

GRAFISCHE BEPALING VAN BUIGINGSFIGUREN

DOOR

J. BOUMAN EN W. F. DE JONG

(MET 15 TEKSTFIGUREN)

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM

AFDEELING NATUURKUNDE

(EERSTE SECTIE)

DEEL XIV, No. 4

UITGAVE VAN DE N.V. NOORD-HOLLANDSCHE
UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ, AMSTERDAM 1931

INLEIDING.

De bepaling van buigingsfiguren, die een eindigen afstand van het buigende voorwerp verwijderd zijn, is alleen voor de eenvoudige gevallen mogelijk. De berekening van de lichtintensiteit in elk punt van het vlak, waarin de buigingsfiguur ligt, het *tafreel* genoemd, stuit op groote mathematische moeilijkheden.

Wij leiden in het volgende artikel een methode af, om een figuur grafisch te bepalen. Er wordt hierbij alleen verondersteld, dat de begrenzing van het verlichte deel van het buigende voorwerp in een plat vlak ligt (*buigingsvlak*) en dat dit vlak evenwijdig is aan het tafreel; overigens kan de begrenzing een *willekeurigen* vorm hebben.

Uitgangspunt vormt het principe van HUYGENS, zooals het door KIRCHHOF werd geformuleerd. Voor de methode zijn twee punten essentieel:

1°. In plaats van het coördinatenstelsel in het buigingsvlak vast te leggen, zooals tot nu toe bij de berekeningen plaats vond, wordt de oorsprong van de coördinaten gekozen afhankelijk van de ligging van het punt, waarin de lichtintensiteit gevraagd wordt, en wel zoodanig, dat het nulpunt op de verbindingslijn van lichtbron en het stelpunt in het tafreel wordt gelegd.

2°. Bij de berekening van den lichtvector in het stelpunt maakt men gebruik van een tweevoudige integratie. Kiest men nu — in het buigingsvlak — poolcoördinaten, dan kan één integratie dadelijk worden uitgevoerd. De tweede integratie geschiedt daarna grafisch.

Alleen bij het praktisch belangrijke geval van rechte spleten kan beter van rechthoekige coördinaten gebruik worden gemaakt. De eerste integratie voert hier tot de integraal van FRESNEL, die getabuleerd is.

Het onderwerp wordt als volgt ingedeeld:

Hoofdstuk I. Algemeene bespreking van de methode.

„ II. De buigingsfiguren van kleine openingen.

„ III. Kleine schermen en spleten.

„ IV. Aan alle zijden begrensde groote openingen en schermen.

„ V. Buigingsfiguren veroorzaakt door divergente of scheef invallende evenwijdige bundels.

In hoofdstuk VI wordt een verkorte methode, slechts van toepassing op spleten, door twee evenwijdige rechte randen begrensd, besproken.

In hoofdstuk III is bovendien getracht voor de gebruikte formules een strengere afleiding te geven.

HOOFDSTUK I.

BESCHRIJVING VAN DE METHODE.

§ 1. Ons uitgangspunt is de uitdrukking van KIRCHHOFF, gespecialiseerd voor monochromatisch licht.

Laat zich een lichtpunt in O bevinden, dan is de waarde van den lichtvector in het stelpunt P :

$$V_P = \text{Const.} \iint \frac{d\sigma}{2rr_1\lambda} \{ \cos(r, n) - \cos(r_1, n) \} i e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{r+r_1}{\lambda} \right)}, \quad (1)$$
$$r > \lambda, \quad r_1 \gg \lambda,$$

geïntegreerd over een oppervlak σ , dat P omsluit; r_1 is de afstand van de lichtbron tot het oppervlakelement $d\sigma$, r de afstand van P tot $d\sigma$, λ de golflengte van het licht, n de normaal in $d\sigma$ (naar binnen gericht).¹⁾

Voor het vlak σ kiest men steeds het buigingsvlak, aangevuld door een oneindig grooten halven bol; de bijdrage hiervan valt weg²⁾ (fig. 1). Wij nemen in de eerste vier hoofdstukken dit buigingsvlak loodrecht op de lijn OP .

