfrak{E}(x, P)$ où P est une propriété quelconque caractérisant les point x, designe l'ensemble de tous les points x jouissant de la propriété P).

L'ensemble $\mathfrak{E}(x, ind_x\, C \geqslant \omega) = \prod_{n=0}^{\infty} \mathfrak{E}(x, ind_x\, C > n)$, cet ensemble est donc un $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$.

En particulier l'ensemble des points d'indice $\mathfrak{c}$ *est un* $\mathfrak{F}_\sigma$.

Cor. II. *L'ensemble des points de* C *qui sont d'indice* i *est un* $\mathfrak{F}_{\sigma\rho}$ *(rel.* C*).*

Cor. III. *Si l'ensemble des points de* C *d'indice* $\leqslant i$ *(resp. dans le cas où* $i \neq \omega$ *l'ensemble des points d'indice* $< i$*) et son ensemble complémentaire (par rapport à* C*) sont tous les deux denses sur* C*, le premier de ces ensembles sera de 2*[de]*, et le second de 1*[re] *catégorie* [23]).

Cor. IV. *L'ensemble de tous les points de* C *d'indice* ω *est un ensemble* $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$ (cet ensemble est en effet la partie commune de l'ensemble $\mathcal{E}$ $(x, ind_x C < \aleph_0)$ qui est un $\mathfrak{G}_\delta$, donc a fortiori un $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$, et de tous les ensembles $\mathcal{E}(x, ind_x C > n)$ qui sont des $\mathfrak{F}_\sigma$.

Points de ramification infinie.

11. Les points de ramification infinie sont, comme nous l'avons déjà dit, ceux des indices $\aleph_0$ et $\mathfrak{c}$; parmi les points de ramification ceux d'indice $\mathfrak{c}$ jouent un rôle particulier : c'est au voisinage de ces points que la structure de la ligne cantorienne devient la plus compliquée.

Les points d'indice $\mathfrak{c}$ jouissent de plusieurs propriétés particulières et qui peuvent être étudiées systématiquement ; cette étude se fera d'ailleurs par des méthodes au fond identiques à celles dont nous avons fait usage dans la démonstration des théorèmes fondamentaux sur la dimension [24]). Il y a même plus : ce n'est pas seulement la méthode qui présente une certaine analogie, nous verrons que les propriétés même des points d'indice $\mathfrak{c}$ situés sur les continus de dimension 1 sont quelquefois analogues aux propriétés des points de dimension supérieure, de façon que les lignes à ramification indénombrable sont en quelque sorte intermédiaires entre les lignes les plus simples et les continus de dimension 2.

Il n'y a que la propriété suivante qui soit commune aux points d'indice $\mathfrak{c}$ et à ceux d'indice $\geqslant \aleph_0$:

VI. *Si* $\mathfrak{m}$ *désigne un quelconque des nombres cardinaux* $\aleph_0$ *ou* $\mathfrak{c}$*, l'ensemble des points d'indice* $\geqslant \mathfrak{m}$ *situés sur l'ensemble fermé* C*, ne possède aucun point de dimension nulle.*

Désignons par M l'ensemble de tous les points x de C dont l'indice est non inférieur à $\mathfrak{m}$ et soit, par impossible, $x \subset M$ un point de dimension 0 par rapport à M. Cela veut dire qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une décomposition

$$M = A_0 + D_0 \quad , \quad H(A_0, D_0) = 0 \quad , \quad x \subset A_0 \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Il existe par conséquent [25]) deux domaines G_{A_0}, G_{D_0} tels que $S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \supset$ $\supset G_{A_0} \supset A_0$, $G_{D_0} \supset D_0$, $G_{A_0} \cdot G_{D_0} = 0$. Soit $B^* = C \cdot Fr(G_{A_0})$. Je dis que,

---

23) Au sens de M. Baire (Ann. di mat. (3), 3 (1899), p. 65).

24) I, Ch. IV.

25) I, ch. IV, § 2.

quel que soit le point $y \subset B^*$, on a $ind_y\, C < \mathfrak{m}$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $y \subset M = A_0 + D_0$. L'ensemble A_0 étant intérieur à G_{A_0}, il s'ensuit que $y \subset D_0$ donc $y \subset D_0 \,.\, \overline{G}_{A_0} \subset G_{D_0} \,.\, \overline{G}_{A_0}$, ce qui est impossible, car G_{A_0} et G_{D_0} sont des domaines sans points communs.

Posons maintenant

$$A^* = G_{A_0} \,.\, C \quad ; \quad D^* = C - (A^* + B^*).$$

On a

$$\overline{A^* + B^*} = \overline{A^*} + \overline{B^*} = (A^* + B^*) + B^* = A^* + B^*,$$

c. à d. que $A^* + B^*$ est fermé. D^* est par conséquent un domaine (rel. C) sans points communs avec A^*. Enfin $A^* + B^* \subset \overline{S}\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. La décomposition

$$C = A^* + B^* + D^*$$

est par conséquent une ε-séparation du point x sur C par l'ensemble fermé B^* dont tous les points sont d'indice $< \mathfrak{m}$.

Soit $y \subset B^*$; il existe alors une $\frac{\varepsilon}{2}$-séparation

$$C = A_y + B_y + D_y$$

du point y par un ensemble fermé B_y de puissance $< \mathfrak{m}$. Effectuons une pareille $\frac{\varepsilon}{2}$-séparation pour tout point $y \subset B^*$. Les ensembles A_y ainsi obtenus sont des domaines (rel. C) recouvrant l'ensemble fermé C. On peut choisir un nombre fini de ces domaines, à savoir

$$A_{y_1}, A_{y_2}, \ldots A_{y_s}$$

recouvrant encore l'ensemble C. Soient

$$B_{y_1}, B_{y_2}, \ldots B_{y_s} \qquad \text{et} \qquad D_{y_1}, D_{y_2}, \ldots D_{y_s}$$

les ensembles B_y et D_y correspondants.

Posons

$$B = B_{y_1} + B_{y_2} + \ldots B_{y_s} \; ;$$

B est un ensemble fermé de puissance $< \mathfrak{m}$ (donc finie si $\mathfrak{m} = \aleph_0$, finie ou dénombrable si $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$).

Posons enfin

$$A = (A^* + \sum_{i=1}^{s} A_{y_i}) - B$$

$$D = C - (A + B).$$

On a

$$\overline{A + B} = \overline{(A^* + \sum_{i=1}^{s} A_{y_i}) + B} = \overline{A^*} + \sum_{i=1}^{s} \overline{A}_{y_i} + \overline{B} = A^* + B^* +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} (A_{y_i} + B_{y_i}) + B,$$

il résulte donc des inclusions $B^* \subset \sum_{i=1}^{s} A_{y_i}$, $\sum_{i=1}^{s} B_{y_i} = B$ que

$$\overline{A+B} = (A^* + \sum_{i=1}^{s} A_{y_i}) + B = A + B$$

c. à d. que $A + B$ est fermé et par suite D est un domaine (rel. C). Comme $x \subset A^* \subset S(x, \varepsilon)$ et comme tous les $A_{y_i} + B_{y_i}$ font partie de $S(x, \varepsilon)$, il en est de même pour $A + B$, c. à d. que

$$C = A + B + D$$

est une ε-séparation du point x par l'ensemble B de puissance $< \mathfrak{m}$. La chose étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en tire que $ind_x\, C < \mathfrak{m}$, contrairement à notre supposition. Le théorème VI se trouve ainsi démontré.

Corollaire 1. *Soit C un ensemble fermé, M l'ensemble des points de C d'indice* $\geqq \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} = \aleph_0$ *ou* $\mathfrak{c}$). *Quel que soit $x \subset M$, il existe un continu C_0 tel que $x \subset C_0 \subset \overline{M}$.*

Corollaire 2. *L'ensemble M contient un continu dans tout voisinage d'un quelconque de ses points.*

Démonstration du corollaire 1. En effet, on voit sans peine que la démonstration du théor. du § 14 (I, ch. I) contient la démonstration d'une proposition plus précise à savoir que si le point x de l'ensemble fermé F n'appartient à aucun continu $C \subset F$, alors $dim_x\, F = 0$. Soit donc $x \subset M$. Si le corollaire 1 était en défaut, on aurait $dim_x\, \overline{M} = 0$, donc a fortiori $dim_x\, M = 0$, contrairement au théorème VI.

Démonstration du cor. 2. D'après le corollaire I du théor. V (§ 10) l'ensemble M est un $\mathfrak{F}_\sigma$. Désignons par ξ un point quelconque appartenant à l'ensemble M et soit ε un nombre positif arbitraire. L'ensemble $M_\varepsilon = S(\xi, \varepsilon) \,.\, M$ est, lui aussi, un ensemble $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension positive; on a par conséquent $M_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i$ où les Φ_i sont des ensembles fermés; en vertu des résultats de la 1re partie [25]) les Φ_i ne peuvent pas être tous de dimension 0. Soit p. ex. Φ_1 de dimension > 0; Φ_1 contient alors un continu k agrégé à $S(\xi, \varepsilon) \,.\, M$,

c. q. f. d.

Dans le cas $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$ on peut remplacer le théorème VI par le théorème plus précis suivant:

VI'. *Soit M l'ensemble (supposé non vide) de tous les points x de l'ensemble fermé F tels que $ind_x\, F = \mathfrak{c}$; on a alors $ind_x\, M \geqq \aleph_0$.*

Nous démontrerons même que si ε est assez petit, aucun ensemble B_0 ne peut être réductible [26]) s'il est un ensemble ε-séparant le point $x \subset M$ (par rapport à M).

Supposons en effet, que pour tout ε il existe une séparation d'un point $x \subset M$, (par rapport à M):

$$M = A_0 + B_0 + D_0$$

25) I, ch. VI, § 8, Lemme IV.

26) C. à d. que $\overline{B_0}$ doit nécessairement contenir un ensemble parfait.

telle que $\overline{B_0}$ est au plus dénombrable. Nous construisons de nouveau les domaines G_{A_0} et G_{D_0} sans points communs et tels que $x \subset A_0 \subset G_A \subset \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $G_{D_0} \supset D_0$; nous remarquons aussitôt que

$$M \,.\, Fr\,(G_{A_0}) \subset B_0 \,. \tag{1}$$

Posons (comme dans le § 5, I, ch. IV)

$$Q_1 = Fr\,(G_{A_0}) \,.\, \left[F - S\left(\overline{B}_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

$$Q_m = F \,.\, Fr\,(G_{A_0}) \,.\, \left[\overline{S\left(\overline{B}_0 \,,\, \frac{\varepsilon}{m}\right)} - S\left(\overline{B}_0 \,,\, \frac{\varepsilon}{m+1}\right)\right].$$

On a

$$Fr\,(G_{A_0}) \,.\, (F - \overline{B}_0) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \,. \tag{2}$$

Soit $y \subset Q_m$. On a en vertu de (1)

$$ind_y\, F \leqslant \aleph_0,$$

il existe donc une $\frac{\varepsilon}{m+1}$-séparation du point y à savoir

$$F = A_y + B_y + D_y \,,$$

où l'ensemble B_y est un ensemble fermé au plus dénombrable et A_y et D_y sont des domaines (rel. F). En appliquant le théorème de BOREL-LEBESGUE à l'ensemble fermé Q_m recouvert par les domaines A_y, on obtient (voir toujours I, ch. IV, § 5) un système fini de domaines A_y (rel. F) recouvrant Q_m

$$A_{y_{k_{m-1}}},\ A_{y_{k_{m-1}+1}}, \ldots\ldots\ldots, A_{y_{k_m}}$$

donc enfin une suite dénombrable

$$A_{y_1}, \ldots\ A_{y_{k_1}},\ A_{y_{k_1+1}}, \ldots, A_{y_{k_2}}, \ldots, A_{y_{k_{m-1}}},\ A_{y_{k_{m-1}+1}}, \ldots, A_{y_{k_m}}, \ldots.$$

de domaines (rel. F) tels que les domaines A_{y_s}, $k_{m-1} < s \leqq k_m$ (avec $k_0 = 0$), recouvrent l'ensemble Q_m.

On obtient, en vertu de ce qui précède :

$$Fr\,(G_{A_0}) \,.\, (F - \overline{B_0}) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \subset \sum_{s=1}^{\infty} A_{y_s} \tag{3}$$

$$\lim_{s \to \infty} \delta\,(A_{y_s} + B_{y_s}) = 0 \,.$$

On en tire facilement (l'ensemble de tous les y_s ayant tous ses points-limites sur $\overline{B}_0$) que les ensembles

$$B = \overline{B_0} + \sum_{s=1}^{\infty} B_{y_s} \tag{4}$$

et $B + \sum_{s=1}^{\infty} A_{y_s}$ sont fermés. B est, en outre, au plus dénombrable.

Posons maintenant

$$(5) \qquad A = (G_{A_0} \cdot F + \sum_{s=1}^{\infty} A_{y_s}) - B$$
$$D = F - (A + B).$$

On a immédiatement d'après (2), (3), (4) et (5) (en se rappelant que B et $B + \sum_{s=1}^{\infty} A_{y_s}$ sont fermés) :

$$\begin{aligned}\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B} &= (G_{A_0} \cdot F + Fr(G_{A_0}) \cdot F + \overline{\sum_{s=1}^{\infty} A_{y_s}}) + B = \\ &= G_{A_0} \cdot F + Fr(G_{A_0}) \cdot F + (\overline{\sum_{s=1}^{\infty} A_{y_s} + B}) = \\ &= G_{A_0} \cdot F + Fr(G_{A_0}) \cdot \overline{B_0} + Fr(G_{A_0})(F - \overline{B_0}) + \sum_{s=1}^{\infty} A_{y_s} + B \subset \\ &\subset G_{A_0} \cdot F + B + \sum_{s=1}^{\infty} A_{y_s} + B = A + B.\end{aligned}$$

c. à d. $A + B$ est fermé, et par suite D est un domaine (rel. F). D'autre part on a évidemment

$$x \subset A \subset A + B \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = S(x, \varepsilon).$$

La décomposition

$$F = A + B + D$$

est donc une ε-séparation du point x par l'ensemble B au plus dénombrable, contrairement à la supposition $ind_x F = \mathfrak{c}$,

c. q. f. d.

12. On peut aller encore plus loin dans l'étude des points d'indice $\mathfrak{c}$, et cela toujours en suivant mot pour mot les raisonnements du Ch. IV de la 1re partie. Nous aurons en effet successivement les propositions suivantes :

Lemme fondamental. Soient F et $\Phi \subset F$ deux ensembles fermés tels que $F - \Phi$ ne contienne aucun point d'indice $\mathfrak{c}$ (par rapport à F); si l'on a $ind_x F = \mathfrak{c}$ on aura aussi $ind_x \Phi = \mathfrak{c}$.

Théorème VII (analogue du théorème I de I, ch. IV). *Si l'ensemble fermé F est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés F_i ne contenant pas de points d'indice $\mathfrak{c}$ (par rapport à F_i), F lui-même ne contient aucun point d'indice $\mathfrak{c}$.*

La démonstration de cette proposition est absolument analogue à celle des propositions correspondantes de la 1re partie, on doit seulement faire dans les §§ 4—7 du ch. IV les changements que voici :

1⁰. toute expression de la forme „$dim_z M \leq n$" ou „$dim_z M < n + 1$" (par ex., „$dim_x F \leq n$, $dim_y F \leq n$, $dim_x \Phi \leq n$" etc) doit être remplacée par l'expression „$ind_z M \leq \aleph_0$" ;

2⁰. toute expression de la forme „$dim\, B < n$" [27]) (par ex. „$dim\, B_0 < n$", „$dim\, B_y < n$") doit être remplacée par l'expression „la puissance de l'ensemble B est $\leq \aleph_0$" ;

---

[27]) où B est un ensemble ε- $\left(ou \frac{\varepsilon}{2}\text{-}, \ ou \frac{\varepsilon}{2^k}\text{-}\right)$ séparant (un point quelconque).

3⁰. toute expression de la forme „$dim_z\ M \geqq n+1$" doit être remplacée par „$ind_z\ M = \mathfrak{c}$";

4⁰. dans les dernières lignes du § 6 il est à remarquer que l'ensemble B devient dans notre cas (les changements indiqués étant faits) un ensemble dénombrable; on obtient ainsi dans le cas présent la démonstration du lemme fondamental sans faire usage du principe d'induction;

5⁰. dans les dernières lignes du § 7 on doit remplacer le passage „le théorème I est ainsi établi pour le nombre $n+1$ etc." par „le théorème VII est ainsi établi."

13. En désignant par $R_\mathfrak{c}$ l'ensemble de tous les points d'indice $\mathfrak{c}$ de l'ensemble fermé F, et en posant $\Pi = \overline{R}_\mathfrak{c}$, on a le théorème

VIII (analogue au théorème III de I, ch. IV). *Si* $ind_x F = \mathfrak{c}$, *alors* $ind_x \Pi = \mathfrak{c}$.

La démonstration se fait toujours par les mêmes méthodes. Soit x un point de $R_\mathfrak{c}$ c. à d. que $ind_x F = \mathfrak{c}$. Or l'ensemble Π est fermé, tout point de $F - \Pi$ étant d'indice $\leqq \aleph_0$. Il en résulte, d'après le lemme fondamental, que

$$ind_x \Pi = \mathfrak{c} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Par les raisonnements ci-dessus une certaine analogie entre les points d'indice $\mathfrak{c}$ et les points de dimension supérieure me semble assez élucidée. Faisons encore les remarques suivantes.

1⁰. Il peut arriver qu'un ensemble fermé ne contient que des points d'indice $\mathfrak{c}$, tandis que tout composant de cet ensemble est un arc simple (donc ne contient que des points d'indice $\leqq 2$) (voir l'exemple du § 6).

Le problème, analogue au problème γ (I, ch. IV, § 8) se résout donc dans le cas de l'indice $\mathfrak{c}$ par la négative.

2⁰. Les théorèmes VII et VIII ainsi que le lemme fondamental sont en défaut pour les points d'indice $\aleph_0$ comme le montrent les exemples 6 et 7 du § 4 [28]).

3⁰. Un continu C peut contenir un seul point d'indice $\aleph_0$ (en vertu du théor. VI il existe alors dans C nécessairement des points d'indice $\mathfrak{c}$).

Soit en effet C le continu de la figure 6 formé du segment [0,1] de l'axe Ox, des segments $[O,\ a_n^{(1)}]$ de longueur 1 et de coëfficient angulaire $\frac{1}{n}$, et des triangles $(a_\omega^{(k)}, b_k, a_\omega^{(k+1)})$ (intérieur et contour compris) ($k = 1, 2, \ldots$; $\varrho(a_\alpha^{(n)}, O) = \frac{1}{n}$, ou n est un nombre naturel quelconque, et α un nombre naturel ou ω).

Le point O est le seul point d'indice $\aleph_0$ (les ensembles ε-séparants sont les ensembles $B_k = \{a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k, \ldots; a_\omega^k\}$).

28) L'exemple 2 du ch. III nous montre même qu'on peut avoir sur un continu C des points d'indice $\aleph_0$ tandisque C est la somme de deux continus C_1 et C_2 dont tous les points sont d'indice fini ($\leqq 4$).

Si l'on veut avoir une ligne cantorienne jouissant de la même propriété, il suffit de remplacer chaque triangle $(a_\omega^{(k)},\ b_k\ ,\ a_\omega^{(k+1)})$ par une ligne can-

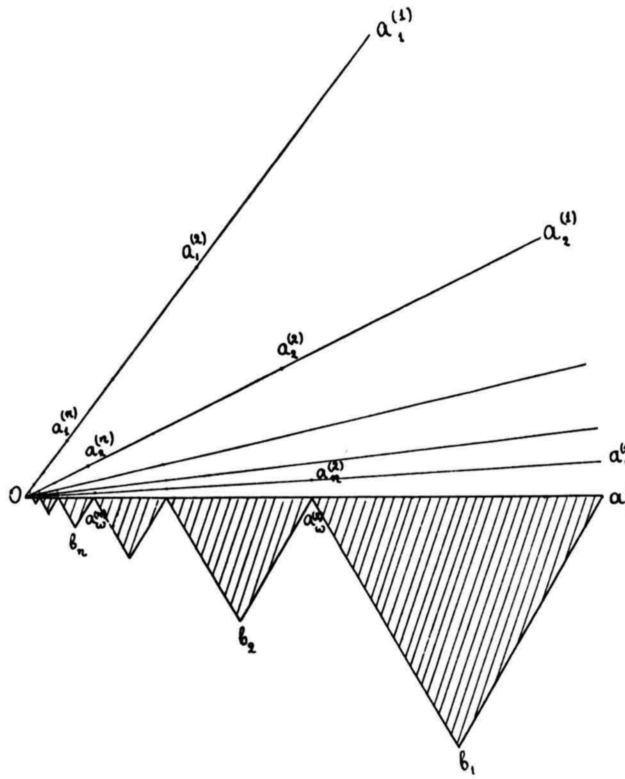

Fig. 6.

torienne située dans ce triangle, contenant le segment $[a_\omega^{(k+1)}, a_\omega^{(k)}]$, et dont tout les points ont l'indice $\mathfrak{c}$ (ce qui est facile à obtenir, en construisant p. ex. dans $(a_\omega^{(k)},\ b_k\ ,\ a_\omega^{(k+1)})$ un continu indécomposable, ou un continu analogue à la courbe de M. Sierpiński (ex. 11 du § 4).

14. Nous allons enfin indiquer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne cantorienne ne contienne aucun point d'indice $\mathfrak{c}$.

D'après les résultats de la 1re partie de ce mémoire, un continu peut être décomposé en une somme de deux ensembles $M+N$ de dimension nulle dans le cas et dans le cas seulement où C est de dimension 1. Or, le cas où l'un de ces ensembles (p. ex. M) peut être choisi dénombrable est précisément celui qui nous intéresse : nous allons montrer, en effet, que dans ce dernier cas, et dans ce cas seulement, C ne contient aucun point d'indice $\mathfrak{c}$. Le rôle joué par les points d'indice $\mathfrak{c}$ sera ainsi mis en pleine lumière. Nous avons donc à démontrer le théorème suivant :

IX. *Pour qu'un ensemble fermé C ne contienne aucun point d'indice $\mathfrak{c}$,* *il faut et il suffit qu'on le puisse décomposer en deux ensembles sans points communs dont l'un est de dimension nulle et l'autre est au plus dénombrable* [29]).

La condition est nècessaire. Soit C un ensemble ne contenant aucun point d'indice c.

Soit ε un nombre arbitraire > 0. Il existe pour tout point $x \subset C$ une décomposition (que nous supposons bien déterminée)

$$C = A_x^{(\varepsilon)} + B_x^{(\varepsilon)} + D_x^{(\varepsilon)} \tag{6}$$

$$H(A_x^{(\varepsilon)}, D_x^{(\varepsilon)}) = 0 \quad , \quad x \subset A_x^{(\varepsilon)} \subset A_x^{(\varepsilon)} + B_x^{(\varepsilon)} \subset S(x, \varepsilon)$$

telle que $A_x^{(\varepsilon)}$ et $D_x^{(\varepsilon)}$ soient des domaines (rel. C) et $B_x^{(\varepsilon)}$ soit un ensemble fermé au plus dénombrable.

En faisant cette décomposition pour tout $x \subset C$ et en appliquant ensuite le théorème de BOREL-LEBESGUE on obtient un nombre fini n_ε de domaines (rel. C) $A_x^{(\varepsilon)}$, à savoir

$$A_{x_1}^{(\varepsilon)}, \; A_{x_2}^{(\varepsilon)}, \ldots \; A_{x_{n_\varepsilon}}^{(\varepsilon)}$$

Ces domaines recouvrent l'ensemble C tout entier. En donnant à ε toutes les valeurs $\frac{1}{p}$ (où p est un entier positif quelconque), on obtient respectivement un système dénombrable d'ensembles $A_{x_k}^{\left(\frac{1}{p}\right)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n_{\frac{1}{p}} \; ; \; p = 1, 2, 3, \ldots)$ et d'ensembles $B_{x_k}^{\left(\frac{1}{p}\right)}$. Les ensembles $B_{x_k}^{\left(\frac{1}{p}\right)}$ étant au plus dénombrables, l'ensemble somme

$$B = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_{\frac{1}{p}}} B_{x_k}^{\left(\frac{1}{p}\right)}$$

est, lui aussi, au plus dénombrable.

Démontrons que l'ensemble $A = C - B$ est (s'il n'est pas vide) de dimension 0. En effet, soit x un point arbitraire de A et ε un nombre positif quelconque ; il existe pour tout p, en particulier pour $p > \frac{1}{\varepsilon}$, un $A_{x_k}^{\left(\frac{1}{p}\right)}$ tel que x lui est agrégé:

$$x \subset A \, . \, A_{x_k}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \subset S\left(x, \frac{1}{p}\right) \subset S(x, \varepsilon). \tag{7}$$

On a

$$A = (A_{x_k}^{\left(\frac{1}{p}\right)} - B) + (B_{x_k}^{\left(\frac{1}{p}\right)} - B) + (D_{x_k}^{\left(\frac{1}{p}\right)} - B). \tag{8}$$

L'ensemble $B_{x_k}^{\left(\frac{1}{p}\right)} - B$ étant vide, nous avons bien (d'après (6), (7), (8))

---

29) D'après ce que nous avons dit, la condition supplémentaire $dim\, C \leqq 1$ est implicitement contenue dans la prémisse aussi bien que dans la thèse de notre proposition.

une ε-séparation du point x par l'ensemble vide, $x \subset A$ et ε étant arbitrairement choisis. A est de dimension nulle. Nous avons par suite dans la relation

$$C = A + B$$

une décomposition de l'ensemble C satisfaisant à toutes nos conditions.

La condition est suffisante. Soit C un ensemble fermé contenant des points d'indice $\mathfrak{c}$ et D un ensemble dénombrable quelconque faisant partie de C. Nous n'avons à démontrer que

$$dim\,(C - D) > 0.$$

D'aprés le théorème VI, l'ensemble $R_{\mathfrak{c}}$ de tous les points x d'indice $ind_x\, C = \mathfrak{c}$ est indénombrable; l'ensemble $R_{\mathfrak{c}} \,.\, (C - D)$ est par suite non vide. Soit x un point de cet ensemble. Montrons que

$$dim_x\,(C - D) > 0.$$

En effet, dans le cas contraire on aurait, quel que soit $\varepsilon > 0$, une ε-séparation du point x (par rapport à l'ensemble $C - D$) par l'ensemble vide, c. à d. les relations

(9) $$C - D = P + Q, \qquad H(P, Q) = 0, \qquad x \subset P \subset S(x, \varepsilon).$$

Or on a

$$C = (C - D) + D = P + Q + D,$$

donc

(10) $$C = P + D \,.\, S(P, \varepsilon) + [Q + (D - S(P, \varepsilon))].$$

On a d'après (9)

(11) $$x \subset P \subset P + D \,.\, S(P, \varepsilon) \subset S(P, \varepsilon) \subset S(x, 2\varepsilon)$$

et en outre

(12) $$\begin{cases} H(P, [Q + (D - S(P, \varepsilon)]) = \\ = \overline{P} \,.\, [Q + (D - S(P, \varepsilon))] + P \,.\, \overline{[Q + (D - S(P, \varepsilon))]} = \\ = \overline{P} \,.\, Q + \overline{P} \,.\, [D - S(P, \varepsilon)] + P \,.\, \overline{Q} + P \,.\, \overline{[D - S(P, \varepsilon)]} = \\ = H(P, Q) + \overline{P} \,.\, [D - S(P, \varepsilon)] + P \,.\, \overline{[D - S(P, \varepsilon)]} \subset \\ \subset \overline{P} \,.\, [E - S(P, \varepsilon)] + P \,.\, \overline{[E - S(P, \varepsilon)]} = 0, \end{cases}$$

ou E désigne l'espace tout entier.

Il s'ensuit de (11) et (12) que (10) est une 2ε-séparation du point x (par rapport à C) par l'ensemble au plus dénombrable $D \,.\, S(P, \varepsilon)$.

Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons $ind_x\, C \leq \aleph_0$, contrairement à notre supposition.

15. Les propositions sur l'indice de ramification que nous avons jusqu'à présent démontrées ne font appel à aucune notion auxiliaire ; la chose ne se passe pas ainsi dans toute la théorie : pour aller plus loin, il nous est indispensable d'étudier quelques questions toutes différentes. C'est à ces questions que seront consacrées les deux chapitres suivants.

Pour terminer le présent chapitre nous nous bornerons à mentionner quelques problèmes voisins de ceux que nous venons de traiter, et dont la résolution reste inconnue.

Problème α. Soit F un ensemble fermé; peut on démontrer que tout point x, $ind_x F \geqq \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} = \aleph_0$ ou $\mathfrak{c}$) appartient à un continu $K \subset F$ dont tout point y est d'indice $\geqq \mathfrak{m}$ (par rapport à F)?

Problème β. Soit M l'ensemble de tous les points x, $ind_x F = \mathfrak{c}$. Peut on démontrer qu'on a, quel que soit $x \subset M$, $ind_x M = \mathfrak{c}$?

CHAPITRE II.

UN THÉORÈME SUR LA CONVERGENCE DES ENSEMBLES.

1. Soient X et Y deux ensembles quelconques situés dans l'espace métrique et compact E. Considérons l'ensemble $D_{x,y}$ de tous les nombres $\varrho(x, Y)$ et $\varrho(y, X)$ obtenus en prenant pour x respectivement y chacun des points de l'ensemble X respectivement Y. La borne supérieure de l'ensemble $D_{x,y}$ (formé de nombres non-négatifs) sera dite *approximation* des ensembles X et Y et sera designée par

$$apx\,(X, Y).$$

Il est à remarquer que dans le cas où les ensembles X et Y sont fermés, la borne supérieure en question est effectivement atteinte de façon qu'il existe un point $x \subset X$ tel que $\varrho(x, Y) = apx\,(X, Y)$ ou bien un point $y \subset Y$ tel que $\varrho(y, X) = apx\,(X, Y)$. On a évidemment toujours

$$apx\,(\overline{X}, \overline{Y}) = apx\,(X, Y)$$

ce qui nous permet de ne considérer dans la suite que des ensembles fermés. La notion d'approximation $apx\,(X, Y)$ est due a M. HAUSDORFF [1]) qui l'a introduite sous le nom „*Entfernung* $\overline{AB}$ (*zweier Mengen* A, B). M. HAUSDORFF a également demontré que

$$apx\,(X, Y) + apx\,(Y, Z) \geqq apx\,(X, Z),$$

la relation $apx\,(X, Y) = apx\,(Y, X)$ étant évidente. Si nous ne considérons que des ensembles fermés, nous verrons *qu'on a* $apx\,(X, Y) = 0$ *dans le cas et dans le cas seulement, où les ensembles* X *et* Y *sont identiques.* On voit ainsi *qu'on peut former de tous les ensembles fermés* $X, Y, \ldots$ *situés dans l'espace métrique compact* E *un nouvel espace métrique* $\mathcal{E}$ *en posant*

$$\underset{(\text{dans } \mathcal{E})}{\varrho}(X, Y) = \underset{(\text{dans } E)}{apx}(X, Y).$$

Le résultat principal de ce chapitre sera de démontrer que l'espace E étant compact, l'espace $\mathcal{E}$ est lui aussi compact. Nous démontrerons en outre dans le même ordre d'idées plusieurs autres propositions dont nous ferons souvent usage.

2. Nous commençons par la modification suivante de la définition de M. HAUSDORFF. Nous considérons deux ensembles fermés X et Y (appartenant à l'espace métrique compact E).

I. *Soit* $\overline{\alpha}$ *un nombre positif tel que le point u étant arbitrairement*

---

[1]) Loc. cit. p. 293.

choisi dans un quelconque des deux ensembles X, Y, il existe toujours dans l'autre ensemble un point v dont la distance $\varrho(u, v)$ est au plus égale à $\bar{\alpha}$.

La borne inférieure α de tous les $\bar{\alpha}$ est égale à $apx(X, Y)$.

(Les ensembles X et Y étant supposés fermés, cette borne inférieure est de plus toujours atteinte).

Démontrons l'égalité $\alpha = apx(X, Y)$; soit u un point quelconque de X; d'après la définition de α, il existe un point déterminé v_n de Y tel que $\alpha \leqq \rho(u, v_n) < \alpha + \frac{1}{n}$. On peut toujours extraire de la suite des v_n une suite partielle convergeant vers un point v; il est évident que $\rho(u, v) = \alpha$. La borne inférieure α est donc atteinte.

Soit

$$a_1 = \max_{x \subset X} \varrho(x, Y) \quad ; \quad a_2 = \max_{y \subset Y} \varrho(y, X).$$

Soit de plus $apx(X, Y) = a = \max(a_1, a_2)$, et u un point quelconque de l'un des deux ensembles X, Y, par exemple $u \subset X$. On a $\rho(u, Y) \leqq a_1 \leqq a$; il existe par suite un point $v \subset Y$ tel que $\rho(u, Y) = \rho(u, v) \leqq a$, c. à d. que $apx(X, Y)$ est un *nombre* $\bar{\alpha}$ (pour le couple X, Y). Je dis que $apx(X, Y)$ est le plus petit parmi tous ces nombres $\bar{\alpha}$. En effet, soit b un nombre $\bar{\alpha}$, $b < a$. On a alors $b < a_1$ ou bien $b < a_2$. Si $b < a_1$ il existe d'après la définition de a_1 un point $x \subset X$ tel qu'on a $\rho(x, y) > b$ quel que soit $y \subset Y$, b n'est donc pas un nombre $\bar{\alpha}$. Le raisonnement pour le cas $b < a_2$ est analogue.

c. q. f. d.

On peut donner à l'énoncé précédent une forme particulièrement simple en se servant de la notion de *sphère fermée* $\bar{S}(M, \varepsilon)$ *de rayon* ε décrite autour de l'ensemble M. En effet, nous venons de démontrer que $apx(X, Y)$ est le plus petit nombre positif ε tel que

$$\bar{S}(X, \varepsilon) \supset Y \quad , \quad \bar{S}(Y, \varepsilon) \supset X.$$

Remarquons que la relation

$$apx(X, Y) + apx(Y, Z) \geqq apx(X, Z)$$

est une conséquence immédiate de la proposition que nous venons de démontrer. Soient

$$apx(X, Y) = p, \quad apx(Y, Z) = q$$

et u un point arbitraire de X (resp. de Z). Il existe d'après la nouvelle définition du nombre $apx(X, Y)$ (resp. $apx(Y, Z)$) un point $y \subset Y$ tel que $\rho(u, y) \leqq p$ (resp. $\rho(u, y) \leqq q$); il existe aussi un point v appartenant à Z (resp. à X) et tel que $\rho(y, v) \leqq q$ (resp. $\rho(y, v) \leqq p$), donc $\rho(u, v) \leqq \rho(u, y) + \rho(y, v) \leqq p + q$, c. à d. $p + q$ est un nombre $\bar{\alpha}$ pour le couple (X, Z), par conséquent $p + q \geqq apx(X, Z)$.

3. Rappelons encore les deux définitions suivantes dues également à M. HAUSDORFF.

Supposons donnée une suite infinie d'ensembles

(1) $$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

1. Appelons *limite topologique supérieure* [2]) de la suite (1) l'ensemble F de tous les points ξ satisfaisant à la condition suivante : quel que soit le

---

[2]) „Oberer abgeschlossener Limes", HAUSDORFF, p. 236.

nombre positif ε, et le nombre naturel k, il existe dans la suite (1) un ensemble M_n tel que $n > k$ et $\varrho(\xi, M_n) < \varepsilon$. Appelons *limite topologique inférieure* [3]) de la suite (1) l'ensemble Φ de tous les points ξ satisfaisant à la condition suivante : quel que soit le nombre positif ε, il existe un nombre naturel k tel que

$$\varrho(\xi, M_n) < \varepsilon, \text{ pour tout } n > k.$$

Nous désignerons F resp. Φ par $\overline{lt}\, M_n$ resp. $\underline{lt}\, M_n$. On s'aperçoit aussitôt que $\overline{lt}\, M_n$ et $\underline{lt}\, M_n$ sont tous les deux des ensembles fermés, et qu'on a toujours $\underline{lt}\, M_n \subset \overline{lt}\, M_n$ [4]). Le premier de ces ensembles n'est d'ailleurs jamais vide, en vertu de la relation facile à vérifier [5])

(2) $$\overline{lt}_{n\to\infty}\, M_n = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n,$$

où l'on a posé

(3) $$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} M_{n+k}.$$

Nous dirons enfin que la suite (1) est convergente, si l'on a

$$\overline{lt}\, M_n = \underline{lt}\, M_n.$$

L'ensemble $F = \overline{lt}\, M_n = \underline{lt}\, M_n$ sera appelé dans ce cas *limite topologique* de la suite (1) et il sera désigné par $lt\, M_n$. On voit sans peine que toute suite partielle d'une suite convergente d'ensembles converge vers la limite topologique de la suite entière.

4. Passons maintenant à la démonstration du théorème suivant :

II. *Pour que la suite d'ensembles* (situés dans l'éspace métrique compact)

(1) $$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

converge vers l'ensemble M, il faut et il suffit que l'ensemble M soit fermé, et qu'on ait en outre

(4) $$\lim_{n\to\infty} apx\,(M, M_n) = 0.$$

1. *La condition est nécessaire.*

Soit $M = lt\, M_n$. Nous avons déjà remarqué que dans ce cas M est

---

3) „Unterer abgeschlossener Limes", ibid., p. 236.

4) En remarquant qu'on a toujours $\overline{lt}\, M_n = \overline{lt}\, \overline{M_n}$ et $\underline{lt}\, M_n = \underline{lt}\, \overline{M_n}$, on peut supposer les ensembles M_n fermés.

5) En effet, si x n'est pas agrégé à $\overline{lt}\, M_n$, on a un $\varepsilon > 0$ et un nombre naturel N tels que $\rho(x, M_n) \geqq \varepsilon$ pour tout $n \geqq N$; on a par conséquent $\rho(x, \overline{S_n}) = \rho(x, S_n) \geqq \varepsilon$, x n'appartient donc pas à $\prod_{n=1}^{\infty} \overline{S_n}$. Supposons maintenant que le point x n'appartienne pas à $\prod_{n=1}^{\infty} \overline{S_n}$ et soit N le premier nombre naturel tel que $x \cdot \overline{S_N} = 0$, donc $\rho(x, \overline{S_N}) \neq 0$. Soit $\varepsilon < \rho(x, \overline{S_N})$; on a, quel que soit $n \geqq N$,

$$\varrho(x, M_n) > \varepsilon.$$

nécessairement fermé ; supposons par impossible que l'égalité (4) ne se trouve pas vérifiée. Il existe alors un nombre $\alpha > 0$ et une suite partielle

(5) $$M_{n_1}, M_{n_2}, \ldots, M_{n_k}, \ldots$$

telle que l'on a

$$apx(M_{n_k}, M) > \alpha,$$

quel que soit l'ensemble M_{n_k} de la suite (5). Désignons, pour simplifier l'écriture, l'ensemble M_{n_k} par M_k^*. L'inégalité

$$apx(M_k^*, M) > \alpha$$

ne peut avoir lieu que si l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :

I. Il existe un point $x_k \subset M$ tel que $\varrho\,(x_k, M_k^*) > \alpha$.

II. Il existe un point $y_k \subset M_k^*$ tel que $\varrho\,(y_k, M) > \alpha$.

L'une au moins des deux conditions I, II se trouve realisée pour une infinité de valeurs de k. Supposons d'abord que ce soit la première. Il existe alors une infinité de points

(6) $$x_{k_1}\ x_{k_2}, \ldots, x_{k_\nu}, \ldots$$

de l'ensemble fermé M tels que $\varrho\,(x_{k_\nu}, M_{k\nu}^*) > \alpha$ pour chaque ν. Soit $x \subset M$ un point limite de l'ensemble des points (6). On a $\varrho\,(x, M_{k_\nu}^*) \geqq \alpha$. Le point x ne peut donc pas appartenir à

$$lt\, M_{k_\nu}^* = lt\, M_n = M,$$

ce qui est absurde.

Supposons maintenant que c'est le cas II qui se présente une infinité de fois (nous pouvons évidemment supposer que le cas II se réalise pour tous les M_k^*).

Soit y un point-limite des y_k ; on a $y \subset \overline{lt}\, M_k$, d'autre part $\varrho\,(y, M) \geqq \alpha$, donc $M \neq \overline{lt}\, M_k$ ce qui est impossible si $lt\, M_k = M$.

2. *La condition est suffisante.*

Soit

$$\overline{M} = M \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} apx(M_n, M) = 0\,;$$

il faut démontrer que la suite (1) converge vers M.

Si x est un point quelconque de M, et ε un nombre positif arbitraire, il existe un nombre k assez grand pour qu'on ait

$$apx(M, M_n) < \varepsilon$$

quand n surpasse k.

Il s'ensuit qu'on peut trouver dans l'ensemble M_n un point x_n distant de x de moins de ε, et cela quel que soit $n > k$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \subset M$, on en tire que

$$M \subset \underline{lt}\, M_n\,.$$

Il nous reste seulement à montrer que $\overline{lt}\, M_n \subset M$.

Dans le cas contraire on aurait un point x appartenant à $\overline{lt}\,M_n$ sans appartenir à M. L'ensemble M étant fermé, désignons par 2σ le nombre positif $\varrho(x, M)$ et par m un entier positif satisfaisant à l'inégalité

$$apx(M, M_n) < \sigma \text{ pour tout } n \geqq m$$

Le point x appartenant à $\overline{lt}\,M_n$, il existe un M_k tel que $k > m$ $\varrho(x, M_k) < \sigma$. Il existe alors un point $y \subset M_k$ tel que $\varrho(x, y) < \sigma$ et un point $z \subset M$ tel que $\varrho(y, z) \leqq \sigma$. On aboutit ainsi à la relation

$$2\sigma = \varrho(x, M) \leqq \varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \sigma + \sigma = 2\sigma$$

dont l'absurdité démontre bien notre proposition.

5. Soit M un ensemble quelconque. Désignons par $\varepsilon(M)$ la borne inférieure de tous les nombres positifs ε tels qu'on puisse joindre deux points quelconques $x + y \subset M$ par un „ε-chaîne" $x_1 = z_0, z_1, z_2 \ldots z_n, z_{n+1} = y, \varrho(z_i, z_{i+1}) < \varepsilon\ (0 \leqq i \leqq n)$ [6]. On a alors le théorème suivant

III. *Soit $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ une suite convergente d'ensembles tels que $\varepsilon(M_n)$ tende vers zero avec $\frac{1}{n}$; $F = \underset{n \to \infty}{lt}\, M_n$ est alors un continu ou un seul point.*

F est fermé; supposons que F ne soit pas un continu. On a alors $F = F_1 + F_2$, F_1 et F_2 étant deux ensembles fermés non vides sans points communs. Désignons par 3σ le nombre positif $\varrho(F_1, F_2)$. On a

$$S(F_1, \sigma) \,.\, S(F_2, \sigma) = 0.$$

Prenons n assez grand pour qu'on ait

$$\varepsilon(M_n) < \sigma \quad ; \quad apx(M_n, F) < \sigma\,;$$

on trouve alors en vertu de la dernière inégalité que

$$M_n \subset S(F, \sigma) = S(F_1, \sigma) + S(F_2, \sigma)\,;$$

pour les mêmes raisons chacun des deux ensembles $M_n^* = M_n \cdot S(F_1, \sigma)$ et $M_n^{**} = M_n \cdot S(F_2, \sigma)$ est non vide. L'ensemble M_n se trouve ainsi décomposé en une somme de deux ensembles M_n^* et M_n^{**}, tels que

$$\varrho(M_n^*, M_n^{**}) \geqq \varrho[S(F_1, \sigma), S(F_2, \sigma)] \geqq \varrho(F_1, F_2) - 2\sigma \geqq 3\sigma - 2\sigma = \sigma > \varepsilon(M_n).$$

Or cela est en contradiction avec la définition du nombre $\varepsilon(M_n)$ car il n'existe évidemment aucune σ-chaîne entre deux points quelconques $x \subset M_n^*$ et $y \subset M_n^{**}$.

Corollaire 1. *La limite topologique d'une suite convergente de continus est un continu ou un seul point.*

En effet, si M_n est un continu, on a $\varepsilon(M_n) = 0$.

En remarquant que toute suite décroissante d'ensembles fermés converge vers le produit de tous les ensembles de la suite, on obtient le

Corollaire 2. *Le produit d'une suite decroissante d'ensembles fermés $F_1 \supset F_2 \ldots \supset F_n \ldots \supset \ldots$ avec $\underset{n \to \infty}{\varepsilon(F_n) \to 0}$ est un continu ou un seul point.*

---

6) $\varepsilon(M)$ est la borne supérieure de tous les nombres $\rho(P, Q)$ où $P + Q = M$ est une décomposition quelconque de l'ensemble M en deux parties sans points communs ; $\varepsilon(M) = 0$, dans le cas et dans le cas seulement où M *est bien enchaîné.*

Nous avons enfin la proposition bien connue suivante:

Corollaire 3. *La partie commune d'une suite décroissante de continus est un continu* (*ou un seul point*).

6. Nous allons modifier l'énoncé du théorème II en lui donnant la forme intrinsèque du principe de convergence de Cauchy :

IV. *Pour que la suite des ensembles*

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots \tag{1}$$

situés dans un éspace métrique compact soit convergente, il faut et il suffit qu'on puisse faire correspondre à tout nombre positif ε *un entier* p *tel que* $apx(M_p, M_{p+h})$ *soit moindre de* ε *quel que soit l'entier positif* h.

La nécessité de la condition énoncée résulte immédiatement du théorème II et de ce que

$$apx(M_p, M_{p+h}) \leq apx(M_p, M) + apx(M, M_{p+h}),$$

où M désigne la limite topologique (supposée existante) de la suite (1).

Démontrons maintenant que notre condition est *suffisante*.

Posons $F = \overline{lt}_{n \to \infty} M_n$. D'après ce que nous avons vu, F est un ensemble fermé non vide. Il nous reste donc à montrer que tout point $x \subset F$ appartient aussi à $\underline{lt}_{n \to \infty} M_n$.

Soit ε un nombre positif arbitraire, et p un entier assez grand pour qu'on ait

$$apx(M_p, M_{p+h}) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

et par conséquent

$$apx(M_{q'}, M_{q''}) < \frac{2}{3}\varepsilon, \tag{8}$$

quels que soient les entiers q', q'' supérieurs à p.

Le point x appartenant à l'ensemble $\overline{lt}\, M_n$, on peut prendre un entier $\lambda > p$ de façon qu'on ait

$$\varrho(x, M_\lambda) < \frac{\varepsilon}{3};$$

il existe donc dans M_λ un point y distant de x de moins de $\frac{\varepsilon}{3}$. Or, pour tout $n > p$ on peut trouver, d'après (8), un point $x_n \subset M_n$ vérifiant l'inégalité

$$\varrho(y, x_n) < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Il en résulte que

$$\varrho(x, M_n) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, x_n) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

quel que soit $n > p$.

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, nous voyons que $x \subset \underline{lt}\, M_n$,

c. q. f. d.

Indiquons encore les propositions suivantes à peu près évidentes.

Corollaire 1.

Si $F = lt\ M_n$, on a $\delta(F) = \lim\limits_{n \to \infty} \delta(M_n)$.

Corollaire 2.

Pour qu'une suite d'ensembles $M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$ converge vers un seul point, il faut et il suffit qu'on ait (quel que soit l'entier positif p)

$$\lim_{n \to \infty} \varrho\,(M_n, M_{n+p}) = \lim_{n \to \infty} \delta\,(M_n) = 0.$$

7. Passons maintenant à la démonstration du théorème fondamental suivant :

V. *Quelle que soit la suite infinie d'ensembles quelconques*

$$(1) \qquad M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$$

situés dans un espace métrique compact E, on en peut extraire une suite partielle convergente.

D'après une remarque antérieure [4]) on peut supposer les ensembles M_n fermés (dans le cas contraire on n'aurait qu'à considérer les ensembles $\overline{M_n}$).

Lemme 1. Soient F_1 et F_2 deux ensembles fermés, et Γ un domaine contenant $F_1 + F_2$, et formé d'un nombre fini de sphères, de rayon $< \varepsilon$:

$$\Gamma = S(x_1, \varrho_1) + S(x_2, \varrho_2) + \ldots . S(x_k, \varrho_k),\ \varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq \ldots \leqq \varrho_k < \varepsilon.$$

Supposons de plus que $S(x_i, \varrho_i) . F_1 \neq 0 \neq S(x_i, \varrho_i) . F_2$ quel que soit $i\,(1 \leqq i \leqq k)$.

On a alors

$$apx\,(F_1, \Gamma) < 2\,\varepsilon,\ apx\,(F_2, \Gamma) < 2\,\varepsilon,\ apx\,(F_1, F_2) < 4\,\varepsilon.$$

En effet, si $x \subset F_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$, on a $\varrho\,(x, \Gamma) = 0$; si $y \subset \Gamma$, en particulier, si $y \subset S(x_i, \varrho_i)$, la sphère $S(x_i, \varrho_i)$ contient un point $z \subset F_\alpha$; on a donc $\varrho\,(y, F_\alpha) \leqq \varrho\,(y, z) < 2\varrho_i < 2\varepsilon$; par conséquent $apx\,(F_\alpha, \Gamma) < 2\varepsilon$ et $apx\,(F_1, F_2) \leqq$ $\leqq apx\,(F_1, \Gamma) + apx\,(F_2, \Gamma) < 4\varepsilon$.

Lemme 2.

Quel que soit $\varepsilon > 0$, *on peut extraire de la suite* (1) *une suite partielle infinie*

$$(9) \qquad M_{n_1}, M_{n_2}, \ldots, M_{n_k}, \ldots$$

telle que

$$apx\,(M_{n_i}, M_{n_j}) < \varepsilon.$$

Démonstration. Désignons par F l'ensemble fermé $\overline{(\sum_{n=1}^{\infty} M_n)}$ et soit ε un nombre positif quelconque. D'après le théorème de BOREL-LEBESGUE on peut choisir parmi toutes les sphères $S\left(x, \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$, $x \subset F$, un nombre fini

$$(10) \qquad S_1, \ldots, S_\nu$$

recouvrant l'ensemble F.

Désignons par Γ_n le domaine formé par la réunion de celles-là parmi les sphères (10) qui ont des points communs avec $\overline{M}_n$. Les sphères (10) étant en nombre fini, il n'existe qu'un nombre fini de domaines Γ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, non identiques, c'est à dire qu'il existe une suite infinie de nombres naturels

(11) $$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

telle qu'on a

(12) $$\Gamma_{n_1} = \Gamma_{n_2} = \ldots = \Gamma_{n_k} = \ldots.$$

En désignant par Γ le domaine (12) et par F_1 (resp. par F_2) un ensemble $\overline{M}_{n_p}$ resp. $\overline{M}_{n_q}$ quelconque, on se trouve dans les conditions du lemme 1, qui donne dans ce cas

$$apx\,(M_{n_p}, M_{n_q}) = apx\,(\overline{M}_{n_p}, \overline{M}_{n_q}) < 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

quels que soient les nombres n_p, n_q tirés de la suite (11).

Le lemme 2 étant ainsi démontré, soit

$(1,_1)$ $$M_1^{(1)}, M_2^{(1)}, \ldots, M_n^{(1)}, \ldots$$

une suite partielle extraite de la suite (1) et telle qu'on ait

$(13,_1)$ $$apx\ (M_p^{(1)}, M_q^{(1)}) < 1,$$

quels que soient les indices p, q.

Supposons que nous ayons déjà construit la suite

$(1,_i)$ $$M_1^{(i)}, M_2^{(i)}, \ldots, M_n^{(i)}, \ldots$$

avec

$(13,_i)$ $$apx\,(M_p^{(i)}, M_q^{(i)}) < \frac{1}{i}.$$

En se basant sur le lemme 2, on peut extraire de la suite $(1,_i)$ une suite partielle

$(1,_{i+1})$ $$M_1^{(i+1)}, M_2^{(i+1)}, \ldots, M_n^{(i+1)}, \ldots$$

telle que

$(13,_{i+1})$ $$apx\,(M_p^{(i+1)}, M_q^{(i+1)}) < \frac{1}{i+1}.$$

On obtient ainsi de proche en proche les suites

$$(1,_1), 1,_2), \ldots. (1,_i), \ldots$$

dont chacune est une suite partielle de la précédente, et qui vérifient en outre les inégalités (13).

La suite diagonale

$(1,_\omega)$ $$M_1^{(1)}, M_2^{(2)}, M_i^{(i)}, \ldots$$

satisfait alors au critère de convergence IV et est, par conséquent, celle qu'il nous fallait construire. Le théorème fondamental se trouve ainsi démontré.

Comme nous avons déjà dit, le théorème V peut être formulé ainsi :

„*Si l'espace métrique E est compact, l'espace $\mathcal{E}$, dont les points (X), (Y) sont les ensembles fermés $X, Y, \ldots$ de E sous la condition*

$$\underset{\text{dans } \mathcal{E}}{\varrho\,((X),(Y))} = \underset{\text{dans } E}{apx\,(X, Y)},$$

cet espace $\mathcal{E}$ est lui aussi compact [7]).

Remarquons encore dans le même ordre d'idées que *l'espace $\mathcal{E}$ est connexe* [8]) *en même temps que l'espace E* (L'espace E et par suite $\mathcal{E}$ sont supposés compacts).

Tout d'abord il est facile à voir que l'espace $\mathcal{E}$ ne peut être connexe que si la même propriété est satisfaite dans E. En effet, soient x et y deux points quelconques de E, et ε un nombre positif quelconque. Considérons les ensembles fermés $X = x$ et $Y = y$ (dans E) comme points de $\mathcal{E}$; si $\mathcal{E}$ est connexe, il existe une ε-chaîne (dans $\mathcal{E}$)

$$(X_0) = (X), (X_1), \ldots, (X_{n+1}) = Y,$$

telle que $\rho((X_i),(X_{i+1})) = apx\,(X_i, X_{i+1}) < \varepsilon$. On peut donc choisir les points $x_i \subset X_i$ dans E de façon que

$$\varrho\,(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon, \quad x_0 = x, \quad x_{n+1} = y.$$

Les points $x + y \subset E$ et le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraires, on voit que E est bien enchaîné, donc connexe.

Soit maintenant E un espace métrique compact et connexe, c'est à dire un continu. Pour démontrer qu'il en est de même pour $\mathcal{E}$, il suffit de remarquer que, quels que soient les ensembles fermés X et Y situés dans E et le nombre $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre fini $n + 2$ d'ensembles fermés $Z_i \subset E$, $Z_0 = X$, $Z_{n+1} = Y$, tels que

$$apx\,(Z_i, Z_{i+1}) < \varepsilon \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1).$$

Les lemmes suivants sont immédiats.

1. On peut trouver pour tout ensemble fermé $\mathcal{Z} \subset E$ (E étant un continu), un ensemble $\mathcal{Z} \subset E$ ne contenant qu'un nombre fini de points et tel que

$$apx\,(Z, \mathcal{Z}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. Soient Z_1 et Z_2 deux ensembles fermés situés dans E. On peut toujours construire les ensembles $\mathcal{Z}_1$ et $\mathcal{Z}_2$ correspondants de façon que $\mathcal{Z}_1$ et $\mathcal{Z}_2$ soient formés d'un même nombre fini de points.

3. Quel que soit l'ensemble fini Z composé des points $z_1, z_2, \ldots, z_k$ de E, l'ensemble Z^* des points $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_k^*$ tels que $\rho\,(z_i, z_i^*) < \varepsilon$, satisfait à la condition

$$apx\,(Z, Z^*) < \varepsilon.$$

En vertu des lemmes 1 et 2 nous pouvons supposer les ensembles X et Y formés d'un même nombre fini de points

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

et

$$y_1, y_2, \ldots, y_k.$$

Or, l'espace E étant connexe, il existe, pour toute valeur de i, $i = 1, 2, \ldots, k$, des points

$$z_i^{0} = x_i, \; z_i^{(1)}, \ldots, z_i^{(n)}, \; z_i^{(n+1)} = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

---

7) Voir sur ce sujet les travaux de M. VIETORIS, Monatsh. f. Math. u. Phys. 31 (1921), p. 173 et 32 (1922), p. 258.

8) Au sens de M. HAUSDORFF, équivalent, dans le cas des espaces métriques compacts, à la définition de CANTOR.

de E tels que $\rho\ (z_i^{(j)}, z_i^{(j+1)}) < \varepsilon$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

En désignant par Z_j $(j = 0, 1, \ldots, n + 1)$ l'ensemble des points $z_1^{(j)}, z_2^{(j)}, \ldots, z_k^{(j)}$, nous avons d'après le lemme 3

$$apx\,(Z_j\ ,\ Z_{j+1}) < \varepsilon;$$

en remarquant que nous avons

$$Z_0 = X\ ,\ Z_{n+1} = Y$$

nous voyons notre proposition demontrée.

8. *Remarque:* Remarquons d'abord que la supposition que l'espace est compact n'est pas intervenue dans la démonstration de la suffisance du critère donné dans l'énoncé du théorème II. La partie correspondante de ce théorème reste donc vraie dans les espaces métriques les plus généraux.

Tout au contraire on peut montrer par des exemples que la seconde partie du théorème devient fausse pour les espaces non compacts. En effet, soit M_n formé de deux points $x_1^{(n)}$ et $x_2^{(n)}$ (de l'axe Ox); $x_1^{(n)} = \frac{1}{n}$, $x_2^{(n)} = n$. On voit que $F = \overline{lt}\, M_n = \underline{lt}\, M_n$ est constitué du seul point $x = 0$, tandis qu'on a $apx\,(F, M_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$. Aussi le théorème III tombe-t-il en défaut pour les espaces non compacts. En effet, soit dans le plan euclidien XOY un systéme rectangulaire de coordonnées et C_n le contour du rectangle $a_n\, b_n\, c_n\, d_n$, où $a_n = (-n, 0)$; $b_n = (n, 0)$; $c_n = (n, 1)$; $d_n = (-n, 1)$. On voit de suite que les continus C_n convergent vers l'ensemble fermé formé des deux droites:

$$y = 0; \quad y = 1.$$

9. Passons maintenant à quelques applications immédiates des résultats ci-dessus. Soit C un continu quelconque. M. MAZURKIEWICZ a introduit la notion de la d i s t a n c e r e l a t i v e (sur C) entre deux points x, y de C, en désignant par là la borne inférieure des diamètres des sous-continus de C contenant les deux points x et y:

$$\varrho_C\,(x, y) = \inf \delta\,(C_{x,y}) \quad , \quad C \supset C_{x,y} \supset x + y.$$

Remarquons qu'on a la relation évidente

$$\varrho_C\,(x, y) \geqq \varrho\,(x, y).$$

Or il résulte du théorème V que cette borne inférieure est effectivement atteinte c'est à dire *qu'il existe des continus de diamètre minimal, contenant les deux points donnés et situés sur* C. Il suffit de considérer, pour s'en apercevoir, des continus C_n tels que $x + y \subset C_n \subset C$,

$$\varrho_C\,(x, y) \leqq \delta\,(C_n) \leqq \varrho_C\,(x, y) + \frac{1}{n},$$

et d'extraire de la suite des C_n une suite convergente; la limite topologique de cette suite sera d'après III, cor. 1, un continu C_ω, $x + y \subset C_\omega \subset C$ et on démontre facilement qu'on a $\delta\,(C_\omega) = \varrho_C(x, y)$.

Nous dirons (d'après M.M. HAHN [9]) et MAZURKIEWICZ [9])) que C est

---

[9]) HAHN, Ueber die mengentheoretische Charakterisierung etc., Wiener Berichte, 1914. MAZURKIEWICZ, Sur les lignes de Jordan, Fund. Math. I, p. 166.

localement connexe au point x, si la distance relative (sur C) entre x et un point variable y tend vers 0 avec $\varrho(x, y)$. Il est évident qu'on peut former des points du continu C un nouvel espace métrique C^* en définissant la distance $\varrho(x, y)$ dans C^* comme il suit

$$\underset{(\text{dans } C^*)}{\varrho(x, y)} = \underset{\text{dans } C)}{\varrho_C(x, y)}$$

Nous désignerons dans le suite par M_C resp. x_C un ensemble (resp. un point) quelconque considéré comme appartenant à C; M_{C^*} resp. x_{C^*} désignera alors ce même ensemble (resp. point) considéré comme appartenant a C^*. On pourrait alors écrire d'une façon plus précise

$$\varrho(x_{C^*}, y_{C^*}) = \varrho_C(x_C, y_C).$$

VI. *Pour que l'espace métrique C^* soit compact, il faut et il suffit que C soit localement connexe dans chacun de ses points* [10]. *C^* est dans ce cas homéomorphe à C.*

1. *La condition est nécessaire.*

Supposons que C ne soit pas localement connexe au point x. Il existe alors une suite de points $x_C^{(1)}, x_C^{(2)} \ldots x_C^{(n)}$ telle qu'on a

$$(14) \qquad \lim_{n \to \infty} \varrho\,(x_C^{(n)}, x_C) = 0 \quad , \quad \underset{(n = 1, 2, 3, \ldots)}{\varrho_C\,(x_C^{(n)}, x_C) = \varrho\,(x_{C^*}^{(n)}, x_{C^*}) > \sigma}$$

ou σ est un nombre positif suffisamment petit.

Soit maintenant y_{C^*} un point limite quelconque de l'ensemble M_{C^*} de tous les points $x_{C^*}^{(n)}$; d'après l'inégalité (14), y_{C^*} diffère nécessairement de x_{C^*}, donc $y_C \neq x_C$. On a alors

$$\varrho(y_{C^*}, M_{C^*}) = 0$$

ce qui entraîne, d'après

$$\varrho(y_C, z_C) \leqslant \varrho_C(y_C, z_C) = \varrho(y_{C^*}, z_{C^*}).$$

la relation

$$\varrho(y_C, M_C) = 0,$$

qui est absurde car M_C converge (d'après (14)) vers le point $x \neq y$. L'ensemble M_{C^*} ne possède donc aucun point limite (dans C^*).

Par conséquent C^* n'est pas compact.

2. *La condition est suffisante*, car il résulte de la définition de la connexité locale que les espaces C et C^* sont homéomorphes aussitôt que C est localement connexe [11]; donc C étant compact, C^* l'est aussi.

Nous venons de voir que si C est localement connexe dans chacun de ses points, C^* est homéomorphe à C, donc en particulier C^* est connexe. Mais C^* peut être connexe sans que C soit localement connexe dans aucun de ses points: il suffit, par exemple, qu'on puisse trouver

---

[10]) C. à d. que C soit une image univoque et continue (dans un sens) d'un segment rectiligne (voir les travaux tout à l'heure cités de M.M. HAHN et MAZURKIEWICZ).

[11]) Nous dirons simplement que le continu C est localement connexe s'il l'est dans chacun de ses points.

pour chaque paire de points $x+y \subset C$ un arc simple $C_0 \subset C$ contenant les points x et y (voir l'exemple 6 du chapitre I). Au contraire :

VII. *Si C est un continu irréductible* [12]) *et si, en même temps, C^* est connexe, alors C est un arc simple (par conséquent C^* lui est homéomorphe).*

En effet, soit C un continu irréductible entre les points a et b. Supposons donné un nombre positif ε arbitrairement petit. L'espace métrique C^* étant connexe, donc bien enchaîné, il existe une „ε-chaîne"

$$a_{C^*} = \overset{0}{c}_{C^*}, \quad \overset{1}{c}_{C^*}, \overset{2}{c}_{C^*}, \ldots, \overset{n}{c}_{C^*}, \quad \overset{n+1}{c}_{C^*} = b_{C^*}$$

telle que

$$\varrho\,(\overset{i}{c}_{C^*}, \overset{i+1}{c}_{C^*}) = \varrho_C\,(\overset{i}{c}_C, \overset{i+1}{c}_C) < \varepsilon \quad (0 \leqq i \leqq n),$$

c'est à dire qu'il existe pour tout $i\,(0 \leqq i \leqq n)$ un continu $C_i \subset C$ contenant les deux points $\overset{i}{c}_C$ et $\overset{i+1}{c}_C$, de diamètre inférieur à ε.

La somme $\sum_{i=0}^{n+1} C_i$ est un continu, agrégé à C et contenant les deux points a et b, donc identique à C (ce dernier continu étant irréductible entre a et b). Nous pouvons par conséquent écrire

$$C = \sum_{i=1}^{n+1} C_i\,, \qquad \delta\,(C_i) < \varepsilon.$$

ε étant arbitraire, nous voyons d'après un théorème de M. SIERPIŃSKI [13]) que C est un continu de Jordan.

Or, C étant en outre irréductible, il résulte [14]) que C est un arc simple.

Corollaire. Pour que tout continu irréductible situé sur un continu C, soit un arc simple, il faut et il suffit que K^* soit connexe quel que soit le continu K situé sur C.

1. *La condition est nécessaire.*

Supposons qu'on a un continu C dont tout sous-continu irréductible est un arc simple. Désignons par K un continu quelconque situé sur C et soient a, b deux points de K ; en les joignant par un continu irréductible $\overline{\overline{ab}} \subset K$, on voit que deux points quelconques de K appartiennent à un arc simple S_C, situé sur K. Or S_{C^*} est évidemment homéomorphe à S_C. Il en résulte que deux points quelconques de K_{C^*} sont agrégés à un arc simple $S_{C^*} \subset K_{C^*}$, par conséquent K_C est connexe.

2. *La condition est suffisante.*

En effet, il résulte de notre condition qu'à tout continu irréductible $Q \subset C$ correspond un espace Q^* connexe ; Q est donc un arc simple (d'après VII).

Ce résultat ne peut être précisé davantage :

1. On ne peut exiger dans l'énoncé précédent la connexité locale de C au lieu de la connexité de tout $K^* \subset C^*$ — comme le montre l'exemple 6 du Chapitre I, § 4. On serait peut-être tenté de croire qu'on puisse remplacer la condition que tout continu irréductible soit un arc simple, par la condition plus faible qu'il soit possible de joindre deux points quelconques de C par un arc simple ; il n'en est rien, comme le montre l'exemple

12) C. à d. s'il existe au moins un couple de points $a+b \subset C$ tel que C soit irréductible entre a et b.

13) SIERPIŃSKI, Fund. Math. I, pp. 44—61.

14) MAZURKIEWICZ, l. c. [9]), p. 209.

bien connu suivant : C est formé de la courbe $y = sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $0 < x \leq \frac{1}{\pi}$, et des segments rectilignes $x = 0$, $-2 \leq y \leq 1$; $x = \frac{1}{\pi}$, $-2 \leq y \leq 0$; $0 \leq x \leq \frac{1}{\pi}$, $y = -2$.

Il est à remarquer enfin que C^* peut être connexe bien qu'il existe sur C deux points a et b n'appartenant à aucun arc simple agrégé à C.

En effet voici l'exemple corréspondant :

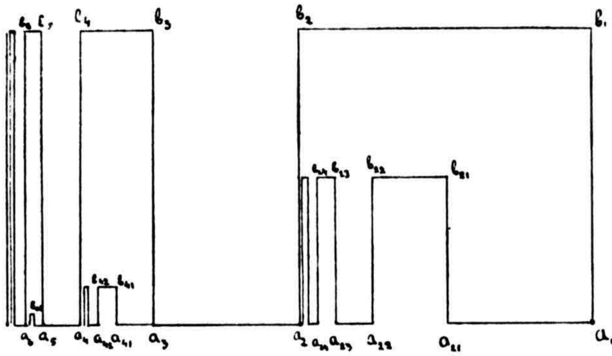

Fig. 7.

Les points $a_n, a_{2n.k}$; $b_n, b_{2n.k}$

sont définis par leurs coordonnées :

$$a_n = \left(\frac{1}{2^n}, 0\right); \; a_{2n.k} = \left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+k}}, 0\right);$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2^n}, 1\right); \; b_{2n.k} = \left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+k}}, \frac{1}{2^n}\right).$$

Le continu C donné par la figure 7 ne contient évidemment aucun arc simple joignant les points 0 et a_1. D'autre part C^* est un espace connexe (homéomorphe à l'ensemble des points du plan formé du segment $[-1, +1]$ de l'axe ox et des sémi-intervalles $[p_n, q_n]$. $n = 1, 2, 3, \ldots$, où les points p_n et q_n sont donnés par leurs coordonnées : $p_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $q_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

10. Nous terminerons ce chapitre en posant quelques problèmes.

On voit aisément que l'espace C^* peut contenir des points de dimension nulle. Tel est par exemple le point a_{C^*} de l'espace C^* correspondant au continu C donné par la figure ci-dessous

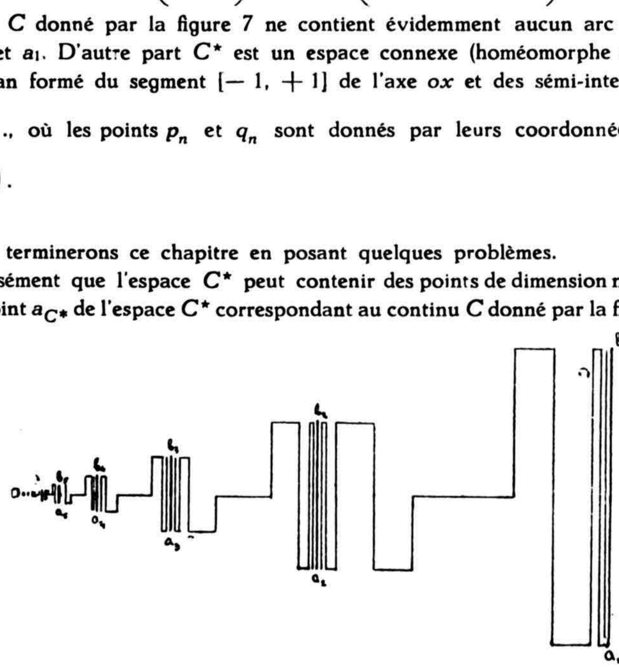

Fig. 8.

En désignant par $A_C^{(n)}$ la partie du continu C s tué à gauche du segment $[a_n b_n]$ et par $D_C^{(n)}$ la partie restante, on obtient la décomposition

$$C^* = A_{C^*}^{(n)} + D_{C^*}^{(n)} \qquad H(A_{C^*}^{(n)}, D_{C^*}^{(n)}) = 0$$

qui donne, pour n assez grand, une ε-séparation du point a_{C^*} sur C^* par l'ensemble vide. On voit d'ailleurs que C^* est homéomorphe à l'ensemble formé du point 0, des segments $S_k = \left[\frac{1}{4k+1}, \frac{1}{4k}\right]$ et des intervalles $\left(\frac{1}{4k+3}, \frac{1}{4k+2}\right)$ de l'axe ox (k prend toutes les valeurs naturelles).

Il est donc tout naturel de poser les problèmes suivants :

Problème γ. Existe-t-il un continu C tel que l'espace C^* correspondant soit de dimension 0 ?

Problème δ. L'espace C^* n'étant pas en général compact, peut-il arriver que tout composant de C^* ne contienne qu'un seul point, tandis que C^* n'est pas de dimension 0 ?

Problème ε. Peut-il arriver que l'espace C^* soit bien enchaîné sans être connexe ?

CHAPITRE III.

LES CONTINUS DE CONDENSATION.

1. Un continu K situé sur le continu C, $K \subset C$, est dit (d'aprés JANISZEWSKI [1])) *continu de condensation* (par rapport à C) s'il est non dense sur C, c. à d. si $K \subset (C - K)'$. Nous écrirons dans ce cas quelquefois: K est un $cd(C)$.

On trouvera des continus de condensation sur plusieurs des lignes cantoriennes dont nous avons donné des exemples au ch. I. Les exemples 2, 6, 7, 9, 10, 11, 12 et 13 se trouvent dans ce cas.

On voit aussitôt que les exemples cités de continus de condensation ne sont pas tous d'une même nature: il suffit de comparer l'ex. 2 ou 12 ou 13 avec 6 ou 7, 9, 10, 11, pour avoir une idée vague de cette nature différente. En effet, on aperçoit facilement que tout continu de condensation K situé sur les lignes C données par les ex. 6, 7, 9, 10, 11, est limite topologique d'une suite infinie de sous-continus $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ (de C), tels que $C_i \,.\, C_k = C_i \,.\, K = 0$ (quels que soient i, k); au contraire, la propriété mentionnée est en défaut pour les continus de condensation donnés par les exemples 2, 12 et 13.

Nous verrons que cette distinction n'est pas artificielle: elle se laissera, en effet, poursuivre assez loin et nous verrons les liens profonds entre plusieurs propriétés topologiques aes lignes cantoriennes, et l'existence de continus de condensation de l'une et de l'autre sorte. Nous commençons donc par la définition suivante.

Déf. 1. *Un continu $K \subset C$ s'appelle continu de condensation complète (par rapport à C) s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un continu $C_\varepsilon \subset C$ sans points communs avec K et tel que apx $(K, C_\varepsilon) < \varepsilon$. Nous écrirons dans ce cas quelquefois que K est un ccd (C).*

Déf. 2. *Nous dirons qu'une suite convergente d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ converge régulièrement vers la limite topologique F si l'on a, quels que soient i, k, $M_i \,.\, M_k = M_i \,.\, F = 0$. Nous écrirons dans ce cas $F = \underset{n \to \infty}{ltr}\, M_n$.*

On peut donner à la définition 1 une autre forme, à savoir:

Déf. 1'. *Un continu $K \subset C$ s'appelle continu de condensation complète*

---

[1]) JANISZEWSKI, loc. cit. p. 24.

Nous ne considérons dans le présent travail que des lignes cantoriennes, pour lesquelles la définition de JANISZEWSKI, ainsi que la définition du continu de condensation complète est en plein accord avec les faits intuitifs. Quand le continu C est de dimension supérieure il serait peut-être préférable de supposer, dans la définition des continus de condensation des deux sortes, que K soit de la même dimension que C.

(par rapport à C) s'il existe sur C une suite de continus $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ *convergeant régulièrement vers K.*

Les définitions 1 et 1′ sont équivalentes. En effet, s'il existe une suite K_n, $ltr\, K_n = K$, il suffit de poser $C_\varepsilon = K_n$ où n est assez grand pour qu'on ait $apx(K_n, K) < \varepsilon$. D'autre part, supposons que K soit un $ccd(C)$ selon la définition 1 ; prenons d'abord un K_1 quelconque sans points communs avec K et tel que $apx(K, K_1) < 1$. Supposons construits $K_1, K_2, \ldots, K_n$,

$$K \,.\, K_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et soit ε un nombre positif inférieur à $\frac{1}{n}$, et à tous les nombres positifs $\varrho(K, K_i)$, $i \leqslant n$. Choisissons pour K_{n+1} un continu C_ε quelconque (satisfaisant aux relations de la déf. 1).

Je dis qu'on a

$$K_{n+1} \,.\, K_i = 0.$$

En effet, si l'on avait $\xi \subset K_{n+1} \,.\, K_i$, on aurait un $x \subset K$ tel que

$$\varrho(\xi, x) \leqslant apx(K_{n+1}, K) < \varepsilon < \varrho(K, K_i)$$

ce qui est impossible, car $\xi \subset K_i$ et $x \subset K$.

La suite des K_n ainsi obtenue converge donc régulièrement vers K.

On peut enfin donner (en vertu de la définition 1 et du théoréme II du ch. II) la forme suivante à la définition des continus de condensation complète.

Déf. 1″. *K est ccd(C), s'il existe une suite de continus* C_n, *n'ayant pas de points communs avec K et convergeant vers K.* [2])

Nous appellerons quelquefois continu de condensation simple un continu de condensation qui n'est pas un continu de condensation complète.

2. Nous rappelons tout d'abord quelques propriétés élémentaires et bien connues [3]) des continus de condensation. Nous commençons par quelques remarques évidentes.

I. *Si K est un cd(C) et si* $C \subset C^*$, *K est un* $cd(C^*)$.

II. *Si K est un cd(C) et si* $K^* \subset K$, K^* *est un cd(C).*

III. *Si la somme d'un ensemble fini ou dénombrable de continus de condensation est un continu K, K est encore un continu de condensation* (car si un ensemble fermé Φ est la somme d'un système fini ou dénombrable d'ensembles non denses sur un ensemble fermé F, l'ensemble Φ est encore non dense sur F).

IV. *Si aucun des continus* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *(en nombre fini) ne contient de continus de condensation et si* $C = C_1 + C_2 + \ldots C_n$ *est un continu, C ne contient pas non plus de continus de condensation.* [4])

---

[2]) Il est à remarquer que nous avons fait usage, dans la démonstration précédente, de l'axiome de M. ZERMELO.

[3]) JANISZEWSKI, loc. cit. pp. 26—30.

[4]) On trouvera une démonstration chez JANISZEWSKI [3]).

Remarque. Si le continu C est somme d'une infinité dénombrable de C_i $(i=1, 2, \ldots)$, il peut bien arriver qu'aucun des C_i ne contient de continus de condensation, tandis qu'il existe des $cd(C)$ (cf. l'ex. 6 du ch. I).

V. *C contient un continu de condensation s'il existe, sur le continu C, une infinité dénombrable $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ de continus sans points communs et tels que $F = \overline{lt}\, C_n$ n'est pas de dimension nulle.*[4])

Une conséquence immédiate de V est la proposition très importante suivante.

VI. *C contient un continu de condensation s'il existe, sur le continu C, une suite infinie de continus $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ sans points communs et dont les diamètres surpassent un nombre positif fixe a.*

En effet, on peut extraire (d'aprés les résultats du chapitre précédent) de la suite $\{C_n\}$ une suite partielle convergente, dont la limite topologique C_ω est de diamètre $\geqslant a$; C_ω est par conséquent un continu (ch. II, théor. III, cor. 1).

3. Parmi les propositions I—VI, la première reste évidemment vraie pour les continus de condensation complète (c. à d. si K est un $ccd(C)$ et si $C \subset C^*$, K est un $ccd(C^*)$).

Montrons par des exemples qu'aucune des propositions II—VI ne subsiste pour les continus de condensation complète.

Ex. 1. (ad II). Soit C un continu formé du carré

$$z=0; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

et des segments rectilignes R_n, $n=1, 2, 3, \ldots$; S_n^i $(i=0, 1, \ldots, n)$; T_n^j $(j=0, 1, \ldots, n-1)$ définis comme il suit

$$R_n : \frac{1}{n+1} \leqslant z \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=1,\ y=0, & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ x=0,\ y=1, & \text{si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ x=1,\ y=1, & \text{si } n \equiv 2 \pmod 4 \\ x=0,\ y=0, & \text{si } n \equiv 3 \pmod 4); \end{cases}$$

$$T_n^j : z=\frac{1}{n};\ \frac{j}{n} \leqslant x \leqslant \frac{j+1}{n} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y=0, \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } n \equiv 1 \pmod 4 \text{ et } j \equiv 0 \pmod 2 \\ \quad \text{si } n \equiv 2 \text{ ou } n \equiv 3 \pmod 4 \text{ et } j \equiv 1 \pmod 2 \\ y=1 \text{ dans le cas contraire}; \end{cases}$$

$$S_n^i : z=\frac{1}{n};\ 0 \leqslant y \leqslant 1;\ x=\frac{i}{n}, \text{où } 0 \leqslant i < n \text{ si } n \text{ est impair et } 0 < i \leqslant n$$

si n est pair.

Le carré est évidemment un $ccd(C)$. En prenant pour Q le rectangle $[(0,0), (0, \frac{1}{2}), (1, 0), (1, \frac{1}{2})]$ on voit aussitôt que Q n'est pas un $ccd(C)$.

Ex. 2 (ad IV). Les continus C_1 et C_2 sont donnés par la figure

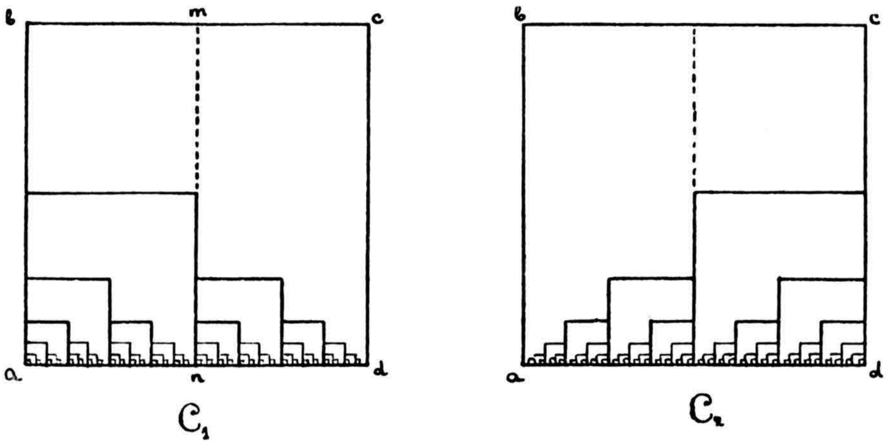

Fig. 9.

où l'on obtient C_2 par une rotation de 180° de C_1 autour de l'axe mn; $C = C_1 + C_2$ a l'aspect suivant:

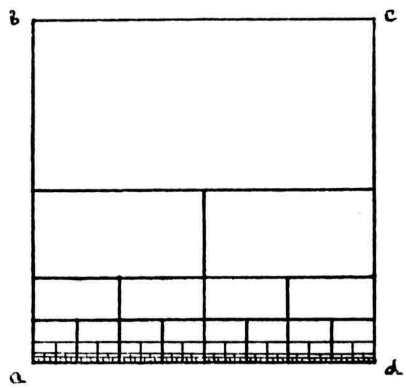

Fig. 10.

Aucun des continus C_1, C_2 ne possède de continus de condensation complète, tandis que $\overline{ad}$ est un *ccd* (C).

Ex. 3 (ad. III). C est formé de tous les segments rectilignes

$$0 \leqq r \leqq 1\,; \quad \varphi = \frac{1}{n}\,; \quad \varphi = \pi - \frac{1}{n}\,; \quad \varphi = 0\,; \quad \varphi = \pi$$

(r et φ sont des coordonnées polaires dans le plan).

Les deux derniers segments ($0 \leqq r \leqq 1$, $\varphi = 0$, resp. $\varphi = \pi$) sont des *ccd* (C), tandis que leur somme n'est pas un continu de condensation complète.

Ad V voir l'ex. 2 du ch. I.

Ex. 4 (ad VI). Soit α un nombre positif quelconque. Désignons par $C_{n,\alpha}$ ($\alpha > 0$) le continu formé des n demi-circonférences $C^i_{n,\alpha}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$C^i_{n,\alpha} = \begin{cases} x^2 + y^2 + \left(z - \dfrac{2i-1}{2n}\right)^2 = \dfrac{1}{4n^2} \\ y = ax \\ x \geqq 0 \end{cases}$$

et soit C_0 le segment rectiligne $x = y = 0$; $0 \leqq z \leqq 1$.

Posons $C = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{p_n \cdot \frac{1}{n}}$, p_n étant le $n^{ième}$ nombre premier.

Les continus $C_{p_n \cdot \frac{1}{n}}$ sont de diamètre 1, il n'ont deux à deux aucun point commun; C ne possède aucun continu de condensation complète.

4. Passons maintenant à l'étude des liens qui existent entre la notion de connexité locale (ch. 2, n⁰. 9) et celle de continus de condensation complète. Commençons par la proposition auxiliaire suivante:

Theorème auxiliaire. *Soit donné un continu* C, *un ensemble fermé* $F \subset C$, *et un point* $a \subset C - F$. *On a alors:*

$$F \,.\, \overline{Const_a}\,(C - F) \neq 0.$$

Supposons par impossible qu'on ait $F . \overline{Const_a}\,(C - F) = 0$, donc

$$\varrho\,(F\,, \overline{Const_a}\,(C - F)) = 2\sigma > 0).$$

Soit b un point quelconque de F. Considérons pour chaque n une $\frac{1}{n}$-chaîne bien déterminée [5]) $a = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{p_n}^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)} = b$ joignant (sur C) les points a et b. Désignons par $x_{p_n}^{(n)} = y_n$ le dernier point de cette chaîne tel qu'on a $\varrho\,(y_n, F) \geqslant \sigma$ (y_n existe toujours, car $\varrho\,(x_0^{(n)}, F) = 2\sigma$). On a évidemment

$$\sigma \leqslant \varrho\,(y_n, F) \leqslant \sigma + \frac{1}{n}, \qquad \text{donc } \lim_{n \to \infty} \varrho\,(y_n, F) = \sigma\,;$$

on voit ensuite facilement que

$$\varrho\,(a, y_n) \geqslant \varrho\,(a, F) - \varrho\,(y_n, F) \geqslant 2\sigma - \sigma - \frac{1}{n} = \sigma - \frac{1}{n}.$$

Soit M_n l'ensemble des points $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{p_n}^{(n)}$; on peut extraire de la suite $\{M_n\}$ une suite partielle convergente $M_{n_1}, M_{n_2}, \ldots, M_{n_k}, \ldots$, avec

$$lt\, M_{n_k} = Q \supset a + y,$$

où y est un point limite quelconque de la suite des y_{n_k}; on voit aussitôt que le point y est différent de a (on a même $\varrho\,(a, y) \geqslant \sigma$). En remarquant que $\varepsilon\,(M_n) = \frac{1}{n}$, on conclut du théor. III (ch. II) que Q est un continu.

Tous les ensembles M_n faisant partie de l'ensemble fermé $C - S\,(F, \sigma)$, il en est de même pour le continu Q, qui est, par conséquent, agrégé à $Const_a\,(C - F)$; on a donc, en tenant compte des inégalités précédentes

$$\varrho\,(\overline{Const_a}\,(C - F), F) \leqslant \varrho\,(Q, F) \leqslant \varrho\,(y, F) = \lim_{n \to \infty} \varrho\,(y_n, F) = \sigma,$$

ce qui contredit la définition de σ. Notre proposition se trouve ainsi démontrée.

Une simple conséquence de cette proposition est le théorème de JANISZEWSKI suivant:

---

[5]) Il est facile de rendre cette construction effective, en supposant donné une fois pour toutes un ensemble dénombrable dense sur C.

Soit C un continu et a un point quelconque du domaine G (rel C); on suppose de plus que $C-G\neq 0$. Il existe alors un continu K tel que

$$a\subset K\subset \overline{G},\quad K\,.\,Fr\,(G)\neq 0.$$

Il suffit de poser, pour démontrer ce théorème

$$F=C-G,\quad K=\overline{Const_a}\,(C-F)$$

et d'appliquer ensuite notre théorème auxiliaire.

5. En appelant selon M. MAZURKIEWICZ, „points du second genre" ceux-là dans lesquels le continu C n'est pas localement connexe [6]), on a le théorème suivant :

VII. *Tout point du second genre appartient à un continu de condensation complète.*

Soit ξ un point du second genre (rel C). Il existe une suite de points de C

$$x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n,\,\ldots$$

telle que, pour tous les n,

$$\varrho_C(\xi,\,x_n)\geqslant a$$

(a étant un nombre positif convenablement choisi), et, en même temps

$$\varrho\,(\xi,\,x_n)<\frac{a}{5};\quad \lim_{n\to\infty}\varrho\,(\xi,\,x_n)=0. \tag{1}$$

D'après le théorème auxiliaire que nous venons de démontrer, $C_n=Comp_x\left(C\,.\,\overline{S}\left(x_n\,,\frac{a}{5}\right)\right)$ est un continu $\supset x_n$ et tel que $C_n\,.\,Fr\,\overline{S}\left(x_n\,,\frac{a}{5}\right)\neq 0$, donc

$$\delta\,(C_n)\geqslant\frac{a}{5}\,. \tag{2}$$

Une conclusion analogue subsiste pour $C_\omega=Comp_\xi\left(C\,.\,\overline{S}\left(\xi\,,\frac{a}{5}\right)\right)$.
Je dis qu'on a $C_n\,.\,C_\omega=0$ quel que soit n. En effet C_n+C_ω serait dans le cas contraire un continu de diamètre

$$\leqslant\delta\left[S\left(\xi,\frac{a}{5}\right)+S\left(x_n\,,\frac{a}{5}\right)\right]\leqslant\frac{2a}{5}+\frac{2a}{5}<a,$$

ce qui est incompatible avec la relation $\varrho_C(\xi,\,x_n)\geqslant a$. D'après le théorème V du ch. précédent, on peut extraire de la suite $C_1,C_2,\ldots,C_n,\ldots$ une suite partielle convergente

$$C_{n_1},\,C_{n_2},\,\ldots,\,C_{n_k},\,\ldots,\,K=\mathop{lt}_{k\to\infty}C_{n_k}. \tag{3}$$

Or, on voit, d'après le théor. III du ch. précédent et l'inégalité

$$\delta\,(K)\geqslant\frac{a}{5} \tag{2}$$

---

6) Les points de connexité locale sont appelés points du 1er genre.

que K est un continu. Il s'ensuit de (1) et de la définition de C_n que $\xi \subset lt\, C_{n_k} = K$; on voit facilement, en outre, que $K \subset \overline{S}\left(\xi, \frac{a}{5}\right)$, donc $K \subset C_\omega$; comme $C_n \,.\, C_\omega = 0$, il résulte de la dernière inclusion que K est un $ccd(C)$, c. q. f. d.

VIII. *Pour qu'un continu C ne contienne aucun continu de condensation complète, il faut et il suffit que C soit localement connexe ainsi que chacun de ses sous-continus.*

La condition est nécessaire. Soit ξ un point du second genre sur $C^* \subset C$. D'après le théorème précédent, il existe un $ccd(C^*)$ qui est d'après I, un $ccd(C)$.

La condition est suffisante. Soit K un $ccd(C)$. Si C n'était pas localement connexe dans un quelconque de ses points, on n'aurait plus rien à démontrer. Supposons donc que tous les points de C sont du premier genre. Il s'ensuit de la définition de K qu'il existe une suite des continus K_n vérifiant les relations:

(4) $$K_n \subset C - K; \quad apx(K, K_n) < \frac{1}{n}; \quad K_n \,.\, K_m = 0 \,.$$

Choisissons deux points distincts $a + b \subset K$ et désignons par σ le nombre positif $\varrho(a, b)$. Choisissons ensuite des points $a_n + b_n \subset K_n$, sous la condition [7])

(5) $$\varrho(a, a_n) = \varrho(a, K_n); \quad \varrho(b, b_n) = \varrho(b, K_n) \,.$$

Le point a étant du premier genre sur C, il existe un $\delta > 0$ tel qu'on a $\varrho_C(a, x) < \frac{\sigma}{3}$ pour $\varrho(a, x) < \delta$.

Considérons maintenant le continu

(6) $$C_1 = Comp_a\left(C \,.\, \overline{S}\left(a, \frac{\sigma}{3}\right)\right).$$

Il s'ensuit de la définition de K et de δ qu'on a

(7) $$C_1 \supset C \,.\, S(a, \delta) \,.$$

D'autre part nous avons, d'après (4) et (5)

(8) $$\lim_{n \to \infty} \varrho(a, a_n) = \lim_{n \to \infty} \varrho(b, b_n) = 0 \,;$$

il existe donc un nombre entier k tel que

(9) $$\varrho(a, a_n) < \delta \qquad \text{pour tout } n \geqq k$$

c. à d. que, d'après (7)

(10) $$C_1 \supset \sum_{n=k}^{\infty} a_n \,.$$

Considérons maintenant l'ensemble $C^* = C_1 + \sum_{n=k}^{\infty} K_n + K$; je dis que C^* est un continu. En effet, C^* est tout d'abord connexe, car $C_1 \cdot K \supset a \neq 0$ et $C_1 \cdot K_n \supset a_n \neq 0$. D'autre part C^* est fermé, d'après l'égalité [8]):

---

7) Les K_n étant fermés, ces choix peuvent être laits independamment de l'axiome de M. ZERMELO.

8) On a en effet la relation générale suivante facile à verifier:

$$\overline{\Sigma\, M_n} = \Sigma\, \overline{M_n} + \underset{n \to \infty}{lt}\, \overline{M_n} \qquad \text{(quels que soient les ensembles } M_n\text{)}.$$

$$\overline{C^*} = \overline{C_1 + K + \sum_{n=k}^{\infty} K_n} = \overline{C_1} + \overline{K} + \sum_{n=k}^{\infty} \overline{K_n} + \operatorname*{lt}_{n\to\infty} K_n = C_1 + K + \sum_{n=k}^{\infty} K_n + K = C^*.$$

Chacun des ensembles C_1, K, K_n étant fermé, remarquons que nous avons en outre demontré que la somme de K et d'un agrégat quelconque fini ou infini d'ensembles K_n est un ensemble fermé.

Nous allons maintenant prouver que le point $b \subset K \subset C^*$ est du second genre sur le continu $C^* \subset C$.

Soit n un nombre naturel arbitrairement choisi et Q un sous-continu quelconque de C^* contenant les points b et b_n. Si l'on avait $Q.\, C_1 = 0$, on aurait $Q \subset K + \sum_{n=k}^{\infty} K_n$, donc $Q = F_1 + F_2$, où l'on a posé:

$$F_1 = Q \,.\, K_n\,; \; F_2 = Q \,.\, [K + K_k + \ldots + K_{n-1} + K_{n+1} \ldots].$$

Or, cela est impossible [9]), les deux ensembles fermés F_1 et F_2 étant non vides et sans points communs.

Il existe par conséquent un point $c \subset C_1 \cdot Q$. Il résulte de la définition de Q et de c que $\delta(Q) \geqslant \varrho(b, c) \geqslant \varrho(b, a) - \varrho(a, c)$, ce qui donne (en vertu de la définition de C_1):

$$\delta(Q) \geqslant \varrho(b, a) - \delta(C_1) \geqslant \sigma - \frac{2\sigma}{3} = \frac{1}{3}\sigma.$$

Le continu $Q \supset b + b_n$ étant quelconque, on en conclut que

$$\varrho_C(b, b_n) \geqslant \frac{1}{3}\sigma, \text{ quel que soit } n$$

ce qui signifie, en tenant compte de (8), que b est du second genre sur C^*, c. q. f. d.

Tout continu localement connexe et irréductible étant, d'après un théorème de M. MAZURKIEWICZ, un arc simple, on a le

Corollaire. *Si C ne contient aucun $ccd(C)$, tout continu irréductible situé sur C est un arc simple.*

La réciproque n'est pas vraie: il est facile de construire des continus C, possédant des $ccd(C)$ [10]) et dont tout sous-continu irréductible est un arc simple (voir p. ex. les continus 6, 9 du ch. I, § 4).

Il existe des lignes cantoriennes localement connexes dans chacun de leurs points et possédant néanmoins des continus de condensation complète. Telle est par exemple la ligne C suivante:

Ex. 5. C est formé du contour du carré [(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)] et des segments rectilignes „horizontaux" $y = \frac{1}{2^n}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$ et „verticaux" $x = \frac{2p-1}{2^n}$; $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2^n}$; $p = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ (fig. 10).

On pourrait aussi consulter le continu de l'ex. 11 (ch. I).

[9]) L'impossibilité de l'égalité $Q\,.\,C_1 = 0$ est aussi une simple conséquence d'un théorème de M. SIERPIŃSKI, à savoir qu'aucun continu ne peut être considéré comme somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sans points communs. On trouvera une démonstration du théorème de M. SIERPIŃSKI p.ex. dans les *Vorlesungen über Topologie*, p. 38, de M. KERÉKJÁRTÓ.

[10]) Même des continus C tels que tout point de C appartienne à un $ccd(C)$.

6. L'exemple ci-dessus est typique pour les continus localement connexes, en vertu du théorème suivant :

IX. *Si C est un continu jordanien* [11]) *et K un continu de condensation* (complète ou non) *par rapport à C, il existe un continu $C_0 \subset C$ dont K est un continu de condensation simple. C_0 peut être supposé formé de K et d'une infinité dénombrable d'arcs simples sans points communs, n'ayant chacun qu'un seul point sur K; les diamètres de ces arcs simples tendent de plus vers 0. Si K est lui même un arc simple, on peut choisir C_0 homéomorphe au continu de l'ex.* 2 (ch. I, n⁰. 4).

Supposons qu'on ait déjà construit un ensemble fini $S_1, S_2, \ldots, S_{n_k}$, les S_i étant des ensembles vides ou des arcs simples situés sur C et n'ayant avec K qu'un seul point comm una_i $(i \leqslant n_k)$. Supposons de plus donné un nombre positif ε_{k+1}. Prenons sur K un ensemble fini de points $b_1, b_2, \ldots, b_r$ $(b_i \neq a_j)$ tel qu'il existe pour tout point $x \subset K$ un point b_i distant de x de moins de $\frac{\varepsilon_{k+1}}{2}$, et posons $n_{k+1} = n_k + r$. Soit δ le plus petit des nombres $\frac{\varepsilon_{k+1}}{2}$, $\frac{1}{2}\varrho(b_i, b_j), i < j \leqslant r$; l'ensemble $[C - (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)] . S(b_i, \delta)$ est un domaine (rel. C), l'ensemble $G_i = Comp_{b_i}[(C - (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)) . S(b_i, \delta)]$ est, d'aprés un théorème de M. HAHN [12]), un domaine connexe. On a de plus (d'après la définition de δ): $G_i \cdot G_j = 0$ $(i \neq j)$. Soit c_i un point quelconque de l'ensemble $G_i - K$ (qui existe toujours, K étant un $cd(C)$). Il est bien connu que deux points quelconques x, y situés dans un domaine relatif connexe G d'un continu jordanien peuvent être joints par un arc simple $\overline{xy} \subset G$ [13]). Soit donc $S_i^* = \overline{c_i b_i} \subset G_i$ un arc simple et soit a_{n_k+i} le premier point de S_i^* (dans l'ordre $c_i \prec b_i$) appartenant à K; l'arc simple $\overline{c_i a_{n_k+i}} = S_{n_k+i}$ possède les propriétés suivantes

$$\left.\begin{array}{ll} 1^0. & S_n . (S_1 + S_2 + \ldots + S_{n_k}) = 0 \\ 2^0. & S_n . K = a_n \\ 3^0. & S_n . S_m = 0;\ n_k < n < m < n_{k+1} \end{array}\right\} n = n_k + 1, n_k + 2, \ldots, n_{k+1}$$

---

[11]) Nous appellerons pour abréger, *continu jordanien* (ou continu de JORDAN) tout continu qui est localement connexe en chacun de ses points. Les continus jordaniens sont, comme on sait, les images univoques et continus dans un sens du segment $[0, 1]$. (V. MAZURKIEWICZ, *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math., I, pp. 166—210).

[12]) HAHN, Über Komponenten offener Mengen, Fund. Math., II, p. 189.

[13]) Une simple démonstration de ce fait est donné par un raisonnement de M. R. L. MOORE (On the foundations of plane analysis situs, *Trans. Amer. Math. Soc.* XVII, 1916, Théor. 10 et 15, pp. 135—139). On doit seulement, dans la démonstration de M. MOORE, entendre par „région" un domaine connexe (rel. C), en remarquant qu'on peut supposer d'après les résultats de M. HAHN que les voisinages de tous les points de C sont des domaines connexes (il suffit p. ex. de prendre pour voisinages du point $x \subset C$ les domaines $Comp_x\, S\left(x, \frac{1}{n}\right)$, n étant un nombre naturel quelconque).

4°. quel que soit le point x de K

$$\varrho\,(x, \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} S_n - K) = \varrho\,(x, \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} S_n) \leqslant \varrho\,(x, \sum_{i=1}^{r} b_i) + max\,(\delta\,(G_i)) < \frac{\varepsilon_{k+1}}{2} +$$

$$+ 2\delta < \frac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \frac{\varepsilon_{k+1}}{2} = \varepsilon_{k+1}.$$

5°. $\delta\,(S_{n_k+i}) < \delta\,(G_i) \leqslant 2\delta \leqslant \varepsilon_{k+1}$.

En posant $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ et $S_0 = 0$, on obtient en procédant ensuite par induction, une suite infinie d'arcs simples $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ telle que

$$S_i \,.\, S_j = 0\;(i < j); \quad \delta\,(S_n) \underset{n \to \infty}{\to} 0; \quad S_n \,.\, K = a_n; \quad K \subset (\sum_{n=1}^{\infty} S_n - K)'.$$

L'ensemble

$$C_0 = K + \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

est un continu situé sur C et ayant la structure désirée; K est un continu de condensation de C tandis qu'il n'est pas un continu de condensation complète (car toute suite régulièrement convergente de continus agrégés à $C_0 - K$ converge vers un seul point). Enfin, si K était lui-même un arc simple, C_0 serait évidemment homéomorphe au continu de l'ex. 2 (ch. I).

Corollaire. *Si le continu jordanien K est un $cd\,(C)$ (où C est aussi un continu jordanien) il existe un continu $C_0 = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ homéomorphe à celui de l'ex.* 2 *du ch. I et tel que $S_0 \subset K$.*

Il suffit de prendre un arc simple S_0 quelconque situé sur K et de raisonner sur S_0 comme précédemment (en remarquant que, d'après II, S_0 est un $cd\,(C)$).

Remarquons que les suppositions de ce corollaire sont en particulier satisfaites si C ne contient aucun $ccd\,(C)$.

7. Les théorèmes suivants donnent des renseignements assez complets sur les continus de condensation simple; d'ailleurs ils nous seront utiles dans la suite.

X. *Soit K un continu de condensation par rapport à C, tel qu'aucun point de K n'appartienne à un $ccd\,(C)$ quelconque.*

Choisissons arbitrairement le nombre $\varepsilon > 0$, le point $a \subset C - K$ et le point $x \subset K \cdot \overline{Const_a}\,(C-K)$. Il existe alors un continu irréductible $Q = \overline{\overline{ad}}$, n'ayant en commun avec K qu'un seul point d distant de x de moins de ε. L'ensemble $Q-d$ est de plus un sémicontinu agrégé à $Const_a\,(C-K)$.

Remarque. $Const_a\,(C-K)$ étant le constituant du point a par rapport à $C-K$, il en résulte que $Const_a\,(C-K)$ coïncide avec $Comp_a\,(C-K)$ toutes les fois que C est un continu jordanien. En effet, $C-K$ étant un domaine (rel. C), $Comp_a\,(C-K)$ est d'après les résultats mentionnés de M. HAHN, un domaine connexe (rel. C); on peut donc joindre deux points quelconques de $Comp_a\,(C-K)$ par un arc simple. $Comp_a\,(C-K)$ étant par conséquent un sémicontinu, il coïncide nécessairement avec $Const_a\,(C-K)$.

Démonstration du théorème X. Désignons par $x_0 = x$ un point $\subset K \cdot \overline{Const_a}\,(C-K)$; d'après notre supposition et le théorème VII, x_0 est un point de connexité locale du continu C; on peut donc trouver un point $y \subset Const_a\,(C-K)$ assez rapproché du point x pour qu'on ait $\varrho_C(x, y) < \varepsilon$. Il existe alors un continu

$$C^* \supset x + y, \quad C^* \subset C, \quad \delta\,(C^*) < \varepsilon.$$

$Const_a\,(C-K)$ étant un sémicontinu contenant le point y, on peut trouver un continu irréductible $\overline{\overline{ay}} \subset Const_a\,(C-K)$. Supposons construit le continu irréductible $\overline{\overline{x_\alpha y}} = C_\alpha \subset C^*$, ou α est un nombre ordinal $< \Omega$ et $x_\alpha \subset K$.

Deux cas sont possibles:

1⁰. $C_\alpha \cdot K = x_\alpha$. Posons dans ce cas $x_\alpha = d$, $Q^* = C_\alpha + \overline{\overline{ay}}$ et prenons un $Q = \overline{\overline{x_\alpha a}} \subset Q^*$; ce sera un continu irréductible satisfaisant à toutes les conditions de notre énoncé. En effet, on a évidemment $\varrho\,(x_\alpha, x) < \delta\,(C^*) < \varepsilon$, et $Q \cdot K = x_\alpha$.

Démontrons que $Q - d \subset Const_a\,(C-K)$ .Il suffit évidemment de montrer que $Q - x_\alpha$ est un sémicontinu. Supposons donné un point $z \subset Q - x_\alpha$ et soit $\overline{\overline{za}}$ un sous-continu de Q irréductible entre z et a; si $\overline{\overline{za}} \supset x_\alpha$, on a nécessairement $Q = \overline{\overline{ax_\alpha}} = \overline{\overline{az}}$, donc d'après un théorème de JANISZEWSKI [14]), x_α appartient à un continu de condensation de Q. Q étant irréductible, x_α est d'après un théorème de M. MAZURKIEWICZ [15]) du second genre par rapport à Q. Il s'ensuit (en vertu de VII) que x_α fait partie d'un continu de condensation complète par rapport à Q, donc par rapport à C, ce qui contredit nos suppositions.

Par conséquent $\overline{\overline{za}} \subset Q - x_\alpha$, ce qui signifie que $Q - x_\alpha$ est un sémicontinu (le point z étant un point quelconque de $Q - x_\alpha$).

2⁰. $C_\alpha \,.\, K \supset x_\alpha + x_{\alpha+1}$, $x_{\alpha+1}$ étant un point quelconque, différent de x_α. Prenons dans ce cas un $\overline{\overline{x_{\alpha+1}\, y}} \subset C_\alpha = \overline{\overline{x_\alpha\, y}}$ et posons $C_{\alpha+1}$ égal à $\overline{\overline{x_{\alpha+1}\, y}}$. Le point x_α est étranger [16]) à $C_{\alpha+1}$. On a défini ainsi $C_{\alpha+1}$. Si les C_α sont définis pour tous les $\alpha < \lambda$ (λ étant un nombre ordinal de seconde espèce) on n'a qu'à poser $C_\lambda = \prod\limits_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ pour pouvoir appliquer l'induction transfinie. Tous les C_α sont deux à deux différents et on a $C_\alpha \supset C_\beta$ si $\alpha < \beta$, on

---

[14]) Loc. cit. p. 45, théor. VIII et IX.

[15]) Loc. cit. [11]), p. 205, théor. X.

[16]) En effet, autrement on aurait les relations:

$$y + x_\alpha \subset C_{\alpha+1} = \overline{\overline{x_{\alpha+1}\, y}} \subset C_\alpha = \overline{\overline{x_\alpha\, y}},$$

donc

$$\overline{\overline{x_\alpha\, y}} = \overline{\overline{x_{\alpha+1}\, y}};$$

on en tire (d'après le raissonnement de tout à l'heure) en s'appuyant sur les résultats de JANISZEWSKI [14]) et de M. MAZURKIEWICZ [15]) que x_α appartient à un $ccd\,(C)$, ce qui est en contradiction avec notre supposition. Remarquons en outre que le choix du point $x_{\alpha+1}$ peut être facilement rendu effectif (l'ensemble $C_\alpha \,.\, K$ étant fermé).

aboutit donc (d'après un théorème bien connu de M. BAIRE [17]) à un certain nombre ordinal $\alpha < \Omega$ tel que $C_{\alpha+1}$ n'existe plus, c. à d. que $C_\alpha \cdot K = x_\alpha$.

c. q. f. d.

Supposons maintenant que C soit un continu ne possédant aucun continu de condensation complète (il en résulte en particulier que C est un continu de JORDAN); le continu irréductible Q du théorème X est alors, d'après le corollaire du théor. VII, un arc simple, de façon que nous avons le résultat suivant:

X bis. *Si C ne contient aucun continu de condensation complète et si K est un continu de condensation de C, il existe, quels que soient $a \subset C-K$, $\varepsilon > 0$, $x \subset (\overline{Comp_a (C-K)}) . K$ un arc simple $\overline{ad}$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$1^0.\ \overline{ad} - d \subset Const_a (C-K) \qquad 2^0.\ \varrho(x, d) < \varepsilon.$$

On peut écrire $Comp_a (C-K)$ au lieu de $Const_a (C-K)$, d'après la remarque faite à propos du théor. X.

Soit F un ensemble fermé situé sur le continu C, et ξ un point quelconque de F. Nous dirons que *ξ est accessible par rapport à $C-F$ au sens large, s'il existe un continu $Q \subset C$, n'ayant en commun avec F que le seul point ξ.*

Nous dirons que *ξ est accessible au sens étroit s'il est possible de choisir pour le continu Q de la définition précédente un arc simple.*

Il s'ensuit alors des théorèmes X et X bis:

XI. *Si K est un cd(C) tel, qu'aucun point de K n'appartient à un ccd(C), l'ensemble des points de K accessibles au sens large par rapport à $(C-K)$, est dense sur K.*

XI bis. *Si K est un cd(C) et si C ne contient aucun ccd(C), l'ensemble des points de K accessibles au sens étroit par rapport à $(C-K)$, cet ensemble est dense sur K.*

Démonstration des théorèmes XI et XIbis. Soit donné un point quelconque $\xi \subset K$ et un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Nous allons montrer qu'il existe un point $x \subset K$ accessible par rapport à $(C-K)$ et distant de ξ de moins de ε.

Considérons la sphère $S(\xi, \varepsilon)$ (*rel* C); ξ étant un point de premier genre de C, il existe pour tout point x suffisamment rapproché de ξ un continu $C_{\xi, x} \supset \xi + x$ agrégé à $S(\xi, \varepsilon)$. De plus K étant un cd(C), il existe des points a appartenant à $C-K$ et aussi rapprochés du point ξ que l'on veut. Soit $a \subset S\left(\xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) . (C-K)$ un point assez voisin du point ξ pour qu'on puisse trouver un $C_{\xi, a} \subset S\left(\xi, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Considérons le constituant $S = Const_a (C_{\xi, a} - K)$; d'après notre théorème auxiliaire (du § 4) on a $\overline{S} . K \neq 0$; or $\overline{S} . K \subset C_{\xi, a} \subset S(\xi, \varepsilon)$, donc

$$\varrho(\xi, \overline{S} . K) < \varepsilon.$$

---

[17]) R. BAIRE, Ann. di mat. (3) 3 (1899), p. 50.

On a évidemment $S \subset Const_a(C-K)$, donc a fortiori $\varrho(\xi, K \cdot \overline{Const_a}(C-K)) < \varepsilon$. Soit x un point de $K \cdot \overline{Const_a}\,(C-K)$ tel que $\varrho(\xi, x) = \varrho(\xi, K \cdot \overline{Const_a}(C-K))$. En prenant $\varepsilon' < \varepsilon - \varrho(\xi, \overline{Const_a}\,(C-K))$ on trouvera, en appliquant le théorème X (resp. X bis), un continu $Q \subset Const_a\,(C-K) + d$ (resp. un arc simple $\overline{ad} \subset Const_a\,(C-K) + d)$, tel que $Q \cdot K = d$, où le point d est éloigné de x de moins de ε'. Le point d est accessible au sens large (resp. étroit) par rapport á $C-K$; d'autre part

$$\varrho(\xi, d) \leqq \varrho(\xi, x) + \varrho(x, d) \leqq \varrho(\xi, K\,.\,\overline{Const_a}\,(C-K)) + \varrho(x, d) <$$
$$< \varrho(\xi, K \cdot \overline{Const_a}\,(C-K)) + \varepsilon - \varrho(\xi, K \cdot \overline{Const_a}\,(C-K)) = \varepsilon,$$

c. q. f. d.

8. Faisons encore quelques remarques se rapportant aux continus irréductibles. M. MAZURKIEWICZ [15]) a démontré que tout point d'un continu irréductible $C = \overline{\overline{ab}}$ est du second genre, s'il appartient à un continu de condensation; or, tout point du second genre d'un continu quelconque appartient nécessairement à un continu de condensation complète; il en résulte:

XII. *Si un point d'un continu irréductible C appartient à un cd(C), il appartient aussi à un ccd(C).*

On pourrait être tenté de croire que, si un point ξ de $C = \overline{\overline{ab}}$ appartient à Q qui est un $cd(C)$, il appartient aussi à un $ccd(C)$ faisant partie de Q. L'inexactitude d'une pareille opinion résulte de l'exemple suivant:

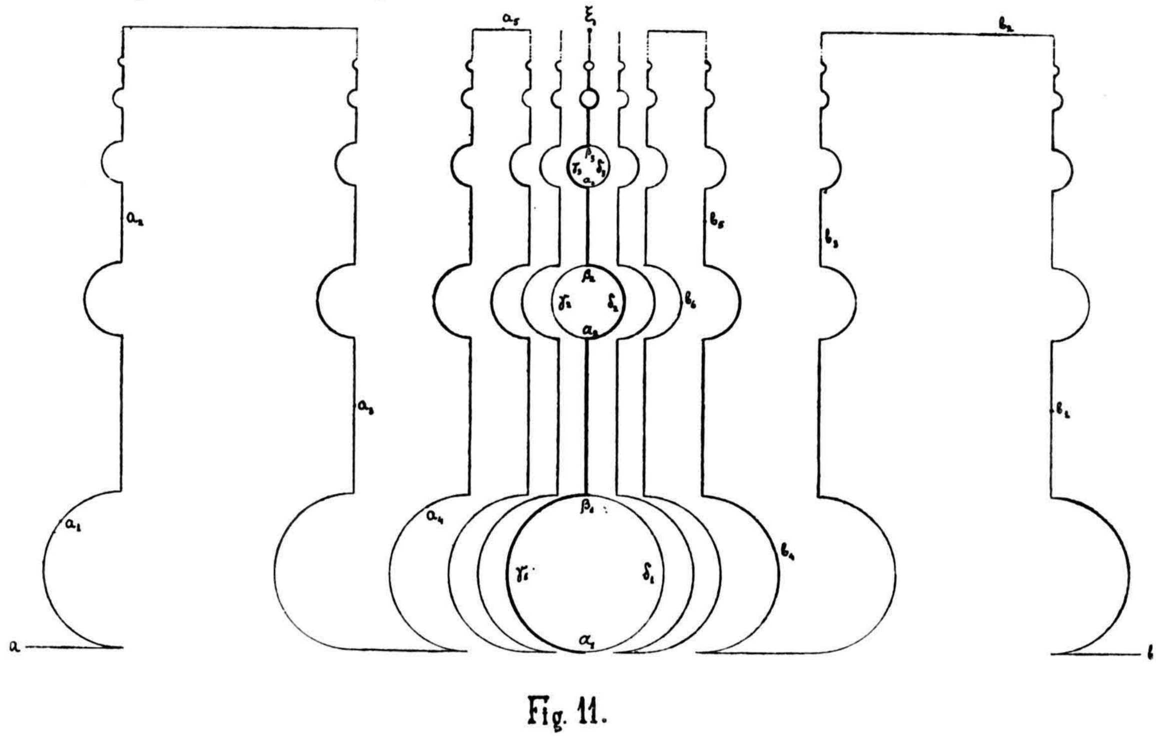

Fig. 11.

Le continu C se compose d'une infinité dénombrable de circonférences $C_n = (\alpha_n, \gamma_n, \beta_n, \delta_n)$, tendant vers le point ξ, des segments rectilignes $\Delta_n = (\beta_n, \alpha_{n+1})$ joignant successivement ces circonférences et de deux lignes polygonales généralisées $A = \overline{aa_1a_2 \dots a_n \dots}$ et $B = \overline{bb_1b_2 \dots b_n \dots}$ sans points multiples et telles qu'on a (en désignant $\overline{a_na_{n+1}a_{n+2} \dots}$ par A_n et $\overline{b_nb_{n+1}b_{n+2} \dots}$ par B_n) :

$$(n \to \infty) \begin{array}{l} lt\, A_n = \xi + \overline{\alpha_1\gamma_1\beta_1} + \overline{\beta_1\alpha_2} + \overline{\alpha_2\gamma_2\beta_2} + \overline{\beta_2\alpha_3} + \dots + \overline{\alpha_n\gamma_n\beta_n} + \overline{\beta_n\alpha_{n+1}} + \dots \\ lt\, B_n = \xi + \overline{\alpha_1\delta_1\beta_1} + \overline{\beta_1\alpha_2} + \overline{\alpha_2\delta_2\beta_2} + \overline{\beta_2\alpha_3} + \dots + \overline{\alpha_n\delta_n\beta_n} + \overline{\beta_n\alpha_{n+1}} + \dots \end{array}$$

(les lignes polygonales A et B sont supposées sans point commun entre eux et sans point commun avec le continu $\xi + \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$). On s'aperçoit facilement que C est irréductible entre a et b.

Soit Q le continu

$$Q = \xi + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\alpha_{2n+1}\,\gamma_{2n+1}\,\beta_{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_{2n}\,\delta_{2n}\,\beta_{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n\,.$$

Q est un $cd(C)$ contenant ξ ; or, il est facile à voir que ξ n'appartient à aucun $ccd(C)$ agrégé à Q.

Les problèmes suivants restent ouverts :

Problème (ζ). Peut on affirmer que tout continu de condensation situé sur un continu irréductible, contienne un continu de condensation complète ?

Et, si le problème (ζ) se résout par l'affirmative :

Problème (η). Peut on affirmer qu'il existe sur tout Q qui est un $cd\,(C)$, $C = \overline{\overline{ab}}$, un ensemble dense de points appartenant aux $ccd(C)$ agrégés à Q ?

Nous pouvons encore énoncer le théorème suivant :

XIII. *Pour qu'un continu irréductible soit un arc simple, il faut et il suffit qu'il ne contienne aucun continu de condensation complète.*

En effet, d'après le théorème XII, l'absence, sur les continus irréductibles, de continus de condensation complète, est équivalente à l'absence de continus de condensation en général ; or, d'après théorème de JANISZEWSKI cette dernière propriété est précisément caractéristique pour les arcs simples (considérés comme continus irréductibles).

Remarquons enfin que les continus qui ne sont irréductibles entre aucun couple de leurs points peuvent présenter des singularités assez compliquées sans qu'ils possèdent nécessairement des continus de condensation complète. Par exemple, le continu de M. SIERPIŃSKI (ex. 12 du ch. I) ne contient aucun continu de condensation complète [18]), tandis que (comme nous l'avons démontré au ch. I, § 4) tout arc simple situé sur C est un $cd(C)$; en remarquant que tout continu irréductible situé sur C est un arc simple (toujours en vertu de l'absence de $ccd(C)$), nous avons un exemple d'un continu C dont tout sous-continu irréductible est un $cd(C)$ tandis que C ne possède aucun $ccd(C)$.