Ons doel is, in de hoofdstukken I—IV slechts evenwijdig opvallend licht te beschouwen. Men zou nu meenen, dat de uitdrukking (1) dan voor een oneindig ver gelegen lichtbron moet worden toegepast, om dan verder in dien vorm als basis te worden gebruikt. Echter is dit *niet* mogelijk, tenzij men een eindig gesloten oppervlak als integratie-oppervlak gebruikt. Wil men hiervoor nemen een plat vlak, aangevuld door een oneindig grooten bol, dan valt, tenminste bij ongestoorde voortplanting van het licht, de bijdrage van het boloppervlak tot de integraal (1) niet weg. Het is dus beter, de berekening steeds voor divergent licht uit te voeren, en pas na volbrachte berekening tot de limiet voor evenwijdig licht over te gaan.

Deze omstandigheid brengt ons er toe, de waarde van de constante vast te leggen. Laat de afstand van O tot het buigingsvlak, waarover wij de uitdrukking (1) integreeren, a zijn, dan zal de lichtbundel

$$\frac{a}{r_1} e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right)}$$

voor $r_1 = a$ juist de intensiteit 1 hebben. Laten wij nu a tot oneindig

¹⁾ Vgl. Enc. Math. Wiss. V, 418, 422 (1924).

²⁾ . c. 419.

gaan (loodrecht op het buigingsvlak) dan blijft de intensiteit op het buigingsvlak 1.

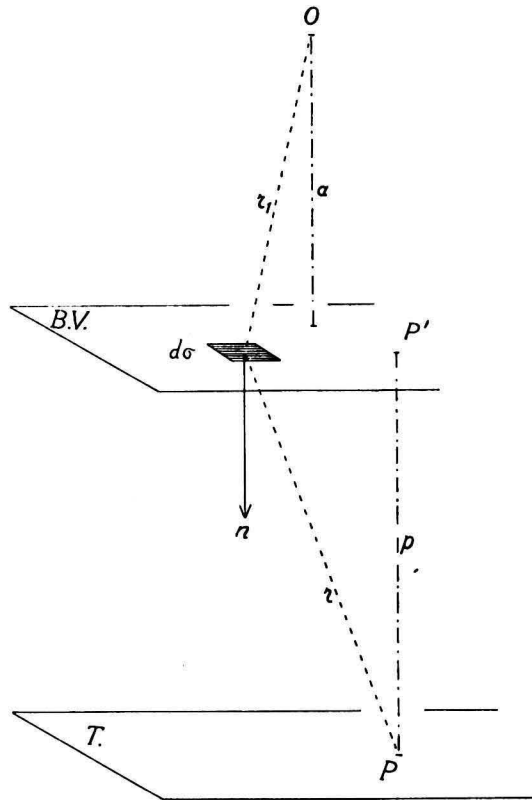


Fig. 1.

Wanneer nu de opening klein is t. o. v. r en r_1 , en de projecties van P en O op het buigingsvlak binnen de buigende opening vallen, of er niet ver van verwijderd zijn, mogen wij in (1) de bekende vereenvoudigingen aanbrengen: $\cos(r, n) = 1$, $\cos(r_1, n) = -1$, en, in het niet-periodieke gedeelte, $r_1 = a$, $r = p$, als p de afstand is van P tot zijn projectie op het buigingsvlak, die wij P' noemen. Voeren wij de waarde a voor de constante in, dan is de lichtvector in P :

$$V_P = \iint d\sigma \frac{ia}{pa\lambda} e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1+r}{\lambda} \right)} \dots \dots \dots (1a)$$

Vervolgens denken wij ons de lichtbron zeer ver verwijderd, zoodat $a \gg p$, dan mag ook in de uitdrukking voor de phase

$$e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1+r}{\lambda} \right)}$$

voor het gebied binnen de opening, r_1 constant en gelijk aan a worden gesteld.

Nog

$$\frac{t}{T} - \frac{a}{\lambda} = \frac{\tau}{T}$$

stellende, schrijven wij voor V_P :

$$V_P = \iint d\sigma \frac{i}{p\lambda} e^{2\pi i \left(\frac{r}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right)} \dots \dots \dots (1b)$$

Dit is dus de lichtvector voor een loodrecht invallenden bundel evenwijdig (of zwak divergeerend) licht, die bij ongestoorde uitbreiding de amplitude 1 heeft, voor kleine openingen en zwak afgebogen licht.