---

[18]) On s'en aperçoit en remarquant, p. ex., que, quel que soit $\varepsilon > 0$, s'il y a un système de sous-continus $\{K\}$ de C, deux à deux sans point commun et de diamètre $> \varepsilon$, ce système est nécessairement fini ; il en résulte que toute suite convergente $C_1, C_2, \dots C_n \dots$ de sous-continus de C converge vers un seul point ; C ne peut, par consequent, posséder aucun continu de condensation complète. La propriété énoncée du continu de M. SIERPIŃSKI résulte d'ailleurs immédiatement de ce que chacun de ses points possède un indice de ramification $\leqq 4$ (cf. le théor. I du ch. IV).

9. Nous allons maintenant complètement analyser la structure des continus dépourvus de continus de condensation. Nous commençons par les définitions suivantes.

Supposons donné un continu $\overline{S}$ qui est un arc simple $\overline{ab}$ ou une ligne simple fermée $\overline{aca}$; l'ensemble $S = \overline{ab} - (a + b)$, (ou $\overline{aca} - a$), sera appelé *arc ouvert* et désigné par (ab). Un arc ouvert ab agrégé à un continu quelconque C sera dit *arc libre* (par rapport à C), si (ab) est un domaine rel (C). Nous allons démontrer le théorème fondamental suivant:

XIV. *Tout continu dépourvu de continus de condensation peut être décomposé (et cela d'une seule manière* [19]*) en une somme d'un ensemble fermé discontinu F et un ensemble au plus dénombrable d'arcs libres maximaux* [20] *deux à deux sans points communs. Ces arcs libres sont étrangers à F, tandis que leurs extrémités appartiennent à F; si l'ensemble de ces arcs libres est infini, leurs diamètres convergent nécessairement vers zéro.*

Commençons par la démonstration des lemmes suivants:

Lemme 1. Si C est un continu dépourvu de continus de condensation et $\Phi \subset C$ un ensemble fermé de dimension positive, Φ contient un arc libre (par rapport à C).

Soit K un sous-continu quelconque de Φ (un tel continu existe toujours car Φ est de dimension positive), et soient p et q deux points quelconques de K; d'après les suppositions du lemme et d'après le corollaire du théor. VIII, tout continu irréductible sur C est un arc simple, donc, en particulier, un $\overline{\overline{pq}} \subset K$ est un arc simple $\overline{pq} \subset K \subset \Phi$.

L'ensemble fermé $\Psi = \overline{pq} \,.\, (C - \overline{pq})'$ est non dense sur $\overline{pq}$ (car autrement on aurait un arc simple $\overline{p_1 q_1} \subset \overline{pq}$ agrégé à $(C - \overline{pq})'$ donc à fortiori à $(C - \overline{p_1 q_1})'$, c. à d. que $\overline{p_1 q_1}$ serait un $cd(C)$).

Soit donc (ab) un arc ouvert, situé sur $\overline{pq}$ et ne contenant aucun point de Ψ; (ab) est évidemment un arc libre.

Lemme 2. La partie commune des deux arcs libres (par rapport à C) $L = (ab)$ et $\Lambda = (cd)$ (supposée non vide) se compose d'un ou de deux arcs libres, dont les extrémités appartiennent à l'ensemble des quatre points a, b, c, d.

En effet, L et Λ étant des domaines (rel C), $L \,.\, \Lambda$ est aussi un domaine (rel C), donc un domaine (rel L) et un domaine (rel Λ); il s'ensuit que $L \,.\, \Lambda$ se compose d'un ou de plusieurs arcs ouverts situés en même temps sur L et sur Λ, ces arcs ouverts étant dépourvus de points communs. Soit (xy) un de ces arcs ouverts.

On a

$$x + y \subset (L \,.\, \Lambda)' - L \,.\, \Lambda = (L \,.\, \Lambda)' \,.\, ((C - L) + (C - \Lambda)) \subset L' \,.\, \Lambda' \,.\, ((C - L) + (C - \Lambda)) \subset L' \,.\, (C - L) + \Lambda' \, (C - \Lambda) = (a + b) + (c + d).$$

[19]) À la seule exception du cas où C est une ligne simple fermée [22]).

[20]) Un arc libre est dit *maximal* s'il n'est contenu dans aucun autre arc libre.

Si $x+y \subset a+b$ (resp. $x+y \subset c+d$), (xy) est un arc ouvert situé sur $L=(a, b)$ (resp. sur $\Lambda=(cd)$) et possédant pour extremités les points a et b (resp. c et d). Il en résulte que $(xy)=L$ (resp. $(xy)=\Lambda$), donc $(xy)=L.\Lambda$.

Si $x+y$ n'est contenu dans aucun des ensembles $a+b$, $c+d$, on a nécessairement

$$(x+y).(a+b) \neq 0 \neq (x+y).(c+d).$$

L'arc ouvert (xy) (situé sur L) a donc une extrémité commune avec L. Comme il y a deux extrémités de L (distinctes ou non), il y a dans ce cas au plus deux arcs libres constituant $L.\Lambda$.

Ainsi, *$L.\Lambda$ se compose d'un ou de deux arcs ouverts; s'il y en a effectivement deux, chacun d'eux a une extrémité commune avec (ab) et l'autre avec (cd), les deux extrémités pouvant d'ailleurs coïncider.* Le lemme 2 est démontré.

Nous avons les conséquences suivantes du lemme 2 :

1°. Supposons que deux arcs libres (ab) et (ad), $b \neq d$, ayant une même extrémité a, contiennent tout les deux un arc ouvert (az).

Soit (at) le composant de (az) dans $L.\Lambda$; (at) est une arc ouvert sur L.

Si $t=b$, (at) coïncide évidemment avec L et on a $b+L \subset \Lambda$.

Si $t \neq b$, t coïncide nécessairement avec d, et on a $(at)=(ad)=\Lambda$, et $d+\Lambda \subset L$.

2°. Supposons que L et Λ soient deux arcs libres ayant les mêmes extrémités $a=c$, $b=d$. Alors $L.\Lambda$ (s'il n'est pas vide) coïncide nécessairement avec L et avec Λ, donc $L=\Lambda$.

3°. Supposons que $L=(ab)$ et $\Lambda=(cd)$ soient deux arcs libres maximaux. Démontrons qu'on a

$$(a+b).\Lambda+(c+d).L=0$$

dans tous les cas, sauf si le continu total C est une ligne simple fermée. Supposons d'abord que l'un au moins des deux ensembles $a+b$, $c+d$ contienne deux points distincts. Supposons que ce soit, par exemple, le premier : $a \neq b$. On voit aussitôt qu'aucun des points a, b ne peut être contenu dans Λ.

En effet, considérons L et Λ comme des ensembles ordonnés. Si par exemple $b \subset \Lambda$, on peut trouver sur Λ un arc ouvert (u, v), $u \prec b \prec v$ assez petit pour qu'il ne contienne le point a (different de b). Un des deux arcs partiels (u, b), (b, v) (supposons que ce soit le second) serait alors étranger à L et l'arc libre $L+b+(b, v)$ serait plus grand que L.

On démontre de la même manière que si l'on a en outre $c \neq d$, aucun de ces points ne peut appartenir à L.

Soit donc $c=d$ (en supposant toujours $a \neq b$). Si $c \subset L$, un certain voisinage de c (par rapport à la ligne fermée $\Lambda+c$) est contenu dans L, de façon que $L.\Lambda \neq 0$. Soit (x, y) un composant de $L.\Lambda$. On a évidemment $x \neq y$, $x+y \subset a+b+c$, donc l'un au moins des deux points a, b est contenu dans Λ, ce qui est impossible comme nous venons de le voir.

Reste à envisager le cas où $a=b$, $c=d$. Les deux cas $a \subset \Lambda$, $c \subset L$ étant symétriques, supposons que ce soit le premier qui se trouve réalisé.

On voit aussitôt qu'on ne peut avoir ni $\Lambda \subset L$, ni $L \subset \Lambda$. L'ensemble $L \cdot \Lambda$ se compose donc d'un ou de deux arcs ouverts situés sur L (et sur Λ) et dont les extrémités sont a et c. Si $L \cdot \Lambda$ ne contient qu'un seul arc (ac), le point c est l'extrémité commune de deux arcs: de l'arc $L \cdot \Lambda$ et de l'arc simple $(\Lambda + c) - L \cdot \Lambda$, ce qui est impossible, car c appartient à l'arc libre L. L'ensemble $L \cdot \Lambda$ est donc constitué de deux arcs libres situés sur L et ayant pour extrémités les points a et c. Ce sont précisément les arcs ouverts qu'on obtient en supprimant, sur la ligne simple fermée $C_0 = L + a$, les deux points a et c. Il en résulte immédiatement que $C_0 = L + a$ coïncide avec $\Lambda + c$. L'ensemble C_0 est fermé et non vide. Si nous démontrons que $C - C_0$ est lui aussi fermé, il en résultera que $C - C_0$ est vide, donc $C = C_0$.

Rien n'est plus facile; en effet, on a

$$\overline{(C-C_0)} \cdot C_0 = (C-C_0)' \cdot \Lambda + (C-C_0)' \cdot c \subset (C-\Lambda)' \cdot \Lambda + (C-L)' \cdot L = 0.$$

Il s'ensuit la proposition suivante:

Si l'on a, sur un continu C (autre qu'une ligne simple fermée) deux arcs libres maximaux $L = (ab)$ et $\Lambda = (cd)$ ayant des points communs, ces arcs libres sont identiques.

En effet, si (xy) est un composant de $L \cdot \Lambda$, l'arc (xy) est situé sur L (et sur Λ), donc $\overline{xy} \subset \overline{ab} = L$ et (d'après ce que nous avons démontré), $x + y \subset a + b$, donc $L \cdot \Lambda = L$; on trouve de la même manière $L \cdot \Lambda = \Lambda$, donc $L = \Lambda$.

Lemme 3. Si x appartient à l'arc libre $(ab) \subset C$, il existe un arc libre maximal contenant x et contenu dans C (C est supposé ne contenir aucun $cd(C)$).

Supposons que (ab) ne soit pas un arc libre maximal, c. à d. qu'il existe un arc libre $(\alpha\beta)$ contenant (ab), sans coïncider avec (ab). Considérons $(\alpha\beta)$ comme un ensemble ordonné et soit $\alpha \prec \beta$. Nous pouvons évidemment supposer, sans restreindre la généralité, qu'on ait (sur $(\alpha\beta)$) $\alpha \preceq a \prec b \preceq \beta$; $(\alpha\beta)$ ne coïncidant pas avec (ab), l'une au moins des inégalités $a \prec \alpha$, $b \prec \beta$ se trouve satisfaite, égalité exclue. Les deux cas étant symétriques, supposons $b \prec \beta$. Soit x un point de $(b\beta)$; il existe alors un arc libre (ax) contenant (ab). Considérons l'ensemble M de tous les points x jouissant de cette dernière propriété.[21]) Si x est un point quelconque de M, il n'existe, en vertu de lemme 2, 2^0, qu'un seul arc libre $(ax) = S_x$ tel que $(ax) \supset (ab)$. Soient x et y deux points différents de M, on a d'après le lemme 2, 1^0: $S_x \supset S_y$, ou $S_y \supset S_x$.

Soit maintenant P le domaine somme de tous les $(ax) = S_x$ ainsi construits et

$$D = \{d_1^*, d_2^*, \ldots, d_n^*, \ldots\} \tag{11}$$

un ensemble dénombrable quelconque dense dans P.

Posons $d_1 = d_1^*$; en supposant d_n déja défini, soit d_{n+1} le premier point d_k^* dans la suite (11) tel que

$$S_{d_{n+1}} \supset S_{d_n}, \quad S_{d_{n+1}} - S_{d_n} \neq 0.$$

---

21) On voit de suite qu'aucun point de (ab) n'appartient à M, pourvu que C ne soit pas une ligne simple fermée.

Désignons par Λ_n l'arc ouvert S_{d_n}, et par Λ l'ensemble somme de tous les Λ_n.

On a

$$\Lambda = (ab) + b + (bd_1) + d_1 + (d_1 d_2) + d_2 + \ldots + d_n + (d_n d_{n+1}) + d_{n+1} + \ldots$$

Les $(d_i d_{i+1})$ étant deux à deux sans points communs, Λ peut être considéré comme un ensemble ordonné $(a \prec b \prec d_1 \prec \ldots \prec d_n \prec \ldots)$ possédant le type d'ordre de l'intervalle (0, 1). Démontrons que Λ coïncide avec P. Il suffit de montrer, pour s'en apercevoir, qu'on a $\Lambda \supset P$ (car on a évidemment $\Lambda \subset P$). Soit y un point quelconque de P et soit $S_x = (ax)$ un arc libre, contenant y et contenu dans P. Soit d_h^* le premier point de la suite (11) contenu dans (yx), ce dernier arc étant pris sur ax; (un tel point d_h^* existe toujours, (yx) étant un domaine (rel C), donc (rel P)). Soient $d_1, d_2, \ldots d_r$ tous les points d_n dont l'indice dans (11) est inférieur à h; s'il y a un $S_{d_n} \supset d_h^*$, $n \leqq r$, il en résulte que $\Lambda_n \supset y$, donc $y \subset \Lambda$; s'il n'y a aucun $S_{d_n} \supset d_h^*$, $n \leqq r$, c'est que d_h^* est précisément d_{r+1}; en effet, $S_{d_h^*}$ contient $d_n + S_{d_n}$ quel que soit $n \leqq r$ (car on aurait, dans le cas contraire, $S_{d_r} \supset S_{d_h^*}$); d'autre part, aucun $S_{d_j^*}$, $j < h$, ne contient S_{d_r} (car alors r serait mal choisi), nous voyons donc qu'on a $S_{d_{r+1}} \supset d_h^*$ et par suite $y \subset \Lambda_{r+1}$.

Démontrons que les ensembles $(d_n\, d_{n+1})$ convergent vers un seul point $\beta = \underset{n \to \infty}{lt} (d_n\, d_{n+1})$. Il suffit de montrer que $\overline{lt} (d_n\, d_{n+1})$ ne contient qu'un seul point. S'il y en avait deux, x et y, $\varrho(x, y) = 2\sigma > 0$, soient $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n \prec \ldots$ resp. $y_1 \prec y_2 \prec \ldots \prec y_n \prec \ldots$ deux suites de points sans élément commun, $x_m \subset (d_{r_m} d_{r_{m+1}})$, $y_m \subset (d_{s_m} d_{s_{m+1}})$, et convergeant vers x resp. y. Supposons qu'on ait, par exemple, $x_1 \prec y_1$ et soient $n_1 \prec n_2 \prec \ldots \prec n_k, \ldots$ resp. $m_1 \prec m_2 \prec \ldots \prec m_k \ldots$ les premiers entiers tels qu'on ait successivement $x_{n_1} \succ y_1$; $y_{m_1} \succ x_{n_1}$; $x_{n_2} \succ y_{m_1}$; $y_{m_2} \succ x_{n_2}$; ... ; $x_{n_k} \succ y_{m_{k-1}}$; $y_{m_k} \succ x_{n_k}$. Soient enfin

$$(12) \qquad L_1, L_2, \ldots L_k, \ldots$$

les arcs ouverts $L_k = (x_{n_k}, y_{n_k})$. On a évidemment

$$L_p \,.\, L_q = 0, \; si \; p \neq q.$$

Désignons par u_k et v_k, $u_k \prec v_k$ des points quelconques de L_k distants de x_{n_k} resp. de y_{n_k} de moins de $\frac{1}{k}$. Prenons l'entier N assez grand pour qu'on ait $\frac{1}{N} < \frac{\sigma}{4}$ et $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\sigma}{4}$, $\varrho(y_{n_k}, y) < \frac{\sigma}{4}$ quel que soit $k > N$. Il en résulte (pour $k > N$):

$$\varrho(u_k, v_k) \geqq \varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) - [\varrho(x_{n_k}, u_k) + \varrho(y_{n_k}, v_k)] \geqq \varrho(x, y) - [\varrho(x, x_{n_k}) +$$

$$+ \varrho(y, y_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, u_k) + \varrho(y_{n_k}, v_k)] > 2\sigma - 4\frac{\sigma}{4} = 2\sigma - \sigma = \sigma.$$

Désignons par C_k l'arc simple $\overline{u_k v_k}$ agrégé à L_k; pour $k > N$, $\delta(C_k)$ surpasse σ; les continus C_k étant deux à deux sans points communs, C

contient d'après VI un continu de condensation, contrairement à notre supposition.

Désignons par β le seul point formant l'ensemble $\underset{n \to \infty}{lt}(d_n\, d_{n+1})$; l'ensemble fermé $a + A + \beta$ est évidemment un arc simple. A est de plus un domaine (rel. C), donc un arc libre.

Je dis que si $A_0 = (\alpha_0\, \beta_0)$ est un arc libre contenant $(a\beta) = A$, les deux arcs libres A_0 et A ont nécessairement l'extrémité commune β.

En effet, supposons $\overline{A_0} = \overline{\alpha_0\beta_0}$ ordonné de façon qu'on ait $\alpha_0 \leqslant a \leqslant \beta \leqslant \beta_0$ et soit $\beta < \beta_0$. L'arc libre $(a\beta_0)$ contient (ab) et doit être contenu, par conséquent, dans $P = A = (a, \beta)$, ce qui est évidemment absurde.

Supposons que $(a\beta)$ n'est pas un arc libre maximal. Il existe alors un arc libre $(\alpha_0\beta)$ contenant $(a\beta)$, et nous pouvons supposer $\alpha_0 < a < \beta$. Nous pouvons construire par un raisonnement absolument analogue à celui des deux pages précédentes, l'ensemble N de tous les points y tels qu'il existe des arcs libres $(yb) \supset ab$. Soit Q l'ensemble somme de tous les arcs libres ainsi construits. L'ensemble Q est de plus identique avec

$$M = (ba) + a + (ae_1) + e_1 + (e_1e_2) + e_2 + \ldots + e_n + (e_ne_{n+1}) + e_{n+1} + \ldots.$$

où (ae_1) et les (e_ie_{i+1}) sont des arcs libres sans points communs deux à deux. Chacun des arcs (be_n) resp. (ad_m) étant libre, on voit aussitôt que $A \,.\, M = \overline{ab}$; on démontre enfin, que $lt\,(e_n\, e_{n+1})$ existe et ne contient qu'un seul point α (différent ou non de β), de sorte que $\overline{\alpha a}$ est arc simple. L'arc libre $(\alpha\beta) = (\alpha a) + \overline{ab} + (b\beta) = A + M$ est un arc libre maximal. En effet, soit (α_0, β_0) un arc libre contenant $(\alpha\beta)$; désignons par S resp. par S_0 les deux arcs simples $(\alpha\beta) + \alpha + \beta$ resp. $(\alpha_0\beta_0) + \alpha_0 + \beta_0$; nous avons déjà vu qu'on a $\beta_0 = \beta$ (en supposant toujours $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant a < b \leqslant \beta_0$). Pour des raisons absolument analogues α_0 coïncide nécessairement avec α, de sorte que $(\alpha_0\, \beta_0)$ et $(\alpha\, \beta)$ sont deux arcs libres contenant, tous les deux, $\overline{ab}$, et ayant les mêmes extrémités ; d'après le lemme 2, 2⁰, $(\alpha_0\beta_0)$ et $(\alpha\beta)$ sont identiques.

Soit maintenant C un continu dépourvu de continus de condensation et autre qu'une ligne simple fermée [22]). D'aprés le lemme 1, C contient des arcs libres; d'après le lemme 3, chaque arc libre est contenu dans un arc libre maximal ; d'après le lemme 2, 3⁰, deux arcs libres maximaux possèdent des points communs seulement s'il sont identiques.

Considérons l'ensemble somme G de tous les arcs libres maximaux contenu dans C : chaque arc libre étant un domaine (rel C), G se décompose en un nombre fini ou en une infinité dénombrable d'arcs libres maximaux sans points communs

$$G = L_1 + L_2 + \ldots + L_n + \ldots\,.$$

$C - G$ ne contient aucun arc libre ; G étant un domaine (rel. C), $F = C - G$ est un ensemble fermé qui est discontinu d'après le lemme 1.

[22]) Dans ce dernier cas C pourrait évidemment être décomposé en une somme d'un seul arc libre et d'un point, cette décomposition étant d'ailleurs possible d'une infinité de manières.

On a de plus :

1°. Les extrémités des L_n appartiennent à F [23]), de sorte que les arcs libres L_n sont des arcs „*contigus*" à l'ensemble fermé F sur le continu C.

2°. On a $\delta(L_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, car autrement C contiendrait (d'après le théorème IV) un continu de condensation.

3°. On voit enfin que la décomposition

$$C = F + L_1 + L_2 + \ldots + L_n + \ldots$$

est la seule possible (sous la condition que F soit discontinu et que chacun L_n soit un arc libre maximal).

En effet, soient

$$C = F + \Sigma L_n \quad \text{et} \quad C = \Phi + \Sigma \Lambda_n$$

deux décompositions de cette sorte.

Quel que soit l'arc libre L_n, il a des points communs avec $\Sigma \Lambda_n$, donc avec un Λ_m déterminé (car autrement l'arc libre L serait agrégé à l'ensemble discontinu Φ). On a donc, d'après le lemme 2, 3° (les arcs libres L_n et Λ_n étant maximaux) $L_n = \Lambda_m$, de façon que tout L_n coïncide avec un certain Λ_m. On pourrait démontrer d'une façon analogue que tout Λ_n coïncide avec un certain L_m. Les ensembles d'arcs libres

$$L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$$

et

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$$

sont donc identiques, de même que les ensembles

$$F = C - \Sigma L_n \quad \text{et} \quad \Phi = C - \Sigma \Lambda_n,$$

ce qui établit l'unicité de notre décomposition.

Le théorème XIV se trouve ainsi complètement démontré.

Nous verrons dans la suite que F est précisément l'ensemble fermé de tous les points d'arrêt et de ramification de C et de tous leurs points limites [24]).

10. Le théorème XIV exprime une condition non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour que C ne possède aucun $cd(C)$.

En effet, supposons donné un continu C qui est somme d'un ensemble fermé discontinu F et d'un ensemble au plus dénombrable d'arcs libres deux à deux sans points communs et étrangers à F.

Supposons, par impossible, qu'il existe un continu K qui est un $cd(C)$.

L'ensemble fermé F étant discontinu, l'ensemble $(K - F)$ n'est pas vide ; on peut par conséquent trouver sur K un point x appartenant à un arc Λ qui est un arc libre par rapport à C.

---

[23]) D'après lemme 2, 3°.

[24]) IV, § 7.

L'ensemble $\Phi = C - \Lambda$ étant fermé, soit 2σ le nombre positif $\varrho(x, \Phi)$. Il existe [25]) un continu C_0 agrégé à $K \,.\, \overline{S}(x, \sigma)$, qui est évidemment un arc simple $\overline{(pq)}$ situé sur Λ.

Si K est un $cd(C)$, l'arc simple C_0 l'est aussi, on a donc

$$C_0 \subset C_0 \,.\, (C - C_0)' = C_0 \,.\, (C - \Lambda)' + C_0 \,.\, (\Lambda - C_0)' \subset$$
$$\subset \Lambda \,.\, (C - \Lambda)' + C_0 \,.\, (\Lambda - C_0)' = p + q,$$

ce qui est, évidemment, absurde.

Nous avons par conséquent démontré le théorème :

XV. *Si le continu C est somme d'un ensemble fermé discontinu et d'un ensemble au plus dénombrable d'arcs libres, C est dépourvu de continus de condensation.*

---

25) Car autrement $dim_x\, K$ serait nulle ce qui est impossible, K étant un continu.

CHAPITRE IV.

Les théorèmes fondamentaux.

1. Nous sommes maintenant en possession de toutes les notions qui nous semblent nécessaires pour pouvoir faire une étude approfondie des lignes cantoriennes.

Nous allons établir d'abord les liens existant entre les notions acquises dans les deux chapitres précédents et celle de l'indice de ramification; nous obtiendrons en outre une nouvelle définition topologique des lignes les plus simples comme l'arc simple, la ligne simple fermée etc. Nous commençons par le théorème suivant:

I. *Tout point situé sur un continu de condensation complète (par rapport à un continu C) possède (sur C) un indice infini ($\aleph_0$ ou $\mathfrak{c}$).*

Soit K un continu de condensation complète du continu donné C et x un point quelconque de K. Il résulte de la définition de K qu'on peut trouver sur C une suite infinie de continus

$$K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$$

convergeant régulièrement vers K (c. à d. qu'on a

$$lt\, K_n = K$$

et

$$K \cdot K_i = K_i \cdot K_j = 0 .$$

quels que soient les nombres naturels $i \neq j$).

Désignons par a le diamètre $\delta(K)$ du continu K et soit

$$C = A + B + D$$

une $\frac{a}{2}$-séparation quelconque du point x:

$$(1) \qquad H(A, D) = 0, \quad x \subset A \subset A + B \subset S\left(x, \frac{a}{2}\right).$$

Nous allons montrer que B est nécessairement un ensemble infini. Tout ensemble ε-séparant (sur C) un point x quelconque contenant un ensemble fermé jouissant de la même propriété [1]), nous pouvons supposer que B est fermé et que, par conséquent, A et D sont des domaines (rel. C).

Désignons par x_n un point quelconque de K_n tel que $\varrho(x, x_n) = \varrho(x, K_n)$.

Le diamètre de K étant égal à a, on peut trouver un point $y \subset K$ distant de x de plus de $\frac{a}{2}$; il résulte alors de la relation (1) qu'on a nécessairement $y \subset D$.

---

[1]) I, ch. I, § 8.

Désignons enfin par y_n un point quelconque (mais bien déterminé) de K_n satisfaisant à la condition $\varrho(y, y_n) = \varrho(y, K_n)$.

Il s'ensuit de la définition des K_n qu'on a

$$\lim_{n \to \infty} apx(K, K_n) = 0,$$

donc en particulier

$$(2) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} \varrho(x, K_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \varrho(x, x_n) = 0, \\ \lim\limits_{n \to \infty} \varrho(y, K_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \varrho(y, y_n) = 0. \end{cases}$$

Les points x et y appartiennent respectivement aux domaines A et D; il en résulte (en tenant compte de (2)) qu'on a, pour n assez grand,

$$x_n \subset A, \qquad y_n \subset D,$$

c. à d. que tout K_n (à partir d'un certain $n = n_0$) a des points communs avec chacun des ensembles A, D. Or $H(A, D)$ étant vide, et K_n étant continu, ce dernier ensemble doit avoir nécessairement des points communs avec B (si n surpasse n_0); les K_n étant sans points communs deux à deux, l'ensemble B est nécessairement infini.

Corollaire I. *Tout point x du second genre par rapport à C possède un $ind_x C \geqq \aleph_0$.*

Corollaire 2. *Si $ind_x C$ est fini quel que soit le point $x \subset C$, le continu C est, de même que chacun de ses sous-continus, localement connexe. En particulier, tout continu irréductible situé sur C est un arc simple* [2]).

Remarque. Le raisonnement précédent démontre un théorème plus général, à savoir :

Si le continu K est la limite topologique d'une suite de continus $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ deux à deux sans points communs et agrégés à C, $ind_x C$ est infini, quel que soit $x \subset K$. On en conclut (en tenant compte du théor. V du ch. II):

I bis. *Si le continu C contient une infinité de continus K_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, deux à deux sans points communs et de diamètres surpassant un nombre positif fixe α, C contient nécessairement des points d'indice $\geqq \aleph_0$.*

Or nous avons vu que l'existence d'une suite de continus K_n satisfaisant à la condition dernièrement énoncée n'entraîne nullement l'existence d'un $ccd(C)$ (chacun des ensembles $K_n \,.\, K$ pouvant être non-vide); il suffit de se rappeler l'exemple 4 du ch. III, § 3: les $C_{p_n, \frac{1}{n}}$ de cet exemple sont deux à deux sans points communs, ils convergent vers C_0; tout point de C_0 possède par conséquent un indice infini par rapport à C (on voit de suite que cet indice est égal à $\aleph_0$), tandis que C ne contient aucun continu de condensation complète.

Le même exemple nous montre qu'un continu C peut être localement connexe ainsi que chacun de ses sous-continus tout en possèdant néanmoins des points d'indice $\aleph_0$.

2) Le continu 9 du ch. I, § 4 nous donne l'exemple d'un continu C dont tous les points sont d'indice $\mathfrak{c}$; tout sous-continu irréductible de C est néanmoins un arc simple.

Nous voyons ainsi qu'aucune des propositions énoncées n'admet de réciproque.

Les problèmes suivants restent ouverts:

Problème ϑ. Si C contient des points d'indice $\geqslant \aleph_0$, est-il toujours possible d'extraire de C une infinité de continus deux à deux sans points communs et dont les diamètres ne tendent pas vers zéro?

N.B. La résolution affirmative de ce problème donnerait (d'après I bis) une condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu C contienne des points d'indice infini. On pourrait poser un problème analogue sur les points d'indice $\mathfrak{c}$.

Problème ι. Si C contient des points d'indice $\mathfrak{c}$, peut on affirmer qu'il existe sur C des *ccd* (C)?

2. Si l'on sait seulement que $K \subset C$ est un *cd*(C), on ne peut affirmer que l'existence d'un ensemble dense sur K de points de ramification. Nous avons, en effet, le théorème suivant:

II. *Si K est un continu de condensation par rapport à C, l'ensemble des points de ramification (par rapport à C) est dense sur K.*

Il suffit de prouver que tout continu de condensation (rel. C) contient au moins un point de ramification. En effet, cette dernière proposition étant supposée vraie, soit $S(x, \varepsilon)$ un voisinage quelconque d'un point arbitraire $x \subset K$; démontrons que $K . \bar{S}(x, \varepsilon)$ contient des points de ramification (rel. C). La chose est évidente si $K \subset S(x, \varepsilon)$. Si $K - S(x, \varepsilon) \neq 0$, il existe un continu $Q \subset K . \bar{S}(x, \varepsilon)$; K étant un *cd* (C), il en est de même pour Q; d'après notre supposition Q contient au moins un point d'indice $\geqslant 3$ (par rapport à C); ce point appartient bien à $K . \bar{S}(x, \varepsilon)$.

Le point $x \subset K$ et le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraires, il s'ensuit de notre supposition que l'ensemble des points de ramification de C appartenant à K est dense sur K.

Nous allons maintenant trouver sur chaque continu K non dense sur C au moins un point x d'indice surpassant 2 (par rapport à C). Deux cas sont à distinguer.

I. Il existe sur K au moins un point x appartenant à un continu de condensation complète (par rapport à C); on a alors, d'après le théorème I,

$$ind_x C \geqslant \aleph_0,$$

x est donc un point de ramification.

2. Aucun point de K n'appartient à un *ccd* (C).

Considérons dans le second cas deux points

$$b + c \subset K$$

et soit

$$K_0 = \overline{\overline{bc}}$$

un continu quelconque agrégé à K et irréductible entre b et c; K ne contient aucun $ccd(C)$, donc aucun $ccd(K)$; il en résulte (d'après le corollaire du théor. VIII du ch. précédent) que K_0 est un arc simple $\overline{bc}$. Cet arc simple est un continu de condensation de C dont aucun point n'appartient à un $ccd(C)$, ce qui nous permet d'appliquer à K_0 le théorème XI du ch. III ; il existe donc sur K_0 un ensemble dense de points accessibles [3]) par rapport à $C - K_0$. Soit x un de ces points ne coïncidant avec aucun des points b ou c. Il existe d'après la définition des points accessibles [3]) un continu irréductible $\overline{\overline{ax}}$, dont tous les points (sauf x) sont agrégés à $C—K_0$. Soit ε un nombre positif inférieur au plus petit des nombre positifs

$$\varrho(x, a) \;,\; \varrho(x, b) \;,\; \varrho(x, c)$$

et soit

$$C = A + B + D$$

$$x \subset A \subset A + B \subset S(x, \varepsilon)$$

une ε-séparation du point x par rapport à C ; les trois points a, b, c sont en dehors de la sphère $S(x, \varepsilon)$, ils appartiennent donc à D; le point x étant agrégè à chacun des continus

$$Q = \overline{\overline{ax}},\; Q_1 = \overline{bx} \subset K_0 \,,\; Q_2 = \overline{xc} \subset K_0 \,,$$

il en résulte que chacun de ces continus a des points en commun avec les deux ensembles A et D; on en tire immédiatement les relations

$$Q_1 \,.\, B \neq 0 \;,\; Q_2 \,.\, B \neq 0 \;,\; Q \,.\, B \neq 0 \,.$$

Les trois continus Q_1, Q_2, Q n'ont en commun deux à deux que le seul point $x \subset A$; par conséquent les ensembles $Q_1 \,.\, B$, $Q_2 \,.\, B$, $Q \,.\, B$ sont disjoints, donc B contient au moins trois points ; ε étant un nombre quelconque assez petit, il en résulte que

$$ind_x\, C \geqslant 3,$$

c. q. f. d.

Le théorème II ne peut être précisé davantage; en effet, l'exemple 2 du ch. I montre qu'un continu de condensation peut être dépourvu de points d'indice > 3.

Il y a même plus: l'exemple 2 du ch. I nous donne un continu C dont tout point appartient à un $cd(C)$ tandis que $ind_x\, C \leqslant 4$ quel que soit $x \subset C$.

3. Nous voulons chercher maintenant des propositions en quelque sorte inverses du théorème II. Tout d'abord il est évident qu'une ligne cantorienne peut posséder une infinité de points de ramification sans qu'il existe un continu de condensation (il suffit de consulter à cet effet l'exemple 4 du ch. I).

Ex. I. Voici un exemple d'une ligne cantorienne C dont l'ensemble de ramification est un ensemble parfait discontinu; C ne possède cependant aucun continu de condensation.

Le continu C est formé du segment $[0, 1]$ de l'axe OX et des demi-

---

3) Ch. III, § 7.

circonférences $C_{i_1,\dots,i_n}$ situées dans le demi-plan $y \geqslant 0$ et dont les diamètres sont les segments

$$U_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \left[\frac{i_1}{3}+\frac{i_2}{3^2}+\dots+\frac{i_n}{3^n},\ \frac{i_1}{3}+\frac{i_2}{3^2}+\dots+\frac{i_n+1}{3^n}\right],$$

où tous les i_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ prennent les valeurs 0 et 2.

L'ensemble de ramification [4]) de ce continu est précisément l'ensemble parfait de CANTOR P situé sur $[0, 1]$. On voit facilement que C ne possède qu'une infinité dénombrable de points de ramification (les points de 1[re] espèce de l'ensemble P) qui sont tous d'indice ω.

Tous les autres points de C sont d'indice 2; C ne possède aucun $cd\,(C)$.

Ex. 2. En remplaçant, dans l'exemple précédent, le segment $[0,1]$ par le contour du triangle équilatère ayant ce segment pour base, en remplaçant ensuite toute demi-circonférence $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$ par le triangle équilatère ayant pour base $U_{i_1,i_2,\dots,i_k}$, on obtient une ligne cantorienne dont l'ensemble des points de ramification se compose de l'ensemble parfait de CANTOR (moins les deux points 0 et 1) et d'un ensemble dénombrable de sommets des triangles construits. Tous les points de ramification sont d'indice 3.

Nous verrons à l'instant que c'est pour ainsi dire le dernier pas qu'on peut faire sans rencontrer nécessairement des continus de condensation. En effet, on a le théorème suivant :

III. *Pour qu'une ligne cantorienne C ne contienne aucun continu de condensation, il faut et il suffit que l'ensemble de ramification* [4]) R_C *de C soit discontinu* [5]).

La condition est suffisante, car chaque $cd\,(C)$ est contenu (en vertu du théorème II) dans l'ensemble R_C.

La condition est nécessaire. En effet si C ne contient aucun $cd\,(C)$, on a, d'après ch. III, théor. XIV, la décomposition

$$C = F + \Sigma\, \Lambda_n$$

où F est discontinu et les Λ_n sont des arcs libres. R_C est évidemment étranger à chacun des Λ_n, donc $R_C \subset F$ et par conséquent $dim\, R_C = 0$, c. q. f. d.

Si C possède un continu de condensation Q, l'ensemble des points de ramification est dense sur Q (d'apres le théor. II); l'exemple 2 du ch. I montre cependant que C peut ne contenir qu'une infinité dénombrable de points de ramification.

D'autre part, si C possède un continu de condensation complète, ce continu étant formé de points d'indice infini, il fait nécessairement partie de l'ensemble des points de ramification.

---

[4]) L'ensemble de ramification est par définition l'ensemble de tous les points de ramification et de leurs points limites.

[5]) Donc de dimension nulle (R_C étant fermé).

Il s'ensuit du théorème III et des résultats du ch. I que: [6])

IV. *Si C ne contient aucun continu de condensation, tout point de C est d'indice fini (borné ou non).*

En effet, supposons que C contient des points d'indice infini (donc d'indice $\aleph_0$ ou $\mathfrak{c}$); nous avons vu [7]) que dans ce cas R_C n'est pas de dimension nulle; C possède par conséquent des continus de condensation (sans contenir nécessairement des continus de condensation complète [8])).

4. Considérons maintenant le cas où l'ensemble de ramification R_C de C a une dimension positive tout en étant non dense sur C. Il est facile à voir que *dans ce cas ceux des composants de l'ensemble R_C qui contiennent plus d'un point sont des continus de condensation maximaux* [9]) (par rapport à C); en effet, soit Q un composant de l'ensemble R_C; si Q contient plus d'un point, Q est un continu non dense sur C (R_C tout entier jouissant, d'après notre supposition, de cette dernière propriété); donc Q est un $cd\,(C)$.

Si Q^* est un $cd\,(C)$ contenant Q, Q^* est agrégé (d'après II) à R_C; or Q^* est un continu, donc un ensemble connexe, ayant des points communs avec le composant Q de l'ensemble R_C; il en résulte que $Q^* \subset Q$ et par suite $Q^* = Q$; Q est donc bien un continu de condensation maximal.

En supposant toujours R_C non dense sur C, soit K un $cd\,(C)$ quelconque; on a

$$K \subset R_C\,;$$

donc, K étant un continu, il appartient nécessairement à un composant Q de R_C qui est comme nous l'avons vu un $cd\,(C)$ maximal.

Le dernier résultat subsiste si chaque composant de R_C est non dense sur C (même si R_C tout entier ne jouit pas de cette dernière propriété [10])).

Par contre, *si un composant continu Q de R_C n'est pas un $cd\,(C)$, on peut affirmer que tout sous-continu Q^* de Q contient un $cd\,(C)$* [10bis]).

En effet, soit Q^* un sous-continu quelconque de Q. Si Q^* contient un $cd\,(Q^*)$, celui-ci est un $cd\,(C)$. Si Q^* ne contient aucun $cd\,(Q^*)$, il y a nécessairement sur Q des arcs libres par rapport à Q (ch. III, théor. XIV); soit $\Lambda = (a, b)$ un de ces arcs libres et $Q_0 = \overline{ab}$ l'arc simple correspondant.

Q_0 est un $cd\,(C)$. En effet, dans le cas contraire on aurait sur Q_0 un

---

6) Nous donnons dans une note insérée à la fin de ce mémoire la démonstration directe de ce théorème.

7) Ch. I, théor. VI, cor. 1.

8) Voir la remarque du § 1.

9) Il est naturel de dire que Q est un $cd\,(C)$ maximal, si Q est un $cd\,(C)$ et s'il n'est contenu dans aucun $cd\,(C)$ autre que le continu Q lui-même.

10) Ex. 3. C est formé du segment $[0,1]$ de l'axe OX et des segments rectilignes $x = c$, $0 \leqq y \leqq 1$, c étant un point quelconque de l'ensemble parfait de CANTOR situé sur $[0,1]$.

10bis) Il en résulte en particulier que, quels que soient $x \subset Q$ et $\varepsilon > 0$, $S(x, \varepsilon)$ contient des $cd\,(C)$.

arc ouvert ne contenant aucun point-limite de l'ensemble $C-Q_0$; cet arc ouvert serait donc libre par rapport à C et formerait un domaine (rel. C) dont aucun point ne saurait être point de ramification, contrairement à l'inclusion $Q \subset R_C$. Notre proposition se trouve ainsi démontrée.

Il en résulte en particulier :

V. *On peut affirmer que chaque sous-continu $C_0 \subset C$ contient un $cd(C)$ dans le cas et dans le cas seulement où l'ensemble des points de ramification de C est dense sur C.*

En effet, si l'ensemble des points de ramification est dense sur C, c'est que $R_C = C$ et par suite tout continu $Q^* \subset C$ contient un $cd(C)$.

D'autre part, cette dernière circonstance étant realisée sur C, supposons par impossible qu'on a

$$C - R_C \neq 0 .$$

Prenons un point

$$x \subset C - R_C$$

et un nombre positif ε inférieur à la distance $\varrho(x, R_C)$; la sphère $S(x, \varepsilon)$ contient toujours un sous-continu K de C ; aucun $cd(C)$ ne peut être agrégé á K, car autrement on aurait sur K (théor. II) un ensemble dense de points de R_C, contrairement aux choix du point x et du nombre ε.

Remarque. Nous verrons bientôt (§ 8) qu'une ligne cantorienne C peut ne contenir que des points d'indice $\mathfrak{c}$ tandis qu'il existe sur C des points n'appartenant à aucun $cd(C)$. Nous avons d'autre part le

Corollaire. *Si C est un continu jordanien possédant un ensemble dense de points de ramification, tout point de C appartient à un $cd(C)$.*

En effet, si C est un continu localement connexe et a un point quelconque de C, il existe sur C un arc simple $S \supset a$; S est nécessairement non dense sur C, car autrement on pourrait trouver sur S un arc libre par rapport à C, donc un domaine (rel. C) dépourvu de points de ramification.

Remarquons qu'on se trouve en particulier dans les conditions du dernier corollaire, si C possède un ensemble dense de points de ramification sans contenir un $ccd(C)$ (Ex. 12 du ch. I).

5. Nous avons étudié successivement les cas où l'ensemble R_C (supposé non vide) est discontinu, où il est de dimension positive, mais non dense sur C, et enfin où R_C est dense sur C.

Nous ne sommes pas arrivés à resoudre la question suivante se rapportant au même ordre d'idées:

Problème $\varkappa$. Peut il arriver que chaque $cd(C)$ soit agrégé à un $cd(C)$ maximal sans que tout continu composant de R_C soit un $cd(C)$?

Problème $\varkappa'$. Peut il arriver qu'un continu de condensation maximal Q d'un continu C soit contenu dans un sous-continu C_0 de C, $Q \subset C_0$, $Q \neq C_0$, tel que tout point de C_0 soit un point de ramification par rapport à C?

6. Passons maintenant au cas où l'ensemble R_C est vide. Nous aurons le théorème fondamental suivant:

VI. *Un continu sans points de ramification est un arc simple ou bien une ligne simple fermée.*

Remarquons avant de nous placer dans les conditions de ce théorème que si un continu C ne possède aucun point d'indice infini, C ne possède non plus de continus de condensation complète (d'après le théorème I); il s'ensuit que C et tous ses sous-continus sont des continus jordaniens (ch. III, théor. VIII); en particulier, tout continu irréductible situé sur C est un arc simple.

Supposons maintenant que C satisfasse aux conditions du théor. VI (c'est à dire qu'on ait pour chaque point $x \subset C$, $ind_x\ C \leqslant 2$).

C ne contient (d'apres le théorème II) aucun continu de condensation. Il résulte donc du théorème XIV du ch. III que C est la somme d'un ensemble fermé discontinu et d'un ensemble au plus dénombrable d'arcs libres maximaux.

Soit $\Lambda = (a, b)$ un arc libre maximal situé sur C.

1°. Supposons d'abord que les points a et b soient différents. $\Lambda + a + b$ est alors un arc simple que nous désignerons par S. Démontrons que S coïncide avec C.

Soit, dans le cas contraire, c un point quelconque de $C - S$; prenons un sous-continu quelconque $T_0 \subset C$, irréductible entre les points a et c; T_0 est un arc simple $\overline{ca}$; en le considérant comme un ensemble ordonné, $c \prec a$, soit d le premier point (sur T_0) contenu dans S. L'arc simple $\overline{cd} = T \subset T_0$. Si d ne coïncide avec aucun des points a et b, c. à d. si $d \subset \Lambda$, on a $ind_d\ (S + T) = 3$, donc $ind_d\ C \geqslant 3$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. Si d est un des points a ou b, p. e. si $d = b$, $S + T$ est un arc simple $R = \overline{ac}$.

Désignons par L l'arc ouvert $R-(a+c)$. On a évidemment $L - \Lambda \supset b \neq 0$.

Il reste à montrer que L est un arc libre sur C (contrairement à ce que Λ était un arc libre maximal).

Si L n'était pas un arc libre, il contiendrait un point $x \subset (C - L)'$; le continu C étant localement connexe, soit δ un nombre positif assez petit pour qu'on ait

$$\varrho_C\ (x, y) < \varrho\ (x, a + c)$$

dès que $\varrho\ (x, y) < \delta$. Prenons un point $y \subset C - L$ distant de x de moins de δ et soit Q un sous-continu de C tel que

$$Q \supset x + y, \quad \delta\ (Q) < \varrho\ (x, a + c).$$

Soit P_0 un sous-continu de Q irréductible entre x et y; P_0 est nécessairement un arc simple $\overline{xy}$ ne contenant aucun des points a et c (puisque $\delta\ (P_0) \leqslant \delta\ (Q) < \varrho\ (x, a + c)$).

En considérant P_0 comme un ensemble ordonné, $y \prec x$, soit z le premier point (sur P_0) appartenant à R; désignons par P l'arc simple $\overline{yz} \subset P_0$.

Le point z possède évidemment l'indice 3 par rapport au continu $R+P$ ce qui est impossible.

2⁰. Soit maintenant $a=b$; $\bar{A}=A+a$ est alors une ligne simple fermée. S'il existe un point $c \subset C-\bar{A}$, soit de nouveau T_0 un arc simple $\overline{ac}$. En considérant T_0 comme ordonné, $c < a$, désignons par d le premier point sur T_0 appartenant à $\bar{A}$ et par T l'arc simple $\overline{cd} \subset T_0$. On a de nouveau la relation impossible $ind_d\,(\bar{A}+T)=3$.

Notre théorème se trouve ainsi complètement démontré.

Remarque. Nous avons obtenu, dans le théorème VI, une nouvelle condition nécessaire [11]) et suffisante pour qu'un continu soit un arc simple ou une ligne simple fermée, a savoir:

1⁰. Pour que C soit une ligne simple fermée, il faut et il suffit qu'on ait, pour tout point $x \subset C$,

$$ind_x\, C=2.$$

2⁰. Pour que C soit un arc simple, il faut et il suffit qu'on ait toujours

$$ind_x\, C=2,$$

sauf pour deux points a et b pour lesquels

$$ind_a\, C=ind_b\, C=1.$$

Les points a et b sont alors les extrémités de l'arc simple.

La nouvelle propriété caractéristique se distingue des autres (p. ex. de celles de JANISZEWSKI, de M.M. MAZURKIEWICZ, SIERPIŃSKI etc.) par son caractère local: elle est la première qui montre (et cela d'une façon très simple) que les arcs simples et les lignes simples fermées peuvent être caractérisées par des propriétés qu'ils possèdent autour de chacun de leurs points. Il nous semble même bien naturel de fonder sur le théorème VI la définition de l'arc simple et de la ligne simple fermée.

La propriété caractéristique que nous venons d'obtenir présente d'autant plus d'intérêt qu'un continu peut être au voisinage de ses points individuels d'indice $\leqq 2$ d'une nature bien compliquée. Nous aurons même bientôt un exemple d'un continu C, n'ayant qu'une infinité dénombrable de points de ramification, tandis que tout point de C appartient à un continu de condensation. Ce continu C n'est d'ailleurs somme d'aucun ensemble au plus dénombrable d'arcs simples.

Indiquons du théorème VI encore le corollaire suivant:

Corollaire. *S'il existe, sur un continu C, plus de deux points d'indice 1, C possède nécessairement des points de ramification*; la même conclusion subsiste si C contient un seul point d'indice 1. Nous aurons encore à revenir à ce corollaire dans le présent chapitre.

7. Faisons maintenant quelques remarques sur la structure des lignes

[11]) La nécessité, d'ailleurs évidente, de notre condition a déjà été mentionnée à propos de l'exemple 1 du Ch. I.

cantoriennes autour de leur points de différents indices. Commençons par les points d'indice fini.

Nous avons déjà remarqué qu'un continu C peut présenter autour d'un point x_0 d'indice 1 ou 2 une structure aussi compliquée que l'on veut, si l'on ne soumet à aucune restriction l'indice des points de C voisins du point x_0. Il suffit de prendre, par exemple, une suite de circonférences

$$C_1, C_2, \dots C_n, \dots$$

de l'exemple 4 (ch. I), convergeant vers le point x_0, et d'inscrire dans chacune de ces circonférences C_n un continu quelconque K_n de façon que K_n contienne les points de contact de C_n avec C_{n+1} et avec C_{n-1}. Tous les K_n peuvent être pris de façon à présenter telles singularités que l'on voudra (tous les K_n peuvent être, par exemple, indécomposables etc.). Le point x_0 sur le continu

$$K = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n$$

aura alors l'indice $ind_{x_0} K = 1$, tandis que tout voisinage de x_0 contiendra, par exemple, un continu indécomposable etc.

Il est facile de s'arranger de sorte que l'indice de x_0 soit 2 (il suffit de prendre dans le plan xoy deux suites de circonférences convergeant vers l'origine, l'une dans le demi-plan des $x \geqslant 0$, l'autre dans celui des $x \leqslant 0$, et de reprendre la construction des continus K_n).

Le point x_0 peut être point-limite de points d'indice 2, et peut même être de dimension 1 par rapport à l'ensemble des points de cette nature, la structure du continu K restant autour du point x_0 aussi compliquée qu'auparavant (il suffit d'adjoindre au continu K un segment rectiligne $\overline{x_0 x_1}$, n'ayant avec K aucun point commun autre que x_0).

Au contraire, si un certain voisinage d'un point x_0, $ind_{x_0} C \leqslant 2$, est dépourvu de points de ramification, x_0 appartient nécessairement à un arc libre (si $ind_{x_0} C = 2$) ou bien il est l'extrémité d'un arc libre remplissant tout un voisinage de x_0 (par rapport à C); le dernier cas se présente si $ind_{x_0} C = 1$.

En effet, supposons que la sphère fermée $\overline{S}(x_0, \varepsilon)$ ne contienne aucun point de ramification; $K = comp_{x_0} \overline{S}(x_0, \varepsilon)$ est un continu sans points de ramification, K est donc un arc simple ou une ligne simple fermée. D'après les résultats de M. HAHN, K contient tout un voisinage du point x_0 (*rel.* C) [12]. Si K est une ligne fermée, K est nécessairement identique avec C (car autrement on aurait sur K un point x d'indice $ind_x C \geqslant 3$, ce qui est impossible, K étant situé dans $\overline{S(x_0, \varepsilon)}$).

Si K est un arc simple $\overline{ab} \supset x_0$, x_0 ne peut être d'après le raisonnement de la note [12]) point-limite de l'ensemble $C - K$. Il s'ensuit que si

[12]) Si C est localement connexe au point a et si $K = Comp_a \overline{S(a, \varepsilon)}$ ($\varepsilon > 0$ étant arbitrairement choisi), le point a est un point intérieur de K par rapport à C (c. à d. qu'une sphère (rel. C) $S(a, \delta)$ est contenue dans K). En effet, il suffit de prendre δ assez petit pour avoir

$x_0 . (a + b) = 0$, le point x_0 fait partie d'un arc libre (rel. C) situé sur K. Au contraire, si $x_0 \subset a + b$, il existe évidemment un arc libre $(x_0 c) \subset K$ dont x_0 est l'une des extrémités,

c. q. f. d.

Voyons maintenant ce qui se passe autour des points de ramification isolés [13]). On a tout d'abord, si a est un point de ramification isolé, $ind_a\, C \leqslant \omega$ (d'après le théor. VI du ch. I), donc, en particulier, C est localement connexe dans a (d'après le corollaire du théor. I).

Démontrons donc le théorème:

VII. *Si a est un point de ramification isolé, on a un nombre fini ou une infinité dénombrable d'arcs libres $(aa_1), (aa_2), \dots (aa_n), \dots$ deux à deux sans point commun, et ayant tous le point a pour une de leurs extrémités (ou pour leurs deux extrémités coïncidantes); l'ensemble de ces arcs libres (augmenté, s'il le faut, de leurs extrémités) remplit tout un voisinage de ce point. Si l'ensemble de ces arcs est infini, les diamètres des (aa_n) tendent nécessairement vers zéro avec $\frac{1}{n}$.*

Soit a un point de ramification isolé du continu C et ε un nombre positif assez petit pour que la sphère fermée $\overline{S(a, \varepsilon)}$ ne contienne aucun point de ramification (rel. C) autre que le point a lui-même.

Désignons par K le continu $K = Comp_a\, \overline{S}(a, \varepsilon)$.

D'après la note [12]) K contient tout un voisinage de a relativement à C, donc en particulier $ind_a\, C = ind_a\, K$. K ne contient aucun continu de condensation (car autrement on aurait sur $K \subset \overline{S(a, \varepsilon)}$ une infinité de points de ramification par rapport à K, donc a fortiori par rapport à C).

K est par suite somme d'un ensemble fermé discontinu F et un ensemble au plus dénombrable d'arcs libres (par rapport à K) $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots \Lambda_n, \dots$ Ces arcs libres sont deux à deux sans point commun; de plus, si l'ensemble de ces arcs est infini, leurs diamètres tendent vers zéro.

Soit Λ un de ces arcs libres. Il est d'abord évident que a est étranger à Λ (car autrement on aurait $ind_a K = ind_a \Lambda = 2$). Or on a les faits suivants:

1. Au moins une des extrémites de Λ coïncide avec le point a.
2. Λ est un arc libre par rapport à C.

Démonstration:

1. Supposons que $\Lambda = (b, c)$ et qu'aucun des points b, c ne coïncide avec a. Considérons l'arc simple $S = \overline{bc} = \Lambda + b + c$; S est un ensemble

$\rho_C(a, x) < \varepsilon$ dès que $\rho(a, x) < \delta$; tout point $x \subset S(a, \delta)$ appartient alors à un continu $C_{a,x} \subset S(a, \varepsilon)$ contenant les deux points a et x; il s'ensuit que $x \subset C_{a,x} \subset Comp_a\, \overline{S}(a, \varepsilon)$, donc (le point $x \subset S(a, \delta)$ étant arbitraire):

$$S(a, \delta) \subset K.$$

[13]) un point de ramification a est isolé si l'on a pour tous les points x assez voisins de a

$$ind_x\, C \leqslant 2.$$

fermé, par conséquent $K-S$ ne peut être fermé. Il existe donc un point $x \subset S$ qui est un point-limite de l'ensemble $K-S$; le continu K étant localement connexe, soit $T_0 = \overline{xy} \subset K$ un arc simple joignant x avec un point $y \subset K-S$ assez voisin de x pour qu'on puisse supposer

$$\delta(T_0) < \varrho(x, a).$$

Désignons par z le premier point de T_0 (dans l'ordre $y \prec x$) appartenant à S. Soit T l'arc simple $\overline{xz} \subset T_0$: le point z ne peut appartenir à A, car A ne serait pas alors un arc libre; z coïncide par conséquent avec b ou avec c. Supposons qu'on ait, par exemple, $z = b$. Le continu $T+S$ est alors un arc simple $\overline{xc}$ agrégé à K, $L = T+S-(x+c)$ est libre (car a est étranger à $T+S$ et par conséquent tout point de L possède l'indice 2 (par rapport à C)); il s'ensuit que A n'était pas un arc libre maximal, contrairement à notre hypothèse.

2. Si $A = (a, a_n)$ n'était pas un arc libre par rapport à C, on aurait un point $x \subset A$ appartenant à $(C-A)'$; or C étant localement connexe en x, nous aurions construit (d'après une méthode souvent employée) un arc simple $T_0 = \overline{xy}$ de diamètre inférieur à $\varrho(x, a+a_n)$ joignant x avec un point $y \subset C-A$ assez voisin de x; en prenant sur T_0 l'arc simple $T = \overline{xz}$ n'ayant avec A qu'un seul point z en commun, nous aurions $ind_z(A+T) = 3$, ce qui est impossible d'après nos hypothèses.

Il nous reste à montrer que l'ensemble somme de tous les arcs simples $\overline{A}_n$ remplit un certain voisinage du point a (rel. C). Nous avons vu que K remplit bien un voisinage du point a (rel. C). Il suffit donc de montrer que l'ensemble F est constitué par les extrémités des A_n. Or l'ensemble F étant discontinu, donc non dense sur K, nous avons immédiatement

$$F = F.(K-F)' = (\Sigma A_n)'.F = (\Sigma A_n)' - \Sigma A_n.$$

Tout point de cet ensemble, s'il n'est pas extrémité d'un A_n quelconque, appartient à $\overline{lt}_{n\to\infty} A_n$. Or les arcs A_n possèdent tous le point a comme extrémité commune et leurs diamètres tendent en outre vers 0. La suite des A_n est donc convergente dès qu'elle est infinie, et l'on a dans ce dernier cas

$$a = \underline{lt}\, A_n = \overline{lt}\, A_n.$$

Notre proposition est complètement démontrée.

Il est facile de construire des exemples de points de ramification isolés dont l'indice est borné ou non (c. à d. égal à un nombre naturel ou au symbole ω). Si $ind_a\, C = \omega$, a étant point de ramification isolé, on peut avoir deux cas selon que a est ou non point limite de points d'indice 1. Ces deux cas correspondent aux propriétés suivantes:

1°. Il y a parmi les A_n une infinité d'arcs libres aux extremités différentes.

2°. Tous les A_n ont, à partir d'un certain $n = n_0$, leurs deux extrémités coïncidants avec le point a.

Le continu 5 du ch. I, § 4 nous offre un exemple de la première éventualité.

Pour avoir un exemple de la seconde, il suffit de remplacer chaque segment rectiligne K_n par un contour fermé de diamètre $\frac{1}{n}$ de façon que les lignes simples fermées ainsi obtenues n'aient deux à deux d'autre point commun que le point a.

Remarquons enfin que les points simples de JANISZEWSKI [14]) sont précisément les points de ramification isolés d'indice borné, ou bien des points d'indice 1 ou 2 (dont un certain voisinage ne contient aucun point de ramification).

Les continus simples du même auteur [15]) ne sont par conséquent autre chose que les lignes cantoriennes possèdant seulement un nombre fini de points de ramification, tous ces points étant d'ailleurs d'indice fini et borné. Une telle ligne se compose d'un nombre fini d'arcs libres sans points communs et de leurs extrémités.

On pourrait poursuivre plus loin cette étude en envisageant p. ex. les continus possèdant un ensemble au plus réductible de points de ramification (l'indice de ces points étant dans ce cas lui aussi au plus égal à ω).

Or cela semble présenter aussi peu d'interêt que de difficultés, de sorte que nous n'y insistons pas.

8. Envisageons maintenant les points d'indice infini (c. à d. d'indice $\geqq \aleph_0$).

Nous savons déjà (ch. I, théor. VI) qu'aucun de ces points ne peut être un point de ramification isolé; il existe notamment, si $ind_x\, C$ est $\geqq \aleph_0$, un continu $K \supset x$ formé de points d'indice infini et de leurs points limites.

Nous avons en outre la propriété suivante:

VIII. *Si $ind_a\, C \geqq \aleph_0$, C contient un continu de condensation dans tout voisinage de a.*

En effet, si C n'est pas localement connexe au point a, ce point appartient nécessairement a un $ccd\,(C)$ [16]). En désignant par C_0 ce continu de condensation complète, soit Q le $Comp_a\,(C_0\,.\,\bar{S}\,(x,\varepsilon))$; Q est un $cd\,(C)$ [17]); par conséquent, si C n'est pas localement connexe, a appartient à un $cd\,(C)$ situé dans un voisinage arbitrairement choisi de a.

Supposons donc C localement connexe au point a; d'après la note [12]), a est un point intérieur (rel. C) du continu

$$K = comp_a\,(C\,.\,\bar{S}\,(x,\varepsilon))\,,$$

donc

$$ind_a\, K = ind_a\, C = \aleph_0\,.$$

[14]) Loc. cit. p. 64.

[15]) Loc. cit. pp. 70—74.

[16]) Ch. III, théor. VII.

[17]) Ch. III, théor. II.

Il en résulte (d'après IV) que K possède un continu de condensation K_0. Or K_0 étant un $cd(K)$ est aussi un $cd(C)$, situé de plus dans $\bar{S}(x, \varepsilon)$,

c. q. f. d.

Faisons quelques remarques relatives aux possibilités de préciser et de généraliser le théorème ci-dessus :

1°. On ne peut affirmer que tout point a d'indice infini appartienne à un continu de condensation (même si $ind_a\, C = \mathfrak{c}$, ou si l'on a de plus $dim_a\, C > 1$). Pour s'en apercevoir, il suffit de se rappeler le continu du § 8 du ch. I, où les ensembles situés sur les circonférences, sont p. ex. des ensembles parfaits. Nous avons déjà remarqué [18]) que, si le sous-continu quelconque $K \subset C$ contient le point a, il est dense dans un certain voisinage de ce point, qui n'appartient par conséquent à aucun $cd(C)$.

On peut faire une construction analogue dans l'espace euclidien à trois dimensions ; les circonférences sont alors à remplacer par des sphères et les continus indécomposables seront des surfaces cantoriennes satisfaisant aux conditions analogues d'irréductibilité. On supposera de plus que les ensembles fermés F_n soient tous de dimension 2.

Il est alors facile à voir que le point a n'appartient a aucun $cd(C)$, tandis que $dim_a\, C = 2$.

2°. Nous avons déjà vu [8]) qu'une ligne cantorienne peut contenir des points d'indice $\aleph_0$ sans posséder aucun $ccd(C)$.

Les problèmes suivants restent ouverts :

P r o b l è m e λ. Si C n'est pas localement connexe au point a, existe-t-il dans tout voisinage de a un $ccd(C)$ auquel a est agrégé ?

P r o b l è m e μ. Si $ind_a\, C = \mathfrak{c}$, peut il arriver qu'un certain voisinage de a est dépourvu de $ccd(C)$?

9. Faisons un court résumé des relations logiques que nous avons trouvées pour les quatres propriétés suivantes d'un point $x \subset C$:

A. x est du second genre (rel. C).
B. x appartient à un $ccd(C)$.
C. x appartient à un $cd(C)$.
D. $ind_x\, C \geqslant \aleph_0$.

En remplaçant les mots „la proposition Q est une conséquence de la proposition P" par la formule $P \to Q$, nous avons les relations suivantes : [19])

$$A \to B \begin{smallmatrix} \nearrow C \\ \searrow D \end{smallmatrix}.$$

D'autre part, en désignant par $P \not\to Q$ la négation de $P \to Q$, on a : [20])

$$D \not\to C \not\to B \not\to A .$$

[18]) Ch. I, loc. cit. [17]).

[19]) Théor. I ; ch. III, théor. VII.

[20]) Ch. I, § 8 ; ch. I, ex. 2 ; ch. III, ex. 5 ; ch. I, ex. 11.

Si C est un continu irréductible [21]), les trois propriétés A, B, C sont équivalentes (ch. III, § 5). Quant à la propriété D, même pour les continus irréductibles aucune des propriétés A, B, C n'est une conséquence de D (le continu C du § 8 du ch. I étant irréductible entre x et tout point de F_1). Nous reviendrons à ce sujet dans le chapitre suivant.

10. Le reste de ce chapitre sera consacré aux relations qui existent entre les points d'arrêt (c. à d. les points d'indice 1) et ceux d'indice supérieur.

Nous avons déjà vu que s'il y a sur un continu plus de 2 points d'arrêt, il existe nécessairement au moins un point de ramification.

On peut généraliser ce résultat comme il suit:

S'il y a, sur le continu C, au moins n, $n > 2$, points d'arrêt, la somme des indices de tous les points de ramification de C est au moins égale à n.

La démonstration ne présente aucune difficulté: Si C ne possède qu'un nombre fini de points de ramification, dont chacun est d'indice fini et borné, C peut être regardé comme somme d'un nombre fini d'arcs libres et leurs extrémités (donc, si l'on veut, comme complexe polygonal). Tout point d'arrêt est alors l'une des extrémités d'un arc libre, dont la seconde extrémité est nécessairement un point de ramification. Cela suffit pour appliquer le raisonnement de n à $n+1$ (en remarquant que pour $n = 3$ le théorème est vrai).

Il s'ensuit immédiatement un résultat analogue pour le cas d'une infinité de points d'indice 1:

S'il existe sur C une infinité de points d'arrêt et si C ne contient qu'un nombre fini de points de ramification, l'un au moins de ces points est d'indice ω.

Remarquons qu'aucune généralisation de cette sorte pour le cas où l'ensemble des points d'arrêt est indénombrable n'existe: on peut construire un continu C où cet ensemble est de puissance $\mathfrak{c}$, tandis que C ne contient qu'une infinité dénombrable de points de ramification, ceux-ci étant tous d'indice 3. Soit, en effet, C le continu qu'on obtient en supprimant dans le continu de l'ex. 2 tous les intervalles contigus (sur $[0,1]$) à l'ensemble parfait de CANTOR P.

On voit aussitôt que $ind_x\ C = 1$ quel que soit le point $x \subset P$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut; x appartient à un segment $U_{i_1 i_2 \dots i_n}$ de longueur $< \varepsilon$; or le sommet du triangle équilatère ayant pour base le segment $U_{i_1 i_2 \dots i_n}$, sépare évidemment le point x par rapport à C.

En désignant par A_C l'ensemble des points d'arrêt du continu C, nous avons enfin le résultat suivant:

IX. *Si l'ensemble* $\overline{A}_C$ *est de dimension positive* [22]), *C contient un continu de condensation.*

---

21) Cf. ch. II.

22) Donc en particulier, si A_C est dense sur un sous-continu quelconque de C.

En effet, si C est un continu dépourvu de $cd(C)$, on a la décomposition (ch. II, théor. XIV):

$$C = F + \Sigma A_n$$

(où F est un ensemble fermé discontinu et les A_n sont des arcs libres maximaux). Or, si x est un point d'un A_n quelconque, $ind_x\, C = 2$; on a aussi $ind_y\, C = 2$, si y est assez voisin de x (pour appartenir aussi à A_n); il s'ensuit que $\overline{A}_C$ est étranger à l'ensemble de tous les A_n, donc $\overline{A}_C \subset F$; F étant discontinu, il en est de même pour $\overline{A}_C$, donc $dim\, \overline{A}_C = 0$,

c. q. f. d.

X. *Si l'ensemble A_C des points d'arrêt est dense sur C, l'ensemble R des points de ramification est lui aussi dense sur C; l'ensemble $C - A_C$ est alors nécessairement un ensemble de première catégorie sur C.*

En effet, si l'ensemble R n'était pas dense sur C, il y aurait sur C un point x_0 tel que tous les points suffisamment rapprochés de x_0 seraient d'indice $\leqslant 2$; d'après les résultats du § 7, x_0 serait alors agrégé à un arc libre A (rel. C); A serait un domaine (rel. C) ne contenant aucun point d'arrêt, contrairement à notre supposition.

L'ensemble A_C étant un ensemble $\mathfrak{G}_\delta$ dense sur C, l'ensemble complémentaire $C - A_C$ (et par suite $R \subset C - A_C$) est nécessairement de première catégorie sur C (Il en résulte en particulier, que A_C est de puissance $\mathfrak{c}$ autour de chacun de ses points).

Il s'ensuit des propositions X et V que tout sous-continu de C contient un $cd(C)$ toutes les fois que A_C est dense sur C.

Remarque. Dans l'énoncé X on pourrait remplacer C par un sous-continu quelconque $C_0 \subset C$.

11. Montrons enfin que la dimension de l'ensemble A_C est toujours nulle quel que soit le continu C.

Démontrons à cet effet les propositions XI et XII bien plus générales:

XI. *Quel que soit l'ensemble connexe C, l'ensemble A_C des points d'arrêt de C est de dimension nulle.*

Ce théorème résulte immédiatement de la proposition suivante:

Lemme. *Si a est un point d'arrêt de l'ensemble connexe C, $C - a$ est connexe.*

Supposons par contre qu'on ait

$$C - a = P + Q \ , \ H(P, Q) = 0.$$

Chacun des ensembles $P + a$, $Q + a$ est connexe.

(En effet, on aurait dans le cas contraire, par exemple, $P + a = M + N$, $H(M, N) = 0$, $M \neq 0 \neq N$.

En supposant que M est celui des deux ensembles M, N qui contient le point a, on pourrait décomposer C comme il suit:

$$C = (a + P) + Q = M + N + Q = (M + Q) + N;$$

on a, en remarquant que $N \cdot a = 0$, l'inclusion $N \subset P$; on a ensuite

$$H(M+Q, N) = H(M, N) + H(Q, N) = H(Q, N) \subset H(Q, P) = 0,$$

ce qui est impossible).

Donc, toute ε-séparation de a dans C contenant au moins un point de P et un point de Q, a n'est pas un point d'arrêt et notre lemme est démontré.

Soit maintenant a un point d'arrêt quelconque de l'ensemble connexe C et ε un nombre positif arbitraire. Le point a étant un point d'arrêt, il existe une ε-séparation du point a par un ensemble B ne contenant qu'un seul point b; le point b décompose l'ensemble C en deux ensembles A et D:

$$C - b = A + D, \quad H(A, D) = 0, \quad a \subset A \subset S(a, \varepsilon),$$

c. à d. que $C - b$ n'est pas connexe; il s'ensuit alors du lemme démontré que b n'est pas un point de l'ensemble A_C. On a par conséquent

$$A_C = A_C \,.\, C = A_C \,.\, (A + b + D) = A_C \,.\, A + A_C \,.\, D,$$
$$H(A_C \,.\, A, A_C \,.\, D) \subset H(A, D) = 0,$$
$$a \subset A_C \,.\, A \subset A \subset S(a, \varepsilon).$$

Nous avons ainsi obtenu une ε-séparation du point $a \subset A_C$ (par rapport à ce dernier ensemble) effectué par l'ensemble vide; $\varepsilon > 0$ et $a \subset A_C$ étant arbitraires, on en tire bien que $dim_a\, A_C = 0$, c. q. f. d.

XII. *Quel que soit l'ensemble fermé F, l'ensemble A_F des points d'arrêt de F est de dimension nulle.*

Supposons en effet que a soit un point d'arrêt par rapport à F. On a $ind_a\, F = 1$ et par suite $dim_a\, F > 0$. Il en résulte que a appartient à un continu $C \subset F$, donc

$$1 \leqslant ind_a\, C \leqslant ind_a\, F = 1,$$

c. à d. que $ind_a\, C = 1$.

Soit maintenant ε un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}\,\delta\,(C)$ et

$$F = A + b + D, \quad a \subset A \subset S(a, \varepsilon)$$

une ε-séparation du point a effectué par le seul point b

$$C = C \,.\, A + C \,.\, b + C \,.\, D;$$

nous avons choisi ε inférieur à $\frac{1}{2}\,\delta(C)$: il s'ensuit que le continu $C \supset$ ne peut être agrégé à $A \subset S(a, \varepsilon)$ et que par conséquent aucun des ensembles $C \,.\, A$ et $C \,.\, D$ n'est vide; C étant un continu, $C \,.\, b$ ne peut être vide non plus, de sorte que $b \subset C$ et (d'après notre lemme) $ind_b\, C > 1$.

On a donc a fortiori $ind_b\, F > 1$ et $A_F \,.\, b = 0$.

Nous pouvons écrire maintenant

$$A_F = A_F \,.\, F = A_F(A + b + D) = A_F \,.\, A + A_F \,.\, D,$$
$$H(A_F \,.\, A, A_F \,.\, D) \subset H(A, D) = 0,$$
$$a \subset A_F \,.\, A \subset A \subset S(a, \varepsilon).$$

Nous obtenons ainsi une ε-séparation du point $a \subset A_F$ par l'ensemble vide, donc $dim_a A_F = 0$, c. q. f. d.

Une conséquence immédiate des résultats XI, XII est que sur tout ensemble fermé (resp. connexe) C l'ensemble des points d'indice $\neq 1$ (resp. l'ensemble des points d'indice > 1) est dense sur C.

Nous obtiendrons au ch. VI un résultat bien plus précis pour le cas où C est un continu.

Nous verrons notamment que l'ensemble des points de C dont l'indice surpasse 1, est un sémicontinu dense sur C.

12. Pour terminer l'étude des points d'arrêt, il nous faut encore prouver par des exemples que l'ensemble A_C peut être dense sur le continu C. Il est à remarquer qu'un pareil exemple a déjà été construit au ch. II de la première partie de ce mémoire (§§ 43—47); on y avait en effet $ind_x C = 1$ pour tout point $x \subset R$ (voir I, ch. II, § 46, section II).

Or le continu C, dont nous parlons, était une surface cantorienne. Il est donc tout naturel de se demander, s'il existe une ligne cantorienne jouissant de la même propriété.

Nous verrons que oui, et que cette ligne cantorienne peut être supposée assez simple à plusieurs égards; nous allons en effet construire un continu C jouissant des propriétés suivantes:

1. C est localement connexe ainsi que chacun de ses sous-continus (C ne possède donc aucun $ccd(C)$).

2. C ne contient qu'une infinité dénombrable de points de ramification (ces points étant d'ailleurs d'indice 4).

3. L'ensemble des points d'arrêt de C est dense sur C (donc de 2de catégorie sur C).

On pourrait légèrement modifier l'exemple que nous allons construire de façon que tous les points de ramification soient d'indice 3, les autres propriétés de C se conservant.

Nous construirons le continu C en appliquant la méthode de condensation des singularités au continu C_0 de l'exemple 2 (ch. I).

Considérons toutes les fractions dyadiques de l'intervalle (0,1) et rangeons-les une fois pour toutes dans une suite bien déterminée.

$$\psi_0 = \frac{1}{2},\ \psi_1,\ \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots; \tag{1}$$

tout ψ_n est donc un nombre rationnel de la forme $\frac{2s-1}{2^N}$ (s étant un entier positif $\leq 2^{N-1}$). Nous poserons $r_n = N$ si $\psi_n = \frac{2s-1}{2^N}$ et nous appellerons le nombre r_n le *rang* de ψ_n. Nous supposons que la suite (1) est ordonnée de la façon naturelle, c. à d. qu'on a $n < m$ si r_n est inférieur à r_m, et que pour $r_n = r_m = N$, le nombre n est $< m$, si $2^N . \psi_n$ est inférieur à $2^N . \psi_m$.

Considérons maintenant, dans le plan xoy, un segment rectiligne quelconque $S = \overline{ab}$ parallèle à l'une des axes de coordonnées.

Nous désignerons toujours par a celle-là des deux extrémités a, b du segment S, qui possède la plus petite coordonnée.

Ensuite nous appellerons $\psi_i(S)$ le point de S dont la distance du point a est égale à $\psi_i . \delta(S)$. En particulier $\psi_0(S)$ est le milieu de (S).

Nous désignerons enfin par $S_{,i}$ [23]) le segment rectiligne de longueur $\frac{\delta(s)}{2^{2r_i}}$ perpendiculaire à S et tel que $\psi_i(S) = \psi_0(S_{,i})$.

Soit maintenant S le segment $[0, 1]$ de l'axe ox.

On peut construire d'après la convention adoptée les segments $S_{,i}$ que nous désignerons simplement par $S_{i_1} = \overline{a_{i_1} b_{i_1}}$ $(i_1 = 1, 2, 3, \ldots)$, puis les segments $S_{i_1, i_2} = \overline{a_{i_1, i_2} b_{i_1, i_2}}$ $(i_1, i_2 = 1, 2, 3, \ldots)$ et en général les segments $S_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \overline{a_{i_1, i_2, \ldots, i_k} b_{i_1, i_2, \ldots, i_k}}$, où $i_1, i_2, \ldots, i_k$ parcourent indépendamment l'un de l'autre toutes les valeurs entières et positives. Quelquefois nous désignerons aussi le point $\psi_{i_{k+1}}(S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}) = \psi_0(S_{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}})$ tout simplement par $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}}$.

La longueur de $S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ est évidemment égale à $\delta_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \frac{1}{2^{2(r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_k})}}$ de sorte que l'ensemble de tous les nombres $\delta(S_{i_1, i_2, \ldots, i_k})$ converge vers zéro. Posons

$$C_0 = S, \; C_k = C_0 + \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{i_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{i_\varkappa=1}^{\infty} S_{i_1, i_2, \ldots, i_\varkappa}, \tag{2}$$

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} C_k. \tag{3}$$

Le continu que nous voulions construire est constitué par $C = \overline{Q}$.

13. Commençons par montrer que, pour tout k, C_k est un continu.

La chose est évidente pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons qu'il est démontré que C_{k-1} est un continu; démontrons que C_k l'est aussi. D'abord C_k est évidemment connexe. Pour démontrer que C_k est fermé reprenons la relation générale suivante (déjà employée au ch. III [8]))

$$\overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty} M_n\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n + \overline{lt}_{n \to \infty} M_n, \tag{4}$$

vraie quels que soient les ensembles M_n. Elle nous donne dans notre cas

$$\overline{C}_k = C_k + \overline{lt}\, S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k} \tag{5}$$

[23]) la virgule devant i dans $S_{,i}$ exprime que si S est accompagné d'un cortège quelconque d'indices on obtient tous les indices de $S_{,i}$ en adjoignant à ce cortège de S le nouvel indice i.

(la dernière expression a un sens précis, les $S_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ étant en infinité dénombrable).

Il s'agit donc de montrer que $\overline{lt}\, S_{i_1 i_2 \dots i_k} \subset C_k$. Supposons que nous ayons déjà vérifié la relation correspondante pour $k-1$; en se rappelant que les $\delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}$ tendent vers zéro, on voit aussitôt que

$$\text{(6)} \qquad \overline{lt}\, S_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k = 1}^{\infty} S_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} + \overline{lt}\, S_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} \subset C_{k-1}.$$

Les ensembles C_k étant, comme nous venons de voir, des continus, il résulte de l'inclusion $C_k \subset C_{k+1}$ que $Q = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$ est connexe, donc $C = \overline{Q}$ est un continu.

14. Considérons maintenant une suite de la forme

$$\text{(7)} \qquad S,\ S_{i_1}, \dots,\ S_{i_1, i_2, \dots, i_k}, \dots.$$

En tenant compte des résultats antérieurs (ch. II, th. IV, cor. 2) et des relations

$$\text{(8)} \qquad \delta\,(S_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = \frac{1}{2^{2(r_{i_1} + r_{i_2} + \dots + r_{i_k})}} \leqslant \frac{1}{4^k}$$

$$\text{(9)} \qquad S_{i_1, i_2, \dots, i_k} \cdot S_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}} \neq 0,$$

on voit de suite que la suite (7) converge vers un seul point $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots}$.

Posons encore

$$Q_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h_1, h_2, \dots, h_n = 1}^{\infty} S_{i_1, i_2, \dots, i_k, h_1, h_2, \dots, h_n} + S_{i_1, i_2, \dots, i_k}$$

et soit x un point quelconque de $Q_{i_1, i_2, \dots, i_k}$; x appartient à un $S_{i_1, i_2, \dots, i_k, h_1, h_2, \dots, h_s}$ et on a facilement

$$\varrho\,(S_{i_1, i_2, \dots, i_k}, x) \leqslant \sum_{j=1}^{s} \delta\,(S_{i_1, i_2, \dots, i_k, h_1, h_2, \dots, h_j}) < \frac{\delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}}{3}$$

c. à d. que

$$\text{(10)} \qquad Q_{i_1, i_2, \dots, i_k} \subset S\left(S_{i_1, i_2, \dots, i_k}, \frac{\delta_{i_1 i_2 \dots i_k}}{3}\right).$$

Considérons maintenant un ensemble infini quelconque de segments $S_{i_1 i_2 \dots i_k}$ (le nombre k étant arbitraire mais fixe).

Soient $S_\lambda^{(k)} = S_{i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \dots, i_k^{(\lambda)}}$ ces $S_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots$). En désignant par $Q_\lambda^{(k)}$ les ensembles $Q_{i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \dots, i_k^{(\lambda)}}$ correspondants, on a l'inclusion facile à vérifier

$$\text{(11)} \qquad \overline{lt}_{\lambda \to \infty}\, Q_\lambda^{(k)} = \overline{lt}_{\lambda \to \infty}\, S_\lambda^{(k)} \subset C_{k-1};$$

il vient, en particulier :

$$\text{(11}\,bis\text{)} \qquad \overline{lt}_{i_k \to \infty}\, Q_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k} = S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}.$$

On peut indiquer une relation plus précise dont nous ferons usage dans la suite. Supposons données les fractions dyadiques $\psi_{m'}$ et $\psi_{m''}$, $\psi_{m'} < \psi_{m''}$.

Désignons par $S^{m', m''}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ le segment $[\psi_{m'}(S_{i_1 i_2 \dots i_k}), \psi_{m''}(S_{i_1 i_2 \dots i_k})]$ situé sur $S_{i_1 i_2 \dots i_k}$.

On a, toujours par les mêmes méthodes :

$$\text{(11}\,ter\text{)} \qquad \overline{lt}_{\psi_{m'} \leq \psi_s \leq \psi_{m''}}\, Q_{i_1, i_2, \dots, i_k, s} = \overline{lt}_{\psi_{m'} \leq \psi_s \leq \psi_{m''}}\, S_{i_1, i_2, \dots, i_k, s} = S^{m', m''}_{i_1, i_2, \dots, i_k}.$$

Une relation analogue subsiste, quand on remplace un quelconque des nombres $\psi_{m'}, \psi_{m''}$ par 0 ou par 1 (les désignations $S^{0,\,m''}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ resp. $S^{m',\,1}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ ne pouvant donner lieu à aucun malentendu).

On tire des relations (11*bis*) et (4) l'égalité

$$(12) \qquad \overline{Q}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = \sum_{s=1}^{\infty} \overline{Q}_{i_1,i_2,\ldots,i_k,s} + S_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$$

(cette égalité étant vraie pour toutes les valeurs de $k \geq 0$, où à $k = 0$ correspond Q resp. S).

15. Démontrons maintenant qu'on a

$$(13) \qquad \overline{Q}_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},m} \cdot \overline{Q}_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},n} = 0,$$

quels que soient les entiers $m \neq n$.

Supposons que $r_m = p$ soit non-supérieur à $r_n = q$; le premier membre de l'égalité (13) est identique, d'après (12), à

$$(13bis) \left(\sum_{h=1}^{\infty} \overline{Q}_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},m,h} \right) \cdot \overline{Q}_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},n} + S_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},m} \cdot \overline{Q}_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},n}.$$

Désignons par r l'entier positif r_h. On a évidemment

$$(14) \qquad \varrho\,(S_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},m}\,,\; S_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},n}) \geqslant \frac{\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}}}{2^q}$$

donc en vertu de (10)

$$\varrho\,(S_{i_1,i_2\,\ldots,i_{k-1},m}\,,\; \overline{Q}_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},n}) \geqslant \varrho\,(S_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},m}\,,\; S_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},n}) -$$

$$- \frac{\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},n}}{3} \geqslant \frac{\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}}}{2^q}\left(1 - \frac{1}{3.2^q}\right) \geqslant \frac{\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}}}{2^q} \cdot \frac{5}{6}.$$

Si l'égalité (13) n'était pas vraie, il existerait donc d'après (13*bis*) un entier h et un point x tels que

$$x \subset \overline{Q}_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},m,h} \cdot \overline{Q}_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},n} \neq 0.$$

La relation suivante résulte de (10), x étant agregé à $Q_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},n}$,

$$(15) \quad \varrho\,(x\,,\, S_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},n}) \leqslant \frac{1}{3\,.\,2^{2(r_{i_1}+r_{i_2}+\ldots+r_{i_{k-1}}+r_{i_k})}} = \frac{\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}}}{3\,.\,2^{2q}};$$

d'autre part, x étant agrégé à $\overline{Q}_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},m,h}$,

$$\varrho\,(x,\, S_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},m,h}) \leqslant \frac{\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}}}{3\,.\,2^{2(p+r)}},$$

donc

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varrho\,(x,\, S_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},m}) \leqslant \frac{\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}}}{3\,.\,2^{2(p+r)}} + \delta\,(S_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},m,h}) = \\ &= \frac{\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}}}{3\,.\,2^{2(p+r)}} + \frac{\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}}}{2^{2(p+r)}}. \end{aligned} \right.$$

On a donc d'après (14), (15), et (16)

$$(17)\qquad \frac{\delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}}{3 \cdot 2^{2(p+r)}} + \frac{\delta_{i_1, i_2, \ldots, k-1}}{2^{2(p+r)}} + \frac{\delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}}{3 \cdot 2^{2q}} \geqslant \frac{\delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}}{2^q},$$

c. à d. que

$$\frac{1}{2^{2(p+r-1)}} \geqslant \frac{3 \cdot 2^q - 1}{2^{2q}} = \frac{2 \cdot 2^q + (2^q - 1)}{2^{2q}} > \frac{1}{2^{q-1}},$$

donc

$$(18)\qquad 2(p+r) < q + 1.$$

D'autre part on a l'inégalité

$$\varrho(x, S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}) \leqslant \varrho(x, S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, n}) + \delta(S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, n})$$

d'où il résulte (en tenant compte de l'inclusion $x \subset \overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, n}$ et de l'inégalité (10)) que :

$$(19)\quad \begin{cases} \varrho(x, S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}) \leqslant \dfrac{1}{3 \cdot 2^{(r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_{k-1}} + r_n)}} + \dfrac{1}{2^{2(r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_{k-1}} + r_n)}} = \\ = \dfrac{\delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}}{3 \cdot 2^{2q}} + \dfrac{\delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}}{2^{2q}} = \dfrac{\delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}}{3 \cdot 2^{2(q-1)}}. \end{cases}$$

On a enfin

$$(20)\quad \begin{cases} \varrho(x, S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}) \geqslant \varrho(S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, m, h}, S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}) - \\ - \varrho(x, S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, m, h}) - \delta(S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, m, h}) = \\ = \varrho(\psi_h(S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, m}), \psi_0(S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, m})) - \varrho(x, S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, m, h}) - \\ - \delta(S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, m, h}) \geqslant \dfrac{1}{2^{2(r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_{k-1}} + r_m)}} \cdot \dfrac{1}{2^h} - \\ - \dfrac{1}{3 \cdot 2^{2(r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_{k-1}} + r_m + r_h)}} - \dfrac{1}{2^{2(r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_{k-1}} + r_m + r_h)}} = \\ = \dfrac{(3 \cdot 2^{r-2} - 1)\, \delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}}{3 \cdot 2^{2(p+r-1)}}. \end{cases}$$

En remarquant que $3 \cdot 2^{r-1} - 1$ est au moins égal à $\frac{1}{2}$, on tire des inégalités (19) et (20) :

$$\frac{1}{2 \cdot 2^{2(p+r-1)}} \leqslant \frac{1}{2^{2(q-1)}},$$

c. à d. que

$$2(p+r) \geqslant 2(q-1) + 1;$$

donc, on a en vertu de (18)

$$2(q-1) + 1 < q + 1, \text{ d'où } q < 2.$$

Le nombre q étant un entier positif, on a nécessairement $q = 1$; en portant cette valeur de q dans (18), on obtient l'inégalité $p + r < 1$, ce qui est impossible, p et r étant des entiers positifs.

La relation (13) se trouve ainsi démontrée.

16. Considérons pour un instant les nombres $\rho\,(S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}, S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-h}})$ que nous désignerons par $\rho^{(h)}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$. Nous avons tout d'abord $\rho^{(1)}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = 0$ (car les segments $S_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ et $S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}$ possèdent toujours un point commun). Quant à $\rho^{(2)}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, on a la relation suivante

$$(21)\begin{cases} \varrho^{(2)}_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \varrho(S_{i_1, i_2, \dots, i_k}, S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-2}}) = \varrho(\psi_{i_k}(S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}, \psi_0(S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}})) \geqslant \\ \geqslant \dfrac{\delta_{i_1, i_2 \dots i_{k-1}}}{2^{r_{i_k}}} > \varrho^{(1)}_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}. \end{cases}$$

Démontrons la relation plus générale suivante

$$(22) \qquad \varrho^{(h+1)}_{i_1, i_2, \dots, i_k} > \varrho^{(h)}_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}.$$

La relation (22) est vraie (d'après (21)) pour $h = 1$. Démontrons-la pour $h + 1$ (quels que soient $k \leq h + 1$ et $i_1, i_2, \dots, i_k$) en la supposant vraie pour h.

$$\varrho^{(h+1)}_{i_1, i_2, \dots, i_k} \geqslant \varrho(S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}, S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-h-1}}) - \delta(S_{i_1, i_2, \dots, i_k}) =$$
$$= \varrho^{(h)}_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}} - \delta_{i_1, i_2, \dots, i_k} > (\varrho^{(h-1)}_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}} + \delta_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}) - \delta_{i_1, i_2, \dots, i_k} =$$
$$= \varrho(S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}, S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-h}}) + \delta_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}} - \delta_{i_1, i_2, \dots, i_k} \geqslant$$
$$\geqslant \varrho(S_{i_1, i_2 \dots, i_k}, S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-h}}) + \delta_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}} - 2\,\delta_{i_1, i_2, \dots, i_k} >$$
$$> \varrho^{(h)}_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}.$$

La relation (22) est démontrée dans toute sa généralité.

En tenant compte de (10) on tire de (22) les inégalités suivantes (pour $k \geqslant h \geqslant 2$)

$$(23)\begin{cases} \varrho(\overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k}, S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-h}}) \geqslant \varrho(S_{i_1, i_2, \dots, i_k}, S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-h}}) - \dfrac{\delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}}{3} > \\ \qquad > \frac{2}{3}\,\delta_{i_1, i_2, \dots, i_k} > 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit en particulier de (23) qu'on a

$$(24) \qquad S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-h}} \cdot \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k} = 0 \qquad (k \geqslant h \geqslant 2)$$

et il vient d'après (12) et (24)

$$(25)\begin{cases} S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}} \cdot \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k} = S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}} \cdot \left(S_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{\infty} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}}\right) = \\ \qquad = \psi_{i_1, i_2, \dots, i_k}. \end{cases}$$

On a ensuite (pour $k \geqslant h \geqslant 2$)

$$(26) \qquad S_{j_1, j_2, \dots, j_{k-h}} \cdot \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k} = 0,$$

quels que soient les indices $j_1, j_2, \dots, j_{k-h}$.

En effet, l'égalité (26) résulte de (24) si l'on y pose $j_1 = i_1$, $j_2 = i_2$, $j_{k-h} = i_{k-h}$; soit j_s $(1 \leqslant s \leqslant k-h)$ le premier parmi les indices $j_1, j_2, \dots, j_{k-h}$ qui diffère de i_s.

On a alors

$$(27)\begin{cases} S_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}, j_s, \dots, j_{k-h}} \cdot \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_s, \dots, i_k} = \\ = S_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}, j_s, \dots, j_{k-h}} \cdot \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_s, \dots, i_k} \subset \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}, j_s} \cdot \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_s} = 0 \end{cases}$$

(d'après (13)).

Il est à remarquer que la relation (27) est vraie pour $h \geqslant 1$. Il en résulte immédiatement que

(28) $$C_{k-2} \cdot \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k} = 0$$

(29) $$C_{k-1} \cdot \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \psi_{i_1, i_2, \dots, i_k} .$$

On a enfin

(30) $$\xi_{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots} = \underset{k \to \infty}{lt}\ S_{i_1, i_2, \dots i_k} \subset \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k} \subset C - C_{k-2} .$$

L'inclusion $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots} \subset C - C_{k-2}$ étant vraie quel que soit $k > 2$, il en résulte que

(31) $$\xi_{i_1, i_2, \dots, i_k} \subset C - Q .$$

17. Supposons qu'on ait les deux suites d'entiers

(32) $$i_1, i_2, \dots i_k, \dots$$

(33) $$j_1, j_2, \dots j_k, \dots$$

ne coïncidant pas et supposons que j_k soit le premier élément de (33) différent du i_k correspondant.

On a alors

(34) $$\xi_{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots} \cdot \xi_{j_1, j_2, \dots, j_k, \dots} \subset Q_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k} \cdot Q_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, j_k} = 0 ,$$

de sorte que $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots}$ et $\xi_{j_1, j_2, \dots, j_k, \dots}$ sont deux points différents de $C - Q$.

Soit d'autre part ξ un point quelconque de $C - Q$. En appliquant toujours la formule (12) et en remarquant qu'on a $\xi \cdot S_{i_1, i_2, \dots, i_k} = 0$ quels que soient $k, i_1, i_2, \dots, i_k$, on trouve que ξ est agrégé aux ensembles

$$\overline{Q}_{i_1}, \ \overline{Q}_{i_1, i_2}, \ \overline{Q}_{i_1, i_2, i_3}, \dots, \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k}, \dots$$

Il en résulte (d'après ch. II, § 5) que

$\xi \subset \prod_{k=1}^{\infty} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \underset{k \to \infty}{lt}\ \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$; les diamètres de $Q_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ tendant (d'après (10)) vers 0, on en tire

(35) $$\xi \subset \underset{k \to \infty}{lt}\ \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \underset{k \to \infty}{lt}\ S_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \xi_{i_1, i_2, \dots i_k, \dots} ,$$

donc $\xi = \xi_{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots}$.

Le continu C se compose donc du sémicontinu $Q = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$ (qui est un ensemble $\mathfrak{F}_\sigma$) et de l'ensemble $C - Q$ formé de tous les points $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots}$; Q étant un $\mathfrak{F}_\sigma$, $C - Q$ est un ensemble $\mathfrak{G}_\delta$.

Montrons que les ensembles Q et $C - Q$ sont tous les deux denses sur C. La propriété est évidente pour Q ; pour voir que $C - Q$ est dense sur C, considérons un point quelconque x de Q et un nombre positif arbitraire ε ; il s'agit de démontrer que $S(x, \varepsilon) \cdot (C - Q) \neq 0$. Il suffit de considérer le cas où $x \subset Q$, donc où x appartient à un $S_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ déterminé.

On peut prendre sur $S_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ un point $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}}$ distant de x de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$ et de rang assez élevé pour que $\delta(\overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}})$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$. On voit alors immédiatement que tous les points $\xi_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1} \dots}$ sont contenus dans $S(x, \varepsilon)$, quels que soient $i_{k+1}, i_{k+2}, \dots$.

18. En appliquant de proche en proche la formule (12), on obtient le résultat suivant:

$$C = C_{k-1} + \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{\infty} \overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}. \tag{36}$$

Désignons par $\Sigma^* \overline{Q}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}$ la somme $\sum\limits_{j_1, j_2, \ldots, j_k = 1}^{\infty} \overline{Q}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}$ prise pour toutes les combinaisons de valeurs naturelles de $j_1, j_2, \ldots, j_k$, à la seule exception de $j_1 = i_1$, $j_2 = i_2, \ldots, j_k = i_k$; on peut alors transformer l'égalité (36) comme il suit:

$$C = C_{k-1} + (\Sigma^* \overline{Q}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}) + \overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}. \tag{37}$$

Il résulte de (11) que $C_{k-1} + \Sigma^* \overline{Q}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}$ est fermé :

$$\overline{(C_{k-1} + \Sigma^* \overline{Q}_{j_1, j_2, \ldots, j_k})} = C_{k-1} + \Sigma^* \overline{Q}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}. \tag{37bis}$$

On a encore, d'après (13) et (29),

$$(C_{k-1} + \Sigma^* \overline{Q}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}) \cdot \overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \subset C_{k-1} \cdot \overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k}.$$

L'ensemble

$$\overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} - \psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$$

est un domaine (rel. C) (complémentaire à l'ensemble fermé $C_{k-1} + \Sigma^* \overline{Q}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}$) n'ayant aucun point en commun avec le domaine

$$(C_{k-1} + \Sigma^* \overline{Q}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}) - \psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k}.$$

Nous avons ainsi, quel que soit le cortège de nombres naturels $i_1, i_2, \ldots, i_k$, la décomposition suivante du continu C en trois ensembles sans points communs dont le premier et le troisième sont des domaines (rel. C):

$$\begin{aligned} C = (\overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} - \psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k}) + \psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k} &+ \\ + ((C_{k-1} + \Sigma^* \overline{Q}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}) &- \psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k}). \end{aligned} \tag{38}$$

Soit maintenant $\xi_{i_1, i_2, \ldots, i_k \ldots}$ un point quelconque de l'ensemble $C - Q$ et ε un nombre positif arbitraire. En prenant k assez grand on obtient, d'après (10)

$$\delta\,(\overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}) < \varepsilon\,;$$

par conséquent la décomposition (38) satisfait à la double inclusion suivante

$$\xi_{i_1, i_2, \ldots, i_k \ldots} \subset Q_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \subset S\,(\xi_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots}, \varepsilon)$$

qui signifie que (38) est une ε-séparation du point $\xi_{i_1, i_2, \ldots, i_k \ldots}$ par rapport à C par le seul point $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$; ε étant arbitraire, on voit que $ind_x\, C = 1$ pour tout point $x \subset C - Q$; donc l'ensemble des points d'arrêt est dense sur C.

19. Nons allons maintenant faire l'examen de tous les autres points de C au point de vue de leur l'indice.

Soit x un point quelconque de Q ; x appartient à un $S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$.

Trois cas sont possibles :

1°. $x = \psi_{i_{k+1}}(S_{i_1, i_2, \dots, i_k})$, $i_{k+1} = 1, 2, \dots$

2°. x est le point $a_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ ou $b_{i_1, i_2, \dots, i_k}$.

3°. x n'entre dans aucune des catégories précédentes.

1° Soit $x = \psi_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}} = \psi_{i_{k+1}}(S_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = \psi_0(S_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}})$ et soient m, m', n, n' des nombres naturels tels qu'on ait

$$(39)\qquad \begin{cases} \psi_{m'} = \psi_{i_{k+1}} + \dfrac{1}{2^{\rho+1}} = \psi_m + \dfrac{1}{2^\rho} \\[2ex] \psi_{n'} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{\rho+1}} = \psi_n + \dfrac{1}{2^\rho}, \end{cases}$$

ou ρ est le premier nombre entier supérieur à $r_{i_{k+1}}$ et à $(-lg_2\,\varepsilon + 1)$. On à évidemment: $r_m = r_{m'} = r_n = r_{n'} = \rho$.

En se rapportant à (37) et à (12), nous pouvons écrire

$$(40)\qquad \begin{cases} C = (C_{k-1} + \Sigma^\star \overline{Q}_{j_1, j_2, \dots, j_k}) + S_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \sum\limits_{s=1}^{\infty} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k, s} = \\ = (C_{k-1} + \Sigma^\star \overline{Q}_{j_1, j_2, \dots, j_k}) + (S^{o, m'}_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \sum\limits_{\psi_s < \psi_{m'}} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k, s}) + \\ + (S^{m, m'}_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \sum\limits_{\psi_m \leq \psi_s \leq \psi_{m'}} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k, s}) + (S^{m', 1}_{i_1, i_2, \dots, k} + \sum\limits_{\psi_{m'} < \psi_s} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k, s}). \end{cases}$$

Introduisons pour simplifier l'écriture les notations suivantes:

$$(41)\qquad \begin{cases} C_{k-1} + \Sigma^\star \overline{Q}_{j_1, j_2, \dots, j_k} + S^{o, m}_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \sum\limits_{\psi_s < \psi_m} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k, s} + \\ \qquad + S^{m', 1}_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \sum\limits_{\psi_{m'} < s} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k, s} = F_2 \end{cases}$$

$$(42)\qquad S^{m, m'}_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \sum_{\psi_m \leq \psi_s \leq \psi_{m'}} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k, s} = F_1\,.$$

D'après les relations (2), (37*bis*), (11*bis*) les ensembles F_1 et F_2 sont fermés. On démontre de plus facilement en se basant sur (13), (25), (28), (29) que

$$(43)\qquad F_1 \,.\, F_2 = \psi_{i_1, i_2, \dots, i_k, m} + \psi_{i_1, i_2, \dots, i_k, m'}$$

Nous avons ensuite

$$F_1 = (S^{m, m'}_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \sum_{\substack{\psi_m \leq \psi_s \leq \psi_{m'} \\ s \neq i_{k+1}}} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k, s}) + S_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}} + $$
$$+ \sum_{t=1}^{\infty} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}, t} = F_{11} + F_{12},$$

où l'on a posé:

$$F_{11} = (S^{m, m'}_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \sum_{\substack{\psi_m \leq \psi_s \leq \psi_{m'} \\ s \neq i_{k+1}}} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_k, s}) + S^{n, n'}_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}} + \sum_{\psi_n \leq \psi_t \leq \psi_{n'}} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}, t}$$

$$F_{12} = (S^{o, n}_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}} + \sum_{\psi_t < \psi_n} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}, t}) + S^{n', 1}_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}} + \sum_{\psi_{n'} < \psi_t} \overline{Q}_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}, t}).$$

Pour les mêmes raisons que (43) on a

(44) $$F_{11} \cdot F_{12} = \psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}, n} + \psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}, n'} .$$

Il résulte de (43), (44) et des notations acquises que $C = F_{11} + (F_{12} + F_2)$ et $F_{11} \cdot (F_{12} + F_2) = B$, où B désigne l'ensemble des quatre points $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k, m}$, $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k, m'}$, $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}, n}$, $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}, n'}$. Les ensembles $A = F_{11} - B = C - (F_{12} + F_2)$ et $D = (F_{12} + F_2) - B = C - F_1$ sont deux domaines (rel. C) sans points communs ; A contient de plus le point $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}}$.

Pour montrer que

(45) $$C = A + B + D$$

est une ε-séparation du point $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}}$ par l'ensemble B, il nous reste à prouver que $A \subset S(\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}}, \varepsilon)$. Soit x un point quelconque de A. Si $x \subset S^{m, m'}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} + S^{m, n'}_{i_1, i_2, \ldots, i_{1+k}}$, on a évidemment $\rho(x, \psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}}) < \frac{1}{2^\rho} < \varepsilon$.

Si $x \subset \overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k, s}$, où $\psi_m \leq \psi_s \leq \psi_{m'}$, $s \neq i_{k+1}$, il s'ensuit de la définition de ψ_m et de $\psi_{m'}$ que r_s est $\leq \rho$, on a donc en remarquant que $\overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k, s} \cdot S^{m, m'}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \neq 0$, les inégalités suivantes :

$$\varrho(\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}}, x) \leqq \delta(\overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k, s}) + \delta(S^{m, m'}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}) <$$
$$< \frac{1}{2^{2r_s}} + \frac{1}{2^\rho} < \frac{1}{2^{2\rho}} + \frac{1}{2^\rho} < \frac{1}{2^{\rho-1}} < 2^{lg_2 \varepsilon} = \varepsilon.$$

On démontre absolument de la même manière qu'on a

$$x \subset S(\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}}, \varepsilon), \text{ si } x \subset \overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}, t} \cdot \psi_n \leqq \psi_t \leqq \psi_{n'} .$$

Le nombre positif ε étant arbitraire, on voit que $ind_{\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}}} C \leq 4$; on a d'autre part $ind_{\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}}} C \geq ind_{\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}}} (S_{i_1, i_2, \ldots, i_k} + S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}}) = 4$, donc $ind_{\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k}} C = 4$.

L'analyse des cas 2⁰ et 3⁰ est plus simple que celle que nous venons d'achever.

2⁰. Considérons le cas $x = a_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ (le cas $x = b_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ étant absolument analogue). Il suffit de définir l'entier m de façon à avoir $\psi_m = \frac{1}{2^\rho}$, où ρ satisfait aux mêmes conditions que dans le cas précédent. On a alors d'abord (d'une façon analogue à (40))

$$C = [(C_{k-1} + \Sigma^* \overline{Q}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}) + (S^{m, 1}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} + \sum_{\psi_m < \psi_s} \overline{Q}_{i, i_2, \ldots, i_k, s})] +$$
$$+ (S^{o, m}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} + \sum_{\psi_s < \psi_m} \overline{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k, s}) .$$

En désignant la somme entre crochets par F_2 et celle entre paranthèses par F_1, on démontre aussitôt que F_1 et F_2 sont des ensembles fermés n'ayant en commun que le seul point $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$, qui forme l'ensemble fermé B.

On a de nouveau la décomposition analogue à (45)

(46) $$C = (F_1 - B) + B + (F_2 - B) = A + B + D$$

et on voit sans peine que c'est une ε-séparation du point $a_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$.

3⁰. Soit maintenant $x \subset S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ un point quelconque différent de chacun des points $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, $a_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, $b_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$. Les entiers m et m' seront maintenant définis de façon à avoir $x \subset S^{m, m'}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, où $\psi_{m'} = \psi_m = \dfrac{1}{2^{\rho}}$ et ρ satisfait aux conditions (39). On aura alors la formule (40) absolument inalterée, de même que la relation (43).

En désignant par B l'ensemble des deux points $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k, m}$ et $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_k, m'}$, par A le domaine (rel. C) $F_1 - B = C - F_2$, par D le domaine $F_2 - B = C - F_1$, on a de nouveau la décomposition (45) qui est une ε-séparation du point x. Donc $ind_x\, C = 2$.

C possède bien toutes les propriétés énoncées. Indiquons la structure de C par la figure suivante (fig. 12):

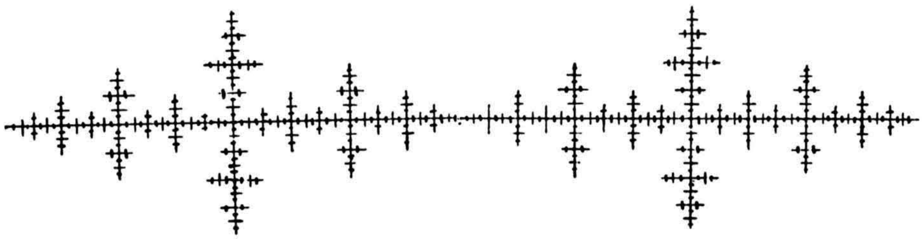

Fig. 12.

On peut obtenir par une légère modification de la construction précédente un continu jouissant de toutes les propriétés ci-dessus mentionnées et dont tous les points de ramification sont d'indice 3. Il suffit à cet effet de définir les segments $S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ de sorte qu'on ait $\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}} =$
$= \psi_{i_{k+1}} (S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}) = a_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}}$.

CHAPITRE V.

LA RAMIFICATION DES CONTINUS IRRÉDUCTIBLES.

1. Nous avons déjà eu plusieurs occasions de mentionner diverses propriétés des continus irréductibles. Dans le présent chapitre nous nous proposons de faire une analyse complète des singularités qui peuvent être présentées par des continus irréductibles au point de vue de l'indice de leurs points.

Nous commençons par rappeler quelques notions bien connues. Un point a du continu C sera appelé *point extrême* ou *extrémité* du continu C, s'il est possible de trouver au moins un point $b \subset C$ tel que C soit irréductible entre a et b. Une extrémité peut être *absolue* ou *relative*: le point a est une extrémité *absolue* si a fait partie de tout couple de points entre lesquels C est irréductible; une extrémité est dite *relative* si elle n'est pas absolue. Les points de C autres que les points extrêmes, seront nommés *points intermédiaires*.

Les exemples de ces diverses sortes de points sont immédiats.

1. Les points 0 et 1 du segment [0, 1] sont des extrémités absolues, de même que les points $a = \left(-\frac{1}{\pi}, 0\right)$, $b = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ du continu $y = sin\,\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{\pi} \leqslant x < 0$, $0 < x \leqslant \frac{1}{\pi}$; $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $x = 0$.

2. Sur le continu $y = sin\,\frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant \frac{1}{\pi}$; $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $x = 0$, le point $a = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ est une extrémité absolue, tandis que tout point du segment $x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ est une extrémité relative; tous les autres points sont des points intermédiaires.

Pour qu'un continu ne contienne aucun point intermédiaire, il faut et il suffit, qu'il soit indécomposable. Tous ses points sont alors des extrémités relatives.

En effet, soit C décomposable, donc $C = C_1 + C_2$, où $C_1 \neq C \neq C_2$. On voit tout de suite que tout point de l'ensemble non vide $C_1 \cdot C_2$ est un point intermédiaire de C. D'autre part, si C est indécomposable, l'ensemble $\mathfrak{P}_{a,C}$ des points x tels que C ne soit pas irréductible, entre a et x, cet ensemble est de première catégorie sur C [1]), donc l'ensemble $C - \mathfrak{P}_{a,C}$ est dense sur C; quel que soit le point $b \subset C - \mathfrak{P}_{a,C}$, le continu C est irréductible entre a et b, c. à d. que a est une extrémité relative.

---

[1]) JANISZEWSKI et KURATOWSKI, Fund. Math. I, pp. 211 sqq.

2. La propriété suivante des continus irréductibles a été démontrée par M. MAZURKIEWICZ [2]) et mentionnée dans les chapitres précédents :

Tout point d'un continu irréductible C situé sur un continu de condensation est du second genre [2]) par rapport à C. Il en résulte [3]) que tout point situé sur un $cd(C)$ est situé sur un $ccd(C)$ et possède un indice $\geqslant \aleph_0$ (le continu C étant supposé, bien entendu, irréductible). On en tire immédiatement la proposition suivante :

I. *Un continu irréductible est un arc simple, s'il ne contient aucun point d'indice infini.*

3. Pour aborder l'examen du cas général, commençons par démontrer le théorème suivant :

II. *Pour qu'un point extrême a du continu irréductible C soit absolu, il faut et il suffit que C soit localement connexe en a.*

La condition est suffisante. Supposons que C soit localement connexe au point a qui est une extrémité de C. Démontrons que a est une extrémité absolue. En effet, si a était une extrémité relative, ce point appartiendrait, d'après un théorème de JANISZEWSKI [4]), à un $cd(C)$; le point a serait donc [2]) un point du second genre sur C.

La condition est nécessaire. Démontrer la nécessité de notre condition revient à démontrer qu'*aucun point du second genre sur un continu irréductible C ne peut être une extrémité absolue de C*. Tout point du second genre appartenant nécessairement a un continu de condensation, il suffit de prouver qu'*aucun sous-continu K de $C = \overline{\overline{ab}}$ n'est un $cd(C)$, s'il contient une extrémité absolue a de C.*

Soit donc K un sous-continu quelconque de C contenant le point a. Prenons un point quelconque $c \subset K$, différent de chacun des points a et b, et soit Q un $\overline{\overline{cb}} \subset C$ quelconque. Si $Q \supset a$, on aurait nécessairement $Q = C$, et C serait en même temps un $\overline{\overline{ab}}$ et un $\overline{\overline{cb}}$, ce qui est impossible puisque a est une extrémité absolue de C. Il en résulte que $a \subset C - Q$.

Les deux continus K et Q ont au moins le point c en commun, leur somme est par suite un continu auquel les deux points $a \subset K$ et $b \subset Q$ sont agrégés. $K + Q$ coïncide donc avec C et on a par conséquent

$$C - K \subset Q,$$

ce qui donne (Q étant un ensemble fermé)

$$\overline{C - K} \subset Q \subset C - a,$$

c. à d. que le point $a \subset K$ n'est pas point-limite de $C - K$. Or ce dernier résultat signifie précisément que K n'est pas un $cd(C)$,

c. q. f. d.

---

[2]) Fund. Math. I, pp. 167 sqq.

[3]) d'après les résultats du ch. III.

[4]) JANISZEWSKI, Thèse, ch. II, théor. IX (remarque à la fin de la démonstration).

Des exemples bien connus montrent qu'un point du second genre peut être soit un point intermédiaire, soit une extrémité relative sur un continu irréductible [5]).

Nous avons déjà mentionné, au cours de notre démonstration, les propriétés suivantes :

Corollaire 1. *Une extrémité absolue d'un continu irréductible n'appartient à aucun continu de condensation.*

Corollaire 2. *L'indice d'une extrémité relative d'un continu irréductible est toujours infini.*

Des exemples, où une extrémité relative possède un quelconque des deux indices infinis $\aleph_0$ et $\mathfrak{c}$, ont été donnés au § 1.

4. Il est tout naturel de poursuivre plus loin les relations qui existent, sur les continus irréductibles, entre l'indice et la connexité locale. Nous avons à distinguer pour cela les trois sortes suivantes de points:

1°. Points du second genre (qui sont tous d'indice $\geqslant \aleph_0$).

2°. Points du premier genre qui sont points-limites de points du second genre.

3°. Points du premier genre qui ne sont pas points-limites de points du second genre.

Ce ne sont que les catégories 2° et 3° que nous avons encore à étudier. Commençons par la dernière catégorie.

On a ici le théorème suivant:

III. *Soit C un continu irréductible, qui est localement connexe dans tous les points d'un certain voisinage de a ; on a alors*

$$ind_a\, C = 2 \quad \text{ou} \quad ind_a\, C = 1,$$

selon que a est un point intermédiaire ou un point extrême de C. Dans le second cas a est une extrémité absolue [6]) de C.

Supposons d'abord que a soit une extrémité du continu C, qui est, dans notre cas, nécessairement absolue [6]) ; il existe alors un point b tel que C est un $\overline{\overline{ab}}$. Démontrons la relation $ind_a\, C = 1$.

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ une suite quelconque de points de C, différents de a et convergeant vers a. D'après notre supposition, C est localement connexe dans chacun de ces points à partir d'un certain d'entre eux; nous pouvons donc supposer que C soit localement connexe dans tous les points x_n, sans aucune exception.

Les x_n et a étant tous du premier genre (sur le continu irréductible C), aucun d'eux n'appartient à un $cd\,(C)$ quelconque. Il en résulte, d'après un théorème de JANISZEWSKI [7]), qu'il n'existe qu'un seul sous-

[5]) § 1, ex. 1 et 2.

[6]) d'après le théorème II.

[7]) JANISZEWSKI, Thèse, ch. II, Théor. XII.

continu de C, irréductible entre a en x_n; l'expression $\overline{\overline{ax_n}}$ a donc un sens univoquement déterminé. Désignons maintenant par $\overline{\overline{x_n b}}$ un sous-continu quelconque de C irréductible entre x_n et b. Le continu C étant irréductible entre a et b, on a

$$(1) \qquad C = \overline{\overline{ax_n}} + \overline{\overline{x_n b}}.$$

Le point x_n n'appartient à aucun $cd(C)$; a fortiori, x_n est étranger à tout continu de condensation éventuel d'un quelconque des deux continus irréductibles $\overline{\overline{ax_n}}$ et $\overline{\overline{x_n b}}$. On peut donc appliquer, dans notre cas, un théorème de JANISZEWSKI [8]) affirmant que les deux continus $\overline{\overline{ax_n}}$ et $\overline{\overline{x_n b}}$ ont, dans ces conditions, le seul point x_n en commun.

Le continu C étant localement connexe au point a, on peut déterminer n assez grand pour avoir

$$\varrho_c(a, x_n) < \varepsilon,$$

ε ayant été choisi aussi petit que l'on veut.

Considérons un sous-continu C_n de C, de diamètre inférieur à ε et contenant les deux points a, x_n, et un sous-continu C_n^* de C_n irréductible entre a et x_n. D'après l'unicité de la définition de $\overline{\overline{ax_n}}$, C_n^* ne peut être différent du continu $\overline{\overline{ax_n}}$ de l'égalité (1). On a donc

$$\delta(\overline{\overline{ax_n}}) = \delta(C_n^*) \leqslant \delta(C_n) < \varepsilon;$$

il résulte de ce qui précède que la décomposition

$$C = (\overline{\overline{ax_n}} - x_n) + x_n + (\overline{\overline{x_n b}} - x_n)$$

est une ε-séparation du point a par le point x_n, l'ensemble

$$H(\overline{\overline{ax_n}} - x_n, \overline{\overline{x_n b}} - x_n) = \overline{\overline{ax_n}} \,.\, (\overline{\overline{x_n b}} - x_n) + (\overline{\overline{ax_n}} - x_n) \,.\, \overline{\overline{x_n b}}$$

étant vide.

Le nombre positif ε étant quelconque, on a $ind_a\, C = 1$.

Passons au cas, où a est un point intermédiaire de C. Soient c et d deux points de C choisis de façon que C soit irréductible entre c et d. Le point a n'appartient à aucun $cd(C)$; il diffère en outre de chacun des deux points c et d. On peut donc appliquer de nouveau le théorème [8]) de JANISZEWSKI qui nous donne la relation

$$(2) \qquad C = \overline{\overline{ca}} + \overline{\overline{ad}}, \quad \overline{\overline{ca}} \,.\, \overline{\overline{ad}} = a.$$

($\overline{\overline{ca}}$ et $\overline{\overline{ad}}$ sont des sous-continus de C irréductibles respectivement entre c et a et entre a et d. Remarquons d'abord que chacun des continus $\overline{\overline{ca}}$ et $\overline{\overline{ad}}$ est localement connexe au point a: on a, on effet, d'une façon plus générale la proposition cuivante:

Si C est un continu irréductible localement connexe au point a, tout sous-continu K de C contenant ce point, y est localement connexe.

(Dans le cas contraire, le point a devrait appartenir à un $cd(K)$,

---

[8]) loc. cit. théor. X.

donc à un $cd(C)$, le continu irréductible C ne pourrait donc être localement connexe dans a).