§ 2. Voeren wij in het buigingsvlak poolcoördinaten ϱ en φ in, met P' als oorsprong, dus met een *van het stelpunt afhankelijken oorsprong* (fig. 2), dan is

$$r^2 = p^2 + \varrho^2;$$

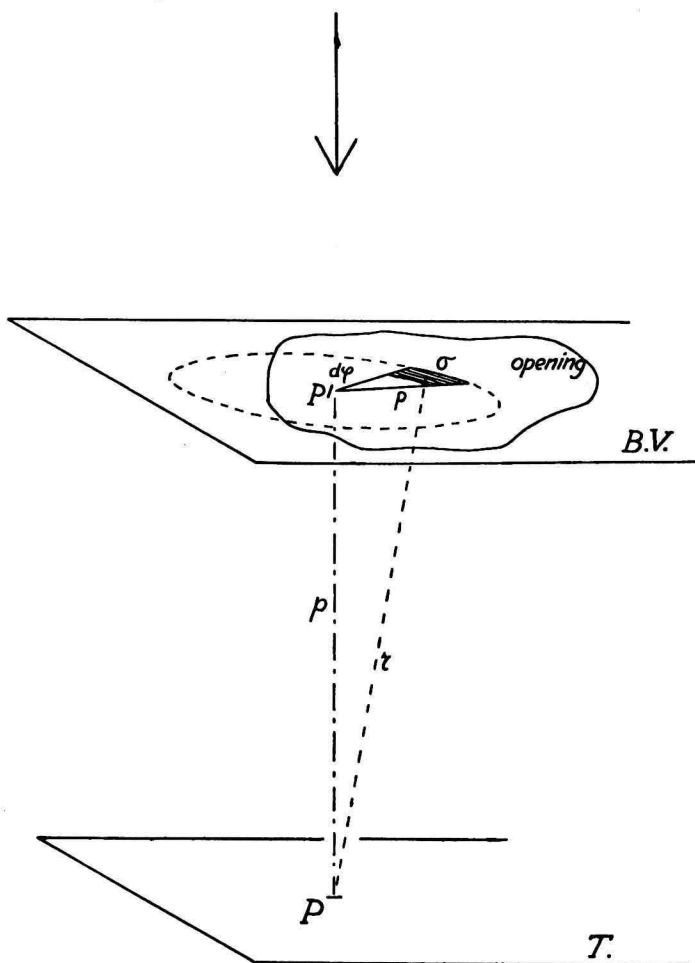


Fig. 2. Invoering van poolcoördinaten in het buigingsvlak.

of, daar ϱ klein is ondersteld t. o. v. p :

$$r = p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{p^2} \right) = p + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{p} \dots \dots \dots (2)$$

De integraal (1b) wordt dan

$$V_P = \frac{i}{p\lambda} e^{2\pi i \left(\frac{\tau}{T} - \frac{p}{\lambda} \right)} \iint \varrho d\varrho d\varphi e^{-\frac{\pi i \varrho^2}{p\lambda}} \dots \dots \dots (1c)$$

Hierin is nu de integratie naar ϱ uitvoerbaar. Schrijven wij bovendien

$$\frac{\tau}{T} - \frac{p}{\lambda} = \frac{t'}{T},$$

dan is de lichtvector in P het reële gedeelte van

$$V_P = -\frac{1}{2\pi} e^{2\pi i \frac{t'}{T}} \int d\varphi \left[e^{-\frac{\pi i \varrho^2}{p\lambda}} \right]_{\rho_1}^{\rho_2}; \dots \dots \dots (3)$$

ϱ_1 en ϱ_2 zijn (in het buigingsvlak) de afstanden van P' tot de snijpunten van den voerstraal onder den hoek φ , met de begrenzingskromme van de opening; zij zijn derhalve functies van φ .

De dubbele integraal is nu teruggebracht tot een enkelvoudige.

§ 3. Nemen wij bij de discussie van (3) eerst aan, dat P' binnen de opening valt; dan is $\varrho_1 = 0$. Laat verder de begrenzing van de opening door $\varrho = f(\varphi)$ zijn gegeven, waarin ϱ eindig en eenduidig wordt ondersteld. Laten wij den index weg, zoodat ϱ den afstand aangeeft van den oorsprong tot een punt van den rand, dan wordt de uitdrukking (3):

$$V_P = \frac{1}{2\pi} e^{2\pi i \frac{t'}{T}} \int d\varphi \left[1 - e^{-\frac{\pi i \varrho^2}{p\lambda}} \right].$$

Het reële gedeelte:

$$\cos 2\pi \frac{t'}{T} \cdot \int \frac{d\varphi}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi \varrho^2}{p\lambda} \right) + \sin 2\pi \frac{t'}{T} \cdot \int \frac{d\varphi}{2\pi} \sin \frac{\pi \varrho^2}{p\lambda}$$

schrijven wij

$$\cos 2\pi \frac{t'}{T} \cdot \int \frac{d\varphi}{2\pi} A + \sin 2\pi \frac{t'}{T} \cdot \int \frac{d\varphi}{2\pi} B, \dots \dots \dots (4)$$

waarin

$$A = 1 - \cos \frac{\pi \varrho^2}{p\lambda}, \quad B = \sin \frac{\pi \varrho^2}{p\lambda} \dots \dots \dots (5)$$

functies van ϱ zijn en daardoor van φ .