Revenons à l'égalité (2). Le point a étant l'extrémité commune des deux continus $\overline{\overline{ca}}$ et $\overline{\overline{ad}}$ qui y sont localement connexes, il s'ensuit que :

$$ind_a (\overline{\overline{ca}}) = ind_a (\overline{\overline{ad}}) = 1.$$

Soit p un point ε-séparant a sur $\overline{\overline{ca}}$ et q un point ε-séparant a sur $\overline{\overline{ad}}$:

$$\overline{\overline{ca}} = A_c + p + D_c\,,\ a \subset A_c \subset A_c + p \subset S(a, \varepsilon)\,; \tag{3}$$

$$\overline{\overline{ad}} = A_d + q + D_d\,,\ a \subset A_d \subset A_d + q \subset S(a, \varepsilon).$$

Considérons la décomposition

$$C = \overline{\overline{ca}} + \overline{\overline{ad}} = (A_c + A_d) + (p + q) + (D_c + D_d). \tag{5}$$

On a

$$\begin{aligned} H(A_c + A_d\,,\ D_c + D_d) = {} & [(A_c + p) + (A_d + q)]\,.\,(D_c + D_d) + [(D_c + p) + \\ & + (D_d + q)]\,.\,(A_c + A_d) = (A_c + p)\,.\,D_c + (A_d + q)\,.\,D_d \\ & + (D_c + p)\,.\,A_c + (D_d + q)\,.\,A_d + (A_c + p)\,.\,D_d + \\ & + (A_d + q)\,.\,D_c + (D_c + p)\,.\,A_d + (D_d + q)\,.\,A_c\,. \end{aligned}$$

Or parmi les huit termes de la dernière somme les quatre premiers sont nuls puisque les décompositions (3) et (4) sont des ε-séparations ; il en est de même pour les quatre derniers termes car on a, en tenant compte de (3), (4) et (2) :

$$\begin{aligned} & (A_c + p)\,.\,D_d + (A_d + q)\,.\,D_c + (D_c + p)\,.\,A_d + (D_d + q)\,.\,A_c \subset \\ & \quad \subset \overline{\overline{ca}}\,.\,(\overline{\overline{ad}} - a) + \overline{\overline{ad}}\,.\,(\overline{\overline{ca}} - a) + (\overline{\overline{ca}} - a)\,.\,\overline{\overline{ad}} + (\overline{\overline{ad}} - a)\,.\,\overline{\overline{ac}} = 0. \end{aligned}$$

Il résulte des relations précédentes que les trois ensembles formant le second membre de (5), sont deux à deux sans points communs et que $H(A_c + A_d\,,\ D_c + D_d) = 0$.

On a enfin, d'après (3) et (4) :

$$a \subset (A_c + A_d) \subset (A_c + A_d) + (p + q) \subset S(a, \varepsilon).$$

Nous avons ainsi démontré que (5) est une ε-séparation du point a par rapport à C, au moyen de l'ensemble des deux points $(p + q)$; il en résulte que $ind_a\, C \leqslant 2$.

Pour ε inférieur à chacun des deux nombres $\delta(\overline{\overline{ca}})$ et $\delta(\overline{\overline{ad}})$, tout ensemble B, ε-séparant le point a, doit avoir nécessairement des points agrégés à $\overline{\overline{ca}} - a$ et à $\overline{\overline{ad}} - a$; ces deux derniers ensembles étant sans points communs, il en résulte que B contient au moins deux points, donc $ind_a\, C \geqslant 2$ et par suite $ind_a\, C = 2$, c. q. f. d.

Une conséquence immédiate du théorème II est que *tous les points d'un certain voisinage de a sont d'indice* $\leqslant 2$. En rapprochant ce résultat du théorème VI, ch. IV, on a la conclusion suivante bien plus précise :

III'. *Dans les conditions du théorème II, C est autour du point a localement identique à un arc simple dont a est un point intérieur ou une extrémité selon que* $ind_a\, C$ *était égal à 2 ou à 1.*

4. Étudions maintenant ce qui se passe en un point a qui est du premier genre tout en étant point limite de points du second genre par rapport au continu irréductible C. Nous allons voir que:

I⁰. Si a est une extrémité, $ind_a\, C$ peut prendre *toutes* les valeurs possibles.

II⁰. Si a est un point intermédiaire, $ind_a\, C$ peut prendre toutes les valeurs possibles à l'exception de la valeur 1.

Supposons d'abord que a soit une extrémité. Il suffit de se rappeler le continu K du ch. I, § 8, pour voir que l'énoncé I⁰ est exact. En effet, le point a du continu mentionné est une extrémité absolue de K, il est point du premier genre, évidemment limite de points du second genre; de plus $ind_a\, K$ est égal à $1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega, \aleph_0, \mathfrak{c}$ selon la puissance des ensembles fermés F_n.

En construisant un segment rectiligne $\overline{ad}$ perpendiculaire au plan du continu, on obtient un continu K^* irréductible [9]) entre le point d et chaque point $b \subset F_1$ et qui vérifie en outre la relation

$$ind_a\, K^* = ind_a\, K + 1.$$

Il en résulte que $ind_a\, C^*$ peut être supposé égal à $2, 3, \ldots, \omega, \aleph, \mathfrak{c}$. De plus a est évidemment un point intermédiaire de C^*.

Reste à montrer qu'*aucun point intermédiaire d'un continu irréductible ne peut être un point d'arrêt.*

---

[9]) L'irréductibilité de C^* entre d et b résulte p. ex. du théorème suivant: *Si deux continus irréductibles* $C_1 = \overline{\overline{da}}$ *et* $C_2 = \overline{\overline{ab}}$ *n'ont en commun que le seul point a, leur somme* $C = C_1 + C_2$ *est un continu irréductible entre d et b.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit K un $\overline{\overline{db}} \subset C$. Tout d'abord, K contient le point a, car autrement on aurait la décomposition $K = K \cdot C_1 + K \cdot C_2$ en deux ensembles fermés, non vides et sans points communs. Soit donc K_1 un $\overline{\overline{ad}} \subset C_1$ et K_2 un $\overline{\overline{ab}} \subset K$. Si $K \neq C$, l'un au moins des deux ensembles $K_1 \cdot C_1$ et $K_2 \cdot C_2$ n'est pas connexe. En effet, $K_1 \cdot C_1 \supset d + a$, $K_2 \cdot C_2 \supset a + b$; si les deux ensembles $K_1 \cdot C_1$ et $K_2 \cdot C_2$ étaient des continus, on aurait nécessairement $K_1 \cdot C_1 = C_1$ et $K_2 \cdot C_2 = C_2$, par conséquent

$$K = K_1 + K_2 = C_1 + C_2 = C.$$

Supposons donc p. ex. que $K_1 \cdot C_1$ ne soit pas connexe, et qu'on ait

$$K_1 \cdot C_1 = F_1 + F_2,$$

où F_1 et F_2 sont deux ensembles fermés disjoints dont F_1 contient a. On a alors

$$K_1 = F_2 + (F_1 + K_1 \cdot C_2);$$

mais

$$F_2 \cdot (F_1 + K_1 \cdot C_2) = F_2 \cdot F_1 + F_2 \cdot K_1 \cdot C_2 = F_2 \cdot K_1 \cdot C_2 \subset F_2 \cdot C_2 \subset (C_1 - a) \cdot C_2 = 0,$$

ce qui signifie que K_1 n'est pas connexe, contrairement à sa définition.

Par conséquent la supposition $K \neq C$ est impossible, donc $C = K = \overline{\overline{db}}$.

Nous démontrerons une proposition bien plus précise à savoir que

IV. *Tout point d'arrêt d'un continu irréductible en est une extrémité absolue.*

Supposons par impossible que a soit un point d'arrêt d'un continu irréductible C, sans en être une extrémité absolue. Il existe alors un couple de points p, q de C tels que C est un $\overline{\overline{pq}}$ et $p \neq a \neq q$.

Le point a étant un point d'arrêt de C, soit ε inférieur à $\varrho\,(a, p+q)$ et

$$C = A + b + D$$

une ε-séparation du point a par le seul point b. D'après le choix du nombre ε, les deux points p et q sont agrégés à D. Il est facile à voir que l'ensemble fermé $b + D$ est connexe. En effet, autrement on aurait une décomposition

$$b + D = F_1 + F_2,$$

où F_1 et F_2 sont deux ensembles fermés non vides et disjoints, dont p. ex. le premier contient b.

On a alors

$$C = (A + F_1) + F_2$$

et $\quad \overline{(A + F_1)} = \overline{A} + F_1 = A + b + F_1 = A + (b + F_1) = A + F_1.$

Les deux ensembles fermés $A + F_1$ et F_2 étant disjoints et non-vides, C ne pouvait pas être un continu.

Puisque l'ensemble fermé $C_0 = b + D$ contient les deux points p et q, tout en étant connexe, il doit être nécessairement identique à C ; or ceci est impossible (car, p. ex. $a \subset C - C_0$). C n'était donc pas un $\overline{\overline{pq}}$.

Corollaire. *Un continu irréductible ne peut posséder plus de deux points d'arrêt.*

D'autre part, des exemples de continus irréductibles ne possédant aucun, ou possédant un ou deux points d'arrêt, sont immédiats.

5. Nous allons donner une application importante des résultats précédents. Nous avons vu (ch. IV, § 11) que sur un continu quelconque C l'ensemble de tous les points x d'indice supérieur à 1, est dense sur C. C'est de plus un ensemble $\mathfrak{F}_\sigma$. Nous voulons démontrer que *cet ensemble forme un seul sémicontinu*. Nous parviendrons ainsi au théorème fondamental suivant :

V. *Sur un continu quelconque C l'ensemble S de tous les points d'indice supérieur à 1 est un sémicontinu dense sur C. Son complémentaire est un $\mathfrak{G}_\delta$ de dimension nulle* [10]).

En effet, soient a et b deux points quelconques de S et $\overline{\overline{ab}} \subset C$ un souscontinu de C irréductible entre a et b. D'après le théorème IV, tous les points de $\overline{\overline{ab}} - (a + b)$ ont sûrement un indice > 1 par rapport à $\overline{\overline{ab}}$, donc a fortiori par rapport à C. Il s'ensuit que $\overline{\overline{ab}} \subset S$, c. q. f. d.

[10]) cf. pour la dernière affirmation, le théor. V du ch. I (§ 10) et le théor. XII du ch. IV (§ 11).

6. Parmi les lignes cantoriennes celles qui sont en même temps des continus irréductibles, peuvent présenter, comme on sait, des singularités très compliquées — elles peuvent, p. ex., ne contenir aucun point de connexité locale, ou contenir un seul point de cette sorte, elles peuvent aussi avoir dans chacun de leurs point l'indice $\mathfrak{c}$, etc.

Or tous les continus irréductibles jouissant de ces propriétés extraordinaires ont été construits jusqu'à présent par l'intermédiaire de continus indécomposables. On pourrait donc se demander, cette intervention des continus indécomposables est-elle essentielle ou non? Nous allons résoudre cette question en donnant un exemple d'une ligne cantorienne plane ne contenant aucun continu indécomposable et jouissant des propriétés suivantes:

1. Tout point situé sur cette ligne est d'indice $\mathfrak{c}$.
2. La ligne n'est localement connexe dans aucun de ces points.
3. Elle est un continu irréductible.

Nous indiquerons aussi un exemple où les propriétés 1 et 2 sont réalisées dans chaque point, à l'exception d'un seul (toutes les autres propriétés se conservant).

Il nous semble d'ailleurs que le continu ci-dessous fournit un exemple d'un type nouveau de continus irréductibles.

8. Construction du continu M. Supposons donné dans le plan xoy un parallélogramme $(abcd)$ quelconque (intérieur et contour compris) dont deux côtés ab et cd appelés bases sont situés respectivement sur les droites $y=1$ et $y=0$. Désignons ce parallélogramme par Π. Divisons chacun des segments rectilignes ab et cd en 6 segments égaux désignés respectivement par $\overline{ap_1}$, $\overline{p_1p_2}$, $\overline{p_2p_3}$, $\overline{p_3p_4}$, $\overline{p_4p_5}$, $\overline{p_5b}$, et $\overline{cq_1}$, $\overline{q_1q_2}$, $\overline{q_2q_3}$, $\overline{q_3q_4}$, $\overline{q_4q_5}$, $\overline{q_5d}$.

L'opération M appliquée au parallélogramme Π consiste en ce qu'on remplace Π par l'ensemble $M(\Pi)$ formé des quatre parallélogrammes: $\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4$, où $\Pi_1=ap_1cq_1$, $\Pi_2=p_1p_2q_2q_3$, $\Pi_3=p_4p_5q_3q_4$, $\Pi_4=p_5bq_5d$. Posons $M(\Pi)=M^1(\Pi)$.

Supposons construit l'ensemble $M^n(\Pi)$ qui est formé de 4^n parallélogrammes $\Pi_{i_1,i_2,\ldots,i_h,\ldots,i_k}$, $i_h=1,2,3,4$ $(h=1,2,\ldots,k)$ dont chacun possède deux côtés situés respectivement sur les droites $y=1$ et $y=0$. En appliquant l'opération M à chacun des parallélogrammes $\Pi_{i_1,\ldots,i_k}$ on obtient 4^{n+1} parallélogrammes $\Pi_{i_1,\ldots,i_k,i_{k+1}}$ (où chaque indice $i_1,\ldots,i_{k+1}$ prend indépendamment des autres les valeurs $1,2,3,4$). Ces parallélogrammes forment l'ensemble $M^{n+1}(\Pi)$.

Les ensembles $M^n(\Pi)$ que nous venons de définir par induction pour toutes les valeurs naturelles de n, ne dépendent que du parallélogramme initial Π. En prenant, par ex., pour Π le carré $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, aucun élément de notre construction ne reste plus indéterminé et nous pouvons poser simplement $M_n = M^n(\Pi)$.

Les propriétés suivantes, se rapportant aux ensembles M^n et aux parallélogrammes $\Pi_{i_1,\dots,i_n}$, sont immédiates:

1°. Deux parallélogrammes $\Pi_{i_1,\dots,i_n}$ et $\Pi_{j_1,\dots,j_n}$ ont au plus un point en commun (qui est alors un sommet commun de ces parallélogrammes).

2°. $\Pi_{i_1,\dots,i_{n+1}} \subset \Pi_{i_1,\dots,i_n}$, donc $M_{n+1} \subset M_n$.

3°. M_n est un continu (quel que soit n).

4°. Quels que soit la suite infinie des nombres $i_1,\dots,i_n,\dots$ dont chacun est égal à 1, 2, 3 ou 4, la partie commune des ensembles $\Pi_{i_1}, \Pi_{i_1,i_2},\dots,\Pi_{i_1,\dots,i_n},\dots$ est un segment rectiligne $S_{i_1,\dots,i_k,\dots}$ dont les extrémités sont situées respectivement sur les droites $y=0$ et $y=1$.

5°. Deux segments $S_{i_1,\dots,i_k,\dots}$ et $S_{j_1,\dots,j_k,\dots}$ différents ont au plus un point commun qui est alors leur extrémité commune.

Il résulte des propriétés 2° et 3° que l'ensemble $M = \prod_{n=1}^{\infty} M_n$ est un continu. On démontre aussitôt que M est non dense dans le plan, donc M est une ligne cantorienne, dont l'aspect général est donné par la figure ci-dessous.

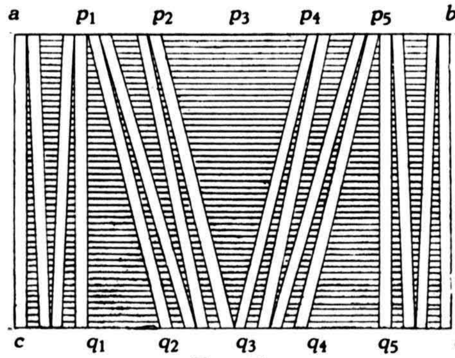

Fig. 13.

Étudions les propriétés de M.

On voit d'abord immédiatement que

6°. Tout point de M appartient à l'un au moins des segments $S_{i_1,\dots,i_k,\dots}$ de sorte que M est précisément la somme de tous les $S_{i_1,\dots,i_k,\dots}$ (dont l'ensemble a la puissance du continu).

7°. $\Pi_{i_1,\dots,i_k}\cdot M$ est homéomorphe à M.

Considérons deux parallélogrammes différents $\Pi_{i_1,\dots,i_k}$ et $\Pi_{j_1,\dots,j_k}$ du même „rang" k. Il est évident que l'un d'eux, p. ex. $\Pi_{i_1,\dots,i_k}$, est „à gauche" de l'autre $\Pi_{j_1,\dots,j_k}$, c. à d. que sur chaque parallèle à l'axe ox l'abscisse d'un point quelconque de $\Pi_{i_1,\dots,i_k}$ est inférieure à l'abscisse d'un point arbitraire de $\Pi_{j_1,\dots,j_k}$ (à la seule exception éventuelle d'une extrémité qui peut être commune à $\Pi_{i_1,\ldots,i_k}$ et $\Pi_{j_1,\ldots,j_k}$). Nous écrirons alors $\Pi_{i_1,\ldots,i_k} \prec \Pi_{j_1,\ldots,j_k}$.

Ceci permet de considérer l'ensemble de tous les $S_{i_1,\ldots,i_k,\ldots}$ comme un ensemble ordonné: nous dirons notamment que $S_{i_1,\ldots,i_k,\ldots}$ est à gauche de $S_{j_1,\ldots,j_k,\ldots}$, si, i_r étant le premier indice i différent de l'indice j correspondant, $S_{i_1,\ldots,i_r}$ est à gauche de $S_{j_1,\ldots,j_r}$ (et par conséquent tous les $S_{i_1,\ldots,i_r,\ldots,i_s}$ sont à gauche des $S_{j_1,\ldots,j_r,\ldots,j_s}$).

Ces préliminaires bien comprises, passons à la démonstration des propriétés ci-dessous du continu M.

α. M est irréductible entre tout point $a \subset M$ d'abscisse 0 et $b \subset M$ d'abscisse 1.

β. M ne contient aucun continu indécomposable.

γ. On a $ind_x\ M = \mathfrak{c}$ quel que soit le point $x \subset M$.

Ad α. Soit K un sous-continu quelconque de M contenant les deux points a et b ayant pour leurs abscisses respectives 0 et 1. Si K ne coïncide pas avec M, il existe un point $\xi = (x_0, y_0)$ de $M - K$ intérieur à un parallélogramme $\Pi_{i_1,\ldots,i_k}$. On peut supposer de plus le parallélogramme $\Pi_{i_1,\ldots,i_k}$ choisi de façon que l'abscisse de chacun de ses points soit un nombre *positif* inférieur à 1. K étant fermé, désignons par 2ε le plus petit des deux nombres positifs $\varrho(\xi, K)$ et $\varrho(\xi, E_2 - \Pi_{i_1,\ldots,i_k})$, E_2 étant le plan entier.

Supposons que $\xi \subset S_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_s \ldots}$ et désignons par Y_ε^0 l'ensemble de tous les points du plan dont l'ordonnée y satisfait à l'inégalité $y_0 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant y \leqslant y_0 + \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $S^\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_s, \ldots} = S_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_s, \ldots} \cdot Y^0_\varepsilon$ et $\Pi^\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_h} = \Pi_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_h} \cdot Y^0_\varepsilon$.

On voit que $\underset{h \to \infty}{lt}\ \Pi^\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_h} = S^\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_s, \ldots} \subset \overline{S}\left(\xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset$ $\subset S(\xi, \varepsilon)$. Il existe donc un nombre s assez grand pour que $\Pi^\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_s} \subset S(\xi, \varepsilon)$. Il en résulte que $\Pi^\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_s} \cdot K = 0$. Supposons que $\Pi_{i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_s}$ communique avec un parallélogramme contigu du même rang à gauche sur la droite $y = 1$ et à droite sur la droite $y = 0$.

Désignons par F_1 l'ensemble fermé composé de tous les points de K appartenant à des $\Pi_{j_1, \ldots, j_k, \ldots, j_s} \prec \Pi_{i_1 \ldots i_k \ldots i_s}$ et de tous les points de $\Pi_{i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_s} \cdot K$ dont l'ordonnée surpasse $y_0 + \frac{\varepsilon}{2}$. De même, soit F_2 l'ensemble fermé composé de tous les points de K appartenant à des $\Pi_{j_1, \ldots, j_k, \ldots, j_s} \succ$ $\succ \Pi_{i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_s}$ et de tous les points de $\Pi_{i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_s} \cdot K$ dont l'ordonnée est inférieure à $y_0 - \frac{\varepsilon}{2}$. Les ensembles F_1 et F_2 sont sans points communs; ils sont non-vides (car $F_1 \supset a$ et $F_2 \supset b$); leur somme est égale à K, ce qui est impossible, K étant un continu, c. q. f. d.

Ad β. M est évidemment un continu décomposable (il suffit de considérer les deux continus Q_1 formé de tous les points de M à abscisse $\leqslant \frac{1}{2}$ et Q_2 formé de tous les points de M à abscisse $\geqslant \frac{1}{2}$. Soit de nouveau K un continu quelconque agrégé à M. Le continu K est nécessairement décomposable s'il fait partie d'un seul segment $S_{i_1 \ldots\ldots i_k \ldots}$. Supposons donc que K ait des points communs avec deux segments $S_{i_1 \ldots\ldots i_k \ldots} \prec S_{j_1 \ldots\ldots j_k \ldots}$ au moins. Les composants de $\Pi - M$ sont des triangles que nous appellerons „triangles contigus à M". Nous appellerons *base* du triangle contigu celui-là parmi ses côtés qui est parallèle à l'axe ox, et nous appellerons *sommet* de ce triangle le sommet opposé à la base.

Il existe au moins un triangle contigu Δ situé à droite de $S_{i_1 \ldots\ldots i_k \ldots}$ et à gauche de $S_{j_1 \ldots\ldots j_k \ldots}$. Soient $S_{p_1 \ldots\ldots p_k \ldots}$ et $S_{q_1 \ldots\ldots q_k \ldots}$ les deux côtés de Δ non parallèles à l'axe ox et supposons que $S_{p_1 \ldots\ldots p_k \ldots} \prec$ $\prec S_{q_1 \ldots\ldots q_k \ldots}$. Soit Q_1 le sous-continu de M formé de $S_{p_1 \ldots\ldots p_k \ldots}$ et de tous les $S_{h_1 \ldots\ldots h_k \ldots} \prec S_{p_1 \ldots\ldots p_k \ldots}$, et soit Q_2 le sous-continu de M formé de $S_{q_1 \ldots\ldots q_k \ldots}$ et de tous les $S_{h_1 \ldots\ldots h_k \ldots} \succ S_{q_1 \ldots\ldots q_k \ldots}$.

Les continus Q_1 et Q_2 ont un seul point ζ en commun et l'on a $Q_1 + Q_2 = M$.

D'après nos suppositions les ensembles fermés $K . Q_1$ et $K . Q_2$ sont non-vides. Démontrons que chacun d'eux est un continu. En effet, supposons par contre qu'on ait par exemple

$$K . Q_1 = F_1 + F_2, \tag{6}$$

où F_1 et F_2 sont deux ensembles fermés sans points communs.

Le point ζ appartient nécessairement à K (car autrement la décomposition

$$K = K . Q_1 + K . Q_2 \tag{7}$$

serait impossible, K étant un continu). Supposons qu'on ait par exemple $\zeta \subset F_1$. Il résulte alors de (6) et (7) et de $Q_1 . Q_2 = \zeta$, que les deux ensembles F_2 et $(F_1 + K . Q_2)$ sont disjoints. Or on a $K = F_2 + F_1 + K . Q_2$, ce qui contredit de nouveau à la connexité de K. Nous avons donc démontré que K est somme de deux continus $K . Q_1$ et $K . Q_2$, dont aucun ne coïncide avec K, c. q. f. d.

Ad γ. [11]) Soit ξ un point arbitraire de M. Il résulte de 7° et de 6° (remarque entre parenthèses) qu'il existe, quel que soit ε, une infinité non dénombrable de segments $S_{i_1 \ldots\ldots i_k \ldots}$ distants de ξ de moins de ε. On peut évidemment supposer ces segments deux à deux sans points communs.

Supposons ε inférieur à 1 et soit

$$M = A + B + D$$

une ε-séparation quelconque du point ξ. Aucun segment $S_{i_1 \ldots\ldots i_k \ldots}$ ne

[11]) L'affirmation γ résulte d'ailleurs d'un théorème général, dont on trouvera l'énoncé et la démonstration dans la note supplémentaire III, à la fin de ce mémoire.

pouvant appartenir tout entier à A, tout $S_{i_1,\dots,i_k,\dots}$ appartient nécessairement à D s'il ne contient aucun point de B.

Tout les points assez voisins de ξ appartiennent à A, d'où il résulte qu'une infinité non dénombrable de $S_{i_1,\dots,i_k,\dots}$ ont des points communs avec A et par suite avec B.

Les segments choisis étant deux à deux sans points communs, B est nécessairement indénombrable, c. q. f. d.

Remarquons enfin que tout point de M appartient à un $S_{i_1,\dots,i_k,\dots}$, donc évidemment à un *ccd* (M). Il en résulte que M n'est localement connexe en aucun de ses points.

On peut obtenir, en modifiant légèrement la construction précédente, un continu M^*, irréductible, ayant un et un seul point de connexité locale (qui est la seule extrémité absolue de M^*). En effet, il suffit d'appliquer à M la transformation définie par les égalités :

$$x' = x,$$
$$y' = y \cdot x.$$

M^* est irréductible entre l'origine 0 et tout point de M^* d'abscisse 1.

Tout point de M^* a l'indice c, à l'exception du point 0 qui est un point d'arrêt (n'appartenant par conséquent à aucun *cd* (M^*)).

CHAPITRE VI.

LA DISTRIBUTION DES ENSEMBLES DE POINTS D'UN INDICE DÉTERMINÉ SUR UNE LIGNE CANTORIENNE.

1. À plusieurs reprises nous nous sommes occupés, dans les chapitres précédents, du problème de la distribution des ensemblss de points d'un indice déterminé.

Nous commençons donc par rappeler les principaux résultats déjà obtenus dans cet ordre d'idées.

1°. Si $\mathfrak{m}$ est un nombre naturel, ou le symbole ω, ou bien un des nombres cardinaux $\aleph_0$ ou $\mathfrak{c}$, l'ensemble des points d'indice $> \mathfrak{m}$ est un ensemble $\mathfrak{F}_\sigma$.

Dans cet énoncé on peut évidemment remplacer $> \mathfrak{m}$ par $\geqq \mathfrak{m}$ sauf pour le cas $\mathfrak{m} = \omega$ (voir ch. I, § 10).

2°. Si $\mathfrak{m}$ est un des nombres cardinaux 2, $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, l'ensemble $R_\mathfrak{m}$ des points d'indice $\geqq \mathfrak{m}$ (situés sur une ligne cantorienne C) ne contient aucun point de dimension 0; tout voisinage d'un point quelconque de $R_\mathfrak{m}$ contient un continu appartenant à $\overline{R}_\mathfrak{m}$. En particulier, si $\mathfrak{m} = 2$, $R_\mathfrak{m}$ est un sémicontinu dense sur C. Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$, chaque point de $R_\mathfrak{m}$ est d'indice $\mathfrak{c}$, par rapport à $\overline{R_\mathfrak{m}}$, et d'indice $\geqq \aleph_0$ par rapport à $R_\mathfrak{m}$ (voir ch. I, §§ 11 et 13, théorèmes VI, VI', VIII; ch. V, § 5).

3°. L'ensemble des points d'arrêt d'une ligne cantorienne C est toujours de dimension nulle. Cet ensemble peut d'ailleurs être dense sur C; dans ce cas son complémentaire est de première catégorie sur C (voir ch. IV, §§ 11 et 10, théor. XII et X).

2. La distribution des ensembles de points d'un indice déterminé sera traitée dans le présent chapitre d'un point de vue différent: les questions dont nous allons nous occuper sont étroitement liées au problème d'existence de lignes cantoriennes dont tous les points possèdent le même indice de ramification. Nous appellerons *lignes uniformément ramifiées* les lignes cantoriennes dont tous les points sont du même indice; ce dernier sera alors appelé *l'indice de la ligne uniformément ramifiée*. Il est bien connu qu'il existe des lignes dont tous les points sont d'indice 2 (circonférence), ou d'indice $\mathfrak{c}$ (courbe de M. SIERPIŃSKI: ch. I, ex. 11; continus indécomposables). Nous trouverons dans le présent chapitre des exemples de lignes uniformément ramifiées des indices ω et $\aleph_0$. Nous démontrerons de plus que ce sont là tous les indices possibles pour les lignes uniformément ramifiées. Ainsi, le résultat principal du présent chapitre peut être formulé comme il suit:

Si tous les points d'une ligne cantorienne possèdent le même indice de ramification, cet indice commun à tous les points de la ligne ne peut prendre qu'une des quatre valeurs suivantes:

$$2, \omega, \aleph_0, \mathfrak{c}.$$

Tous ces quatre cas peuvent d'ailleurs se réaliser.

Ce résultat est une conséquence immédiate du suivant

Théorème fondamental.

Si tous les points d'une ligne cantorienne C possèdent un indice $\geqslant n$, ou n est un nombre naturel, il existe nécessairement sur C des points d'indice $\geqslant 2n-2$.

Le présent chapitre se divise donc d'une façon naturelle en deux parties: la première contient une démonstration du théorème fondamental, tandis que la seconde sera consacrée à la construction de divers exemples. Des exemples de continus dont tous les points sont d'indice 2 ou d'indice $\mathfrak{c}$ étant connus, nous construirons, dans la seconde partie du chapitre, les exemples suivants:

1°. Exemple d'une ligne cantorienne dont tous les points sont d'indice $\aleph_0$.

2°. Exemple d'une ligne cantorienne dont tous les points sont d'indice ω.

3°. Exemple, pour chaque nombre naturel $n > 1$, d'une ligne cantorienne ne possédant que des points des indices n et $2n-2$.

Il est à peine nécessaire de rappeler qu'aucun continu ne peut contenir des points d'indice 0 (c. à d. de dimension 0) et qu'aucun continu ne peut être formé de points d'indice 1 (l'ensemble de tous ces points étant de dimension 0); la condition restrictive $n > 1$ (dans 3°) est donc bien nécessaire.

Démonstration du théoréme fondamental.

3. On peut évidemment donner à ce théorème la forme suivante:

Si tous les points d'une ligne cantorienne C sont d'indice $< 2n-2$, il existe sur C au moins un point d'indice $< n$.

Soit donc C une ligne cantorienne dont tous les points sont d'indice $< 2n-2$. Désignons par A^m (ou m est un nombre entier) un domaine quelconque (rel. C) différent de C lui-même et soit x un point arbitraire de A^m. Posons $\varrho(x, C-A^m) = \vartheta$. Le point x possède un indice inférieur (d'après notre supposition) à $2n-2$. Il existe donc une $\frac{\vartheta}{2}$-séparation du point x par un ensemble formé d'un nombre $h < 2n-2$ de points. En désignant ces points par

$$b_1, b_2, \ldots, b_h,$$

soit

$$C = A_x + \sum_{i=1}^{h} b_i + D_x, \tag{1}$$

la $\frac{\vartheta}{2}$-séparation correspondante du point x.

On a par conséquent : $x \subset A_x \subset A_x + \sum_{i=1}^{h} b_i \subset S\left(x, \frac{\vartheta}{2}\right) \subset A^m$;

$$H(A_x, D_x) = 0, \; A_x . \sum_{i=1}^{h} b_i = 0 = D_x . \sum_{i=1}^{h} b_i$$

(la sphère $S\left(x, \frac{\vartheta}{2}\right)$ est envisagée rel. C).

La frontière du domaine (rel. C) A_x est contenue dans $\sum_{i=1}^{h} b_i$ (car $H(A_x, D_x)) = 0$; elle est de plus non-vide (car autrement A_x serait fermé et on aurait la décomposition impossible du continu C en deux ensembles fermés A_x et $\sum_{i=1}^{h} b_i + D_x$ sans points communs). Il en résulte qu'au moins un point b_λ $(1 \leqslant \lambda \leqslant h)$ est contenu dans la frontière de A_x. On a par conséquent

(2) $$b_\lambda \subset A'_x .$$

Désignons par ε le plus petit des nombres positifs $\frac{1}{4}\vartheta, \frac{1}{2}\varrho(b_i, b_j)$, où $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, h$.

Le point b_λ (étant d'indice $< 2n - 2$) peut être ε-séparé par un ensemble formé des points

$$c_1, c_2, \ldots, c_k, \qquad k < 2n - 2,$$

On a alors :

(3) $$\left\{\begin{array}{l} C = A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i + D_\lambda ; \quad b_\lambda \subset A_\lambda \subset A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i \subset S(b_\lambda, \varepsilon); \\ H(A_\lambda, D_\lambda) = 0 ; \quad A_\lambda . \sum_{i=1}^{k} c_i = 0 = D_\lambda . \sum_{i=1}^{k} c_i. \end{array}\right.$$

On a de plus

(4) $$\bar{A}_\lambda \subset A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i \subset A^m .$$

En effet, tout point u de $A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i$ est contenu dans la sphère $S(b_\lambda, \varepsilon)$, donc

(5) $$\varrho(b_\lambda, u) < \varepsilon \leqslant \frac{1}{4}\vartheta$$

et

$$\varrho(x, u) \leqslant \varrho(x, b_\lambda) + \varrho(b_\lambda, u) < \frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{4} = \frac{3}{4}\vartheta < \vartheta = \varrho(x, C - A^m).$$

On a enfin

(6) $$(A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i) . \sum_{i=1}^{h} b_i = b_\lambda .$$

En effet, quel que soit le point $u \subset A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i$, il résulte de (5) et de la définition de ε que

$$\varrho(b_\lambda, u) < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}\varrho(b_\lambda, b_i)\ ,\ \text{où}\ i \neq \lambda\,;$$

il s'ensuit qu'aucun des points $b_1, b_2, \ldots, b_{\lambda-1}, b_{\lambda+1}, \ldots, b_h$ ne peut appartenir à $A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i$. D'autre part, d'après (3), b_λ appartient à l'ensemble $A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i$. L'égalité (6) est ainsi démontrée.

Considérons la décomposition suivante du domaine A_λ:

$$A_\lambda = A_\lambda \,.\, A_x + A_\lambda \,.\, \sum_{i=1}^{h} b_i + A_\lambda \,.\, D_x\,.$$

D'après (6) et (3), $A_\lambda \,.\, \sum_{i=1}^{h} b_i$ est formé du seul point b_λ, on a donc

(7) $$A_\lambda = A_\lambda \,.\, A_x + b_\lambda + A_\lambda \,.\, D_x\,.$$

Les relations (1), (3) et (6) nous donnent alors

$$\overline{A_\lambda \,.\, A_x} \subset \overline{A}_\lambda \,.\, \overline{A}_x \subset (A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i)\,.\,(A_x + \sum_{i=1}^{h} b_i) = (A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i)\,.\,A_x +$$
$$+ (A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i)\,.\,\sum_{i=1}^{h} b_i = (A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i)\,.\,A_x + b_\lambda = A_\lambda \,.\, A_x \,.+ (b_\lambda + A_x \,.\, \sum_{i=1}^{k} c_i).$$

On en tire (en remarquant que $Fr(A_\lambda \,.\, A_x) = \overline{A_\lambda \,.\, A_x} - A_\lambda \,.\, A_x$):

(8) $$Fr(A_\lambda \,.\, A_x) \subset b_\lambda + A_x \,.\, \sum_{i=1}^{k} c_i\,.$$

On a de même

$$\overline{A_\lambda \,.\, D_x} \subset \overline{A}_\lambda \,.\, \overline{D}_x \subset (A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i)\,.\,(D_x + \sum_{i=1}^{h} b_i) = (A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i)\,.\,D_x +$$
$$+ (A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i)\,.\,\sum_{i=1}^{h} b_i = (A_\lambda + \sum_{i=1}^{k} c_i)\,.\,(D_x + b_\lambda) = A_\lambda \,.\, D_x + (b_\lambda + D_x \,.\, \sum_{i=1}^{k} c_i),$$

ce qui nous donne

(9) $$Fr(A_\lambda \,.\, D_x) \subset b_\lambda + D_x \,.\, \sum_{i=1}^{k} c_i\,.$$

Il résulte de (8) et de (9) que les deux ensembles $Fr(A_\lambda \,.\, A_x)$ et $Fr(A_\lambda \,.\, D_x)$ ne contiennent qu'un nombre fini de points. Supposons que $Fr(A_\lambda \,.\, D_x)$ soit formé de μ_1 et $Fr(A_\lambda \,.\, D_x)$ de μ_2 points. Une conséquence immédiate de (8) et de (9) est alors que l'ensemble $A_x \,.\, \sum_{i=1}^{k} c_i$ contient au moins $\mu_1 - 1$ et l'ensemble $D_x \,.\, \sum_{i=1}^{k} c_i$ au moins $\mu_2 - 1$ points, de sorte que le nombre total k des points c_i est au moins égal à $(\mu_1 - 1) + (\mu_2 - 1) = \mu_1 + \mu_2 - 2$ [1]:

(10) $$k \geqq \mu_1 + \mu_2 - 2.$$

[1]) On ne doit pas oublier que les ensembles A_x et D_x, donc a fortiori les ensembles $A_x \,.\, \sum_{i=1}^{k} c_i$ et $D_x \,.\, \sum_{i=1}^{k} c_i$ sont sans points communs.

Comme, d'après nos suppositions, $2n-2$ est supérieur à k, on tire de l'inégalité (10) la relation

$$2n-2 > \mu_1 + \mu_2 - 2,$$

donc

$$\mu_1 + \mu_2 < 2n.$$

Il en résulte que l'un au moins des deux nombres naturels μ_1 et μ_2 est inférieur à n, c. à d. que *la frontière de l'un au moins des deux domaines $A_\lambda . A_x$ et $A_\lambda . D_x$ se compose d'un nombre de points inférieur à n.* Désignons donc par A^{m+1} un tel des domaines $A_\lambda . A_x$ et $A_\lambda . D_x$ dont la frontière contient moins de n points. D'après (4) et en remarquant que $A^{m+1} \subset A_\lambda$, donc $\overline{A^{m+1}} \subset \overline{A_\lambda}$, on a de plus

$$\overline{A^{m+1}} \subset A^m. \tag{11}$$

On trouve enfin, d'après (3),

$$\delta(\overline{A^{m+1}}) \leqslant \delta(\overline{A_\lambda}) \leqslant 2\varepsilon \leqslant \frac{\vartheta}{2};$$

or $\vartheta = \varrho(x, C - A^m) = \varrho(x, Fr(A^m))$; il en résulte que $\vartheta \leqslant \delta(\overline{A^m})$ et que par conséquent

$$\delta(\overline{A^{m+1}}) \leqslant \frac{1}{2}\delta(\overline{A^m}). \tag{12}$$

4. Nous avons démontré la proposition suivante:

Soit, sur une ligne cantorienne C ne possédant aucun point d'indice $\geqslant 2n-2$, A^m un domaine (rel. C) quelconque. Il existe alors un domaine A^{m+1} dont la frontière contient au plus $n-1$ points, et qui satisfait aux relations (11) et (12).

Choisissons maintenant un domaine quelconque A^0 (rel. C), et soient $A^1, A^2, \ldots, A^m, \ldots$ des domaines qu'on obtient en appliquant successivement la proposition auxiliaire que nous venons de démontrer. En vertu des relations (11) et (12), vraies quel que soit m, les ensembles fermés

$$\overline{A^1}, \overline{A^2}, \ldots, \overline{A^m}, \ldots \tag{13}$$

vont en décroissant et leurs diamètres tendent vers zéro. Il existe donc un et un seul point ξ commun à tous les ensembles de la suite (13), $\xi = \prod_{m=1}^{\infty} \overline{A^m}$. Il résulte enfin de (11) que, quel que soit m, $\xi \subset \overline{A^{m+1}} \subset A^m$, donc

$$\xi \subset \prod_{m=1}^{\infty} A^m. \tag{14}$$

Démontrons qu'on a

$$ind_\xi\, C \leqslant n-1.$$

Désignons par B^m l'ensemble $Fr(A^m)$. D'après notre proposition auxiliaire, chacun des ensembles B^m contient $n-1$ points au plus. Soit ε un nombre positif arbitraire. Choisissons m assez grand pour avoir

$\frac{\delta(A^0)}{2^m} < \varepsilon$. On a alors, comme le montre aussitôt une application répétée de l'inégalité (12):

$$(15) \qquad \delta(\overline{A}^m) = \delta(A^m) \leq \frac{\delta(A^0)}{2^m} < \varepsilon.$$

Considérons les relations immédiates

$$(16) \qquad C = \overline{A}^m + (C - \overline{A}^m) = A^m + B^m + (C - \overline{A}^m).$$

On a tout d'abord

$$(17) \qquad A^m . B^m = 0 = B^m . (C - \overline{A}^m).$$

A^m et $C - \overline{A}^m$ étant des domaines (rel. C) sans points communs, il en résulte que

$$(18) \qquad H(A^m, C - \overline{A}^m) = 0.$$

Nous avons enfin vu ((14)) que $\xi \subset A^m$, ce qui donne en vertu de (15)

$$(19) \qquad \xi \subset A^m \subset A^m + B^m = \overline{A}^m \subset S(\xi, \varepsilon).$$

Il résulte de (17), (18) et (19) que (16) est une ε-séparation du point ξ par l'ensemble B^m formé de $n-1$ points au plus. Le nombre positif ε étant quelconque, le théorème fondamental se trouve complètement demontré.

5. La seule supposition dont nous avons fait usage, dans la démonstration précédente, est celle que $ind_x C$ est inférieur à $2n-2$ quel que soit le point x du domaine A_0. Cela nous donne immédiatement les deux corollaires:

Corollaire I. *Si tous les points d'un domaine (rel. C) possèdent un indice $< 2n-2$, il existe nécessairement dans ce domaine des points d'indice $\leq n-1$.*

Corollaire II. *Si tous les points de C sont d'indice $< 2n-2$, l'ensemble des points à indice $\leq n-1$ est dense sur C.*

Construction des exemples.

1. *Exemple d'une ligne cantorienne, dont tous les points sont d'indice $\aleph_0$.*

6. Soit donné dans le plan xoy un rectangle Π_* dont les côtés sont parallèles aux axes ($*$ est d'ailleurs un certain ensemble fini d'indices, vide ou non [2])). Supposons que les coordonnées des sommets $p_*^1, p_*^2, p_*^3, p_*^4$ soient respectivement les fractions dyadiques x_*^0, y_*^0; x_*^0, y_*^1; x_*^1, y_*^0; x_*^1, y_*^1 ($x_*^0 < x_*^1$, $y_*^0 < y_*^1$).

Supposons donné sur les côtés de Π_* un certain ensemble fermé, fini

[2]) Nous écrirons $* = (i_1\, i_2 \ldots i_k)$, si $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sont les indices, formant $*$; $* = 0$ désigne que le cortège des indices est vide, tandis que $* = (0)$ veut dire que ce cortège est formé du seul indice 0.

ou dénombrable A_* dont tous les points-limites sont contenus dans l'ensemble des quatre sommets de Π_*. Supposons de plus qu'une coordonnée d'un point quelconque $a \subset A_*$ soit de la forme $\frac{p}{3^m \cdot q}$, les nombres p et $3^m \cdot q$ étant sans facteur commun. Désignons par X_* et Y_* respectivement l'ensemble des abscisses et l'ensemble des ordonnées de tous les points de A_*. Les ensembles X_* et Y_* sont des ensembles fermés de nombres réels. On voit de suite que X_* ne contient pas $\frac{x_*^0 + x_*^1}{2}$ et que Y_* ne contient pas $\frac{y_*^0 + y_*^1}{2}$. Soit donc δ un nombre de la forme $\frac{1}{2^m}$ inférieur au plus petit des deux nombres $\frac{|x_*^0 - x_*^1|}{8}$ et $\frac{|y_*^0 - y_*^1|}{8}$ et qui est en outre assez petit pour qu'aucun point de A_* ne possède une abscisse ou une ordonnée contenue respectivement dans l'intervalle $\left(\frac{x_*^0 + x_*^1}{2} - \delta, \frac{x_*^0 + x_*^1}{2} + \delta\right)$ ou $\left(\frac{y_*^0 + y_*^1}{2} - \delta, \frac{y_*^0 + y_*^1}{2} + \delta\right)$. Deux cas sont à distinguer:

1°. $*$ est formé d'un nombre pair d'indices (donc, en particulier, $*$ peut être l'ensemble vide).

2°. $*$ est formé d'un nombre impair d'indices. Ce dernier cas se distinguera du précédent par une simple échange des rôles de x et de y.

Nous nous contentons donc de considérer le cas où $*$ est formé d'un nombre pair d'indices.

Désignons respectivement par a_{*0}^n et a_{*1}^n $(n = 0, 1, 2, \ldots,)$ les points d'abscisse $d_{*0} = \frac{x_*^0 + x_*^1}{2} - \delta$ et $d_{*1} = \frac{x_*^0 + x_*^1}{2} + \delta$ et d'ordonnée $y_*^0 + \frac{y_*^1 - y_*^0}{3^n}$. Posons ensuite $a_{*0}^\omega = \left(\frac{x_*^0 + x_*^1}{2} - \delta, y_*^0\right)$, $a_{*1}^\omega = \left(\frac{x_*^0 + x_*^1}{2} + \delta, y_*^0\right)$.

Désignons par Π_{*0} le rectangle aux sommets (x_*^0, y_*^0), (x_*^0, y_*^1), (d_{*0}, y_*^0), (d_{*0}, y_*^1) et par Π_{*1} le rectangle aux sommets (d_{*1}, y_*^0), (d_{*1}, y_*^1), (x_*^1, y_*^0), (x_*^1, y_*^1). L'ensemble $A_{*i} (i = 0,1)$ sera alors par définition $\Pi_{*i} \cdot A_* + \sum_{n=0}^{\omega} a_{*i}^n$. Soit maintenant Π le carré aux côtés $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, A l'ensemble vide. En procédant par induction, on obtient successivement les rectangles $\Pi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, où $k = 1, 2, \ldots$; $i_k = 0$ ou 1. On a évidemment $\Pi_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}} \subset \Pi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $\Pi_{i_1 i_2 \ldots i_k 0} \cdot \Pi_{i_1 i_2 \ldots i_k 1} = 0$; le diamètre de $\Pi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$, de sorte que l'ensemble R des points $x_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots} = \prod_{k=1}^{\infty} \Pi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ est un ensemble parfait discontinu. Désignons par $A_\odot$ l'ensemble somme de tous les $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$.

7. Identifions maintenant chaque point $a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ avec le point $a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$ $(n = 0, 2, 3, \dots \omega)$.

Voici ce qu'on doit entendre par là. R est un ensemble parfait et borné, situé dans le plan, donc un espace métrique compact et a fortiori un espace topologique compact. Construisons maintenant un nouvel espace topologique C de la façon suivante:

1°. Les points de C sont les points $x \subset R - A_\odot$, et les points $v^n_{i_1 i_2 \dots i_k}$, chaque point $v^n_{i_1 i_2 \dots i_k}$ étant le couple des deux points $a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ et $a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$ de R. Les points $v^n_{i_1 i_2 \dots i_k}$ seront nommés points de seconde espèce de C, tandis que tous les autres points de C seront dits points de première espèce.

2°. Les voisinages $V(\xi)$ des points [3]) de C sont définis comme il suit:

(*a*) Si ξ est un point de C de première espèce, c. à. d. si ξ provient d'un point $x \subset R - A_\odot$, soit $V(x)$ un voisinage de x (rel. R). Le voisinage correspondant $V(\xi)$ (rel. C) sera alors formé de tous les points $\eta \subset C$ tels que l'une au moins des deux conditions (*aa*), (*ab*) se trouve vérifiée.

(*aa*) η est un point $y \subset (R - A_\odot) \,.\, V(x)$ (dans R).

(*ab*) η est un point $v^n_{i_1 i_2 \dots i_k}$ tel qu'au moins un des points $a_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ et $a_{i\, i_2 \dots i_k 1}$ appartient à $V(x)$.

(*b*) Si ξ est un point $v^n_{i_1 i_2 \dots i_k}$, soient respectivement $V(a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 0})$ et $V(a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 1})$ des voisinages quelconques de $a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ et de $a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$ (rel. R). Le voisinage correspondant $V(\xi)$ sera formé de

(*ba*) tous les points η de C de première espèce qui sont en même temps des points y de $V(a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 0}) + V(a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 1})$.

(*bb*) tous les points $v^m_{j_1 j_2 \dots j_l}$ tels qu'au moins un des deux points $a^m_{j_1 j_2 \dots j_l 0}$, $a^m_{j_1 j_2 \dots j_l 1}$ appartienne à $V(a_{i_1 i_2 \dots i_k 0}) + V(a_{i_1 i_2 \dots i_k 1})$.

On voit d'abord que C est un espace topologique compact à système déterminant dénombrable (= Abzählbarkeitsaxiom de M. HAUSDORFF). *C peut donc être considéré comme un espace compact métrique* [4]). On voit ensuite que C est une image univoque et continue dans un sens de R. Les deux espaces R et C étant compacts, C est une image uniformément continue de R. Désignons par $f(x)$ la fonction continue, définie sur R et réalisant cette transformation de R en C [on a $f(x) = x$ si $x \subset R - A_\odot$, $f(a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 0}) = f(a^n_{i_1 i_2 \dots i_k 1}) = v^n_{i_1 i_2 \dots i_k}$].

---

[3]) Nous désignerons un même point par la lettre x s'il est considéré comme appartenant à $R - A_\odot$, par ξ si l'on le considère comme point de C.

[4]) Les identifications en question sont réalisables sans qu'il soit nécessaire de sortir du plan: on peut, en effet, construire une application continue (dans un sens) du plan sur lui-même transformant R en un ensemble C topologiquement identique à l'espace topologique C que nous venons de construire.

Cette transformation continue du plan s'engendre comme limite d'une suite uniformément convergente de transformations continues $f_k(x)$, où $f_k(x)$ fait coïncider les points $a^n_{i_1 i_2 \dots i_r 0}$ avec $a^n_{i1\, i_2 \dots i_r 1}$ $(r \leq k)$.

Si M est un sous-ensemble quelconque de R, nous désignons par $f(M)$ l'image de M donnée par f. Posons $C_{i_1 i_2 \dots i_k} = f(R \,.\, \Pi_{i_1 i_2 \dots i_k})$. Le „diamètre" de $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$ tend évidemment vers zéro avec $\frac{1}{k}$ (en vertu de la continuité uniforme de $f(x)$).

Les points de $f(A_{i_1 i_2 \dots i_k})$ seront appelés les *sommets* de $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$.

8. Soit S un côté arbitraire d'un rectangle $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ quelconque. $S \,.\, R$ est évidemment un ensemble parfait non dense sur S, et tout intervalle contigu à $S \,.\, R$ sur S est de la forme $(a^{\lambda}_{i_1 i_2 \dots i_{k'} 0}, a^{\lambda}_{i_1 i_2 \dots i_{k'} 1})$, où $k' \geqq k$ et $\lambda = 0$ ou ω. Il en résulte que $f(S \,.\, R)$ est topologiquement identique à un segment rectiligne, c. à d. que $f(S \,.\, R)$ est un arc simple. En désignant par $P_{i_1 i_2 \dots i_k}$ le contour de $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ et par $K_{i_1 i_2 \dots i_k}$ l'ensemble $f(R \,.\, P_{i_1 i_2 \dots i_k})$, on tire de ce que nous venons de voir que $K_{i_1 i_2 \dots i_k}$ est une ligne simple fermée. Il en résulte facilement que C est un continu.

Or, nous démontrerons la proposition suivante, bien plus précise:

Q u e l q u e s o i t l'e n s e m b l e f i n i $M \subset C$, $C - M$ e s t c o n n e x e.

Pour démontrer cette proposition, introduisons d'abord la dénomination suivante. Nous dirons qu'un système d'ensembes $M_1, M_2, \dots, M_n$ forme une *chaîne* si l'on a toujours $M_i \,.\, M_{i+1} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Si en outre $M_1 \,.\, M_n \neq 0$, la chaîne sera dite *fermée*.

Un système d'ensembles sera dit *enchaîné* s'il est possible de joindre deux ensembles quelconques du système par une chaîne d'ensembles de ce système. Soit M un ensemble fini de points de C. Commençons par démontrer que le système de tous les $K_{i_1 i_2 \dots i_k} - M$ (k fixé mais arbitraire) est *enchaîné*. La propriété est évidente pour $k = 1$. Pour la démontrer dans le cas général il suffit de s'apercevoir du fait suivant: Supposons donné une chaîne d'ensembles $K_* - M$, où $*$ se compose de k ou de $k+1$ indices. En remplaçant un ensemble $K_{h_1 h_2 \dots h_k} - M$ quelconque de cette chaîne par les deux ensembles $K_{h_1 h_2 \dots h_k 0} - M$ et $K_{h_1 h_2 \dots h_k 1} - M$, on obtient encore une chaîne d'ensembles [5]).

[5]) Démontrons cette dernière assertion. Désignons par $*$ le cortège d'indices $h_1, h_2, \dots, h_k$ et soient $K_{*'} - M$, $K_* - M$, $K_{*''} - M$ les trois chaînons consécutifs de la chaîne donnée (les modifications à apporter sont immédiates, si K_* est le chaînon initial ou final de la chaîne). On a $K_* \subset K_{*0} + K_{*1}$, donc $(K_{*'} - M) \,.\, (K_* - M) \subset (K_{*'} - M)(K_{*0} - M) + (K_{*'} - M)(K_{*1} - M)$. L'un au moins des deux ensembles formant la dernière somme est non-vide. Supposons p. ex. que ce soit le premier. Si alors $(K_{*0} - M) \,.\, (K_{*''} - M) \neq 0$, on a la chaîne

$$\dots (K_{*'} - M),\ (K_{*0} - M),\ (K_{*1} - M),\ (K_{*0} - M),\ (K_{*''} - M), \dots;$$

si au contraire $(K_{*0} - M) \,.\, (K_{*''} - M) = 0$, donc $(K_{*1} - M) \,.\, (K_{*''} - M) \neq 0$, on a la chaîne

$$\dots (K_{*'} - M),\ (K_{*0} - M),\ (K_{*1} - M),\ (K_{*''} - M), \dots.$$

(L'ensemble $(K_{*0} - M) \,.\, (K_{*1} - M)$ est non-vide, car $K_{*0} \,.\, K_{*1}$ est dénombrable, tandis que M est fini).

On n'a qu'à appliquer successivement cette remarque pour obtenir de proche en proche les $K_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ formant un système enchaîné. Soit maintenant k assez grand pour que $\delta\,(C_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ soit inférieur à la distance minimale de deux points différents quelconques de M. Alors aucun $K_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ne peut contenir plus d'un point de M, $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} - M$ est par conséquent homéomorphe à une circonférence moins un point ou à une circonférence toute entière, selon le cas, où K contient ou non des points de M.

Le système de tous les $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} - M$ étant enchaîné, il résulte immédiatement que l'ensemble-somme de tous les $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} - M$ est un ensemble connexe formé d'un nombre fini d'arcs ouverts (donc un sémicontinu de nature toute élémentaire); nous désignons ce sémicontinu par $Q_k - M$, en désignant par Q_k l'ensemble-somme de tous les $K_{i_1 i_2 \ldots i_k}$.

Les ensembles Q_k, donc aussi les $Q_k - M$, vont en croissant avec k. Or, la somme d'une suite croissante de sémicontinus est, elle aussi, un sémicontinu.

L'ensemble

$$Q - M = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k - M$$

est, en outre, un sémicontinu *dense dans* C; il en résulte que l'ensemble $C - M$ s'obtient en ajoutant à $Q - M$ (qui est connexe) l'ensemble $C - Q - M$ *formé de points d'accumulation de* $Q - M$; l'ensemble $C - M$ est donc lui aussi connexe [6]).

L'ensemble M étant un ensemble *fini* quelconque de points de C, il résulte de la connexité de $C - M$ qu'on a $ind_\xi\, C \geqq \aleph_0$ quel que soit le point $\xi \subset C$.

D'autre part, pour chaque point ξ de C de 1re espèce et pour chaque ε on peut choisir un $*$ tel que $f(A_*)$ soit un ensemble ε-séparant le point ξ,

---

6) Voir p. ex. HAUSDORFF, ch. VIII, § 7. $Q - M$ étant un sémicontinu, il en est de même pour $C - M$.

Soient en effet $\pi' = \prod_{k=1}^{\infty} C_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}$ et $\pi'' = \prod_{k=1}^{\infty} C_{i''_1 i''_2 \ldots i''_k}$ deux points de $(C - Q) - M$ (où $Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$). Choisissons τ de manière que ni $\sum_{k=\tau}^{\infty} K_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}$ ni $\sum_{k=\tau}^{\infty} K_{i''_1 i''_2 \ldots i''_k}$ contiennent un point de M. Alors nous disposons d'un continu

$$W' = \pi' + \sum_{k=\tau}^{\infty} K_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k},$$

d'un continu

$$W'' = \pi'' + \sum_{k=\tau}^{\infty} K_{i''_1 i''_2 \ldots i''_k},$$

et d'un continu W''' contenant $K_{i'_1 i'_2 \ldots i'_\tau}$ et $K_{i''_1 i''_2 \ldots i''_\tau}$ et contenu dans $Q_\tau - M$.

Donc il existe un continu $W = W' + W''' + W''$ joignant π' et π'' et contenu dans $C - M$. Si l'un des deux points π' et π'' ou tous les deux appartenaient à $Q - M$ au lieu d'à $(C - Q) - M$, la construction d'un continu joignant π' et π'' et contenu dans $C - M$ ne ferait que se simplifier.

tandis que pour chaque point $v_*^{(r)}$ de seconde espèce et pour chaque ε on peut choisir un $*'$ et un $*''$ tels que

$$f(A_{*'}) + f(A_{*''}) - \sum_n v_*^{(n)}$$

ε-sépare le point $v_*^{(r)}$. Donc tous les points de C sont d'indice $\aleph_0$, c. q. f. d.

Remarque. L'inégalité $ind_\xi\ C \leqslant \aleph_0$ (quel que soit $\xi \subset C$) résulte aussi du théorème IX du ch. I (puisque l'ensemble des points de première espèce est homéomorphe (même identique) à $R - A_{\mathfrak{C}}$, donc de dimension 0, tandis que l'ensemble des points de seconde espèce est dénombrable).

2. *Exemple d'une ligne cantorienne dont tous les points sont d'indice ω.*

9. La construction de cet exemple se fait par la même méthode dont nous venons de nous servir pour construire un continu uniformément ramifié d'indice $\aleph_0$.

La seule différence consiste en ce que, quel que soit $* = (i_1, i_2 \dots i_k)$, l'ensemble A_* est maintenant fini. En conservant toutes les notations du § 6, nous ne considérons, en effet, parmi les points a_{*0}^n et a_{*1}^n que ceux, pour lesquels n prend les valeurs

$$\omega, 1, 2, \dots, k(*),$$

où $k(*)$ désigne le nombre des indices formant le cortège $*$.

A cette seule modification près, toute la construction des §§ 6—8 reste verbalement la même.

10. Démontrons que cette fois on a toujours

$$ind_\xi\ C = \omega,$$

quel que soit le point $\xi \subset C$. Il en résultera immédiatement que C est un continu, et en particulier une ligne cantorienne.

Il est facile à voir que $ind_\xi\ C$ est non-supérieur à ω.

Soit, en effet, ε un nombre positif arbitraire. Choisissons k assez grand pour que $\delta(C_{i_1 i_2 \dots i_k})$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$, quels que soient $i_1, i_2, \dots, i_k$ égaux à 0 ou à 1.

Soit ξ un point quelconque de C. Deux cas sont possibles:

1°. ξ appartient à un seul $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Désignons alors par B l'ensemble (fini) formé de tous les sommets de $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$ (dont aucun ne coïncide, dans notre cas, avec le point ξ).

2°. ξ est un sommet commun des deux ensembles $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$ et $C_{i'_1 i'_2 \dots i'_k}$. Désignons alors par B l'ensemble de tous les sommets de $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$ et $C_{i'_1 i'_2 \dots i'_k}$, autres que ξ. Dans les deux cas, B est un ensemble fini ε-séparant le point ξ.

Pour démontrer que $ind_\xi\, C$ ne peut jamais être égal à un nombre naturel N, il suffit d'établir la proposition suivante :

Quel que soit l'ensemble M ne contenant que k points au plus, chacun des ensembles $C_{i_1 i_2 \dots i_k} - M$ est connexe [7]) (et même constitue un sémicontinu [6])).

Cette proposition se ramène immédiatement à celle-ci:

Soit $*_0 = (i_1^0, i_2^0 \dots i_k^0)$ un cortège d'indices fixé et h un entier non inférieur à k. Désignons par Σ le système de tous les ensembles $K_{i_1^0 i_2^0 \dots i_k^0 \dots i_h} - M$. Le système Σ est enchaîné.

La démonstration de la dernière proposition est absolument analogue à celle de la proposition correspondante du § 8 (l'ensemble $(K_{*0} - M) . (K_{*1} - M)$ de [5]) est dans notre cas non-vide, puisque $* = (i_1 \dots i_h)$ tandis que $K_{*0} . K_{*1}$ contient $\geqslant h + 2 \geqslant k + 2 > k$ points, et M contient k points au plus).

3. *Exemple, pour tout nombre naturel n, d'une ligne cantorienne ne contenant que des points des indices n et 2 n — 2.*

11. La construction de cet exemple est évidemment impossible pour $n = 1$ et triviale pour $n = 2$ (circonférence). Elle est facile pour $n = 3$: il suffit de prendre deux exemplaires de la courbe de M. SIERPIŃSKI (ch. I, ex. 12) et d'identifier [8]) chaque sommet du triangle initial de l'une des courbes avec le sommet correspondant du triangle initial de l'autre courbe.

Reste donc à traiter le cas $n \geqslant 4$.

1^er cas: n pair, n = 2 p.

12. La méthode est très analogue à celle qui nous a servi pour la construction d'une courbe cantorienne dont tous les points sont d'indice $\aleph_0$.

Soit donné dans le plan un polygone Π_* à n sommets $a_*^1, a_*^2, \dots a_*^n$. [*Remarque importante*: nous désignerons toujours dans ce chapitre par Π (accompagné de divers indices) un polygone, intérieur et contour compris, tandis que la lettre P (avec les mêmes indices) sera réservée au contour polygonal correspondant]. Certains angles de Π_* peuvent d'ailleurs être égaux à π (c. à. d. deux côtés consécutifs peuvent être situés sur une même ligne droite). *Tous les polygones considérés dans ce chapitre sont supposés convexes.*

Soient: $S_*^{(a)}$ et $S_*^{(b)}$ deux côtés opposés du polygone Π_*; a_* et b_* les milieux de $S_*^{(a)}$ et de $S_*^{(b)}$ successivement; $\overline{a_* b_*}$ le segment rectiligne joignant

[7]) Supposons en effet que cette proposition soit démontrée et désignons par ε un nombre positif quelconque inférieur à tous les $\delta\,(C_{i_1 i_2 \dots i_k})$, où k est arbitrairement choisi. Tout ensemble B réalisant une ε-séparation d'un point quelconque $\xi \subset C$ contient alors k points au moins. On a donc, quels que soient k et $\xi \subset C$, $ind_\xi\, C > k$, donc $ind_\xi\, C \geqslant \omega$.

[8]) Au sens développé dans le § 7, d'ailleurs immédiatement réalisable géométriquement.

a_* et b_*; $a_{*0}^{(1)}$ et $a_{*1}^{(1)}$ deux points très voisins de a_* situés sur $S_*^{(a)}$ des deux côtés de a_* et à une distance inférieure à $\frac{1}{4}$ de la longueur de $S_*^{(a)}$; $a_{*0}^{(p)}$ et $a_{*1}^{(p)}$ des points jouissant des propriétés analogues par rapport à b_* et $S_*^{(b)}$ et tels que les droites $\overline{a_{*0}^{(1)}\, a_{*0}^{(p)}}$ et $\overline{a_{*1}^{(1)}\, a_{*1}^{(p)}}$ soient parallèles à $\overline{a_*\, b_*}$.

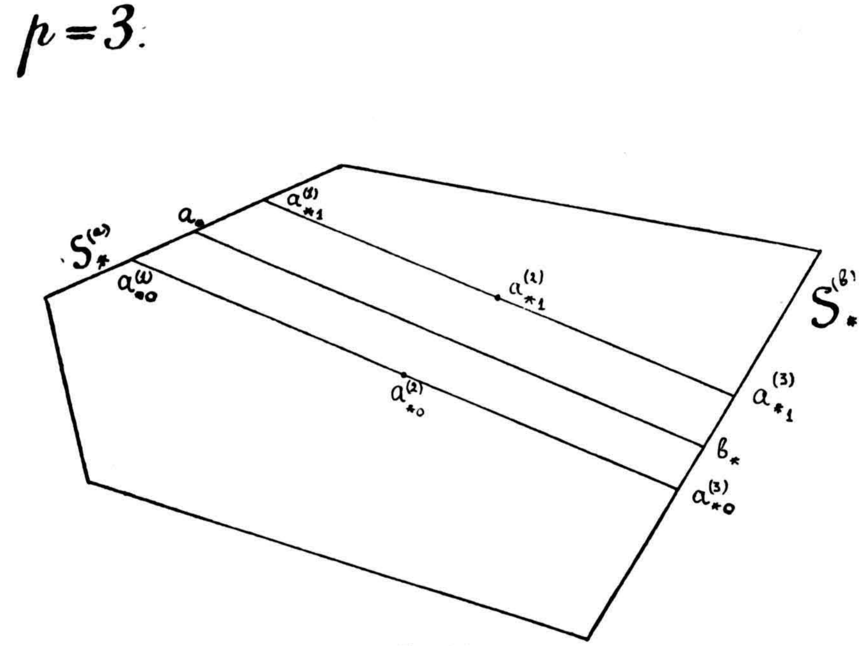

Fig. 14.

Soient enfin $a_{*0}^{(2)}, \ldots, a_{*0}^{(p-1)}$ et $a_{*1}^{(2)}, \ldots, a_{*1}^{(p-1)}$ des points situés successivement sur $\overline{a_{*0}^{(1)}\, a_{*0}^{(p)}}$ et sur $\overline{a_{*1}^{(1)}\, a_{*1}^{(p)}}$ et tels que les segments $\overline{a_{*0}^{(i)}\, a_{*0}^{(i+1)}}$ soient égaux entre eux, de même que les segments $\overline{a_{*1}^{(i)}\, a_{*1}^{(i+1)}}$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$.

En supprimant tous les points de Π_* situés dans la bande comprise entre les deux droites $\overline{a_{*0}^{(1)}\, a_{*0}^{(p)}}$ et $\overline{a_{*1}^{(1)}\, a_{*1}^{(p)}}$, on obtient deux polygones convexes Π_{*0} et Π_{*1}, sans points communs. Chacun de ces polygones possède n sommets (à savoir les p sommets de Π_* et p sommets $a_{*0}^{(1)}, \ldots, a_{*0}^{(p)}$ ou $a_{*1}^{(1)}, \ldots, a_{*1}^{(p)}$).

On peut appliquer ce procédé à chacun des polygones „*déduits*" Π_{*0} et Π_{*1}. En commençant p. ex. par un polygone régulier Π_0, on obtient ainsi des polygones $\Pi_{0 i_1 i_2 \ldots i_k}$, où k prend toutes les valeurs naturelles et $i_1, i_2, \ldots, i_k$ prennent indépendamment l'un de l'autre les valeurs 0 et 1.

On peut arranger facilement la construction de façon que les diamètres de $\Pi_{0 i_1 i_2 \ldots i_k}$ convergent vers zéro avec $\frac{1}{k}$.

En effet, le nombre des sommets de $\Pi_{0 i_1 i_2 \ldots i_k}$ restant toujours le même, il suffit de choisir les $S_*^{(a)}$ de manière que *tout* côté d'un $\Pi_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k}$ quelconque finisse par devenir un $S_*^{(a)}$ (ou un $S_*^{(b)}$) pour une certaine valeur de $*$.

Pour arriver à ce dernier but on peut procéder de la façon suivante. Numérotons arbitrairement les côtés de Π_0:

$$S^1,\ S^2, \ldots, S^n.$$

Supposons que les $\Pi_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k}$ soient déjà construits pour toutes les valeurs de $k \leqslant k_0$ (où k_0 est un entier arbitrairement choisi), et que tous les côtés de ces $\Pi_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k}$ soient rangés en une suite finie bien déterminée:

(20) $$S^1,\ S^2, \ldots, S^{h(k_0)}$$

où $h(k_0) \geqslant n$ est un entier facile à évaluer. Choisissons maintenant pour $S^{(a)}_{0\,i_1\,i_2\ldots i_{k_0}}$ celui des côtés de $\Pi_{0\,i_1\,i_2\ldots i_{k_0}}$ qui occupe dans (20) le rang inférieur. Ce choix fait, la construction des $\Pi_{0\,i_1\,i_2\ldots i_{k_0}\,i_{k_0+1}}$ se poursuit sans ambiguité. Il nous reste seulement, pour pouvoir continuer l'induction, de numéroter (dans un ordre quelconque) ceux-là parmi les côtés des $\Pi_{0\,i_1\,i_2\ldots i_{k_0}\,i_{k_0+1}}$, qui ne figurent pas dans (20).

Nous obtenons ainsi les côtés

(21) $$S^{h(k_0)+1},\ S^{h(k_0)+2}, \ldots, S^{h(k_0+1)}.$$

Les diamètres des $\Pi_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k}$ devenant infiniment petits avec $\frac{1}{k}$, l'ensemble R_0 de tous les points

$$x_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k\ldots} = \prod_{k=1}^{\infty} \Pi_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k}$$

est de nouveau un ensemble parfait discontinu.

L'ensemble R_0 contient comme sous-ensemble l'ensemble dénombrable des points $a^{(m)}_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k}$, $m = 1, 2, \ldots, p$.

Identifions maintenant [9]) chaque point $a^{(m)}_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k\,0}$ avec le point $a^{(m)}_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k\,1}$ correspondant. On obtient ainsi un espace métrique compact C_0 qui est une image univoque et continue de R_0 et qui se compose des points *de première espèce* $\xi = x \subset R_0 - A_0$ (A_0 est l'ensemble de tous les points $a^{(m)}_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k}$) et des points $v^{(m)}_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k}$ *de seconde espèce* (ces derniers points de C_0 étant des couples $(a^{(m)}_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k\,0},\ a^{(m)}_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k\,1})$).

La fonction continue $f(x)$ définie sur R_0 et transformant R_0 en C_0 transforme tout ensemble $M \subset R_0$ en $f(M) \subset C_0$. En particulier, l'ensemble $R_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k} = R_0 . \Pi_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k}$ est transformé en $C_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k}$.

Remarquons que $K_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k} = f(R_0 . P_{0\,i_1\,i_2\ldots i_k})$ est de nouveau une ligne simple fermée.

En construisant une seconde fois la même figure, soient Π_1, $\Pi_{1\,i_1,\,i_2\ldots i_k}$, $P_{1\,i_1\,i_2\ldots i_k}$, $a^{(n)}_{1\,i_1\,i_2\ldots i_k}$, R_1, C_1, $C_{1\,i_1\,i_2\ldots i_k}$, $K_{1\,i_1\,i_2\ldots i_k}$ (toujours au sens des §§ 7 et 8) les éléments correspondants de la seconde con-

9) Au sens expliqué au § 7.

struction. Identifions chaque sommet $a_0^{(m)}$ de Π_0 avec le sommet correspondant $a_1^{(m)}$ de Π_1. Nous obtenons ainsi l'espace métrique compact $C = C_0 + C_1$, et la fonction $f(x)$ devient définie sur $R_0 + R_1$ de façon que $C = f(R_0 + R_1)$.

13. Appelons $v^{(m)}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ *sommet* de $C_{j_1 j_2 \dots j_r}$, $r \geqslant k+1$, si $a^{(m)}_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}$ ($i_{k+1} = 0$ ou 1) est un sommet du polygone $\Pi_{j_1 j_2 \dots j_{k+1}}$. C'est ainsi que tous les $v^{(m)}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ sont sommets de divers $C_{j_1 j_2 \dots j_r}$ et que chaque $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$ possède n sommets (correspondant à ceux de $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$).

On a alors les propriétés suivantes faciles à vérifier ($k > 0$):

1°. Le produit de deux ensembles $C_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ et $C_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$ est toujours formé des p sommets communs de $C_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ et $C_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$. Le produit de deux ensembles $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$ et $C_{j_1 j_2 \dots j_k}$ différents est vide ou formé d'un nombre fini de sommets.

2°. Parmi les sommets de $C_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ (resp. de $C_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$) p sommets appartiennent à $C_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$ (resp. à $C_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$) et p sommets à

$$Q_k = \sum_{i_1=0}^{1} \dots \sum_{i_k=0}^{1} C_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

Il en résulte par une induction immédiate que le système de tous les $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$ (k fixé) est enchaîné, et que l'espace compact C est un *espace bien enchaîné*, donc un *continu*.

3°. $v^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_k} \subset C_{i_1 i_2 \dots i_k 0} \cdot C_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$.

Il existe de plus, pour tout $v^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_k}$, un entier $h > k$ satisfaisant à la condition suivante:

Quel que soit $s > h$, on peut choisir les indices $i_{k+2}, \dots, i_s$ et $i'_{k+2}, \dots, i'_s$ (chacun égal à 0 ou 1) de façon que $v^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ soit le seul point commun aux ensembles $C_{i_1 i_2 \dots i_k 0 i_{k+2} \dots i_s}$ et $C_{i_1 i_2 \dots i_k 1 i'_{k+2} \dots i'_s}$.

En effet, on s'aperçoit d'abord immédiatement que, quel que soit $s \geqslant k$, $v^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ appartient à un $C_{i_1 i_2 \dots i_k 0 i_{k+2} \dots i_s}$ et à un $C_{i_1 i_2 \dots i_k 1 i'_{k+2} \dots i'_s}$.

On a ensuite l'inclusion

$$C_{i_1 i_2 \dots i_k 0 i_{k+2} \dots i_s} \cdot C_{i_1 i_2 \dots i_k 1 i'_{k+2} \dots i'_s} \subset C_{i_1 i_2 \dots i_k 0} \cdot C_{i_1 i_2 \dots i_k 1}.$$

Cela posé, il suffit de prendre pour h le premier entier tel que $\delta\,(C_{i_1 i_2 \dots i_h})$ soit inférieur (quel que soit le choix particulier des indices $i_1, i_2, \dots, i_h$) à

$$\varrho\,(v^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_k}, C_{i_1 i_2 \dots i_k 0} \cdot C_{i_1 i_2 \dots i_k 1} - v^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_k}).$$

4°. Tout $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$ est homéomorphe à chacun des continus C_0 ou C_1.

Il résulte de 3° et 4° qu'on peut transformer un certain voisinage d'un sommet arbitraire $v^{(m)}_{j_1 j_2 \dots j_r}$ en un certain voisinage d'un sommet quelconque $v^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ donné d'avance, et cela d'une telle manière que cette transformation soit biunivoque et continue, et qu'elle fasse correspondre les deux points $v^{(m)}_{j_1 j_2 \dots j_r}$ et $v^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ l'un à l'autre. Il s'ensuit de cette dernière remarque que

5⁰. *Tous les sommets v de C possèdent le même indice de ramification: $ind_v\, C =$ const.*

Il est maintenant facile à voir que

tout sommet de C possède un indice $\leqslant 2n-2$.

En effet, il suffit de prendre, pour obtenir une ε-séparation du point $v^{(m)}_{i_1 i_2 \dots i_k}$, l'ensemble B formé des $2n-2$ sommets de $C_{i_1 i_2 \dots i_k 0 \dots i_h}$ et de $C_{i_1 i_2 \dots i_k 1 \dots i'_h}$ (voir 3⁰), autres que $v^{(m)}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ (où h est d'ailleurs assez grand pour que $C_{i_1 i_2 \dots i_h} + C_{i_1 i_2 \dots i'_h} \subset S\,(v^{(m)}_{i_1 i_2 \dots i_k}, \varepsilon)$.

On a aussi immédiatement

6⁰. *Si x n'est pas un sommet de C, $ind_x\, C$ est au plus égal à n.*

En effet, on a, dans ce cas, $x = \prod\limits_{k=1}^{\infty} C_{i_1 i_2 \dots i_k}$, les indices i_k étant définis univoquement. On obtient un ensemble ε-séparant le point x en prenant (pour k assez grand) les n sommets de $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$.

11. Pour voir que tout point $x \subset C$ est d'indice n, si x n'est pas un sommet, et d'indice $2n-2$, s'il est un sommet, il suffit de démontrer la proposition suivante:

7⁰. S i l'e n s e m b l e $M \subset C$ c o n t i e n t $n-1$ p o i n t s a u p l u s, $C - M$ e s t c o n n e x e. En effet, supposons démontrée la propriété 7⁰. Il résulte alors de 6⁰ que $ind_x\, C = n$, si x n'est pas un sommet. Il résulte ensuite du théorème fondamental qu'il y a parmi les sommets des points d'indice $\geqslant 2n-2$, et on tire alors de 5⁰ que tous les sommets sont d'indice $2n-2$.

14. Voici la marche à suivre pour démontrer la proposition 7⁰.

Soit N un ensemble quelconque formé de $\leqslant p-1$ points de C. Considérons un $k > 0$ déterminé et un cortège d'indices fixe $*_0 = (i^0_1\, i^0_2 \dots i^0_k)$; supposons de plus que nous ayons choisi, pour tout $* = (i_1\, i_2 \dots i_k)$ autre que $*_0$, le seul ensemble $K_* - N$ ou bien les deux ensembles K_{*0}, K_{*1}; supposons enfin que le système Σ' des ensembles ainsi choisis soit enchaîné. Je dis qu'on obtient encore un système enchaîné Σ'' en soumettant Σ' à une quelconque des deux opérations suivantes:

(*a*) un remplacement d'un $K_* - N$ par les deux ensembles $K_{*0} - N$ et $K_{*1} - N$;

(*b*) l'adjonction à Σ' de l'un des deux ensembles $K_{*_0 0}$ et $K_{*_0 1}$.

Cette remarque dont la démonstration est immédiate (voir [5]) et 2⁰), nous conduit au lemme suivant:

S i k e s t f i x é e t s i p a r m i l e s c o r t è g e s $* = (i_1\, i_2 \dots i_k)$ o n exclut un seul, les ensembles K_*-N (où N contient $p-1$ points au plus) correspondant aux cortèges restants (à k indices) forment un système enchaîné.

Ce lemme se démontre par un raisonnement d'induction immédiat, basé sur les deux remarques (*a*) et (*b*).

Pour prouver maintenant que *le système de tous les* $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} - M$ *est enchaîné* (k arbitraire, mais fixe, M formé de $n-1$ points au plus), il suffit de procéder par induction en appliquant la proposition auxiliaire suivante :

Soient choisis, pour tout $* = (i_1 i_2 \ldots i_k)$, l'ensemble K_*-M ou bien les deux ensembles $K_{*0}-M$, $K_{*1}-M$. Supposons que le système Σ des ensembles ainsi choisis soit enchaîné. Le système obtenu en remplaçant un $K_{*_0}-M$ bien déterminé par $K_{*_0 0}$ et $K_{*_0 1}$ est encore enchaîné.

La vérification est immédiate si $K_{*_0 0} . K_{*_0 1} - M \neq 0$ (voir de nouveau [5])).

Si au contraire $M \supset K_{*_0 0} . K_{*_0 1}$, soient :

Σ_0 le système de tous les ensembles $K_* - M$ (ou $K_{*0} - M$, $K_{*1} - M$), où $* \neq *_0$,

T l'ensemble-somme de tous les ensembles formant Σ_0.

Chacun des ensembles

$$K_{*_0 0} . T + K_{*_0 0} . K_{*_0 1} \quad \text{et} \quad K_{*_0 1} . T + K_{*_0 0} . K_{*_0 1}$$

est formé de $p+p=n$ points. Il existe donc dans chacun de ces ensembles au moins un point n'appartenant pas à M. Ce point appartient d'après nos suppositions à $K_{*_0 0} . T$ ou à $K_{*_0 1} . T$, donc à $(K_{*_0 0} - M) . T$ ou à $(K_{*_0 1} - M) . T$.

Remarquons maintenant que le système Σ_0 est enchaîné (d'après notre lemme [10])) et que chacun des ensembles $K_{*_0 0} - M$, $K_{*_0 1} - M$ a des points communs avec T. Le système Σ, qui est formé de Σ_0 et des deux ensembles $K_{*_0 0} - M$ et $K_{*_0 1} - M$ est donc aussi enchaîné.

Le système de tous les $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} - M$ étant enchaîné, une simple reproduction du raisonnement final du § 8 achève la démonstration de la connexité de $C - M$.

2^{me} cas : n impair, $n = 2p+1$ $(p \geqslant 2)$.

15. Le principe de notre méthode de construction restera toujours le même, seul le passage d'un polygone Π_* aux „polygones déduits" Π_{*i} subira quelques modifications.

Aussi le nombre de ces polygones déduits (auparavant égal à 2) sera maintenant égal à n (sauf pour $* = 0$) de sorte que l'indice i_k, $k > 1$, prendra toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

---

[10]) où $N = T . M$.

Nous supposons enfin que tous les angles de nos polygones soient inférieurs à π.

Considérons maintenant un polygone Π_* à n sommets $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*$. Désignons par b_i^* le milieu du côté $\overline{a_i a_{i+1}}$ et par $\tilde{\Pi}_*$ le polygone ayant pour sommets les points $b_1^*, b_2^*, \ldots, b_n^*$. Soit $\check{\Pi}_*$ un polygone, homothétique à $\tilde{\Pi}_*$, très voisin de ce dernier polygone et contenu dans son intérieur. Désignons par c_i^* le sommet de $\check{\Pi}_*$ correspondant à b_i^*. On peut évidemment supposer que les diamètres des pentagones $\tilde{\Pi}_{*i}$, définis par leurs sommets $c_i^*, b_i^*, a_{i+1}^*, b_{i+1}^*, c_{i+1}^*$, sont tous $< \frac{2}{3}\delta(\Pi_*) (i = 1, 2, \ldots n)$.

Désignons par Π_{*i} $(i = 1, 2, \ldots n)$ un polygone (*convexe*) obtenu en remplaçant dans le pentagone $\check{\Pi}_{*i}$ les côtés $\overline{c_i^* b_i^*}$ et $\overline{c_{i+1}^* b_{i+1}^*}$ successivement par les lignes polygonales $c_{*i}^{01} c_{*i}^{02} \ldots c_{*i}^{0p}$ et $c_{*i}^{11} c_{*i}^{12} \ldots c_{*i}^{1p}$, très voisines successivement de $c_i^* b_i^*$ et de $c_{i+1}^* b_{i+1}^*$ et situées (à leurs extrémités $c_{*i}^{01}, c_{*i}^{0p}, c_{*i}^{11}, c_{*i}^{1p}$ près) à l'intérieur de $\check{\Pi}_{*i}$.

$p = 3$
$(n = 7)$

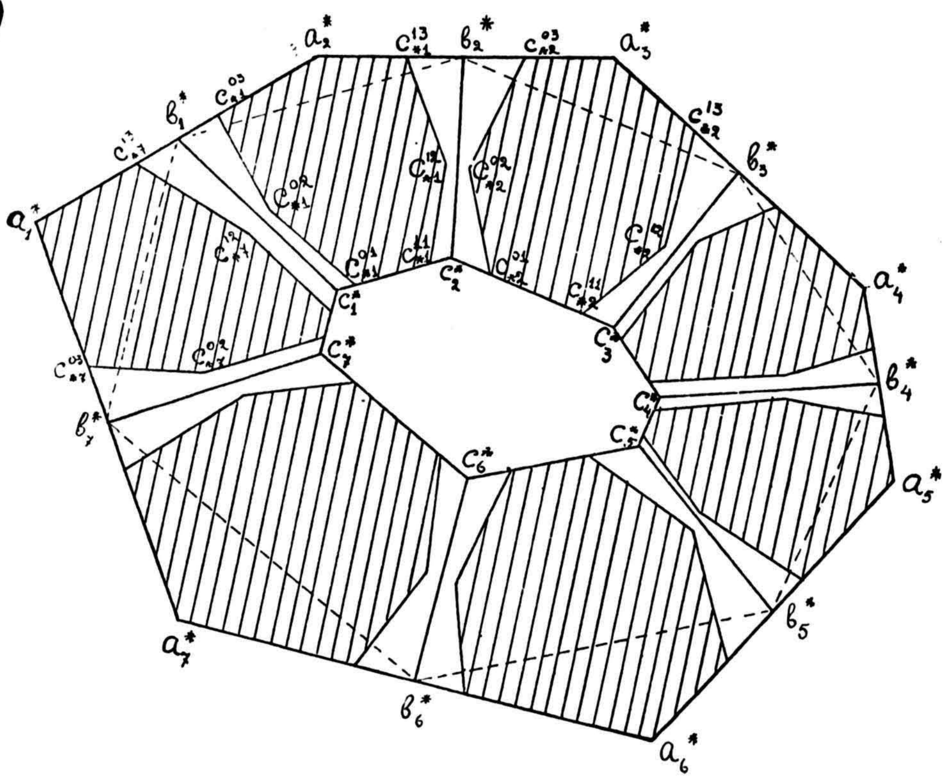

Fig. 15.

Les Π_{*i} sont par définition les „*polygones déduits*" de Π_*. Il résulte de nos suppositions que $\delta(\Pi_{*i}) < \frac{4}{5}\delta(\Pi_*)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Remarquons (ce qui est essentiel) que tout Π_{*i} est un polygone convexe à n sommets: $c_{*i}^{01}, \ldots, c_{*i}^{0p}$; $a_{*\atop i+1}$; $c_{*i}^{11}, \ldots, c_{*i}^{1p}$.

Soit Π_0 un polygone quelconque à n sommets $c_0^{11}, c_0^{12}, \ldots, c_0^{1n}$. En procédant par induction, on obtient les polygones $\Pi_{0 i_1 i_2 \ldots i_k}$, où $k = 1, 2, \ldots,$ et où les i_k prennent toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$.

Le diamètre de $\Pi_{0 i_1 i_2 \ldots i_k}$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{k}$, on voit que l'ensemble R_0 de tous les points $x_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots} = \prod_{k=1}^{\infty} \Pi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ est de nouveau un ensemble parfait discontinu.

Identifions maintenant (au sens expliqué au § 7) les points c_{0*i}^{1h} et c_{0*i+1}^{0h}, quels que soient $h \leqslant p$, $i \leqslant n-1$ et $* = (i_1 i_2 \ldots i_k)$. Identifions aussi les points c_{0*n}^{1h} et c_{0*1}^{0h}; nous obtenons ainsi un espace métrique compact C_0, dont les points sont les points $\xi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ de R_0 (autres que les sommets des Π_{0*}, $* \neq 0$) et les „points"

$$v_{0 i_1 i_2 \ldots i_k}^h = (c_{0 i_1 i_2 \ldots i_k}^{1h}, c_{0 i_1 i_2 \ldots i_k+1}^{0h}) \qquad (i_k \ mod\ n).^{11)}$$

La même construction effectuée une seconde fois nous fournit $\Pi_1, \Pi_{1 i_1 i_2 \ldots i_k}$, R_1, C_1, etc. Identifions chaque sommet c_0^{1h} de Π_0 avec le sommet c_1^{0h} correspondant de Π_1; cela nous donne l'espace $C = f(R)$ (où $R = R_0 + R_1$). Les „points" (c_0^{1h}, c_1^{0h}) seront désignés par v^h $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

16. Passons à l'examen des propriétés de l'espace C.

Conservons nos notations habituelles. [12]) On voit tout d'abord que tous les $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} = f(R \,.\, P_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ sont de nouveau des lignes simples fermées. On voit ensuite, par des raisons absolument analogues à celles dont nous nous sommes servis au cas précédent, que tous les sommets v_*^h ont le même indice de ramification $\leqslant 2n-2$, tandis que tous les autres points de C sont d'indice $\leqslant n$. Il suffit donc de démontrer la proposition suivante:

Quel que soit l'ensemble M formé de $\leqslant n-1$ points de C, $C - M$ est connexe.

Ici encore cette proposition se réduit à celle-ci:

(K) Quel que soit k, le système des ensembles $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} - M$ est enchaîné.

La dernière proposition se démontre par induction en passant par les étappes suivantes:

---

11) L'expression $(i_k \bmod n)$ désigne que i_k et $i_k + n$ sont considérés comme des indices identiques.

12) Il est à remarquer seulement que, dans un cortège d'indices quelconque $* = (i_1 i_2 \ldots i_k)$ le premier indice i_1 prend les deux valeurs 0 ou 1, tandis que tous les autres prennent les n valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$.

1°. Soient donnés un entier k et un cortège d'indices fixe $*_0 = (i_1^0\, i_2^0 \dots i_k^0)$. Le système Σ_0 de tous les $K_{i_1 i_2 \dots i_k}$, $(i_1\, i_2 \dots i_k) \neq *_0$, est enchaîné.

La démonstration par induction de 1° ne présente aucune difficulté.

2°. La proposition 1° étant démontrée, (K) se démontre par l'application répétée du *lemme* suivant:

Supposons fixés le nombre $k > 1$ et l'ensemble M contenant $n-1$ points au plus. Soit donné un système Σ d'ensembles correspondant à *toutes* les valeurs de $* = (i_1\, i_2 \dots i_k)$, de façon qu'il corresponde, à tout $*$, ou bien l'ensemble $K_* - M$, ou bien *tous les ensembles*

$$K_{*1} - M,\ K_{*2} - M, \dots, K_{*n} - M.$$

Supposons de plus que Σ soit un système enchaîné.

On obtient alors un système enchaîné Σ_1, si l'on remplace dans Σ un ensemble $K_{*_0} - M$ déterminé par le système des ensembles

$$(\Theta) \qquad K_{*_0 1} - M,\ K_{*_0 2} - M, \dots, K_{*_0 n} - M.$$

Démontrons ce lemme. Deux cas se présentent :

a. Le système (Θ) est enchaîné. Désignons par Σ_0 le système de tous les éléments de Σ sauf $K_{*_0} - M$, par T_0 l'ensemble-somme de M et de tous les ensembles formant le système Σ_0, par T_1 l'ensemble-somme de tous les $K_{*_0 1}, \dots, K_{*_0 n}$. L'ensemble $T_0 . T_1$ est formé de n points, donc $T_0 . T_1 - M$ n'est pas vide. On peut donc remplacer, dans une chaîne d'ensembles quelconque, $K_{*_0} - M$ par les ensembles (Θ), de façon à obtenir une nouvelle chaîne.

b. Le système (Θ) n'est pas enchaîné. Il en résulte que, pour deux valeurs i_1 et i_2 de i,

$$K_{*_0\, i_1} . K_{*_0\, i_1+1} + K_{*_0\, i_2} . K_{*_0\, i_2+1} = M.$$

Il s'ensuit de la dernière égalité que, quel que soit i,

$$K_{*_0 i} . T_0 - M \neq 0.$$

Comme, d'autre part, Σ_0 est enchaîné (d'après 1°), le système $\Sigma_0 + (\Theta)$ est encore enchaîné, c. q. f. d.

On démontre ensuite par un raisonnement déjà plu fois appliqué que

$$ind_\xi\, C = n, \text{ si } \xi \text{ n'est pas un sommet,}$$

tandis que

$$ind_{v_*^h}\, C = 2n - 2,$$

et cela quels que soient $*$ et h.

CHAPITRE VII.

SUR LES FRONTIÈRES DES DOMAINES PLANS LES PLUS GÉNÉRAUX.

1. Le présent chapitre est consacré à l'étude de quelques propriétés non intrinsèques des ensembles fermés plans de dimension 1, non nécessairement bornés, c. à d. des frontières des domaines plans les plus généraux (connexes ou non). Cette étude ne quittera jamais de vue les principes fondamentaux des théories générales développées dans ce mémoire, de sorte qu'elle peut être envisagée comme application de ces théories au cas particulier des ensembles fermés non denses dans le plan E.

Les définitions suivantes nous serviront de point de départ. Elles sont d'ailleurs des développements d'une notion classique [1]) due à M. BROUWER.

Définition 1. Soit [2]) G un domaine plan quelconque (connexe ou non), F l'ensemble fermé complémentaire $E - G$, et ξ un point arbitraire de l'ensemble fermé $\Phi = \overline{G} - G \subset F$.

Distribuons tous les nombres réels $\tilde{a}$ en deux classes I, II :

La classe II (qui peut d'ailleurs être vide) sera formée de tous les nombres *non négatifs* $\tilde{a}$ satisfaisant à la condition suivante :

Quel que soit le nombre positif ε, il lui correspond un $\delta > 0$ tel que deux points quelconques y et z de G distants de ξ de moins de δ peuvent être joints par une ligne polygonale $\overline{yz} \subset G$ de diamètre inférieur à $\tilde{a} + \varepsilon$.

La classe I (qui n'est jamais vide) se composera de tous les nombres réels n'appartenant pas à la classe II.

Si la classe II n'est pas vide, c'est que nous nous trouvons en présence d'une coupure au sens de DEDEKIND, qui définit un nombre non négatif a. Ce nombre non négatif a, nous lui donnerons à la fois deux dénominations, en l'appelant *oscillation du domaine* G *autour du point* ξ *de sa frontière* Φ en même temps qu'*oscillation extérieure de l'ensemble fermé* F *dans son point-frontière* ξ, et nous le désignerons dans ces deux qualités successivement par $osc_\xi\, G$ et par $\omega_\xi\,(F)$. Bien entendu, c'est pour la seule raison de simplifier les énoncés que nous introduisons cette double dénomination.

Supposons maintenant que la classe II soit vide.

---

[1]) „*Unbewalltheit*", cf. BROUWER, Ueber Jordansche Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71 (1911), p. 321. La définition de M. BROUWER est donnée pour des ensembles situés dans l'espace n-dimensional. La définition que nous donnons ci-dessus s'applique, elle aussi, au cas de l'espace n-dimensional, mais, comme nous n'en ferons usage que dans le cas $n = 2$, nous croyons qu'il suffit de la formuler pour le plan. Voir d'ailleurs le lemme 2 du § 3.

[2]) Ces notations G, F, Φ seront toujours employées dans le même sens.

Deux cas sont à distinguer:

1) *Il existe un nombre positif* δ, *tel que deux points quelconques* $y + z \subset G$ *situés dans* $S(\xi, \delta)$ *peuvent être joints par une ligne polygonale* $\Lambda = \overline{yz} \subset G$.

La classe II étant vide, il résulte de la supposition 1) que, quels que soient $\delta > 0$ et $\tilde{a} > 0$, on peut trouver deux points $y + z \subset G \,.\, S(\xi, \delta)$ tels que toute ligne polygonale $\overline{yz} \subset G$ possède un diamètre $> \tilde{a}$.

Nous dirons dans ce cas 1) que *l'oscillation de G autour de* ξ (= *l'oscillation extérieure de F dans* ξ) *tend vers l'infini*, et nous écrirons:

$$osc_\xi\,(G) \rightarrow \infty\,;\ \omega_\xi\,(F) \rightarrow \infty.$$

2) *Quel que soit* $\delta > 0$, *il existe dans* $S(\xi, \delta) \,.\, G$ *deux points* $y + z$ *qui ne peuvent être joints par aucune ligne polygonale* $\overline{yz} \subset G$.

Le dernier cas se présente évidemment dans le cas et seulement dans le cas où chaque voisinage de ξ contient des points appartenant à des composants différents du domaine G. [3])

Nous posons par définition

$$osc_\xi\,(G) = \infty \quad ; \quad \omega_\xi\,(F) = \infty.$$

2. *Remarque* 1. *Si l'ensemble* Φ *est borné, on a, quel que soit* $\xi \subset \Phi$,

$$\omega_\xi\,(F) = a \text{ (où } a \text{ est un certain nombre fini)}$$
$$\textit{ou } \omega_\xi\,(F) = \infty,$$

suivant le cas, où le point $\xi = \Phi$ *possède ou non un voisinage contenant seulement des points d'un seul composant* G_ξ *de* G.

Démonstration. Supposons d'abord que ξ soit point limite d'un seul composant G_ξ de G. Soit δ un nombre positif assez petit pour que $S(\xi \,.\, \delta) \,.\, G \subset G_\xi$. Il en résulte que deux points $y + z$ quelconques de $S(\xi, \delta)$. G peuvent être joints par une ligne polygonale $\Lambda = \overline{yz} \subset G_\xi$.

Si G_ξ est un domaine borné, on a $\delta(\Lambda) < \delta(G_\xi) = a$, $\omega_\xi\,(F)$ est donc un nombre fini.

Si G_ξ n'est pas borné, désignons par a un nombre positif tel que l'ensemble borné Φ soit contenu dans $S(\xi, a)$, de sorte que la frontière et l'extérieur de cette dernière sphère appartiennent à G_ξ. Soit $\overline{yz} \subset G_\xi$ une ligne polygonale quelconque joignant les deux points $y + z \subset S(\xi, \delta)$. Si $\overline{yz}$ n'est pas contenue dans $S(\xi, a)$, désignons par z_1 et z_2 le premier et le dernier point de rencontre de $\overline{yz}$ avec la circonférence Q, frontière de $S(\xi, a)$. En remplaçant l'arc $\overline{z_1 z_2}$ de $\overline{yz}$ par l'arc correspondant de Q

---

[3]) On n'en peut nullement conclure que ξ soit un point limite commun de deux au moins de ces composants.

En effet, il suffit de poser $G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$, où G_n est l'intérieur du cercle $\left(x - \frac{3}{2^{n+1}}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2^{2(n+1)}}$, et de considérer le point $\xi = (0, 0)$. On a évidemment $\omega_\xi\,(F) = \infty$, tandis que $\xi \,.\, \overline{G}_n = 0$, quel que soit n.

(ou par une ligne polygonale très voisine) on obtient un chemin $\overline{yz}$ situé dans $S(\xi, a+\varepsilon)$, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$.

Il en résulte que $\omega_\xi(F) \leqslant 2a$.

Si par contre tout voisinage de ξ contient des points de deux composants au moins de G, il est évident qu'on a toujours $\omega_\xi(F) = \infty$.

Nous parvenons donc à la conclusion suivante :

Si $\omega_\xi(F) \to \infty$, la frontière Φ du domaine $G = E - F$ s'étend à l'infini (il en est de même a fortiori pour les deux ensembles F et G).

Pour en avoir un exemple, considérons un système de coordonnées rectangulaires oxy, et désignons par F l'ensemble de tous les points du plan, où l'une au moins des deux conditions:

$$x \leqslant 0, \quad \text{et} \quad 1 \geqslant x > 0, \; y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

se trouve réalisée.

Si ξ est un point quelconque de l'axe verticale, $\omega_\xi(F) \to \infty$.

Remarque 2. Adoptons une fois pour toutes la convention suivante : *une oscillation égale à ∞ est supérieure à une oscillation tendant vers ∞, et cette dernière est supérieure à toute oscillation finie.* De plus nous dirons que $\omega_\xi(F)$ est *positive*, si l'on a une quelconque des relations $\omega_\xi(F) = a > 0$, $\omega_\xi(F) \to \infty$, ou $\omega_\xi(F) = \infty$.

3. Ces préliminaires terminés, passons à la démonstration du théorème suivant :

I. *Pour qu'un ensemble fermé F situé dans le plan E et dépourvu de points intérieurs, soit de dimension* 1, *il faut et il suffit qu'il soit d'oscillation extérieure positive au moins dans un de ses points.*

Démonstration.

Lemme 1. *Si F est non dense dans E et $\xi \subset F_1 \subset F$, on a $\omega_\xi F_1 \leqslant \omega_\xi F$.*

Soient, comme toujours, $G = E - F$, $G_1 = E - F_1$. Supposons d'abord qu'on ait $\omega_\xi F_1 = \infty$. Il existe alors, quel que soit $\delta > 0$, deux points $y + z \subset S(\xi, \delta) . G_1$ appartenant aux composants différents G_y et G_z de G_1.

Soit $\sigma > 0$ assez petit pour que $S(y, \sigma) \subset G_y . S(\xi, \delta)$ et $S(z, \sigma) \subset G_z . S(\xi, \delta)$. L'ensemble F étant non dense dans E, soit $y' \subset S(y, \sigma) . G$ et $z' \subset S(z, \sigma) . G$. On a a fortiori $y' \subset G . G_y$ et $z' \subset G . G_z$. Les deux points y' et z' appartenant à des composants différents de $G_1 \subset G$, tout en étant étrangers à F, ils appartiennent nécessairement à des composants différents de G. Comme on a en outre $y + z \subset S(\xi, \delta)$, δ ayant été choisi aussi petit que l'on veut, il en résulte que $\omega_\xi = \infty$.

Soit maintenant $\omega_\xi F_1 < \infty$. (Donc, $\omega_\xi F \to \infty$ ou $\omega_\xi F = a < \infty$). Il suffit évidemment de démontrer la propriété suivante:

Quel que soit le nombre $\tilde{a}$ appartenant à la classe II (relative à $\omega_\xi F$), ce nombre appartient aussi à la classe II (relative à $\omega_\xi F_1$).

Supposons que $\tilde{a}$ appartienne à la classe II ($\omega_\xi F$). On peut alors trouver, pour tout ε, un δ tel qu'il existe, quels que soient les points

$y + z \subset S(\xi, \delta) \,.\, G$, une ligne polygonale $\overline{yz} \subset G$ de diamètre $< \tilde{a} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Choisissons arbitrairement les points $y + z \subset S(\xi, \delta) \,.\, G_1$ et $\sigma < \frac{\varepsilon}{4}$ assez petit pour que $S(y, \sigma) + S(z, \sigma) \subset S(\xi, \delta) \,.\, G_1$.

Choisissons deux points: $y' \subset S(y, \sigma) \,.\, G$ et $z' \subset S(\xi, \sigma) \,.\, G$. Ces points appartenant à $S(\xi, \delta) \,.\, G$, il existe une ligne polygonale $\overline{y'z'} \subset G \subset G_1$ de diamètre $< \tilde{a} + \frac{\varepsilon}{2}$. Ajoutons à cette ligne polygonale les deux segments rectilignes $\overline{yy'}$ et $\overline{zz'}$ (contenus respectivement dans $S(y, \sigma)$ et dans $S(z, \sigma)$, donc dans $S(\xi, \delta) \,.\, G_1$).

L'ensemble $\overline{yy'} + \overline{y'z'} + \overline{zz'}$ est une ligne polygonale $\overline{yz} \subset G_1$ (en général avec des points doubles), de diamètre $< \tilde{a} + \frac{\varepsilon}{2} + 2\sigma < \tilde{a} + \varepsilon$. Le nombre ε étant arbitraire, $\tilde{a}$ appartient à la classe II (relative à $\omega_\xi F_1$), c. q. f. d.

L e m m e 2. Si $dim\, F = 0$, on a $\omega_\xi F = 0$ (quel que soit $\xi \subset F$).

Démontrons une proposition plus générale:

Si l'ensemble fermé F de dimension $\leqslant n - 2$ est situé dans E_n, on a $\omega_\xi F = 0$ (quel que soit $\xi \subset F$).

Soit par impossible $\omega_\xi (F) > a > 0$. Désignons par δ un nombre positif quelconque inférieur à $\frac{a}{2}$. On trouvera alors deux points $y + z \subset S(\xi, \delta) \,.\, G$, tels qu'il n'existe aucune ligne polygonale $\overline{yz} \subset G$ de diamètre $< a$.

En remarquant que $y + z \subset S(\xi, \delta) \subset S\left(\xi, \frac{a}{2}\right)$, on en conclut que le domaine $S\left(\xi, \frac{a}{2}\right) - F$ n'est pas connexe.

Considérons une correspondance biunivoque et bicontinue entre $S\left(\xi, \frac{a}{2}\right)$ et l'espace E_n tout entier. Cette correspondance transforme l'ensemble $F \,.\, S\left(\xi, \frac{a}{2}\right)$ $\left(\text{fermé rel. } S\left(\xi, \frac{a}{2}\right)\right)$ en un ensemble $F^* \subset E_n$, fermé rel. E_n et de dimension $\leqslant n - 2$. Nous sommes donc parvenu au résultat absurde [4]) que $E_n - F^*$ n'est pas connexe, tandis que $dim\, F^* \leqslant n - 2$.

L e m m e 3. *Si la ligne cantorienne F décompose le plan, elle contient au moins un point ξ où $\omega_\xi F = \infty$.*

Ce lemme résulte immédiatement du lemme 1 et du théorème classique de BROUWER, d'après lequel F contient une frontière commune de deux domaines plans.

L e m m e 4. *Toute ligne Cantorienne plane [4bis]) contient des points d'oscillation extérieure positive.*

---

[4]) I, ch. V, § 13 (Fund. Math. VIII, p. 307). Voir aussi la deuxième note supplémentaire de la 1re partie (ibidem, p. 355).

[4bis]) Une ligne Cantorienne est, selon les définitions adoptées dans ce mémoire, une ligne *bornée*; le lemme 4 subsiste néanmoins dans le cas des continus non bornés de

Supposons par impossible qu'on ait $\omega_\xi F=0$ quel que soit $\xi \subset F$, et désignons par ε le nombre positif $\frac{1}{24}\delta(F)$.

D'après le lemme 3, le domaine G est connexe. Soit ξ un point quelconque de F. Désignons par δ_ξ un nombre bien déterminé tel qu'il existe pour tout couple de points $y+z \subset S(\xi, \delta_\xi)$. G une ligne polygonale $\overline{yz} \subset G$ de diamètre $<\varepsilon$. Soit Q un carré (intérieur et frontière compris) contenant F dans son intérieur. Le nombre δ_ξ étant déjà défini pour tout point $\xi \subset F$, posons, pour $\xi \subset Q-F$, δ_ξ égal au plus petit des deux nombres $\frac{\varepsilon}{2}$ et $\varrho(\xi, F)$.

D'après le théorème de BOREL-LEBESGUE il existe un nombre fini de domaines

$$\Gamma_1=S(\xi_1, \tfrac{1}{2}\delta_{\xi_1}),\ \Gamma_2=S(\xi_2, \tfrac{1}{2}\delta_{\xi_2}), \ldots, \Gamma_n=S(\xi_n, \tfrac{1}{2}\delta_{\xi_n})$$

recouvrant le carré Q ($\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont des points de Q convenablement choisis).

Désignons par δ le plus petit parmi les nombres

$$\frac{\varepsilon}{2}, \varrho(E-Q, F), \tfrac{1}{2}\delta_{\xi_1}, \tfrac{1}{2}\delta_{\xi_2}, \ldots, \tfrac{1}{2}\delta_{\xi_n}.$$

Je dis qu'il existe pour tout couple de points $y+z \subset G$, $\varrho(y, z)<\delta$, une ligne polygonale $\overline{yz} \subset G$ de diamètre $<\varepsilon$.

En effet, supposons d'abord que l'un au moins de ces points, p. ex. y, soit situé en dehors de Q. Alors la sphère $S(y, \delta)$ est étrangère à F, tout en contenant z; le segment rectiligne $\overline{yz}$ résout donc la question.

Si $y+z \subset Q$, supposons qu'on ait p. ex. $y \subset \Gamma_1=S(\xi_1, \frac{1}{2}\delta_{\xi_1})$. On a $\varrho(\xi_1, z) \leqslant \varrho(\xi_1, y)+\varrho(y, z)<\frac{1}{2}\delta_{\xi_1}+\delta<\delta_{\xi_1}$, donc $y+z \subset S(\xi_1, \delta_{\xi_1})$, et il existe, d'après la définition du nombre δ_{ξ_1}, une ligne polygonale $\overline{yz} \subset G$ de diamètre $<\varepsilon$ (si $\xi_1 \subset Q-F$, on n'a qu'à prendre de nouveau le segment rectiligne $\overline{yz}$, puisque toute la sphère $S(\xi_1, \delta_{\xi_1})$ est dans ce cas étrangère à F).

Soient maintenant α et β deux points de F dont la distance $\varrho(\alpha, \beta)=$ $=\delta(F)=24\,\varepsilon$.

Désignons par K la circonférence à centre α et de rayon $12\,\varepsilon$ et divisons K par les points $m_1, m_2, \ldots, m_k, m_{k+1}=m_1$ en k arcs égaux $\overline{m_i\, m_{i+1}}$ (les i sont considérés mod k) tels que les cordes correspondantes S_i aient une longueur λ inférieure à $\frac{2}{3}\delta$. Soit, pour tout $i \leqslant k$, x_i un point de G distant de m_i de moins de $\frac{\delta}{6}$. Joignons x_i et x_{i+1} par une ligne polygonale $\overline{x_i x_{i+1}}=L_i \subset G$ de diamètre $<\varepsilon$ et soit $C=\sum_{i=1}^{k} L_i$. C'est un polygone fermé (pouvant contenir en général des points et des segments doubles).

dimension 1, puisque tout ensemble de cette sorte contient une ligne Cantorienne (voir d'ailleurs l'alinéa 7 de la p. 129).

L'absurdité de notre supposition, et par conséquent le lemme 4, seraient démontrés, si nous avions établi l'existence de points de F appartenant à des composants différents de $E - C$.

(En effet, C étant étranger à F, ce dernier ensemble ne pourrait être un continu).

Désignons donc par C_i le polygone fermé $S_i + L_i$ et par S le polygone convexe et régulier $\sum_{i=1}^{k} S_i$.

Il résulte immédiatement de notre construction que l'ordre [5]) de chacun des points α et β par rapport à C_i est égal à zéro. On en conclut que

$$ord_\alpha C = ord_\alpha S = 1$$
$$ord_\beta C = ord_\beta S = 0,$$

c. à d. que α et β appartiennent à des composants différents de $E - C$.

Le lemme 4 est démontré.

Le théorème I résulte immédiatement des lemmes 1—4. En effet, si $dim\, F = 0$, on a, d'après le lemme 2, $\omega_\xi\,(F) = 0$, quel que soit le point $\xi \subset F$.

Si, au contraire, l'ensemble fermé plan F est de dimension 1 (donc, non dense dans le plan), F contient une ligne cantorienne F_1, et l'on a (d'après le lemme 4) $\omega_\xi\,(F_1) > 0$ pour au moins un point ξ de F_1, donc (lemme 1) $\omega_\xi\,(F) > 0$, c. q. f. d.

C o r o l l a i r e. *Soit F une ligne cantorienne plane. L'ensemble des points ξ de F, où l'on a $\omega_\xi\,(F) > 0$, est dense sur F.*

En effet, quels que soient $\xi \subset F$ et $\eta > 0$, $S(\xi, \eta)\,.\,F$ contient une ligne cantorienne F_1 et, par conséquent, un point $\xi_1 \subset F_1$, dans lequel $\omega_{\xi_1}(F_1) > 0$, donc (lemme 1) $\omega_\xi\,(F) > 0$.

Remarque I. Si l'on prend pour F la ligne cantorienne du § 12 du ch. IV, on voit que l'ensemble des points, où $\omega_\xi\,(F) > 0$, peut être de première catégorie [6]).

Remarque II. Le problème suivant se pose tout naturellement:

Un ensemble fermé $(n-1)$-dimensional F situé dans E_n, contient-il nécessairement des points d'oscillation extérieure positive?

La solution affirmative de ce problème caractériserait d'un point de vue nouveau la dimension des sous-ensembles fermés des espaces euclidiens. (Il faut tenir compte, bien entendu, du lemme 2 dans sa forme la plus générale).

4. Passons à l'étude des relations existant entre l'oscillation extérieure d'une ligne cantorienne plane en un point ξ et l'indice de ramification $ind_\xi\, F$.

---

[5]) Voir BROUWER, Math. Ann. 71 (1911), p. 323; 72 (1912), p. 424, où l'on trouvera, en outre, des références se rapportant à la Note bien connue de M. HADAMARD sur l'indice de KRONECKER.

[6]) Ce qui résulte p. ex. du théor. II (page suivante), en tenant compte de ce que:

1) la courbe F ne décompose pas le plan [$\omega_\xi\,(F)$ est donc un nombre fini quel que soit $\xi \subset F$];

2) l'ensemble des points ξ, où $ind_\xi\, F > 1$, est de 1re catégorie sur F.

Toute ligne cantorienne étant un continu borné, remarquons tout d'abord que le cas $\omega_\xi(F) \to \infty$ ne peut se présenter pour aucun point $\xi \subset F$ (voir § 2, Remarque 1⁰).

Démontrons maintenant les deux théorèmes suivants:

II. *Si le point ξ est un point d'arrêt de la ligne cantorienne F (c. à d. si $ind_\xi F = 1$), on a au point ξ*

$$\omega_\xi(F) = 0 \text{ ou } \omega_\xi(F) = \infty.$$

III. *Si l'on a, pour un point ξ d'une ligne cantorienne plane F,*

$$(1) \qquad 1 < ind_\xi F \leqq \omega,$$

l'oscillation extérieure de F est positive au point ξ.

Démonstration. Soit α un nombre fixe positif, qui, dans le cas du théorème III, doit être assez petit pour que tout ensemble α-séparant le point $\xi \subset F$ contienne au moins deux points. Dans le cas des deux théorèmes α est supposé $< \frac{1}{2}\delta(F)$. Si $\omega_\xi(F) = \infty$, les deux théorèmes sont démontrés. Supposons donc $\omega_\xi(F) < \infty$. Cela nous permet d'assujettir α à une dernière condition, à savoir que $S(\xi, \alpha)$. G soit agrégé à un seul composant du domaine $G = E - F$. Choisissons un nombre positif δ assujetti à la seule condition d'être inférieur à $\frac{\alpha}{2}$. Considérons une δ-séparation du point ξ

$$(2_{.a}) \qquad F = A_0 + B_0 + D_0$$

effectuée par un ensemble B_0 se composant d'un nombre fini de points:

$$(3) \qquad B_0 = b_1 + b_2 + \ldots + b_m.$$

Dans le cas du théorème II, nous supposerons que $m = 1$, c. á d. que B_0 se compose du seul point $b_1 = b$.

Le nombre δ étant inférieur à $\frac{\alpha}{2}$, donc à α, la décomposition $(2_{.a})$ est a fortiori une α-séparation du point ξ. Il peut arriver qu'un vrai sous-ensemble B_1 de B_0 soit encore un ensemble α-séparant pour le point ξ. Nous remplaçons alors B_0 par B_1. L'ensemble B_0 ne contenant qu'un nombre fini de points, nous finirons par obtenir un sous-ensemble $B_\lambda = B \subset B_0$, qui est un ensemble α-séparant le point ξ, tandis qu'aucun vrai sous-ensemble de B ne jouit plus de cette propriété. Nous exprimons ce fait en disant que B est *un ensemble α-séparant irréductible* [7]).

Supposons que B soit formé des points $b_1, b_2, \ldots, b_n$. En tenant compte du choix du nombre α, on a $n \leqq m$. Soit donc

$$(4) \qquad F = A + B + D, \quad \xi \subset A \subset A + B \subset S(\xi, \alpha)$$

l'α-séparation du point ξ, effectuée par l'ensemble B.

L'ensemble $A + B$ étant fermé, désignons par β le maximum de la distance $\varrho(\xi, z)$, z étant un point quelconque de $A + B$, et par 2σ le nombre $\alpha - \beta$ qui est positif en vertu de la dernière inclusion (2).

Choisissons dans le plan E (auquel F est agrégé) un système oxy de coordonnées rectangulaires tel que les points $b_1, b_2, \ldots, b_n$ aient leurs deux

[7]) Cf. pour cette notion la note supplémentaire IV.

coordonnées irrationnelles, et soit $\mathfrak{T}_p$ le quadrillage obtenu en menant toutes les droites $x = \frac{k}{2^p}$ et $y = \frac{k}{2^p}$ (k prenant *toutes* les valeurs entières).

Désignons par τ le plus petit parmi les nombres positifs σ et $\varrho(b_i, b_j)$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, et soit p le premier entier positif tel que $\frac{\sqrt{2}}{2^p} < \tau$.

Construisons comme il suit „l'ensemble des *carrés admissibles*".

1⁰. Un carré Q du quadrillage $\mathfrak{T}_p$ est admissible, si l'ensemble $Q \,.\, B$ et l'un au moins des deux ensembles $Q \,.\, A$ et $Q \,.\, D$ sont vides [8]).

2⁰. Soit Q un carré du quadrillage $\mathfrak{T}_p$ ne contenant aucun point de B, mais ayant des points communs avec A et avec D. Comme l'ensemble $\bar{A} \,.\, \bar{D}$ est contenu dans B, il résulte du choix de Q que $\varrho(Q \,.\, A, Q \,.\, D)$ est positif. Soit donc p_1 le premier entier tel que $\frac{\sqrt{2}}{2^{p_1}} < \varrho(Q \,.\, A,\ Q \,.\, D)$.

Considérons tous les carrés du quadrillage $\mathfrak{T}_{p_1}$ contenus dans Q. *Tous ces carrés seront dits admissibles*; ils sont tous étrangers à B et aucun d'entre eux ne possède en même temps des points communs avec A et avec D.

3⁰. Soit enfin Q un carré du quadrillage $\mathfrak{T}_p$ contenant un point b de B. D'après la définition du nombre p, Q ne contient qu'un *seul* point b de B. Considérons les quatre carrés Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 du quadrillage $\mathfrak{T}_{p+1}$ contenus dans Q; d'après le choix des axes, le point b appartient à un seul parmi ces quatre carrés, p. e. à Q_1. Les trois carrés restants Q_2, Q_3, Q_4 seront donc tous dans des conditions analogues à 1⁰ ou 2⁰ (seulement p est remplacé par $p+1$); donc, ils donneront naissance (selon la règle correspondante) à des carrés admissibles.