De intensiteit in P is

$$I_P = \left(\int \frac{d\varphi}{2\pi} A \right)^2 + \left(\int \frac{d\varphi}{2\pi} B \right)^2 \dots \dots \dots (5a)$$

Ligt P' buiten de buigende opening, dan is

$$I_P = \left(\int \frac{d\varphi}{2\pi} [A(\varrho_2) - A(\varrho_1)] \right)^2 + \left(\int \frac{d\varphi}{2\pi} [B(\varrho_2) - B(\varrho_1)] \right)^2 \dots (4a)$$

Voor n snijpunten geldt een analoge formule.

De integralen worden langs *grafischen weg* bepaald.

§ 4. De grafische bepaling van de intensiteit in P geschiedt nu zoodanig, dat het heele buigingsvlak in gelijke sectoren met hoeken $\Delta\varphi$ en P' als middelpunt, verdeeld wordt gedacht. Een lineaal, waarop de waarden van A en B zijn aangegeven — A en B zijn immers functies van den afstand van P' tot het snijpunt met den rand van de opening — legt men achtereenvolgens langs de bissectrices van alle sectoren en leest telkens A en B af, het nulpunt van de lineaal met P' latende samenvallen. Het vierkant van de som van de A -waarden plus dat van de B -waarden geeft een maat voor de gevraagde intensiteit. De bewerking komt dus hierop neer, dat men de integralen in (4): $\int d\varphi A/2\pi$ en $\int d\varphi B/2\pi$ vervangt door de sommen $\Delta\varphi/2\pi \times \Sigma A$ en $\Delta\varphi/2\pi \times \Sigma B$.

Praktisch is het gewoonlijk voldoende voor den hoek der sectoren 5° te nemen, in sommige gevallen verdient een twee- of driemaal zoo kleine hoek aanbeveling.

In fig. 3 is de verdeling van de lineaal aangegeven voor $p = 25$ cm.

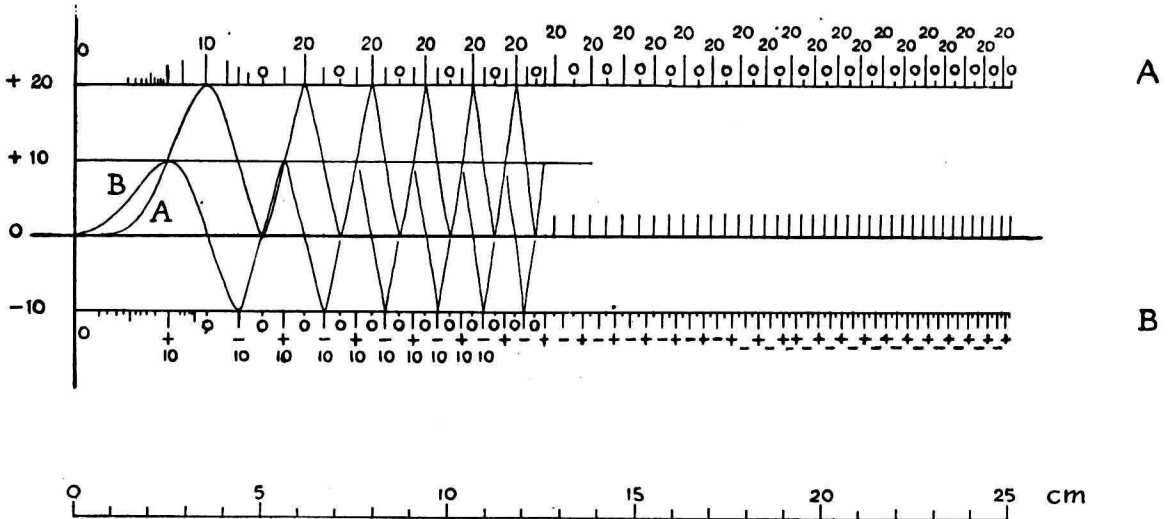


Fig. 3. De verdeling van de constructie-lineaal. Schaal 100 : 1, $p = 25$ cm, $\lambda = 5.10^{-5}$ cm.

en $\lambda = 5.10^{-5}$ cm op een schaal van 100 : 1. De bijgeschreven *A*- en *B*-waarden (tabel I) zijn het tienvoud van de oorspronkelijke, zoodat het werken met de decimalen wordt vermeden.