Quant au carré Q_1, nous lui appliquons le même raisonnement 3⁰: nous considérons notamment les quatre carrés $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}$ du quadrillage $\mathfrak{T}_{p+2}$ contenus dans Q_1, et ainsi de suite in infinitum.

5. On voit sans peine que l'ensemble-somme de tous les carrés admissibles est précisément l'ensemble $E - B$. Si x est un point quelconque du plan, autre que les points $b_1, b_2, \ldots, b_n$, et $S(x, \eta)$ un voisinage quelconque de x, également étranger à B, il n'y a évidemment qu'un nombre fini de carrés admissibles ayant des points communs avec $S(x, \eta)$.

Désignons maintenant par K_0 l'ensemble-somme de tous les carrés admissibles, ayant à leur intérieur ou sur leur frontière des points de A. D'après notre construction, l'ensemble $K_0 \,.\, D$ est vide, donc *l'ensemble fermé* [9]) $K = K_0 + B$ est étranger à D. Soit ensuite x un point quelconque de A; il appartient à quatre carrés admissibles au plus, et ces carrés se trouvent tous parmi ceux qui forment l'ensemble K_0; ils remplissent en

[8]) On entend ici par „carré" toujours la figure toute entière, intérieur et frontière.

[9]) En effet, un point-limite de K_0 n'appartenant pas à K_0 est un point x dont chaque voisinage a des points communs avec une infinité de carrés admissibles; il résulte donc de la remarque faite au début de ce § que $x \subset B$, c. à d. que $K_0 + B$ est fermé.

outre un certain voisinage du point x. Donc, *tout point $x \subset A$ est un point intérieur de l'ensemble fermé K*. En désignant par $I(K)$ l'ensemble de tous les points intérieurs de K, et en remarquant que $K \,.\, D = 0$, on trouve

$$(K - I(K)) \,.\, F \subset B. \tag{4}$$

Désignons maintenant par G_ξ le composant de ξ dans le domaine $I(K)$, et par Φ_ξ la frontière de G_ξ. On a

$$\Phi_\xi \subset K - I(K), \tag{5}$$

donc, d'après (4)

$$\Phi_\xi \,.\, F \subset B. \tag{6}$$

Remarquons que tout carré admissible ayant un diamètre $< \sigma$, l'ensemble K est contenu dans $S(A, \sigma) \subset S(\xi, \beta + \sigma) \subset S(\xi, a)$. Il en résulte que K et en particulier Φ_ξ appartiennent à $S(\xi, a)$:

$$\Phi_\xi \subset S(\xi, a). \tag{7}$$

Choisissons un point $z \subset D$ tel que

$$\varrho(\xi, z) \geqq \tfrac{1}{2}\, \delta(F) > a,$$

et soit $\Phi_0 \subset \Phi_\xi$ une coupure irréductible entre ξ et z. Le continu Φ_0 est la frontière commune des deux domaines connexes $G_0 \supset \xi$ et $G_\infty \supset z$, et il est facile à voir que Φ_0 est une ligne simple fermée se composant d'un ensemble au plus dénombrable de segments rectilignes [10]).

Il résulte de (7) que

$$G_0 + \Phi_0 \subset S(\xi, a) \tag{8}$$

et de (6) que

$$F \,.\, \Phi_0 \subset B. \tag{9}$$

---

[10]) En effet, soit y un point quelconque de Φ_0 différent des points $b_1, b_2, \ldots, b_n$, et des sommets des carrés admissibles (dont l'ensemble est au plus dénombrable) ; y appartient à un seul côté d'un seul carré admissible ; donc dans le voisinage de y le continu Φ_0 est localement identique à un segment rectiligne. Il en résulte que tout point de Φ_0 (à l'exception peut-être d'un ensemble au plus dénombrable) est *accessible* de chacun des deux domaines G_0 et G_∞.

Or, si Φ_0, étant la frontière du domaine simplement connexe G_0, possédait un point inaccessible de G_0, l'un au moins des bouts premiers de G_0 serait de l'espèce 2, 3 ou 4 (voir CARATHÉODORY, „Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete", Math. Ann. 73, p. 335) ; on aurait donc sur Φ_0 une infinité indénombrable de points inaccessibles, ce qui est impossible.

Le domaine G_∞ étant (après l'adjonction du point à l'infini) lui aussi simplement connexe, le même raisonnement démontre que chaque point de Φ_0 est accessible de G_∞. Or une frontière commune de deux domaines connexes, dont tous les points sont accessibles des deux domaines, est une ligne simple fermée, c. q. f. d.

On pourrait démontrer la même propriété sans faire usage de la théorie de M. CARATHÉODORY : il suffirait de remarquer que Φ_0 est localement connexe, et que toute frontière commune de deux domaines connexes est une ligne simple fermée toutes les fois qu'elle est localement connexe.

On a ensuite la décomposition

(10) $$F = F \cdot G_0 + F \cdot \Phi_0 + F \cdot G_\infty$$

qui est d'après (8) une α-séparation du point ξ.

On conclut de (9) et de la définition de l'ensemble B que

(11) $$B = F \cdot \Phi_0.$$

6. Ces préliminaires terminés, démontrons d'abord le théorème II. On a dans ce cas $B = b$, et l'ensemble $F \cdot \Phi$ se compose du seul point b.

Le nombre α pouvant être choisi aussi petit que l'on veut, il suffit de prouver l'existence d'un nombre δ_α tel que deux points $y + z \subset G = E - F$ peuvent être joints par un arc simple $\overline{yz} \subset G$ de diamètre $< 2\alpha$, toutes les fois qu'on a $y + z \subset S(\xi, \delta_\alpha)$.

Or pour cela il suffit de poser $\delta_\alpha = \varrho(\xi, E - G_0)$.

Soient, en effet, $y + z \subset G_0 \cdot G$. Démontrons qu'on peut trouver un arc simple $\overline{yz} \subset G$ de diamètre $< 2\alpha$.

D'après le choix du nombre α, il existe une ligne polygonale $L \subset G$ joignant les deux points y et z. Si $L \subset \overline{G}_0$, le théorème II est démontré. Soit donc

$$L - \overline{G}_0 \neq 0.$$

Quand on parcourt L de y à z, on sort de $\overline{G}_0$ pour la première fois en $y_0 \subset \Phi_0$ et on revient en G_0 pour y rester toujours en $z_0 \subset \Phi_0$; comme $L \subset G$, les deux points y_0 et z_0 sont tous les deux différents de b ; désignons par Λ l'arc $\overline{y_0 z_0} \subset \Phi_0 - b$.

Alors on a $\Lambda \subset G$, et par conséquent

$$L^* = \overline{yy_0} + \Lambda + \overline{z_0 z} \subset \overline{G}_0 \cdot G \subset S(\xi, \alpha),$$

ce qui démontre le théorème II.

Passons à la démonstration du théorème III.

Dans ce cas m est $\geqslant 2$ et l'on peut supposer que les points $b_1, b_2, \ldots b_n$ de B sont numérotés dans l'ordre de leur succession sur la ligne simple fermée Φ_0.

7. Rappelons que

(12) $$B \subset B_0 \subset S(\xi, \delta) \subset S(\xi, \alpha)$$

et choisissons sur les deux arcs $L^- = \overline{b_1 b_2}$ et $L^+ = \overline{b_1 b_2}$ situés sur Φ_0, les deux points y_1 et y_2 assez voisins du point b_1 pour avoir

(13) $$\varrho(\xi, y_1 + y_2) < \delta.$$

Le nombre δ étant arbitrairement petit, tandis que α est fixe, le théorème III résulterait évidemment de la proposition que voici:

il est impossible de joindre les deux points y_1 et y_2 par une ligne polygonale

(14) $$L = \overline{y_1 y_2} \subset E - F$$

de diamètre $< \frac{\alpha}{2}$.

Passons donc à la démonstration de cette dernière proposition.

8. Supposons que la ligne polygonale (14) existe. Il résulte alors de (13) et de (14) que

$$(15) \qquad L \subset S\left(\xi, \delta + \frac{a}{2}\right) \subset S(\xi, a).$$

Soit y_1^* le dernier point de L appartenant à L^- (dans le sens $y_1 \prec y_2$ sur L). Soit ensuite (dans le même sens) y_2^* le premier point de l'arc $\overline{y_1^* y_2}$ de L qui appartient à L^+.

Désignons par L^* l'arc $\overline{y_1^* y_2^*}$ de L que nous venons d'obtenir, par L_1 celui des deux arcs $\overline{y_1^* y_2^*} \subset \Phi_0$ qui contient le point b_1, par L_2 le second arc $\overline{y_1^* y_2^*} = \overline{\Phi_0 - L_1}$.

L'arc L^* est étranger (à ses extrémités près) à Φ_0. Il est donc situé à l'extérieur ou à l'intérieur de Φ_0.

1°. Supposons d'abord que L^* soit situé à l'extérieur de Φ_0, et désignons par Π celle-là des deux lignes simples fermées $L^* + L_1$ et $L^* + L_2$ qui contient dans son intérieur le domaine G_0.

2°. Supposons ensuite que L^* soit situé à l'intérieur G_0 de Φ_0. La ligne polygonale L^* est alors une section transversale de G_0, et l'une des deux lignes simples fermées $L^* + L_1$ et $L^* + L_2$ contient le point ξ dans son intérieur ; nous la désignerons encore par Π.

Supposons, pour fixer les idées, que, dans les deux cas 1° et 2°, $\Pi = L^* + L_1$. Comme

$$L^* . F \subset L . F = 0$$

et

$$L_1 . F \subset (\Phi_0 - b_2) . F \subset B - b_2,$$

on voit que

$$(16) \qquad \Pi . F \subset B - b_2.$$

On a ensuite, d'après (8) et (15),

$$(17) \qquad \Pi \subset S(\xi, a),$$

donc

$$(18) \qquad I(\Pi) \subset S(\xi, a)$$

(où $I(\Pi)$ désigne l'intérieur de la ligne simple fermée Π).

Il en résulte que la décomposition

$$F = F . I(\Pi) + F . \Pi + F . E(\Pi)$$

est une a-séparation du point $\xi \subset F . I(\Pi)$, par l'ensemble $F . \Pi \subset B - b_2$.

Or cette a-séparation est en contradiction évidente avec la propriété de l'ensemble B d'être un ensemble a-séparant irréductible.

Le théorème III se trouve démontré.

R e m a r q u e 1. La démonstration précédente, et par conséquent les théorèmes II et III, restent valables dans le cas plus général où F est un ensemble fermé plan quelconque de dimension 1, contenant le point ξ avec $ind_\xi\, F \leqslant \omega$.

Remarque 2. *Soit F un ensemble plan fermé et ξ un point de F tel qu'on a $dim_\xi F = 0$. On a de nouveau $\omega_\xi(F) = 0$ ou $\omega_\xi(F) = \infty$.*

Soit en effet $\omega_\xi(F) \geqq \alpha > 0$. Démontrons qu'on a nécessairement $\omega_\xi(F) = \infty$. Désignons par P un polygone de diamètre $< \alpha$, situé dans G et contenant ξ dans son intérieur I. Si l'on avait $\omega_\xi(F) < \infty$, on pourrait construire une ligne polygonale $L = \overline{yz} \subset G$, quels que soient les deux points y, z de G assez rapprochés de ξ. Si $\varrho(\xi, y + z)$ est assez petit, aucune ligne L de cette sorte ne saurait être contenue dans I. Soient donc y_1 et z_1 le premier et le dernier point d'intersection de L et P (dans le sens $y_1 \prec z_1$ sur L). En remplaçant l'arc $\overline{y_1 z_1} \subset L$ par l'arc correspondant de P, on obtiendrait une ligne polygonale $L^* = \overline{yz}$, agregée à $\bar{I}$ et ayant par conséquent un diamètre $< \alpha$, ce qui est impossible. On a donc $\omega_\xi F = \infty$.

Le cas $dim_\xi F = 0$, $\omega_\xi(F) = \infty$ est d'ailleurs facile à réaliser : il suffit de poser $F = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$, où ξ est l'origine des coordonnées oxy et Q_n la circonférence

$$\left(x - \frac{3}{2^{n+1}}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2^{4(n+1)}}.$$

Ainsi, on peut remplacer l'énoncé I par l'énoncé plus général suivant :

I'. *Si F est un ensemble fermé plan de dimension 1, il résulte de l'inégalité $ind_\xi F \leqq 1$* qu'on a

$$\omega_\xi(F) = 0 \text{ ou bien } \omega_\xi(F) = \infty.$$

9. Il nous reste seulement à dire quelques mots sur l'oscillation extérieure d'une ligne cantorienne F aux points d'indice infini.

On peut tout d'abord montrer par des exemples élémentaires que les relations

$$\omega_\xi(F) = \alpha > 0, \quad \text{ou} \quad \omega_\xi(F) = \infty$$

sont compatibles avec chacune des conditions

$$ind_\xi F = \aleph_0, \quad ind_\xi(F) = \mathfrak{c} \tag{19}$$

(il suffit à cet effet de consulter les exemples du ch. I).

Or nous voulons montrer que chacune des égalités (19) est aussi compatible avec

$$\omega_\xi(F) = 0. \tag{20}$$

En effet, considérons en premier lieu la ligne cantorienne $F_{\aleph_0}$ dont l'aspect est reproduit par la figure 16.

La ligne cantorienne $F_{\aleph_0}$ est agrégée au triangle abc ; elle est formée d'une infinité dénombrable de lignes cantoriennes

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$$

dont chacune est homéomorphe au continu de l'ex. 7 (ch. I, § 4), plus le point a.

Chacune des lignes C_n est donc formée d'un „segment limite" $\overline{b_1^n b_2^n} = S_n$

(situé sur l'axe verticale), avec $b_1^1 = b$, et d'une „ligne polygonale généralisée" $L_n = \overline{a_1^n a_2^n \ldots\ldots a_k^n \ldots\ldots}$ composée de segments verticaux d'une même longueur $\lambda_n = \varrho\,(b_1^n\,,\, b_2^n)$, et de segments horizontaux de longueur tendant vers 0.

En désignant par μ_n la distance $\varrho\,(a_1^n\,,\, S_n)$, on a d'ailleurs

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lim_{n \to \infty} \mu_n = 0.$$

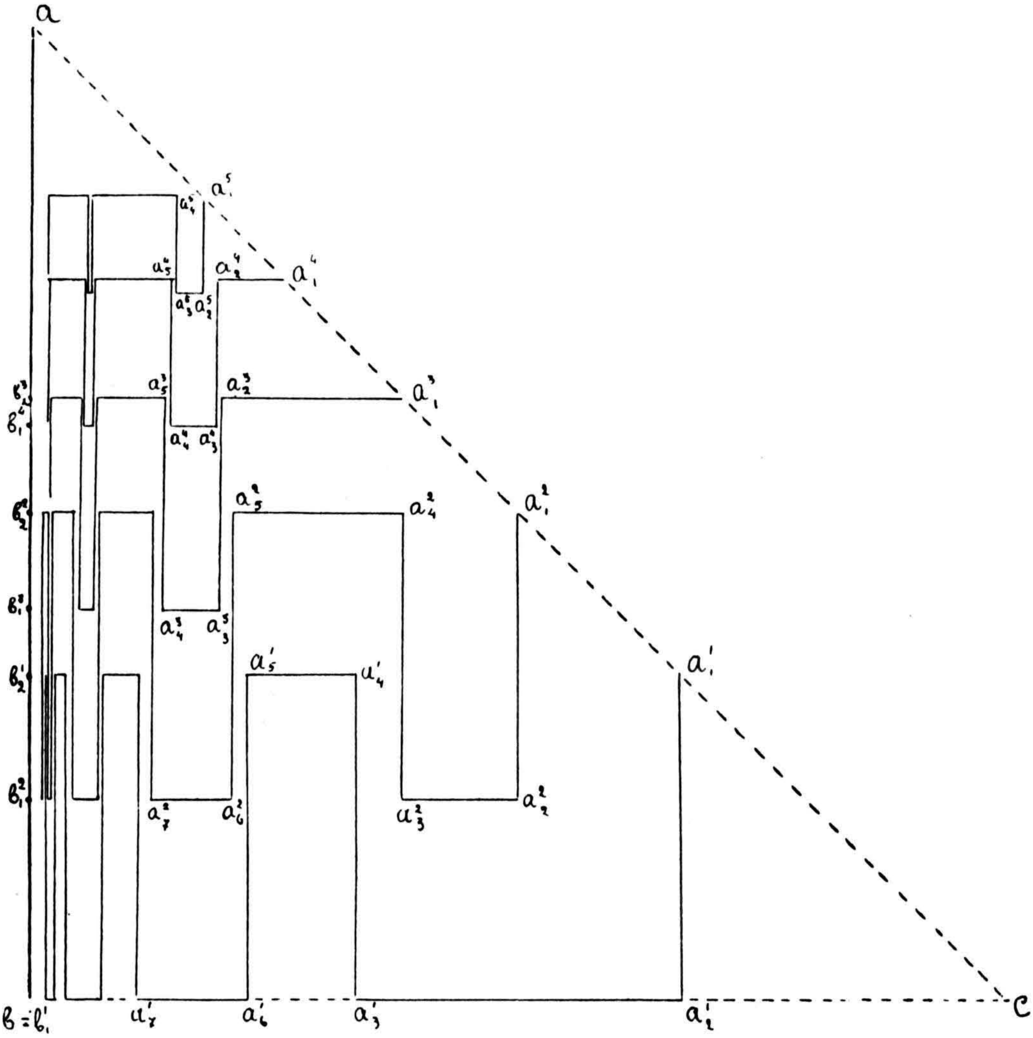

Fig. 16.

Les deux segments S_n et S_{n+1} ont en commun le segment $\overline{b_1^{n+1}\, b_2^n}$ qui forme la partie commune aux continus C_n et C_{n+1}.

On démontre aisément les deux égalités

$$ind_a\, F_{\aleph_0} = \aleph_0\,,\ \omega_a\,(F_{\aleph_0}) = 0.$$

10. Considérons en second lieu la ligne cantorienne

(21) $$F_{\mathfrak{c}} = \xi + \Sigma\, Q_n,$$

construite de la façon suivante. Soit, dans le plan E, xoy un système de coordonnées rectangulaires. Désignons par ξ l'origine de ce système, par K_n le segment $x = \frac{1}{n}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{n}$, par Q_n un continu indécomposable situé dans le trapèze T_n

$$\frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant y \leqslant x$$

et satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. $E - Q_n$ est connexe;

2°. la partie commune à Q_n et à la frontière du trapèze T_n se compose de tous les points de l'ensemble $K_n + K_{n+1}$.

On a alors pour le continu (21):

$$ind_{\xi}\, F_{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c} \quad , \quad \omega_{\xi}\,(F_{\mathfrak{c}}) = 0.$$

NOTES SUPPLÉMENTAIRES

JOINTES À LA SECONDE PARTIE DU

MÉMOIRE SUR LES MULTIPLICITÉS CANTORIENNES.*)

I. UNE CONSÉQUENCE DE LA RELATION $osc_\xi\, G = 0$.[1])

1. Supposons que le domaine plan simplement connexe G ait autour du point ξ de sa frontière une oscillation nulle. Démontrons que, dans ce cas:

1⁰. ξ appartient à un seul bout premier x.

2⁰. ξ est le point accessible de x.

Démonstration. 1⁰. Supposons par impossible que ξ appartienne aux bouts premiers x et y, et soient

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots \tag{1}$$

et

$$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots \tag{2}$$

les chaînes de sections transversales[2]) déterminant successivement x et y. Soient ensuite G_n et H_n les domaines partiels, définis successivement par Q_n et T_n et *contenant*[2]) successivement x et y.

On peut évidemment supposer que G_1 et H_1 (donc a fortiori G_n et H_n, $n > 1$) sont disjoints.

Désignons par α le nombre positif $\varrho(\xi, Q_1)$ et soit δ un nombre positif inférieur à $\frac{\alpha}{2}$, d'ailleurs arbitrairement petit.

---

*) Sous ce titre j'ai réuni diverses remarques recueillies des brouillons de PAUL URYSOHN et se rattachant plus ou moins étroitement aux questions traitées dans ce Mémoire. Ce sont ou bien des propositions d'un caractère plus spécial, ou bien des considérations dont le développement complet manque encore.

Je voudrais particulièrement appeler l'attention du lecteur sur la note IV. Les idées générales, les méthodes et les problèmes qui y sont contenus peuvent servir, il me semble, de point de départ à une série de recherches nouvelles. PAUL ALEXANDROFF.

[1]) Voir ch. VII, § 1.

[2]) Au sens bien connu de M. CARATHÉODORY.

Choisissons deux points η et ζ appartenant successivement à G_1 et à H_1, et vérifiant en outre les inégalités

(3) $$\varrho(\xi, \eta) < \delta \quad , \quad \varrho(\xi, \zeta) < \delta.$$

Joignons enfin les deux points η et ζ par une ligne polygonale $\overline{\eta\zeta} = \Lambda \subset G$.

D'après nos suppositions sur G_1 et H_1, Λ doit nécessairement avoir des points communs avec Q_1. Le diamètre de Λ est donc au moins égal à

(4) $$\varrho(\eta, Q_1) \geqq \varrho(\xi, Q_1) - \varrho(\xi, \eta) > \alpha - \delta > \frac{\alpha}{2}.$$

Le nombre δ étant arbitrairement petit, la dernière relation est en contradiction avec notre supposition $osc_\xi\, G = 0$.

Il résulte en outre du raisonnement précédent que dans le cas où $osc_\xi\, G = 0$ et où ξ est agrégé au bout premier x, chaque suite de sections transversales définissant x converge vers le point ξ.

2°. Démontrons maintenant que ξ est un point accessible par rapport à G, donc *le* point accessible du bout premier x.

Désignons par δ_n un nombre positif satisfaisant à la condition suivante : Quels que soient les deux points η et ζ tels que

$$\eta + \zeta \subset G \ , \ \varrho(\xi, \eta) < \delta_n \ , \ \varrho(\xi, \zeta) < \delta_n \ ,$$

il existe une ligne polygonale $\overline{\eta\zeta} = \Lambda \subset G$ de diamètre $< \frac{1}{2^n}$.

Choisissons dans chaque G_n un point a_n tel que $\varrho(\xi, a_n) < \delta_n$. On peut joindre a_n et a_{n+1} par une ligne polygonale $\Lambda_n \subset G$, $\delta(\Lambda_n) < \frac{1}{2^n}$, et on peut extraire du continu

$$K = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$$

un arc simple $\overline{a_1\xi} = S$ aboutissant au point ξ et contenu, à ce point près, dans le domaine G.

Le point ξ est donc accessible.

2. Un exemple élémentaire montre que la réciproque de la proposition démontrée ne saurait être vraie.

En effet, considérons le domaine plan G dont la construction est représentée schématiquement par la figure ci-après :

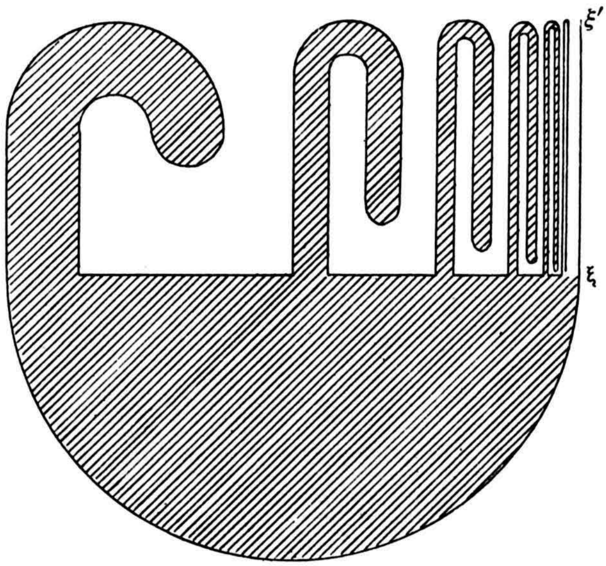

Fig. 17.

Le point désigné dans la figure par la lettre ξ est accessible et appartient à un seul bout premier, tandis que $osc_\xi\ G$ est égale à la longueur du segment rectiligne $\overline{\xi\xi'}$.

II. Sur les continus décomposables en sous-continus deux à deux disjoints.

Démontrons le théorème suivant:

I. *Si le continu C est somme d'un ensemble quelconque de ses sous-continus deux à deux sans points communs, C contient nécessairement des points d'indice* $\mathfrak{c}$.

Remarquons tout d'abord que le système en question de sous-continus de C est nécessairement indénombrable, car il résulte d'un théorème de M. Sierpiński [1]) qu'aucun continu ne peut se décomposer en une infinité dénombrable de ses sous-ensembles fermés (supposés deux à deux disjoints).

Par contre, on construit facilement des exemples de continus se décomposant en une infinité indénombrable de sous-continus disjoints (pour ne citer que des lignes cantoriennes, cf. l'exemple du § 8 du Ch. V).

Ainsi notre théorème n'est qu'un cas particulier de la proposition plus générale suivante:

II. *Si une infinité indénombrable de continus deux à deux disjoints est agrégée à un ensemble fermé C, C contient des points d'indice* $\mathfrak{c}$.

Démontrons le théorème II.

Soit γ un système indénombrable de sous-continus de C, deux à deux sans points communs. Il existe un nombre naturel N et un sous-système indénombrable γ_1 de γ tel que tout élément de γ_1 est un sous-continu de C de diamètre $> \frac{1}{N}$.

Considérons l'espace métrique E formé de tous les sous-ensembles fermés F de C dans lequel la distance est définie par

$$\varrho(f_1, f_2) = apx(F_1, F_2),$$

f désignant le point de E correspondant au sous-ensemble fermé F de C.

E étant un espace métrique compact [2]), donc séparable, tout ensemble indénombrable de points de E y possède des points de condensation.

Considérons notre système γ_1 comme ensemble de points de E, et soit f un point de condensation de cet ensemble. Il existe alors une suite de points

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

de E, appartenant à l'ensemble γ_1 (qui est un ensemble de points de E) et convergeant (dans E) vers f. Il en résulte que les continus

$$F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$$

---

[1]) Voir p. ex. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, p. 38.

[2]) D'après le théor. V du ch. II (§ 7, p. 35—37).

situés dans C et appartenant au système γ_1, convergent (dans C) vers l'ensemble fermé F, qui est par conséquent [1]) lui aussi un sous-continu de C et possède un diamètre $\geqslant \frac{1}{N}$.

Soit maintenant, x un point arbitraire de F, et ε un nombre positif arbitraire $< \frac{1}{N}$.

Considérons dans C une $\frac{\varepsilon}{2}$-séparation quelconque de x:

$$C = A + B + D, x \subset A \subset A + B \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

effectuée par un ensemble fermé B. Désignons par δ le nombre positif $\varrho(x, B+D)$.

Le point f étant point de condensation de γ_1 dans E, il existe une infinité indénombrable de points k de l'ensemble $\gamma_1 \subset E$, dont la distance $\varrho(f, k)$ du point f est inférieure à δ, c. à d. il existe une infinité indénombrable de sous-continus K de C appartenant au système γ_1, pour lesquels

$$apx(F, K) < \delta.$$

Chacun de ces continus a des points communs avec $S(x, \delta)$, donc avec A.

Comme, quel que soit le continu H de γ_1, $\delta(H) > \frac{1}{N} > \delta(A+B)$, chaque continu K a en outre des points communs avec D, et, par conséquent, avec B.

Les continus K étant deux à deux disjoints, il en résulte que B est indénombrable, donc de puissance $\mathfrak{c}$, c. q. f. d.

La question,

la réciproque du théorème II *est-elle vraie?* —

cette question reste ouverte.

Remarquons qu'il résulte de notre démonstration, que tout point x du continu F est un point d'indice $\mathfrak{c}$. On a donc le

Corollaire. *L'ensemble des points x de C où $ind_x C = \mathfrak{c}$ contient, dans les conditions du théorème* II, *des continus.*

[1]) Ch. II, § 5, p. 33.

III. DÉMONSTRATION DIRECTE DE LA PROPRIÉTÉ QU'UN CONTINU DÉPOURVU DE CONTINUS DE CONDENSATION NE CONTIENT QUE DES POINTS D'INDICE FINI.[1]

Soit C un continu satisfaisant aux prémisses du théorème ci-dessus. Nous avons vu [2] que C peut être décomposé comme il suit :

(1) $$C = \Phi + \Sigma \Lambda_n ,$$

c. à d. en un ensemble fermé discontinu Φ et un ensemble au plus dénombrable d'arcs libres $\Lambda_n = \widehat{a_n b_n}$, deux à deux sans points communs. Les arcs libres Λ_n sont ouverts ; ils n'ont aucun point commun avec Φ ; leurs extrémités sont cependant agrégés à Φ. On a en outre $\lim\limits_{n \to \infty} \delta(\Lambda_n) = 0$ (dans le cas où il y a une infinité d'arcs Λ_n).

Soit x un point quelconque de C. Si $x \subset \Lambda_n$, on a évidemment $ind_x\, C = 2$. Reste à examiner le cas où $x \subset \Phi$. Démontrons qu'il est possible d'ε-séparer le point x par un ensemble B formé d'un nombre fini de points (et cela, bien entendu, quel que soit $\varepsilon > 0$).

L'ensemble fermé Φ étant discontinu, il existe une décomposition

(2) $$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \;,\quad x \subset \Phi_1 \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right) \;,\quad \Phi_1 \,.\, \Phi_2 = 0.$$

Désignons par τ le plus petit des nombres positifs $\varrho(\Phi_1 , \Phi_2)$ et $\frac{\varepsilon}{3}$, et divisons les arcs libres Λ_n en cinq classes :

1) les arcs $\Lambda_n = \widehat{a_n b_n}$ tels que $a_n + b_n \subset \Phi_1$ et, en même temps, $\delta(\Lambda_n) \leqq \tau$
2) „ „ „ „ „ „ $a_n + b_n \subset \Phi_2$ „ „ „ „ $\delta(\Lambda_n) \leqq \tau$
3) „ „ „ „ „ „ $a_n + b_n \subset \Phi_1$ „ „ „ „ $\delta(\Lambda_n) > \tau$
4) „ „ „ „ „ „ $a_n + b_n \subset \Phi_2$ „ „ „ „ $\delta(\Lambda_n) > \tau$
5) „ „ „ „ dont une extrémité, soit a_n, appartient à Φ_1, tandis que l'autre b_n est contenue dans Φ_2.

Désignons les arcs Λ_n de la $\nu^{\text{ième}}$ classe ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) par $\Lambda_n^\nu = \widehat{a_n^\nu b_n^\nu}$.

Remarquons que $\delta(\Lambda_n^\nu) \geqq \tau$ si $\nu > 2$. *Il n'existe donc qu'un nombre fini d'arcs Λ_n des classes 3, 4, 5.* Désignons par λ_ν le nombre des arcs libres de la $\nu^{\text{ième}}$ classe ($\nu = 3, 4, 5$). Choisissons sur chaque arc $\Lambda_n^3 = \widehat{a_n^3 b_n^3}$ deux points c_n^3 et d_n^3 tels que

(3) $$a_n^3 < c_n^3 < d_n^3 < b_n^3 \;,\quad \delta(\widehat{a_n^3 c_n^3}) < \tau \;,\quad \delta(\widehat{d_n^3 b_n^3}) < \tau.$$

[1]) Voir ch. IV, § 3, théor. IV (p. 69).

[2]) Ch. III, § 9, théor. XIV (p. 57).

Choisissons pareillement sur chaque arc $\Lambda_n^5 = \widehat{a_n^5 b_n^5}$ un point e_n^5 tel que $\delta(\widehat{a_n^5 e_n^5}) < \tau$.

Posons ensuite

$$A = \Phi_1 + \sum_n \Lambda_n^1 + \sum_{n=1}^{\lambda_3} (\widehat{a_n^3 c_n^3} + \widehat{d_n^3 b_n^3}) + \sum_{n=1}^{\lambda_5} \widehat{a_n^5 e_n^5}; \tag{4}$$

$$B = \sum_{n=1}^{\lambda_3} (c_n^3 + d_n^3) + \sum_{n=1}^{\lambda_5} e_n^5; \tag{5}$$

$$D = \Phi_2 + \sum_n \Lambda_n^2 + \sum_{n=1}^{\lambda_3} \widehat{c_n^3 d_n^3} + \sum_{n=1}^{\lambda_4} \Lambda_n^4 + \sum_{n=1}^{\lambda_5} \widehat{e_n^5 b_n^5}. \tag{6}$$

Il résulte d'abord de $\lim\limits_{n \to \infty} \delta(\Lambda_n^i) = 0$, $i = 1, 2$, que (dans le cas où l'ensemble de ces arcs est infini),

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, \Lambda_n^i \subset \Phi_i\,, \quad i = 1, 2,$$

donc

$$\overline{\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Lambda_n^1} + \overline{\lim_{n \to \infty}}\, \Lambda_n^1 \subset \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Lambda_n^1} + \Phi_1 \subset A + B\,,$$

et, d'une façon analogue,

$$\overline{\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^2} \subset B + D\,.$$

Tous les autres arcs qu'on trouve successivement dans (4) et dans (6) sont en nombre fini ; comme leurs extrémités appartiennent successivement à $\Phi_1 + B$ et à $\Phi_2 + B$, donc à $A + B$ et à $B + D$, les ensembles $A + B$ et $B + D$ sont fermés. Il en résulte que les ensembles $A = C - (B + D)$ et $D = C - (A + B)$ sont des domaines (rel. C), d'ailleurs disjoints.

On a enfin l'inclusion évidente

$$x \subset \Phi_1 \subset A \subset A + B \subset \Phi_1 + \overline{S}(\Phi_1, \tau) \subset \overline{S}(\Phi_1, \tau) \subset S(x, \varepsilon).$$

La décomposition

$$C = A + B + D \tag{7}$$

est donc une ε-séparation du point x effectuée par l'ensemble B formé de $2\lambda_3 + \lambda_5$ points au plus, c. q. f. d.

IV. Les ensembles ε-séparants irréductibles et la notion de pseudo-dimension.

(Définitions, exemples, problèmes).

1. *Les ensembles ε-séparants irréductibles.*

1. *Déf. I.* Soit C un ensemble fermé, x un point quelconque de C, B un ensemble ε-séparant le point x. L'ensemble B est dit *ensemble ε-séparant irréductible* si aucun vrai sous-ensemble $\check{B}$ de B n'est un ensemble ε-séparant le point x.

Nous dirons aussi simplement „ε-irréductible" au lieu de „ε-séparant irréductible".

Une ε-séparation est dite „irréductible" si elle est effectuée par un ensemble „ε-irréductible".

Remarquons dès à présent, que *tout ensemble ε-irréductible est fermé* (par rapport à C, donc, dans notre cas, absolument fermé). En effet, cette proposition est une conséquence immédiate du lemme démontré au § 8 du ch. I de la Première Partie (Fund. Math. VII, p. 69).

2. Un ensemble ε-séparant B (même sur un continu C) ne contient pas nécessairement de sous-ensembles ε-irréductibles. En effet, considérons les exemples suivants :

Ex. 1. Soit E le plan ordinaire pourvu d'un système de coordonnées polaires r, φ. Le continu C est formé des segments rectilignes suivants:

$$S_0 \qquad (\varphi = 0, \ 0 \leqslant r \leqslant 1);$$

$$S_n \qquad \left(\varphi = \frac{1}{n}, \ 0 \leqslant r \leqslant \tfrac{1}{3}\right), \ n = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.}$$

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et soit x le point $r = 0$. Désignons par B l'ensemble formé des points

$$b_n\left(r = \frac{1}{4}, \varphi = \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.};$$

$$b_\omega\left(r = \frac{1}{4}, \varphi = 0\right).$$

L'ensemble B est un ensemble fermé ε-séparant le point x. Tout sous-ensemble $\check{B}$ de B ε-sépare encore le point x dans le cas et dans le cas seulement, où $\check{B}$ contient b_ω et tous les points b_n à partir d'un certain d'entre eux. Il en résulte immédiatement qu'aucun des ensembles $\check{B} \subset B$ n'est un ensemble ε-séparant irréductible.

Ex. 2. Soit (en conservant les notations de l'exemple précédent) ε un nombre positif quelconque inférieur à 1 et K le continu construit comme il suit :

Désignons par $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ les nombres rationnels de l'intervalle (0,1).

Posons

$$S^{(o)} = \{ \varphi = 0, 0 \leqslant r \leqslant 1 \} ;$$

$$S^{(n)} = \left\{ \varphi = \frac{1}{n}, 0 \leqslant r \leqslant \varrho_n \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.};$$

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}.$$

Soit maintenant B un ensemble fermé quelconque, ε-séparant le point x $(r=0)$. L'ensemble $B \,.\, S^{(o)}$ n'est pas vide. Désignons par a le point de $B \,.\, S^{(o)}$ le plus éloigné du point x, par α le rayon vecteur du point a, par α' un nombre quelconque, mais bien déterminé, supérieur à α, mais inférieur à ε (un tel nombre existe toujours puisqu'on a évidemment $\alpha < \varepsilon$). Soit enfin $\mathfrak{S}$ le système de tous les segments $S^{(n)}$ pour lesquels

$$\alpha' < \varrho_n < \varepsilon.$$

On démontre facilement que B a des points communs avec une infinité parmi les segments du système $\mathfrak{S}$.

D'autre part, soit $S^{(\nu)}$ un quelconque des segments du système $\mathfrak{S}$, ayant des points communs avec B ; l'ensemble

$$\check{B} = B - S^{(\nu)}$$

est alors lui aussi un ensemble ε-séparant le point x.

Il en résulte bien que B n'est pas un ensemble ε-irréductible.

Ainsi la singularité de l'exemple 1 *se présente ici quel que soit* $\varepsilon < 1$.

Il est à remarquer en outre que le continu K possède le point x comme point de connexité locale.

Ex. 3. Considérons la courbe cantorienne C composée des segments

$$\begin{array}{ll} S_o & (-1 \leqslant y \leqslant 1, \quad x = 0) ; \\ S_n & \left(-1 \leqslant y \leqslant 1, \quad x = \dfrac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.}; \\ T_1 & (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 1) ; \\ T_2 & (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = -1). \end{array}$$

(On pourrait aussi considérer le continu C de l'exemple 7 du Ch. I, § 4).

Soit $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$ et ξ un point quelconque de S_o. On démontre facilement (en se servant en principe toujours du même raisonnement) qu'aucun ensemble B ε-séparant le point ξ n'est irréductible.

Considérons le point $\xi = (0,0)$. Choisissons un nombre positif $\varkappa < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et soient de nouveau $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ les nombres rationnels de l'intervalle (0,1).

Soit enfin B l'ensemble fermé constitué par les points:

$$x = 0, \quad \varkappa \leqslant y \leqslant 2\varkappa; \quad x = 0, \quad -2\varkappa \leqslant y \leqslant -\varkappa;$$

$$x = \frac{1}{n}, \quad y = \varkappa + \varkappa\varrho\ ; \quad x = \frac{1}{n}, \qquad y = -\varkappa - \varkappa\varrho_n$$

$$\left(n \text{ parcourt tous les nombres naturels supérieurs à } \frac{2}{\varepsilon}\right).$$

L'ensemble B qui est de dimension 1 jouit de la propriété intéressante qu'aucun sous-ensemble 0-dimensional de B n'est ε-séparant pour le point ξ, tandis que B tout entier est bien un ensemble ε-séparant.

Ex. 4. Soit C la courbe de M. SIERPIŃSKI (Ch. I, § 4, ex. 11).

Il existe pour tout point $\xi \subset C$ et tout $\varepsilon > 0$ un ensemble fermé B qui est ε-irréductible tout en possédant la dimension 1. On peut même prendre pour B (selon le choix du point ξ) une ligne simple fermée, ou un arc simple, comme le montre la figure suivante:

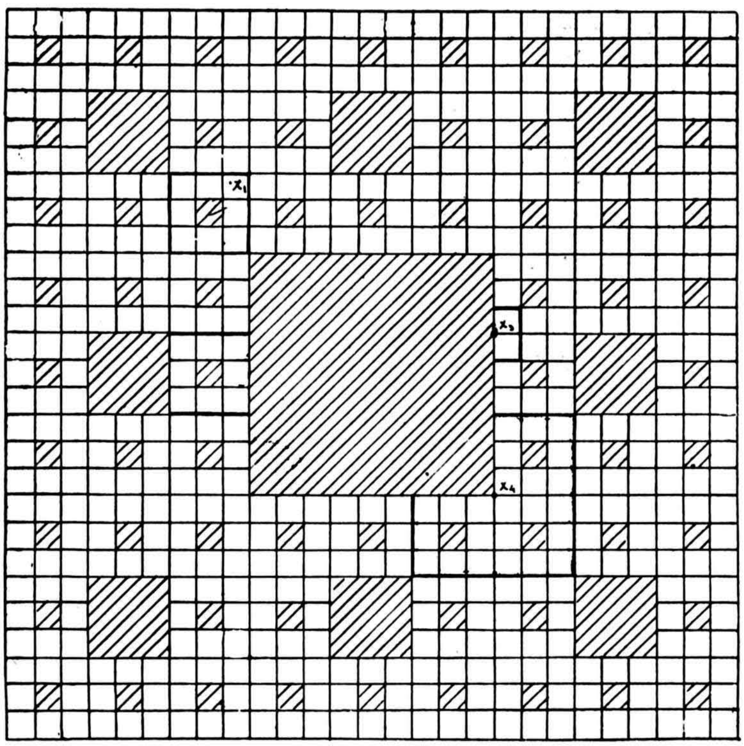

Fig. 18.

Formulons enfin les problèmes suivants:

1). Quels sont les continus C de dimension n qui permettent, pour tout point $\xi \subset C$ et tout $\varepsilon > 0$, une ε-séparation irréductible effectuée par un ensemble de dimension $n - 1$?

Ce problème est particulièrement intéressant dans le cas où C est une ligne cantorienne (c. à d. où l'on a $n=1$).

2) En particulier, existe-il des lignes cantoriennes C, autres que les arcs simples $\overline{ab}$, satisfaisant à l'ensemble des deux conditions suivantes:

α) C est un continu irréductible $\overline{\overline{ab}}$;

β) quels que soient $\xi \subset C$ et $\varepsilon > 0$, il existe une ε-séparation irréductible du point ξ effectuée par un ensemble B de dimension 0?

2. *La pseudo-dimension.*

3. *Déf. II* [1]). Soit B un ensemble ε-séparant le point $a \subset C$. Désignons par $\eta\,(a, B, C)$ la borne inférieure de tous les nombres ε' tels que B est un ensemble ε'-séparant le point $a \subset C$. Nous dirons d'ailleurs, si $\eta\,(a, B, C) = \eta$, que l'ensemble B est un ensemble $B\,(a, C, \eta)$.

Déf. III. Désignons par $M\,(a, B, C)$ l'ensemble des nombres non négatifs $\eta\,(a, \check{B}, C)$, où $\check{B}$ est un sous-ensemble quelconque de B, *d'une dimension inférieure à dim B.*

La borne inférieure de l'ensemble $M\,(a, B, C)$ sera désignée par $\vartheta\,(a, B, C)$:

$$\vartheta\,(a, B, C) = \underset{\check{B} \subset B,\, dim\, \check{B} < dim\, B}{borne\ inf}\ \eta\,(a, \check{B}, C).$$

En d'autres mots:

On appelle $\vartheta\,(a, B, C)$ le plus petit nombre positif ϑ tel que la condition suivante soit vérifiée:

Quel que soit $\vartheta' > \vartheta$, il existe un sous-ensemble $\check{B}$ de B, d'une dimension inférieure à *dim* B et ϑ'-séparant le point a.

Supposons *dim* C finie. Soit $dim\, B = n$, $\vartheta\,(a, B, C) = \vartheta$ et $\eta\,(a, B, C) = \eta$. Nous dirons que B est un $B_n\,(a, C, \eta, \vartheta)$.

Déf. IV. Une suite infinie:

$$(1) \qquad B_{n_1}\,(a, C, \eta_1, \vartheta_1),\ B_{n_2}\,(a, C, \eta_2, \vartheta_2), \ldots,\ B_{n_k}\,(a, C, \eta_k, \vartheta_k), \ldots$$

s'appelle *irréductible*, si l'on a

$$\lim_{k \to \infty} \eta_k = 0;\ \varliminf_{k \to \infty} \vartheta_k = \alpha > 0.$$

(On obtient par exemple une suite irréductible, si $B_{n_k}\,(a, C, \eta_k, \vartheta_k)$ est un ensemble $\frac{1}{k}$-séparant irréductible, au sens de la première section de cette note; on obtient aussi une suite irréductible en supposant que

[1]) Dans les définitions suivantes nous admettons comme ε-séparations les décompositions $C = A + B + D$ satisfaisant aux relations habituelles, mais *où l'ensemble D peut être éventuellement vide* (ce qui peut se produire seulement si $\varepsilon > \frac{1}{2}\,\delta\,(C)$). Il en résulte que tout ensemble $B \subset C$ ne contenant pas le point a, peut être considéré comme ε-séparant le point a (pour une valeur convenable de ε).

$B_{n_k}(a, C, \eta_k \vartheta_k)$ est un ensemble $\frac{1}{k}$-séparant de dimension $m-1$, où $m = dim\, C$).

Déf. V. Le nombre entier $1 + \overline{\lim_{k \to \infty}} n_k$ s'appelle dimension de la suite (1).

Déf. VI. Le plus grand nombre [2]) p, qui se présente comme dimension d'une suite irréductible (1), s'appelle *pseudo-dimension* de C au point a:

$$p = p\, dim_a\, C.$$

On peut encore formuler la dernière définition comme il suit:

Première forme de la définition fondamentale: On appelle $p\, dim_a\, C$ le plus grand entier positif [2]) p satisfaisant à la condition suivante:

il existe un nombre positif α tel qu'on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, un ensemble $B_n(a, C, \eta, \vartheta)$ avec

$$n \geqq p - 1,\ \eta \leqq \varepsilon,\ \vartheta \geqq \alpha.$$

4. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la dimension de C est finie. Pour nous débarasser de cette restriction, il convient de modifier légèrement la définition.

Déf. VII. Soient α et β des entiers non négatifs quelconques, $\beta \leqq \alpha$.

Nous dirons qu'un ensemble $B_\alpha(a, C, \eta)$ est un $B_{\alpha, \beta}(a, C, \eta, \vartheta)$ si l'on a

$$\vartheta = \underset{\check{B} \subset B,\ dim\, \check{B} < \beta}{borne\ inf}\ \eta(a, \check{B}, C). \tag{2}$$

Il résulte de cette définition que la notion d'ensemble $B_n(a, C, \eta, \vartheta)$ du § précédent coïncide avec celle d'ensemble $B_{n,n}(a, C, \eta, \vartheta)$ que nous venons d'introduire.

Seconde forme de la définition fondamentale. On appelle $P\, dim_a\, C$ le plus grand nombre γ (γ est un entier non négatif ou bien ∞) satisfaisant à la condition suivante:

il existe un nombre positif $\varkappa$ tel qu'on puisse trouver un ensemble $B_{\alpha, \beta}(a, C, \eta, \vartheta)$ avec $\beta \geqq \gamma'$, $\eta \leqq \varepsilon$, $\vartheta \geqq \varkappa$, et cela quels que soient l'entier $\gamma' < \gamma$ et le nombre positif ε.

Il est à remarquer que le nombre $\alpha = dim\, B_{\alpha, \beta}(a, C, \eta, \vartheta)$ est sans importance pour la définition précédente.

Si γ est fini (donc, en particulier, si $dim\, C$ est finie), la définition du nombre $P\, dim_a\, C$ se modifie comme il suit:

... le plus grand nombre γ satisfaisant à la condition suivante:

il existe un $\varkappa > 0$ tel qu'on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, un ensemble

$$B_{\alpha, n}(a, C, \eta, \vartheta) \text{ avec } n \geqq \gamma - 1,\ \eta \leqq \varepsilon,\ \vartheta \geqq \varkappa.$$

Pour γ fini, la seconde forme de la définition diffère de la première

---

[2]) Voir plus loin § 5, proposition 3°, justifiant l'emploi (dans notre définition) de l'expression „le plus grand nombre etc."

seulement en ce qu'on considère tous les $B_{\alpha,n}$, $\alpha \geqslant n$, au lieu de se borner aux ensembles $B_{n,n}$. Il en résulte immédiatement qu'on a toujours $P\,dim_a\,C \geqslant p\,dim_a\,C$.

Démontrons qu'on a (pour $P\,dim_a\,C$ fini):

(3) $$P\,dim_a\,C = p\,dim_a\,C.$$

Soit $P\,dim_a\,C = \gamma$ (γ étant un nombre fini). D'après la définition de γ, il correspond à tout $\varkappa_1 > 0$ un $\varepsilon(\varkappa_1) = \varepsilon_1 > 0$ tel qu'aucun ensemble $B_{\alpha,\gamma}(a, C, \eta, \vartheta)$ ne satisfait en même temps aux deux relations $\eta \leqslant \varepsilon_1$, $\vartheta \geqslant \varkappa_1$.

D'autre part, il existe un nombre $\varkappa$ bien déterminé tel qu'on peut trouver, quel que soit $\varepsilon > 0$, un ensemble $B_{\alpha,n}(a, C, \eta, \vartheta)$ avec $n \geqslant \gamma - 1$, $\eta \leqslant \varepsilon$, $\vartheta \geqslant \varkappa$.

Prenons ce nombre $\varkappa$, choisissons ensuite un $\varkappa_1 < \varkappa$, d'ailleurs arbitrairement petit, et considérons un ε quelconque inférieur à $\varepsilon(\varkappa_1) = \varepsilon_1$. Soit B_1 l'ensemble $B_{\alpha,n}(a, C, \eta, \vartheta)$ correspondant à cet ε (en ce sens que $n \geqslant \gamma - 1$, $\eta \leqslant \varepsilon$, $\vartheta \geqslant \varkappa$; α désigne $dim\ B_{\alpha,n}(\ldots)$). On voit immédiatement que n est nécessairement égal à $\gamma - 1$, de sorte que B_1 est un $B_{\alpha,\gamma-1}(a, C, \eta, \vartheta)$, avec $\eta \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ et $\vartheta \geqslant \varkappa > \varkappa_1$.

Deux cas sont possibles a priori:

1°. Il existe un ensemble $B_2 \subset B_1$ de dimension $\gamma - 1$, pour lequel on a $\eta(a, B_2, C) < \varkappa_1$.

2°. Quel que soit le sous-ensemble $(\gamma - 1)$-dimensional [3]) $\check{B}$ de B_1, on a toujours $\eta(a, \check{B}, C) \geqslant \varkappa_1$.

Examinons d'abord le cas 2°. Remarquons que si $\check{B}$ est un sous-ensemble de B_1 de dimension $< \gamma - 1$, on a toujours

$$\eta(a, \check{B}, C) \geqslant \vartheta \geqslant \varkappa \geqslant \varkappa_1.$$

Donc, si nous nous trouvons dans le cas 2°, c'est que B_1 est un $B_{\alpha,\gamma}(a, C, \eta, \tilde{\vartheta})$ avec $\eta \leqslant \varepsilon_1$, $\vartheta \geqslant \varkappa_1$. Cette conclusion contredit la définition du nombre ε_1. Il en résulte que seul le cas 1° peut se présenter.

Soit maintenant B_0 un sous-ensemble quelconque de B_2 de dimension $< \gamma - 1$.

B_0 étant a fortiori un sous-ensemble de B_1, il résulte de la définition du dernier ensemble, que

$$\eta(a, B_0, C) \geqslant \vartheta \geqslant \varkappa.$$

B_0 est par conséquent un $B_{\gamma-1}(a, C, \eta, \vartheta)$ avec

$$\eta \leqslant \varkappa_1, \quad \vartheta \geqslant \varkappa.$$

Le nombre positif $\varkappa_1$ étant arbitrairement petit (tandis que $\varkappa$ est fixé d'avance), il en résulte que $p\,dim_a\,C \geqslant \gamma = P\,dim_a\,C$, donc $P\,dim_a\,C = p\,dim_a\,C$,

c. q. f. d.

Nous ne considérons dans la suite que des ensembles C de dimen-

---

[3]) B_1 contient toujours des ensembles $(\gamma - 1)$-dimensionaux (car on a $dim\ B_1 = \alpha \geqslant \gamma - 1$ α étant un nombre fini).

sion finie, nous nous pouvons donc servir indifféremment de la première ou de la seconde forme de la définition fondamentale.

5. Faisons quelques remarques générales sur la notion de pseudo-dimension.

1°. On démontre d'abord (par des raisonnements élémentaires et immédiatement déterminés par le problème lui-même) que la pseudo-dimension est un invariant topologique.

2°. On a toujours $p\, dim_a\, C \geqslant dim_a\, C$. Soit en effet

$$B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots \tag{4}$$

une suite d'ensembles de dimension $dim\, C - 1$ qui sont respectivement $\frac{1}{k}$-séparants pour le point a. Comme nous avons déjà remarqué au § 3, cette suite est irréductible (au sens de la définition IV). D'autre part, la dimension de notre suite (au sens de la déf. V) est évidemment $dim\, C$, d'où résulte la propriété 2°.

3°. Si $dim\, C = n$, on a, quel que soit $a \subset C$, $p\, dim_a\, C \leqslant n + 1$.

En effet, il résulte immédiatement de la définition de $p\, dim_a\, C$, que l'inégalité $p\, dim_a\, C \geqslant n + 2$ suppose l'existence de sous-ensembles B de C dont la dimension est au moins égale à $n + 1$. Nous verrons cependant par des exemples que l'égalité $p\, dim_a\, C = n + 1$ est compatible avec $dim_a\, C < n$.

4°. On obtient le même nombre $p\, dim_a\, C$ en supposant, dans les définitions précédentes, que tous les ensembles $B(\ldots)$ sont fermés (rel. C).

En effet, la dernière supposition, considérée a priori, ne pourrait contribuer qu' à abaisser la valeur du nombre $p\, dim_a\, C$. Il suffit donc de démontrer la proposition suivante:

Quel que soit le nombre positif δ donné d'avance, l'existence d'un ensemble $B_n(a, C, \eta, \vartheta)$, soit B, entraîne l'existence d'un ensemble *fermé* $B_n(a, C, \eta + \tau, \overline{\vartheta})$, avec $0 \leqslant \tau < \delta$ et $\overline{\vartheta} \geqslant \vartheta$.

Il suffit de démontrer cette proposition dans la supposition $\eta + \delta < \vartheta$ (puisque ϑ reste, dans la définition de $p\, dim_a\, C$, supérieur à un nombre positif fixe α, tandis que η devient infiniment petit).

Choisissons un nombre positif $\tau_1 < \delta$. D'après la définition de $B_n(a, C, \eta, \vartheta)$, l'ensemble B est un ensemble $(\eta + \tau_1)$-séparant le point a; l'ensemble $B = B_n(a, C, \eta, \vartheta)$ contient donc [4]) un sous-ensemble fermé $\tilde{B}$, qui est aussi $(\eta + \tau_1)$-séparant.

La dimension de $\tilde{B}$ ne peut être inférieure à celle de B (car on aurait autrement $\vartheta \leqslant \eta + \tau_1 < \eta + \delta$, ce qui contredit nos suppositions). Par conséquent $\tilde{B}$ est un $B_n(a, C, \eta + \tau, \tilde{\vartheta})$ avec $\tau \leqslant \tau_1 < \delta$. Reste à montrer qu'on a $\tilde{\vartheta} \geqslant \vartheta$.

---

[4]) Voir 1re partie, ch. I, § 8, lemme (Fund. Math. VII, p. 69).

Si l'on avait, par impossible, $\vartheta > \tilde{\vartheta}$, on pourrait trouver, quel que soit ϑ^*, $\vartheta > \vartheta^* > \tilde{\vartheta}$, un ensemble $B^* \subset \tilde{B}$ d'une dimension inférieure à $dim\, \tilde{B} = n$ et qui serait un ensemble ϑ^*-séparant. Or B^* est contenu dans B, et on a $dim\ B^* < n = dim\ B$. On aurait donc $\vartheta \leqslant \vartheta^*$, ce qui est absurde.

Notre proposition se trouve démontrée.

4°. *Déf.* VIII. Si l'on a $p\, dim_a\, C = dim_a\, C$, le point a s'appelle *point ordinaire* de C; dans le cas contraire, le point a s'appelle *point singulier*.

6. *Exemples divers.* 1°. La courbe C de M. SIERPIŃSKI (§ 2, ex. 4) se compose de points singuliers, puisqu'on a, quel que soit $a \subset C$, $p\, dim_a\, C = 2$.

2°. La courbe C (§ 2, ex. 3) contient des points singuliers dont l'ensemble est précisément le segment S_o (voir la discussion de cet exemple au § 2).

3°. Soit C formé du point a et des cercles C_n (intérieur et frontière compris), $n = 1, 2, 3, \ldots$ in inf., où l'on a:

(1) $C_n \,.\, C_{n+1} = a_n$ (a_n étant point de contact extérieur), $C_n \,.\, C_m = 0$, si $|n - m| \geqslant 2$;

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \delta\, (C_n) = 0$;

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \varrho\, (a,\ C_n) = 0$.

On démontre facilement que

$$p\, dim_a\, C = 2,\ dim_a\, C = 1;$$
$$\text{si } x \neq a,\ p\, dim_x\, C = dim_x\, C = 2.$$

4°. Désignons par $F(\alpha)$ la surface de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ (dans l'espace tridimensional ordinaire E_3^{xyz}). Soient $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ des demi-droites infinies issues de l'origine et dont la réunion forme un ensemble partout dense. Désignons par $S_n(\alpha, \beta)$ le segment de T_n contenu entre $F(\alpha)$ et $F(\beta)$. Soit enfin o l'origine des coordonnées.

Posons

$$C = o + \sum_{i=o}^{\infty} F\left(\frac{1}{2^i}\right) + \sum_{i=o}^{\infty}\sum_{j=o}^{\infty} F\left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+j+1}}\right) +$$
$$+ \sum_{i=o}^{\infty}\sum_{j=o}^{\infty}\sum_{n=1}^{j} S_n\left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+j}},\ \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+j+1}}\right).$$

Les faits suivants sont faciles à vérifier:

si $a = o$, on a $dim_a\, C = 1$ et $p\, dim_a\, C = 3$ $\Big($on prend pour les $B_2(\ldots)$ de la Déf. III du § 3 les ensembles $F\left(\frac{1}{2^i}\right)\Big)$;

si $a \subset \sum\limits_{i=o}^{\infty} F\left(\frac{1}{2^i}\right)$, on a $dim_a\, C = 2$ et $p\, dim_a\, C = 3$ (discussion analogue à celle de l'ex. 3 du § 2);

tous les autres points $a \subset C$ sont des points ordinaires ($dim_a\, C = $ $= p\, dim_a\, C = 2$ ou 1).

5°. Soit C^* formé du point a et des cercles C_n (intérieur et frontière compris), $n = 1, 2, 3, \ldots$ in inf; les cercles C_n sont assujettis aux conditions (2) et (3) de l'exemple 3°, tandis que (1) est remplacée par

$$(2^*) \quad C_n \cdot (C_m + a) = 0, \text{ quels que soient } n \text{ et } m \neq n.$$

Tous les points de C^* sont réguliers. En particulier,

$$dim_a\, C^* = p\, dim_a\, C^* = 0$$

(puisque l'ensemble vide est contenu dans tout autre ensemble).

7. *Problèmes divers.*

1°. Quelle est la structure de l'ensemble de tous les points $x \subset C$, où l'on a $p\, dim_x\, C \geqslant n$?

Quelle est la structure de l'ensemble de tous les points singuliers d'un continu donné?

2°. Soit C une multiplicité cantorienne généralisée de dimension n. Un point $a \subset C$, où $dim_a\, C < n$, est-il nécessairement singulier?

3°. Supposons que la multiplicité cantorienne généralisée C ne soit pas localement connexe au point $a \subset C$. Ce point a est-il nécessairement singulier?

4°. Si le point a appartient à un $ccd\,(C)$, est-ce qu'on a nécessairement $p\, dim_a\, C \geqslant 2$?

Remarque. L'intérêt particulier du problème 4° consiste en ce que sa résolution affirmative conduirait à la proposition suivante:

Un continu irréductible $C = \overline{ab}$, où pour tous les points x on a $p\, dim_x\, C = 1$, est nécessairement un arc simple $\overline{ab}$.

8. Nous nous proposons de résoudre maintenant un cas particulier du problème 5°, et cela en démontrant la proposition suivante:

Si l'arc simple S est un continu de condensation complète du continu C, la pseudo-dimension de C est supérieure à 1 dans tous les points de S.

Commençons par démontrer la proposition auxiliaire suivante:

Si l'arc simple S est un continu de condensation complète de C, tout sous-continu S_0 de S est encore un $ccd\,(C)$ [5]).

Démonstration. Soient a et b les deux extrémités de $S = \overline{ab}$. Il suffit de démontrer que tout arc simple S_0 de la forme $S_0 = \overline{ax} \subset S$ est un $ccd\,(C)$.

---

[5]) La dernière proposition présente un intérêt en elle-même. En effet, nous avons vu (ch. III, § 3, ex. 1) qu'un sous-continu K_0 d'un $ccd\,(C)$ n'est pas nécessairement un $ccd\,(C)$. Un exemple extrèmement simple réalisant cette propriété est dû à M. TSCHERKASSOFF. Le continu C de M. TSCHERKASSOFF se compose du segment rectiligne K_0 ($x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1$), de la circonférence Q ($(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$), des segments rectilignes

L'arc simple S étant un $ccd\,(C)$, il existe une suite de sous-continus de $C-S$

$$(5) \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

ayant S pour sa limite topologique. Les nombres positifs $\varepsilon_n = apx\,(S, A_n)$ tendant vers 0, on peut supposer que les continus (5) sont deux à deux sans points communs. Supposons de plus (ce qui est évidemment permis) qu'on ait $\varepsilon_n \geqslant \varepsilon_{n+1}$ et que ε_1 soit en même temps $< \frac{1}{2}\,\varrho\,(a, S_1)$ et $< \frac{1}{2}\,\varrho\,(b, S_0)$, où S_1 est l'arc $\overline{xb} = \overline{S - S_0}$ de S.

Désignons maintenant par P_n l'ensemble fermé de tous les points ξ de A_n qui satisfont à l'inégalité

$$\varrho\,(S_0, \xi) \leqslant \varrho\,(S_1, \xi).$$

D'une façon analogue désignons par Q_n l'ensemble fermé de tous les points η de A_n satisfaisant à l'inégalité

$$\varrho\,(S_0, \eta) \geqslant \varrho\,(S_1, \xi).$$

Soit maintenant a_n un des points de A_n, pour lesquels $\varrho\,(a, a_n) = \varrho\,(a, A_n)$; soit de même b_n un point de A_n satisfaisant à $\varrho\,(b, b_n) = \varrho\,(b, A_n)$.

Il résulte immédiatement des inégalités, auxquelles ε_n est assujetti, que $a_n \subset P_n$, $b_n \subset Q_n$.

Aucun des deux ensembles fermés P_n et Q_n n'est donc vide, et, comme on a

$$P_n + Q_n = A_n,$$

il résulte que $R_n = P_n \,.\, Q_n$ est aussi un ensemble fermé non vide.

Désignons par K_n le composant du point a_n dans l'ensemble fermé P_n.

Démontrons tout d'abord qu'on a $K_n \,.\, Q_n \neq 0$. En effet, K_n étant un composant de l'ensemble fermé $P_n \supset R_n \neq 0$, il existe, si $K_n \,.\, Q_n = 0$, un nombre positif σ tel qu'il est impossible de joindre un point quelconque $p \subset K_n$ et un point $r \subset R_n$ par une σ-chaîne

$$p = q_0, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1} = r, \qquad \varrho\,(q_i, q_{i+1}) < \sigma.$$

$$\left.\begin{array}{l}
S_{2n} \qquad \left(\frac{1}{2^{2n}} \geqslant x \geqslant \frac{1}{2^{2n+1}},\ y = 1\right) \\
\text{et} \quad S_{2n+1} \qquad \left(\frac{1}{2^{2n+1}} \geqslant x \geqslant \frac{1}{2^{2n+2}},\ y = -1\right), \\
\text{des arcs de circonférence} \\
Q_{n+1} \qquad \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}}\right)^2,\ y \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
\text{et de ceux-là parmi les points des segments} \\
T_{n+1} \qquad \left(x = \frac{1}{2^{n+1}},\ -1 \leqslant y \leqslant 1\right), \\
\text{qui sont non intérieurs aux cercles } Q_{n+1} \text{ correspondants.}
\end{array}\right\} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \text{in inf.}$$

On voit de suite que $K_0 + Q$ est un $ccd\,(C)$, tandis que K_0 n'est pas un $ccd\,(C)$.

On conclut de là, par un raisonnement élémentaire et bien connu, à l'existence d'une décomposition
$$P_n = M_n + N_n$$
de l'ensemble fermé P_n en deux ensembles fermés disjoints M_n et N_n, contenant respectivement K_n et R_n.

On a alors
$$A_n = M_n + (N_n + Q_n),$$
où les deux ensembles fermés M_n et $N_n + Q_n$ sont non vides et disjoints. Donc A_n ne saurait être un continu.

La contradiction à laquelle nous avons abouti, démontre bien que l'ensemble $K_n \cdot Q_n$ contient au moins un point p_n.

En remplaçant au besoin la suite (5) par une suite partielle, on peut supposer convergentes les deux suites

(6) $$K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$$

et

(7) $$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots .$$

Il résulte de $p_n \subset K_n \subset A_n$ qu'on a, en posant $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$ et $K_\omega = \lim\limits_{n\to\infty} K_n$:

(8) $$p \subset K_\omega \subset S_0 .$$

D'autre part, on tire de $p_n \subset R_n \subset Q_n$:
$$\varrho(p_n, S_1) \leqslant \varrho(p_n, S_0),$$
donc $\lim\limits_{n\to\infty} (p_n, S_1) = 0$, et par conséquent

(9) $$p \subset S_1 .$$

Il résulte de (8) et de (9) qu'on a $p \subset S_0 \cdot S_1$, donc

(10) $$p = x.$$

Or on a, en outre, $a_n \subset K_n$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \subset K_\omega$.

K_ω est par conséquent un sous-continu de l'arc simple S_0 contenant les deux extrémités a et x de cet arc simple; K_ω est donc identique à S_0. Comme tous les continus K_n sont étrangers à S, donc a fortiori à S_0, l'arc S_0 est un *ccd* (C), donc notre théorème auxiliaire se trouve démontré.

9. Abordons maintenant la démonstration du théorème principal. Le théorème auxiliaire permet de nous borner à la démonstration du fait suivant:

Si $S = \overline{ab}$ *est un ccd* (C), *on a* $p\, dim_a\, C \geqslant 2$.

S étant un *ccd* (C), on peut construire une suite de continus $A_n \subset C - S$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ in inf., tels que

(11) $$apx(S, A_n) < \frac{1}{n}.$$

Désignons par α un nombre fixe, positif et inférieur à $\varrho(a, b)$. En désignant par 2ε le nombre positif $\varrho(a, b) - \alpha$, on peut supposer de plus que, pour chaque n,

$$apx(S, A_n) < \varepsilon. \tag{12}$$

Il en résulte qu'on peut trouver pour chaque n sur A_n deux points a_n et b_n tels que

$$\varrho(a, a_n) < \frac{1}{n}, \quad \varrho(b, b_n) < \frac{1}{n}, \tag{13}$$

$$\varrho(a_n, b_n) > \alpha, \quad \varrho(a, b_n) > \alpha. \tag{14}$$

Soit maintenant h un nombre positif arbitrairement petit, en tout cas inférieur à $\frac{\alpha}{3}$. Construisons sur S un arc partiel $S_{(h)} = \overline{\alpha_{(h)}\beta_{(h)}}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\left\{\begin{array}{ll} (15) & \varrho(a, \alpha_{(h)}) = \frac{h}{3}, \quad \varrho(a, \beta_{(h)}) = \frac{2h}{3}, \\ (16) & S_{(h)} \subset \overline{S}\left(a, \frac{2h}{3}\right) - S\left(a, \frac{h}{3}\right), \quad \overline{a\beta_{(h)}} \subset \overline{S}\left(a, \frac{2h}{3}\right). \end{array}\right.$$

La construction d'un tel arc ne présente aucune difficulté: il suffit de poser, sur S, $a \prec b$, et de désigner ensuite par $\beta_{(h)}$ le premier point de S appartenant à $S - S\left(a, \frac{2h}{3}\right)$; on prendra alors pour $\alpha_{(h)}$ le dernier point de $\overline{S}\left(a, \frac{h}{3}\right)$, agrégé à l'arc partiel $a\beta_h$ de S.

Choisissons sur $S_{(h)}$ un ensemble dénombrable

$$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i, \ldots) \tag{17}$$

dense sur $S_{(h)}$ et ne contenant aucune des deux extrémités $\alpha_{(h)}$ et $\beta_{(h)}$.

Désignons ensuite par U_i la sphère $S(\gamma_i, r_i)$, où r_i est le plus petit des deux nombres positifs $\frac{1}{i}$ et

$$\tfrac{1}{2}\varrho\left(\gamma_i, [S - S_{(h)}] + \overline{S}\left(a, \frac{h}{3}\right) + \left[C - S\left(a, \frac{2h}{3}\right)\right]\right).$$

Les deux points $\alpha_{(h)}$ et $\beta_{(h)}$ étant à l'extérieur de U_i, désignons respectivement par $\alpha_{(h)}^{(i)}$ et $\beta_{(h)}^{(i)}$ le premier et le dernier point de $S_{(h)}$ appartenant à $\overline{U}_i$. D'après le choix de la sphère U_i, $\alpha_{(h)}^{(i)}$ est en même temps le premier point de S qui appartient à $\overline{U}_i$; de même, $\beta_{(h)}^{(i)}$ est, sur S, le dernier point de $\overline{U}_i$.

Désignons par X^i l'arc $\overline{a\alpha_{(h)}^{(i)}}$ de S, et par Y^i l'arc $\overline{\beta_{(h)}^{(i)}b}$ de S.

L'arc $\overline{a\alpha_{(h)}}$ appartient évidemment à X^i; donc

$$X^i \supset S \,.\, \overline{S}(a, h^*), \tag{18}$$

où h^* désigne le nombre positif $\frac{1}{2}\varrho(a, S - \overline{a\alpha_{(h)}}) \leqslant \frac{h}{6}$.

D'autre part, X^i appartient à $a\beta_h$, donc

19) $$X^i \subset S\left(a, \frac{2h}{3}\right).$$

Il résulte de (18) que Y^i appartient au domaine extérieur de la sphère $S(a, h^*)$;

(20) $$Y^i \subset E(a, h^*).$$

En outre

(21) $$Y^i \supset S - S\left(a, \frac{2h}{3}\right).$$

Les continus X^i et Y^i sont contenus dans des composants différents K_{X^i} et K_{Y^i} de l'ensemble fermé $S - U_i$. Il existe par conséquent une décomposition

(22) $$S - U_i = \Phi_1^i + \Phi_2^i$$

en deux ensembles fermés disjoints Φ_1^i et Φ_2^i, satisfaisant aux inclusions

(23) $$\Phi_1^i \supset K_{X^i} \supset X^i \supset S \,.\, \bar{S}(a, h^*) \text{ et}$$

(24) $$\Phi_2^i \supset K_{Y^i} \supset Y^i \supset S - S\left(a, \frac{2h}{3}\right).$$

Il en résulte que

(25) $$\Phi_1^i \subset S\left(a, \frac{2h}{3}\right), \quad \Phi_{\;i} \subset E(a, h^*).$$

Soient G_1^i et G_2^i deux domaines (absolus) satisfaisant aux conditions:

(26) $$\Phi_1^i \subset G_1^i \subset S\left(a, \frac{2h}{3}\right), \quad \Phi_2^i \subset G_2^i \subset E(a, h^*), \quad G_1^i \,.\, G_2^i = 0,$$

désignons par n_i le premier entier tel que pour tout $n > n_i$

(27) $$A_n \subset G_1^i + G_2^i + U_i$$

et posons

(28) $$\begin{cases} X_n^{(i)} = A_n - U_i - G_2^i; \\ Y_n^{(i)} = A_n - U_i - G_1^i. \end{cases}$$

On a

(29) $$A_n - U_i = X_n^{(i)} + Y_n^{(i)},$$

où les ensembles fermés $X_n^{(i)}$ et $Y_n^{(i)}$ sont disjoints.

En outre

$$X_n^{(i)} \subset G_1^i, \quad Y_n^{(i)} \subset G_2^i,$$

donc

(30) $$X_n^{(i)} \subset S\left(a, \frac{2h}{3}\right), \quad \varrho(a, Y_n^{(i)}) > h^*.$$

10. Choisissons les nombres naturels

(31) $$m_1 < m_2 < \ldots < m_i < \ldots$$

sous la seule condition

(32) $$n_i \leqslant m_i$$

et posons

$$X_i = X^{(i)}_{m_i},\ Y_i = Y^{(i)}_{m_i},$$

donc

(33) $$A_{m_i} - U_i = X_i + Y_i,\ X_i \varepsilon \mathfrak{F},\ Y_i \varepsilon \mathfrak{F},\ X_i \subset S\left(a, \frac{2h}{3}\right),\ \varrho(a, Y_i) > h^*.$$

Définissons ensuite les ensembles A, B, D par les égalités suivantes:

(34) $$A = C \,.\, S(a, h^*) + \sum_{i=1}^{\infty} X_i\ ;$$

(35) $$D = \left[C - \overline{S}\left(a, \frac{2h}{3}\right)\right] + \sum_{i=1}^{\infty} Y_i\ ;$$

(36) $$B = C - (A + D).$$

On a donc

(37) $$C = A + B + D,\ A \,.\, B = B \,.\, D = A \,.\, D = 0.$$

On a en outre

$$D \supset C - \overline{S}\left(a, \frac{2h}{3}\right),$$

donc

(38) $$a \subset A \subset A + B \subset S\left(a, \frac{2h}{3}\right).$$

Remarquons que, quel que soit i,

(39) $$B \supset U_i \,.\, A_{m_i}.$$

En effet, on a d'abord, si $j \neq i$,

$$(X_j + Y_j) \,.\, A_{m_i} \subset A_{m_j} \,.\, A_{m_i} = 0,$$

ensuite $$(X_i + Y_i) \,.\, U_i = 0,$$

donc $$\left(\sum_{i=1}^{\infty} (X_i + Y_i)\right) . U_i \,.\, A_{m_i} = 0,$$

enfin $$U_i \,.\left\{ S\left(a, \frac{h}{3}\right) + \left[C - \overline{S}\left(a, \frac{2h}{3}\right)\right]\right\} = 0,$$

par conséquent

$$(A + D) \,.\, U_i \,.\, A_{m_i} = 0,$$

ce qui est exactement (39).

Une conséquence immédiate de l'inclusion (39) est la relation

(40) $$x = dim\, B \geqslant 1.$$

Démontrons maintenant que la décomposition (37) est une $\frac{2h}{3}$-séparation du point a.

D'après (38), il suffit de montrer qu'on a

(41) $$H(A, D) = 0.$$

Or cette dernière égalité résultera de l'ensemble des quatre relations suivantes:

(42) $$\overline{S}(a, h^*) . \left[C - \overline{S}\left(a, \frac{2h}{3}\right)\right] + S(a, h^*) \,.\, \overline{\left[C - \overline{S}\left(a, \frac{2h}{3}\right)\right]} = 0;$$

(43) $$\overline{S}(a, h^*) \,.\, \sum_{i=1}^{\infty} Y_i + S(a, h^*) \,.\, \overline{\sum_{i=1}^{\infty} Y_i} = 0;$$

$$\begin{cases} (44) & \overline{\left[C-\overline{S}\left(a,\frac{2h}{3}\right)\right]}\cdot\sum\limits_{i=1}^{\infty}X_i+\left[C-\overline{S}\left(a,\frac{2h}{3}\right)\right]\cdot\overline{\sum\limits_{i=1}^{\infty}X_i}=0; \\ (45) & \sum\limits_{i=1}^{\infty}X_i\cdot\left(\overline{\sum\limits_{i=1}^{\infty}Y_i}\right)+\sum\limits_{i=1}^{\infty}Y_i\cdot\left(\overline{\sum\limits_{i=1}^{\infty}X_i}\right)=0. \end{cases}$$

h^* étant $\leqslant \frac{h}{3}$, la relation (42) est évidente; (43) résulte de $\sum\limits_{i=1}^{\infty} Y_i \subset C - \overline{S}(a, h^*)$; (44) résulte de $\sum\limits_{i=1}^{\infty} X_i \subset S\left(a, \frac{2h}{3}\right)$; (45) enfin est une conséquence des inclusions

$$\left(\overline{\sum_{i=1}^{\infty} X_i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty} X_i+\overline{lt}_{i\to\infty} X_i \subset \sum_{i=1}^{\infty} X_i+S$$

$$\text{et}\quad \left(\overline{\sum_{i=1}^{\infty} Y_i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty} Y_i+\overline{lt}_{i\to\infty} Y_i \subset \sum_{i=1}^{\infty} Y_i+S.$$

En effet, il s'ensuit de ces inclusions:

$$\left(\overline{\sum_{i=1}^{\infty} X_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty} Y_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right)\cdot\left(\overline{\sum_{i=1}^{\infty} Y_i}\right)\subset\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty} Y_i\right)+$$

$$+S\cdot\sum_{i=1}^{\infty}(X_i+Y_i)=\sum_{i=1}^{\infty}(X_i\cdot Y_i)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}{}^{*} X_i\cdot Y_j+S\cdot\sum_{i=1}^{\infty}(X_i+Y_i)$$

(l'astérisque* désignant que la somme est prise pour toutes les valeurs de j, sauf $j=i$).

Or, on a, quel que soit i, $X_i \cdot Y_i = 0$, et quels que soient i et j, $i \neq j$, $X_i \cdot Y_j \subset A_i \cdot A_j = 0$. Enfin $S \cdot \sum\limits_{i=1}^{\infty}(X_i + Y_i) \subset S \cdot \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i = 0$.

La relation (45), et par suite la propriété (41), se trouve démontrée. B est donc un ensemble $\frac{2h}{3}$-séparant le point a. Il en résulte que

$$\eta=\eta\,(a, B, C) < h. \tag{46}$$

Pour une certaine valeur, encore inconnue, du nombre positif ϑ, l'ensemble B est, en conséquence des développements précédents, un ensemble $B_{x,1}(a, C, \eta, \vartheta)$, et il nous reste à montrer que

$$\vartheta \geqslant \alpha, \tag{47}$$

c. à d. que

quel que soit l'ensemble $\check{B} \subset B$ de dimension nulle, $\eta\,(a, \check{B}, C) \geqslant \alpha$.

D'après la propriété 4° du § 5, on peut se borner à la considération des ensembles *fermés* $\check{B}$. Tout revient donc à la démonstration de la proposition suivante:

Soit $\check{B}$ un sous-ensemble fermé discontinu de B. L'ensemble B n'est pas, pour le point a, un ensemble α-séparant.

11. Soit par impossible

(48) $C = \check{A} + \check{B} + \check{D}, \; a \subset A \subset \check{A} + \check{B} \subset S(a, \alpha),$
$$H(\check{A}, \check{D}) = 0, \; dim\, \check{B} = 0, \; \check{B} \subset B,$$
une α-séparation du point a.

L'ensemble fermé $\check{B}$ étant de dimension 0, l'ensemble $S_{(h)} . \check{B}$ est non dense sur $S_{(h)}$; on peut donc trouver sur $S_{(h)}$ un arc simple S^*, n'ayant aucun point commun avec $\check{B}$, de sorte que le nombre $\mu = \varrho(S^*, \check{B})$ est positif.

L'ensemble $\Gamma = \{\gamma_i\}$ étant dense sur $S_{(h)}$, choisissons sur S^* un point γ_i d'indice i assez élevé pour qu'on ait en même temps

(49) $$\frac{1}{i} < \frac{\mu}{2} \text{ et } a_{m_i} \subset \check{A}.$$

On a alors, d'après la définition de la sphère U_i,
$$\varrho(U_i, \check{B}) \geqslant \varrho(\gamma_i, B) - r_i \geqslant \varrho(\gamma_i, B) - \frac{1}{i} > \frac{\mu}{2}, \text{ donc } U \,.\, \check{B} = 0.$$

Il en résulte que
$$A_{m_i} . \check{B} = A_{m_i} . U_i . \check{B} + X_i . \check{B} + Y_i . \check{B} \subset U_i . \check{B} + (X_i + Y_i) . B = 0.$$

Le continu A_{m_i}, ayant avec $\check{A}$ le point a_{m_i} en commun et étant étranger à $\check{B}$, est nécessairement contenu dans $\check{A}$. Il s'ensuit qu'on a
$$\delta(\check{A}) \geqslant \delta(A_{m_i}) \geqslant \varrho(a_{m_i}, b_{m_i}) > \alpha,$$
ce qui est en contradiction avec (48).

Notre proposition est démontrée.

V. DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME DE M. CARATHÉODORY *) SUR LA DISTRIBUTION CYCLIQUE DES BOUTS PREMIERS. [1])

1. Supposons donné, dans le plan, un domaine simplement connexe W, dont la frontière est la ligne cantorienne C. Nous désignerons, dans ce chapitre, les points de W et de $C = Fr\ W$ par des lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Les *sections transversales* (= Querschnitte [2])) et les *rayons* (= Einschnitte[2])) de W seront désignés successivement par la lettre T et par la lettre P. Les sections transversales et les rayons seront désignés quelquefois par leurs extrémités : $T = \overline{\alpha\beta}$, ou $P = \overline{\alpha\beta}$. Bien entendu, les deux extrémités d'une section transversale peuvent être géométriquement confondues, $\alpha = \beta$. [2])

Des deux extrémités α et β d'un rayon $P = \overline{\alpha\beta}$, nous désignerons celle qui est intérieure à W comme *extrémité initiale*, tandis que l'autre (appartenant à C) sera appelée *extrémité finale*. Nous désignerons enfin par la lettre E l'ensemble de tous les bouts premiers du domaine W.

2. Tout rayon P détermine [3]) un seul bout premier $x(P)$ vers lequel le rayon *converge* [4]) et qui possède l'extrémité finale de P comme son (seul) point accessible [5]). Chaque bout premier ne possédant qu'un seul point accessible, on voit immédiatement que

I. *Deux rayons P_1 et P_2 à extrémités finales différentes déterminent deux bouts premiers différents :* $x(P_1) \neq x(P_2)$.

3. Choisissons dans le domaine W un point déterminé ω et un système de coordonnées rectangulaires, déterminé une fois pour toutes, et ayant son origine au point ω.

---

*) Le théorème se démontre aussi sans peine et sans sortir du domaine de la topologie, en s'appuyant sur la théorie des bouts premiers telle qu'elle se trouve exposée p. ex. dans les „Vorlesungen über Topologie", p. 108 et suiv. de M. KERÉKJÁRTÓ.

(Note de l'éditeur.)

[1]) „Bouts premiers" = Primenden de M. CARATHÉODORY. Le théorème que nous avons en vue est le théorème XIV du mémoire de M. CARATHÉODORY : „Ueber die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete", Math. Ann. 73 (1913), p. 321—370.

M. CARATHÉODORY énonce son théorème comme il suit :

Satz XIV. *Die Primenden eines einfach zusammenhängenden Gebietes G sind zyklisch geordnet.*

Il le démontre en faisant appel à la représentation conforme du domaine donné sur le cercle ; nous nous proposons ici de donner une démonstration *topologique* de cet important résultat.

[2]) CARATHÉODORY, loc. cit. p. 326 et 329—330 (§§ 4 et 8).

[3]) CARATHÉODORY, loc. cit. p. 353, Satz XVII.

[4]) Ibidem, p. 352, § 33.

[5]) Ibidem, p. 351 et suiv.

Appelons *circonférence admissible* toute circonférence K dont le centre appartient à C et dont le rayon est assez petit pour que le point ω se trouve à l'extérieur de K.

Appelons ensuite *section circulaire* $T^{\odot}$ toute section transversale formée par un arc d'une circonférence admissible. Le centre de cette circonférence sera désigné par $\varkappa\,(T^{\odot})$, son rayon par $\sigma\,(T^{\odot})$. Désignons par $\triangle\,(T^{\odot})$ celui des deux domaines, composants de $W - T^{\odot}$, qui ne contient pas le point ω. Nous dirons quelquefois que $\triangle\,(T^{\odot})$ est le domaine *déterminé* par $T^{\odot}$. Désignons enfin par $U\,(T^{\odot})$ l'ensemble de tous les bouts premiers *contenus* dans $\triangle\,(T^{\odot})$ au sens de M. CARATHÉODORY [6]).

Démontrons la proposition élémentaire suivante :

II. *Soient* $P_1 = \overline{a_1\beta}$ *et* $P_2 = \overline{a_2\beta}$ *deux rayons aboutissant à la même extrémité finale* β *et n'ayant, outre cette extrémité, aucun point commun. Supposons qu'il existe une ligne polygonale* $\Pi = \overline{a_1 a_2} \subset W$, *n'ayant avec* $P_1 + P_2$ *que les points* a_1 *et* a_2 *en commun, et telle qu'il y ait des points de* C *à l'intérieur* I *de la ligne simple fermée* $P_1 + \Pi + P_2$. *Les bouts premiers* $x\,(P_1)$ *et* $x\,(P_2)$ *sont alors différents.*

Supposons par impossible qu'on ait $x = x\,(P_1) = x\,(P_2)$, et soit

$$T_1^{\odot}\,,\; T_2^{\odot}\,, \ldots, T_n^{\odot}\,, \ldots$$

une chaîne de sections circulaires définissant le bout premier x.

Soit $T_n^{\odot}$ la première section circulaire de la chaîne ci-dessus, telle qu'il existe un point ξ de $I\,.\,C$ situé à l'extérieur du cercle dont $T_n^{\odot}$ est un arc. Désignons par Γ le composant de ξ dans le domaine non connexe $I - T_n^{\odot}$.

La frontière Φ de Γ est une ligne simple fermée, contenue dans $T_n^{\odot}\,.\,I + (\bar{I} - I)$ et ne contenant pas le point β (qui est le point accessible du bout premier x) ; elle est par conséquent étrangère à C.

Le continu C, ayant des points communs avec Γ, doit donc être contenu dans ce dernier domaine, ce qui est absurde.

Une conséquence immédiate des propositions I et II est la très importante proposition :

III. *Chaque section transversale* $T = \overline{\alpha\beta}$ *détermine deux bouts premiers différents* a_T *et* b_T, *qu'on obtient en prenant sur* $\widehat{\alpha\beta}$ *un point quelconque* γ *et en posant*

$$P_1 = \overline{\gamma\alpha}\,,\; P_2 = \overline{\gamma\beta}\,,\; a_T = x\,(P_1)\,,\; b_T = x\,(P_2)\,.$$

4. D'une façon générale, nous désignerons par la lettre Γ un domaine connexe, composant de $W - T$, T étant une section transversale quelconque; l'ensemble de tous les bouts premiers contenus (au sens de M. CARATHÉODORY) dans Γ sera alors désigné par G (suivi des indices de Γ). La proposition suivante résulte immédiatement de la théorie de M. CARATHÉODORY :

---

[6]) Loc. cit. p. 331, § 11, déf. I.

IV. *Quel que soit le domaine Γ contenant* (au sens de M. CARATHÉODORY) *le bout premier x:*

$$G \supset x,$$

il existe une section circulaire $T^{\odot}$ telle que $x \subset U(T^{\odot}) \, . \, G$.

Transformons maintenant l'ensemble E de tous les bouts premiers x en un espace topologique E en définissant comme voisinage de x tout sous-ensemble G de E contenant x et correspondant à un domaine Γ. *On obtient,* d'après IV, *le même espace E en considérant comme seuls voisinages de x les ensembles $U(T^{\odot}) \supset x$.* Les quatre axiomes de M. HAUSDORFF sont évidemment satisfaits, et l'on a en outre la propriété suivante, conséquence immédiate de la définition de *convergence* au sens de M. CARATHÉODORY [7]:

V. *Pour qu'une suite de bouts premiers*

$$(1) \qquad x_1 \, , x_2 \, , \ldots , x_n \, , \ldots$$

converge (au sens de M. CARATHÉODORY) *vers le bout premier x_ω, il faut et il suffit que la suite* (1), *considérée comme suite de points de l'espace E, converge, dans cet espace, vers le point x_ω.*

L'espace E satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité de M. HAUSDORFF [8], il résulte de IV que E coïncide topologiquement avec l'espace abstrait [9] résultant de la définition de convergence introduite par M. CARATHÉODORY.

Nous pouvons donc formuler comme il suit le résultat de M. CARATHÉODORY sur la distribution cyclique des bouts premiers:

THÉORÈME FONDAMENTAL. *L'espace E est homéomorphe à une circonférence,* ou encore:

L'espace E est une ligne simple fermée.

C'est à la démonstration de ce dernier théorème que sont consacrés les développements ci-dessous.

5. Démontrons d'abord la propriété suivante, très importante, des domaines $U(T^{\odot})$ de l'espace E.

VI. *La frontière du domaine $U(T^{\odot})$, où $T^{\odot} = \overline{\alpha\beta}$, se compose des deux points $a = a_{T^{\odot}}$ et $b = b_{T^{\odot}}$ de l'espace E; elle coïncide d'ailleurs avec la frontière de $E - \overline{U}(T^{\odot})$.*

Soient $\triangle(T^{\odot})$ et $\Gamma = W - \overline{\triangle(T^{\odot})}$ les domaines connexes, composants

---

[7]) Loc. cit. p. 351, note.

[8]) En effet, il suffit de considérer les $U(T^{\odot})$ correspondants à une chaîne de sections circulaires

$$T_1^{\odot} \, , T_2^{\odot} \, , \ldots , T_n^{\odot} \, , \ldots$$

définissant un bout premier donné x.

[9]) Classe (L) de M. FRÉCHET.

de $W - T^{\odot}$; $E - \overline{U}(T^{\odot})$ coïncide alors avec l'ensemble G de tous les bouts premiers *contenus* dans Γ.

Il en résulte que $Fr(U(T^{\odot}))$, de même que $Fr(G)$, appartient à l'ensemble des deux points $a + b$ de l'espace E ; il nous reste donc de montrer que chacun des deux points a et b est point-limite de $U(T^{\odot})$ et de G. Les quatre cas étant absolument symétriques, il suffit de prouver qu'on a p. ex. $a \subset \overline{U}(T^{\odot})$.

Soit

(2) $$T_1^{\odot}, T_2^{\odot}, \ldots, T_n^{\odot}, \ldots \qquad T_n^{\odot} = \overline{\delta_1^n \delta_2^n}$$

une chaîne de sections circulaires de centre α, déterminant le bout premier a.

Nous avons à démontrer la relation

(3) $$U(T_n^{\odot}) \,.\, U(T^{\odot}) \neq 0, \quad \text{quel que soit } n.$$

Supposons d'abord que les deux points α et β soient distincts. Il en résulte que pour un n assez grand, $T_n^{\odot}$ a avec $T^{\odot}$ un seul point γ_n en commun. L'un des deux arcs $\overline{\delta_1^n \gamma_n}$ et $\overline{\delta_2^n \gamma_n}$ est donc à ses extrémités près agrégé à $\triangle(T^{\odot})$. Supposons que cet arc soit $\overline{\delta_1^n \gamma_n}$. L'arc $\overline{\alpha\gamma_n}$ de $T^{\odot}$ forme alors avec l'arc $\overline{\delta_1^n \gamma_n}$ une section transversale $T = \overline{\alpha\gamma_n} + \overline{\gamma_n \delta_1^n}$, et l'un des deux domaines composants de $W - T$, soit Γ, appartient en même temps à $\triangle(T^{\odot})$ et à $\triangle(T_n^{\odot})$; l'ensemble G, correspondant à Γ, est donc en même temps un sous-ensemble de $U(T^{\odot})$ et de $U(T_n^{\odot})$. La relation (3) se trouve démontrée.

Supposons maintenant $\alpha = \beta$. La section $T^{\odot}$ est alors un cercle, dont nous désignerons l'intérieur et l'extérieur successivement par I et A.

Les domaines $I \,.\, W$ et $A \,.\, W$ étant simplement connexes (d'après la définition des sections transversales), désignons par $\tilde{C}_I$ et $\tilde{C}_A$ les continus $Fr(I \,.\, W)$ et $Fr(A \,.\, W)$. Posons

$$C_I = \tilde{C}_I \,.\, C \quad \text{et} \quad C_A = \tilde{C}_A \,.\, C.$$

On a

$$C = C_I + C_A, \quad C_I \,.\, C_A = \alpha, \quad C_I = C \,.\, I + \alpha, \quad C_A = C \,.\, A + \alpha.$$

C étant un continu, il résulte facilement de ces égalités que C_I et C_A sont eux aussi des continus.

Soit maintenant Q_n la circonférence, dont $T_n^{\odot}$ est un arc ; désignons par n un entier assez grand pour que $\delta(Q_n)$ soit inférieur au plus petit des deux nombres positifs $\delta(C_I)$ et $\delta(C_A)$. Soient γ_1 et γ_2 les deux points d'intersection de $T^{\odot}$ et Q_n. Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait

$$a = x(P_1),$$

où P_1 est l'arc $\overline{\alpha\gamma_1}$ de $T^{\odot}$, $\overline{\alpha\gamma_1} \,.\, \gamma_2 = 0$. Alors, le point γ_1 appartient nécessairement à $T_n^{\odot}$. D'après le choix du nombre n, chacun des deux continus C_I et C_A possède des points à l'intérieur et à l'extérieur du cercle Q_n. Il en résulte, que chacun des deux arcs $\overline{\gamma_1\gamma_2}$ de Q_n, à savoir les arcs $\Lambda_A = \overline{\gamma_1 \gamma_A \gamma_2}$ et $\Lambda_I = \overline{\gamma_1 \gamma_I \gamma_2}$ (fig. 19)

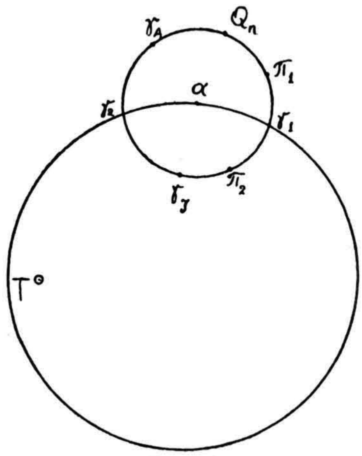

Fig. 19

a des points communs avec C.

Soit donc $\overline{\pi_1\pi_2}$ l'arc de Q_n satisfaisant aux conditions

$$\overline{\pi_1\pi_2} \supset \gamma_1 \, , \; [\overline{\pi_1\pi_2} - (\pi_1 + \pi_2)] \, . \, C = 0 \, , \; \pi_1 + \pi_2 \subset C \, .$$

Désignons par P_A et P_I les deux arcs $\overline{\gamma_1\pi_1}$ et $\overline{\gamma_1\pi_2}$ de $\overline{\pi_1\pi_2}$, et posons

$$T_I = P_1 + P_I \quad , \quad T_A = P_1 + P_A \, .$$

T_I décompose W en deux domaines partiels dont l'un, soit Γ_I, est contenu dans $\triangle(T^{\odot}) \, . \, \triangle(T_n^{\odot})$; de même, T_A décompose W en deux domaines, dont l'un, soit Γ_A, est situé dans $\Gamma \, . \, \triangle(T_n^{\odot})$. On a alors, en désignant par G_I et G_A les ensembles de bouts premiers, *contenus* successivement dans Γ_I et Γ_A:

$$G_I \subset U(T^{\odot}) \, . \, U(T_n^{\odot}); \; G_A \subset G \, . \, U(T_n^{\odot}), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

6. Appelons *rationnel* chaque rayon rectiligne $P = \overline{\alpha\beta}$ dont les deux coordonnées de l'extrémité initiale α et le coëfficient angulaire sont rationnels.

Un bout premier x sera dit rationnel, s'il existe au moins un rayon rationnel P^r définissant x: $x = x(P^r)$.

L'ensemble R de tous les bouts premiers rationnels étant dénombrable, rangeons-les une fois pour toutes en une suite bien déterminée

$$r_1, \; r_2, \ldots, \; r_n, \ldots \tag{4}$$

Désignons par

$$\varrho_1, \; \varrho_2, \ldots, \; \varrho_n, \ldots \tag{5}$$

les points accessibles correspondants.

Ils seront dits points rationnels de C.

Un cercle admissible sera dit rationnel, si son centre est un point rationnel et son rayon un nombre rationnel.

Une section circulaire sera dite section rationnelle si elle est arc d'un cercle rationnel.

On voit facilement que l'ensemble de toutes les sections rationnelles est dénombrable.

Soient donc

(6) $$T_1^{(r)}, T_2^{(r)}, \ldots, T_n^{(r)}, \ldots, T_n^{(r)} = \overline{a_n^{(r)} \beta_n^{(r)}}$$

les sections rationnelles.

Rappelons-nous d'avoir désigné par $\varkappa(T^{\odot})$ le centre et par $\sigma(T^{\odot})$ le rayon de la circonférence dont la section circulaire $T^{\odot}$ est un arc et posons

(7) $$\begin{cases} \varrho_n = \varkappa(T_n^{(r)}), \sigma_n = \sigma(T_n^{(r)}), \triangle_n = \triangle(T_n^{(r)}), U_n = U(T_n^{(r)}), \\ a_n = a_{T_n^{(r)}}, \ b_n = b_{T_n^{(r)}}. \end{cases}$$

7. Soit x un bout premier quelconque et

(8) $$T_1^{\odot}, T_2^{\odot}, \ldots, T_n^{\odot}, \ldots$$

une chaîne de sections circulaires concentriques définissant x. Nous avons déjà remarqué [8]) qu'on peut considérer les voisinages

$$U(T_1^{\odot}), U(T_2^{\odot}), \ldots, U(T_n^{\odot}), \ldots$$

correspondants comme un système de voisinages du point x de l'espace E. Considérons un quelconque parmi ces voisinages, soit $U(T_{m_0}^{\odot})$.

Désignons par γ le centre commun des circonférences Q_n (auxquelles appartiennent successivement les arcs $T_n^{\odot}$). Soit n assez grand pour que

$$\sigma(T_n^{\odot}) < \frac{1}{4}\sigma(T_{m_0}^{\odot}).$$

L'ensemble des points rationnels étant dense sur C, soit ϱ_m un point rationnel tel que

$$\varrho(\gamma, \varrho_m) < \sigma(T_n^{\odot}).$$

Considérons une circonférence Q de centre ϱ_m et de rayon rationnel compris entre $\frac{1}{2}\sigma(T_{m_0}^{\odot})$ et $\frac{3}{4}\sigma(T_{m_0}^{\odot})$. Le cercle Q_n est contenu dans l'intérieur de Q, tandis que Q, à son tour, est situé à l'intérieur de Q_{m_0}. Par conséquent $Q \cdot W$ se compose d'une ou de plusieurs sections circulaires (extrémités exclues), et l'une d'elles, soit $T^{\odot}$, sépare $T_n^{\odot}$ de $T_{m_0}^{\odot}$. La section $T^{\odot}$ est une section rationnelle, donc une $T_p^{(r)}$ bien déterminée, et l'on a

(9) $$x \subset U_p \subset U(T_{m_0}^{\odot}).$$

Ce que nous venons de démontrer, constitue la proposition suivante:

VII. *Le système de tous les U_n considéré comme système de voisinages* [10]) *est équivalent au système de voisinages de l'espace E défini au § 4.*

Par conséquent:

VIII. *L'espace E satisfait au second axiome de dénombrabilité.*

D'autre part, *l'espace E est régulier.* En effet, soit x un point quelconque

---

[10]) On doit considérer, bien entendu, chaque U_n comme voisinage de chaque point $x \subset U_n$

de E et (8) une chaîne de sections circulaires (concentriques) définissant le bout premier x. Il résulte alors de VI qu'on a toujours

$$\overline{U}(T^{\odot}_{n+1}) \subset U(T^{\odot}_{n}),$$

ce qui démontre la régularité de E.

Des théorèmes connus sur la métrisation des espaces topologiques [11]) on tire maintenant la conclusion suivante:

IX. *E est un espace métrisable.*

8. X. *Supposons que le rayon $P=\overline{\alpha\beta}$ soit contenu (à son extrémité finale β près) dans $\triangle(T^{\odot})$ (où $T^{\odot}$ est une section circulaire quelconque). Supposons de plus que β ne coïncide avec aucune des extrémités de $T^{\odot}$. Alors le bout premier x (P) appartient à $U(T^{\odot})$.*

En effet, soit

(8) $$T^{\odot}_{1},\ T^{\odot}_{2},\ldots,\ T^{\odot}_{n},\ldots$$

une chaîne de sections circulaires définissant le bout premier $x=x(P)$.

On peut supposer qu'on a, quel que soit n,

$$\varkappa(T^{\odot}_{n})=\beta,\ \sigma(T^{\odot}_{n})<\varrho(\beta,T^{\odot}),\ \text{donc}\ T^{\odot}\,.\,T^{\odot}_{n}=0.$$

Évidemment les $T^{\odot}_{n}$ sont tous contenus dans $\triangle(T^{\odot})$.

Puisque $P\,.\,\triangle(T^{\odot}_{n})$ et, par conséquent, $\triangle(T^{\odot}_{n})\,.\,\triangle(T^{\odot})$ est non vide, tous les domaines $\triangle(T^{\odot}_{n})$ sont contenus dans $\triangle(T^{\odot})$; il s'ensuit que le bout premier x *est contenu* (au sens de M. CARATHÉODORY) dans $\triangle(T^{\odot})$, c. à d. $x\subset U(T^{\odot})$.

XI. *L'espace E est compact.*

En effet, l'espace E étant métrisable, choisissons une fois pour toutes une définition déterminée de la distance, et cherchons à construire un sous-ensemble de E en même temps dense et compact dans E.

Nous montrerons que *l'ensemble R de tous les bouts premiers* jouit de ces propriétés.

L'ensemble R étant dense dans E, nous n'avons qu'à prouver qu'il est compact dans E.

Pour arriver à ce but, commençons par démontrer la proposition auxiliaire suivante:

Lemme 1. *Soit*

(10) $$P^{(r)}_{1},\ P^{(r)}_{2},\ldots,\ P^{(r)}_{n},\ldots$$

une suite de rayons rationnels, tels que $\lim\,\delta\,(P^{(r)}_{n})=0$ et que leurs extrémités initiales α_n convergent en même temps au sens géométrique vers un point $a\subset C$, et au sens de M. CARATHÉODORY [12]) vers un bout premier a.

---

[11]) P. URYSOHN, Zum Metrisationsproblem, Math. Ann. 94, p. 309.

A. TYCHONOFF, Ueber einen Metrisationssatz von P. URYSOHN, Math. Ann. 95, p. 139.

[12]) Loc. cit. p. 332, III.

Sous ces conditions, les bouts premiers $a_n = x(P_n^{(r)})$ *convergent vers* a.

En effet, soit $U = U(T^{\odot})$ un voisinage quelconque du point $a \subset E$. Le point α étant évidemment *contenu* dans a, désignons par σ le nombre positif $\varrho(\alpha, T^{\odot})$. Soit n_0 assez grand pour qu'on ait, quel que soit $n > n_0$, les relations suivantes:

$$a_n \subset \triangle(T^{\odot}); \tag{11}$$

$$\varrho(\alpha, \alpha_n) < \frac{\sigma}{2}; \tag{12}$$

$$\delta(P_n^{(r)}) < \frac{\sigma}{2}. \tag{13}$$

Alors, quel que soit le point $\gamma \subset P_n^{(r)}$, $\varrho(\alpha, \gamma)$ est inférieur à $\varrho(\alpha, T^{\odot})$, donc

$$P_n^{(r)} \, . \, T^{\odot} = 0. \tag{14}$$

Il résulte de (11) et de (14) que $P_n^{(r)} \subset \triangle(T^{\odot})$, donc, en vertu de X, $a_n \subset U(T^{\odot})$, quel que soit $n > n_0$. $U(T^{\odot})$ étant un voisinage arbitraire de a, notre lemme se trouve établi.

Soit maintenant

$$\mathfrak{r}_{m_1}, \mathfrak{r}_{m_2}, \ldots, \mathfrak{r}_{m_k}, \ldots \tag{15}$$

un ensemble infini quelconque de bouts premiers rationnels. Désignons par

$$P_{m_1}^{(r)}, P_{m_2}^{(r)}, \ldots, P_{m_k}^{(r)}, \ldots, \qquad P_{m_k}^{(r)} = \overline{\alpha_{m_k} \beta_{m_k}}, \ \beta_{m_k} \subset C, \tag{16}$$

les rayons rationnels correspondants. En remplaçant $P_{m_k}^{(r)}$ par un rayon partiel $P_k^{(r)} = \overline{\alpha'_{m_k} \beta_{m_k}}$, on peut toujours supposer que la longueur de $P_k^{(r)}$ soit inférieur à $\frac{1}{k}$.

En vertu du théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS et du théorème VII de M. CARATHÉODORY, on peut extraire de (15) une suite partielle telle que, pour les $P_k^{(r)}$ correspondants, les extrémités initiales satisfassent aux deux conditions de convergence du lemme 1.

Il résulte alors de ce lemme que les $x(P_k^{(r)}) = x(P_{m_k}^{(r)})$ correspondants forment une suite convergente, ce qui complète la démonstration de la proposition XI.

9. XII. *L'espace E est un continu.*

L'espace E étant un espace métrique compact, le théorème XII est équivalent à la proposition suivante:

XII'. *Quels que soient les deux points* x *et* y *de* E *et le nombre positif* ε, *il existe dans* E *une* ε*-chaîne joignant* x *et* y, c. à d. *une suite finie de points de* E:

$$z_0 = x, \ z_1, \ldots, z_n, \ z_{n+1} = y, \tag{17}$$

telle que $\varrho(z_i, z_{i+1}) < \varepsilon$ $(0 \leqq i \leqq n)$.

Nous commençons la démonstration de XII′ par le lemme suivant:

Lemme 2. *Soit*

$$(18) \qquad T_1, T_2, \ldots, T_m$$

un système fini de sections transversales, et Γ_i $(1 \leqq i \leqq m)$ *un des deux composants de* $W - T_i$. *Soit comme toujours* G_i *l'ensemble des bouts premiers contenus dans* Γ_i. *Supposons enfin que nos* G_i *satisfassent à la condition suivante: tout bout premier de* W *appartient à au moins un des ensembles* G_i $(1 \leqq i \leqq m)$.

Il existe alors un nombre positif η *tel que chaque point* ξ *de* W *distant de* C *de moins de* η *appartient à* $\sum_{i=1}^{m} \Gamma_i$.

Supposons par impossible que notre lemme soit faux; il existe alors une suite infinie de points de $W - \sum_{i=1}^{m} \Gamma_i$:

$$(19) \qquad \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

telle qu'on a $\varrho(\xi_n, C) < \frac{1}{n}$.

Aucune suite partielle de (19) ne peut avoir un point limite intérieur à W; il en résulte (en vertu du théorème VII de M. Carathéodory [13]) qu'une suite partielle de (19) *converge* (au sens de M. Carathéodory [13]) vers un bout premier x. On peut évidemment supposer, que la suite (19) tout entière converge vers x. Le bout premier x appartenant p. ex. à G_i tous les points (19) sont contenus, à partir d'un certain d'entre eux, dans Γ_i, contrairement à la définition de la suite (19).

Notre lemme est démontré.

10. Le nombre $\varepsilon < 0$ étant donné, choisissons pour chaque point $x \subset E$ un voisinage $U_{m_\lambda} \supset x$ du système (7), tel qu'on ait (dans l'espace métrique E)

$$(20) \qquad \delta(U_{m_\lambda}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En appliquant le théorème de Borel-Lebesgue, on trouve un nombre fini de voisinages (20) recouvrant encore l'espace E.

Soient (pour simplifier les notations)

$$(21) \quad U_1, U_2, \ldots, U_\lambda \quad (\sum_{i=1}^{\lambda} U_i = E, \quad U_i = U(T_i^{(r)}), T_i^{(r)} = \overline{a_i^{(r)} \beta_i^{(r)}})$$

ces voisinages.

Considérons les domaines

$$(22) \qquad \triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_\lambda \quad (\triangle_i = \triangle(T_i^{(r)}))$$

correspondants.

Il peut arriver que $\triangle_i \cdot \triangle_j \neq 0$, tandis que $U_i \cdot U_j = 0$.

---

13) Carathéodory, loc. cit. p. 341

Considérons un $\triangle_i$ quelconque ($i \leqslant \lambda$) et soient $\triangle_{j_1}, \triangle_{j_2}, \ldots, \triangle_{j_s}$ les $\triangle_j$ satisfaisant à

(23) $$\triangle_i \,.\, \triangle_{j_h} \neq 0 \,, \quad U_i \,.\, U_{j_h} = 0 \quad (1 \leqslant h \leqslant s)\,.$$

Le domaine

$$\Gamma_i = \triangle_i - \sum_{h=1}^{s} \overline{\triangle_{j_h}}$$

est défini par une section transversale T_i formée d'un nombre fini d'arcs circulaires, et l'on a évidemment

(24) $$U_i = G_i$$

(où G_i est l'ensemble de tous les bouts premiers *contenus* dans Γ_i).[14])

Nous nous trouvons dans les conditions du lemme du § précédent, et il existe un nombre positif η tel que tout point $\xi \subset W$ distant de C de moins de η appartient à $\sum_{i=1}^{\lambda} \Gamma_i$.

Les domaines Γ_i jouissent en outre de la propriété suivante: *Si* $\Gamma_i \,.\, \Gamma_j \neq 0$, *on a toujours* $U_i \,.\, U_j \neq 0$.

11. Considérons un quadrillage $\mathfrak{T}$ du plan, composé de carrés assez

---

[14]) Pour démontrer ces propriétés, il suffit d'examiner les conséquences du couple de relations

(23*bis*) $$\triangle_i \,.\, \triangle_j \neq 0 \,, \quad U_i \,.\, U_j = 0.$$

On a dans ce cas tout d'abord

$$T_i^{(r)} \,.\, T_j^{(r)} \neq 0$$

(car si $\triangle_i \,.\, \triangle_j \neq 0$ et $T_i^{(r)} \,.\, T_j^{(r)} = 0$, c'est que l'un des domaines $\triangle_i$ et $\triangle_j$ est contenu dans l'autre, donc $U_i \,.\, U_j \neq 0$).

Soit donc γ un point d'intersection des deux arcs circulaires $T_i^{(r)} = \overline{\alpha_i^{(r)} \beta_i^{(r)}}$ et $T_j^{(r)} = \overline{\alpha_j^{(r)} \beta_j^{(r)}}$, et supposons, p. ex., qu'on pénètre dans $\triangle_i$ en suivant l'arc $\overline{\gamma \beta_j^{(r)}}$ de $T_j^{(r)}$ (dans le sens $\gamma \to \beta_j^{(r)}$).

Supposons d'abord que l'arc ouvert $\widehat{\gamma \beta_j^{(r)}}$ de $T_j^{(r)}$ soit contenu dans $\triangle_i$.

Si le point $\beta_j^{(r)}$ ne coïncide avec aucune des extrémités de $T_i^{(r)}$, le bout premier $b_j^{(r)}$ est contenu dans U_i (d'après X), de sorte que $U_i \,.\, \overline{U_j} \neq 0$. Les ensembles U_i et U_j étant des domaines (rel. E), il s'ensuit que (contrairement à notre supposition) $U_i \,.\, U_j \neq 0$.

Donc, si $\widehat{\gamma \beta_j^{(r)}} \subset \triangle_i$, $\beta_j^{(r)}$ coïncide, p. ex., avec $\beta_i^{(r)}$. Le domaine plan $\triangle_i - \overline{\triangle_j}$ se trouve alors défini par la section transversale T_i se composant de l'arc $\overline{\alpha_i^{(r)} \gamma}$ de $T_i^{(r)}$ et l'arc $\overline{\gamma \beta_j^{(r)}}$ de $T_j^{(r)}$.

Supposons ensuite que l'arc $\widehat{\gamma \beta_j^{(r)}}$ de $T_j^{(r)}$ ne soit pas contenu dans $\triangle_i$. Désignons alors par δ le point d'intersection de $\widehat{\gamma \beta_j^{(r)}}$ et $T_i^{(r)}$. La section transversale T_i définissant $\triangle_i - \overline{\triangle_j}$ sera formée alors de l'arc $\widehat{\gamma \delta}$ de $T_j^{(r)}$ et des deux arcs de $T_i^{(r)}$ qu'on obtient en enlevant de cette dernière section circulaire l'arc partiel compris entre les deux points γ et δ.

Notre construction se prête à une extension immédiate au cas où, au lieu du seul couple de relations (23*bis*), on en a un nombre fini d'après (23).

petits pour que chacun des domaines Γ_i contienne au moins un carré (intérieur et frontière compris) de ce quadrillage. Désignons par Ω l'ensemble de tous les carrés de $\mathfrak{T}$ contenus dans W.

Le nombre η étant défini comme au § précédent, désignons par Π une ligne polygonale fermée sans points doubles, jouissant des propriétés suivantes :

1°. Π est contenu dans W et contient Ω dans son intérieur.

2°. Quel que soit le point ξ de Π, $\varrho(\xi, C) < \eta$.

Il résulte de la définition du nombre η que $\Pi \subset \sum_{i=1}^{\lambda} \Gamma_i$. Comme chaque domaine Γ_i pénètre dans l'intérieur [15]) et dans l'extérieur [16]) de Π, l'ensemble $\Pi . \Gamma_i$ n'est jamais vide, quel que soit i, $1 \leqslant i \leqslant \lambda$.

12. Introduisons la définition suivante :

Nous dirons qu'un système fini $\mathfrak{S}$ d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (situés dans un espace quelconque) est *enchaîné*, s'il existe, quels que soient les ensembles M_p et M_q de $\mathfrak{S}$, une *„chaîne d'ensembles du système $\mathfrak{S}$ joignant M_p et M_q"*; on entend par là une suite finie d'ensembles

$$M_{r_0}, M_{r_1}, \ldots, M_{r_{n+1}}$$

du système $\mathfrak{S}$ tels que $r_0 = p$, $r_{n+1} = q$ et $M_{r_i} . M_{r_{i+1}} \neq 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant n)$.

Or, il résulte de la connexité de Π et des relations

$$\Pi \subset \sum_{i=1}^{\lambda} \Gamma_i \ , \ \Pi . \Gamma_i \neq 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, \lambda ,$$

que le système $\mathfrak{S}$ de tous les ensembles Γ_i est enchaîné (puisque dans le cas contraire on aurait une décomposition de Π en deux domaines relatifs sans points communs).

13. Soient x et y deux points quelconques de E. Comme on a $\sum_{i=1}^{\lambda} U_i = E$, supposons par exemple :

$$x \subset U_p \quad \text{et} \quad y \subset U_q .$$

Le système de tous les Γ_i étant enchaîné, désignons par

$$\Gamma_{r_0} = \Gamma_p \ , \ \Gamma_{r_1}, \ldots, \Gamma_{r_{n+1}} = \Gamma_q$$

une chaîne joignant Γ_p et Γ_q. On a alors $\Gamma_{r_i} . \Gamma_{r_{i+1}} \neq 0 (i = 0, 1, \ldots, n)$, donc, d'après la remarque faite à la fin du § 10,

$$(25) \qquad U_{r_i} . U_{r_{i+1}} \neq 0 \ (i = 0, 1, \ldots, n).$$

---

15) P. ex. dans les points de $\Omega . \Gamma_i$.

16) P. ex. dans les points ξ de Γ_i pour lesquels $\varrho(\xi, C) < \varrho(\Pi, C)$.

Désignons par z_i un point quelconque de U_{r_i} $(i = 0, 1, \dots, n+1)$, avec la seule condition $z_0 = x$, $z_{n+1} = y$. On tire alors de (25) et de (20)

$$\varrho(z_i, z_{i+1}) \leqslant \delta(U_{r_i} + U_{r_{i+1}}) \leqslant \delta(U_{r_i}) + \delta(U_{r_{i+1}}) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$$(i = 0, 1, \dots, n),$$

ce qui démontre les propositions XII' et XII.

14. Une conséquence immédiate de VI est la propriété suivante:

XIII. *Quel que soit le point x du continu E, on a* $\operatorname{ind}_x E \leqslant 2$.

En effet, la frontière d'un voisinage quelconque de x se compose de deux points.

Le continu E est par conséquent un arc simple ou une ligne simple fermée.

XIV. *Le continu E est une ligne simple fermée.*

Supposons par impossible que E soit un arc simple $\overline{cd}$ et désignons par σ le nombre positif $\varrho(c, d)$. Soit $U = U(T^{\odot})$ un voisinage de c de diamètre inférieur à σ; soient ensuite a et b les deux points de E formant la frontière de U: $c \prec a \prec b \prec d$. Le semi-intervalle $[ca)$ de $\overline{cd} = E$ est contenu dans U (car $c \subset U$). De même, le semi-intervalle $(bd]$ de $\overline{cd}$ est contenu dans $E - \overline{U}$ (car le point d y est agrégé).

Quant à l'intervalle (ab), deux cas sont possibles a priori:

1°. $(ab) \subset U$;

2°. $(ab) \subset E - \overline{U}$.

Or, aucun de ces cas ne peut se présenter en réalité.

En effet, supposons d'abord qu'on ait $(ab) \subset U$. On aurait alors

$$U = [ca) + (ab),$$

et le point a ne pourrait être point-limite de $E - \overline{U} = (bd]$.

De même, si $(ab) \subset E - \overline{U}$, on aurait

$$E - \overline{U} = (ab) + (bd],$$

et le point b ne pourrait être point-limite de $U = [ca)$.

La supposition que E soit un arc simple implique donc une contradiction, c. q. f. d.