TABEL I.

$e \cdot 10^2$ cm	A . 10	B . 10	$e \cdot 10^2$ cm	A . 10	B . 10	$e \cdot 10^2$ cm	A . 10	B . 10
0.25	0.00	0.16	7.75	18.18	5.75	16.202	20	0
0.50	0.02	0.63	7.906	20	0	16.393	10	- 10
0.75	0.10	1.41	8.15	15.52	- 8.34	16.583	0	0
1.00	0.32	2.49	8.292	10	- 10	16.770	10	10
1.25	0.76	3.83	8.45	3.82	- 7.86	16.956	20	0
1.50	1.56	5.36	8.660	0	0	17.139	10	- 10
1.75	2.82	6.96	9.016	10	10	17.320	0	0
2.00	4.64	8.44	9.354	20	0	17.678	20	0
2.25	7.06	9.61	9.683	10	- 10	18.028	0	0
2.50	10	10	10	0	0	18.371	20	0
2.75	13.24	9.46	10.308	10	10	18.708	0	0
3.00	16.37	7.70	10.606	20	0	19.039	20	0
3.25	18.84	4.68	10.897	10	- 10	19.365	0	0
3.50	19.98	0.63	11.180	0	0	19.685	20	0
3.536	20	0	11.456	10	10	20	0	0
3.75	19.24	- 3.83	11.726	20	0	20.310	20	0
4.00	16.37	- 7.71	11.990	10	- 10	20.616	0	0
4.25	11.72	- 9.85	12.247	0	0	20.917	20	0
4.330	10	- 10	12.500	10	10	21.213	0	0
4.50	6.32	- 9.30	12.747	20	0	21.505	20	0
4.75	1.82	- 5.95	12.990	10	- 10	21.794	0	0
5.00	0	0	13.229	0	0	22.079	20	0
5.25	2.00	6.00	13.463	10	10	22.370	0	0
5.50	7.51	9.69	13.693	20	0	22.638	20	0
5.590	10	10	13.919	10	- 10	22.913	0	0
5.75	14.40	8.98	14.142	0	0	23.184	20	0
6.00	19.30	3.68	14.362	10	10	23.452	0	0
6.124	20	0	14.577	20	0	23.717	20	0
6.25	19.24	- 3.83	14.790	10	- 10	23.979	0	0
6.50	13.68	- 9.30	15	0	0	24.238	20	0
6.614	10	- 10	15.207	10	10	24.494	0	0
6.75	5.60	- 8.98	15.411	20	0	24.748	20	0
7.071	0	0	15.613	10	- 10	25	0	0
7.25	2.00	6.00	15.811	0	0			
7.50	10	10	16.008	10	10			

De aflezing van A en B geschiedt het eenvoudigst door gebruik te maken van een viervoudige lineaal, op doorzichtig papier geconstrueerd (fig. 4).

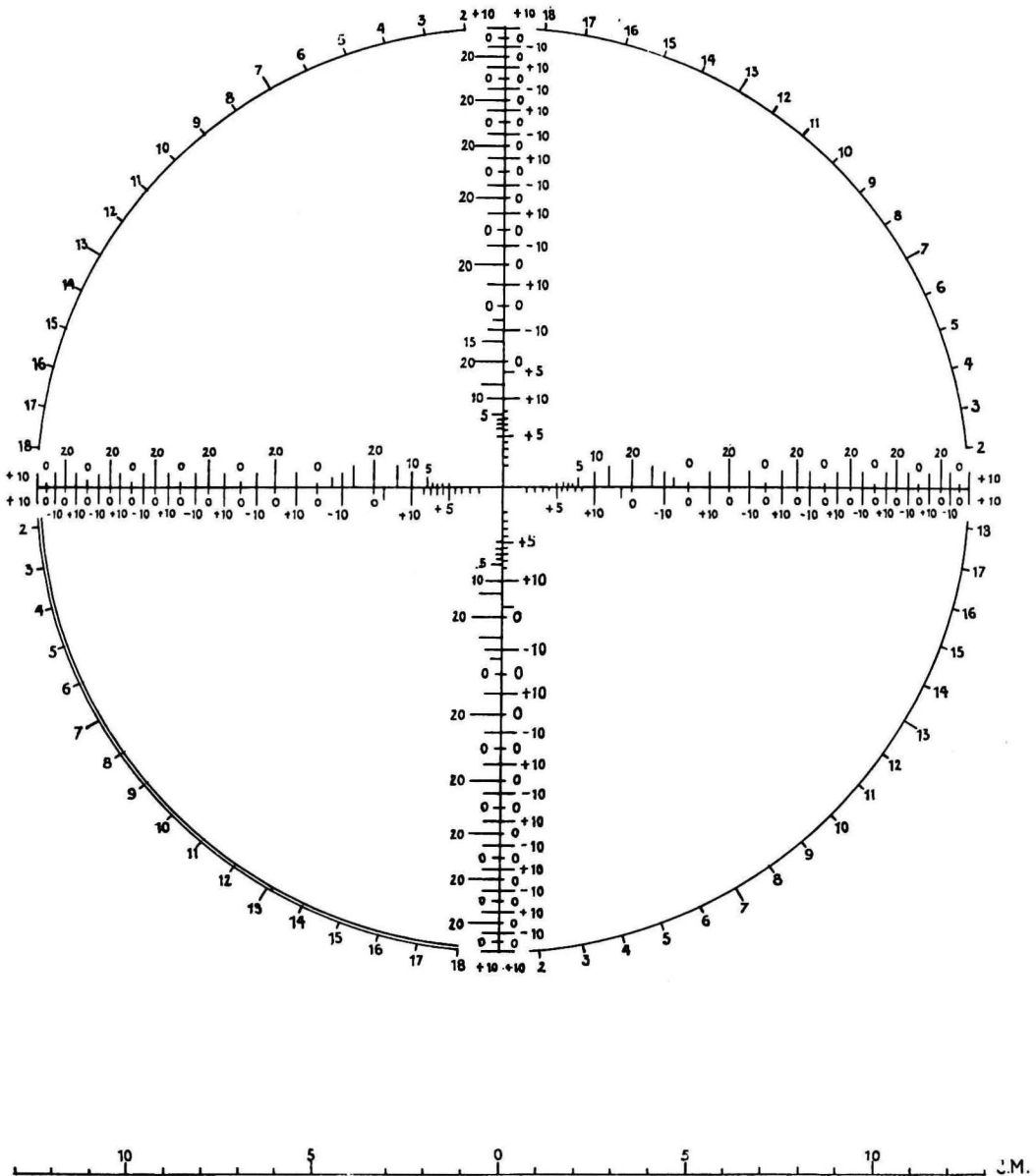


Fig. 4. Het constructienet. Schaal 100:1, $p = 25$ cm, $\lambda = 5.10^{-5}$ cm.

Men laat het middelpunt van den cirkel samenvallen met P' , leest langs een der linealen, in het snijpunt van deze met den rand der opening, A en B af, draait den cirkel 5° , leest opnieuw af, enz. De aangegeven waarden worden positief geteld, wanneer men, uitgaande

van het middelpunt, een overgang opening-scherm maakt, en negatief bij een overgang scherm-opening (5a). Bij een sectoren-hoek van 5° verkrijgt men 72 A - en 72 B -waarden, de totale intensiteit is:

$$I = \left(\frac{5}{360} \Sigma A \right)^2 + \left(\frac{5}{360} \Sigma B \right)^2.$$

Bedenken wij verder, dat op de lineaal de A - en B -waarden met 10 zijn vermenigvuldigd, dan volgt hieruit, dat men de som der kwadraten der afgelezen A - en B -sommen moet vermenigvuldigen met $\left(\frac{5}{360} \cdot \frac{1}{10} \right)^2$, dus deelen door 518400, om de ware intensiteit te krijgen (intensiteit bij ongestoorde voortplanting 1 gesteld).

Voor andere waarden van p en λ dan de hierboven vermelde kan men een eenmaal geconstrueerde lineaal eveneens gebruiken, mits men rekening houdt met de overeenkomstige schaalverandering. De A - en B -waarden op een bepaald punt van de lineaal behooren niet bij een vaste waarde van ϱ , maar van $\pi\varrho^2/p\lambda$. Bij andere waarden van p en λ behooren zij bij een straal ϱ_1 , zoodanig, dat

$$\frac{\varrho_1^2}{p\lambda} = \frac{\varrho^2}{25 \times 5 \times 10^{-5}}$$

of

$$\varrho_1 : \varrho = \sqrt{p\lambda} : \sqrt{25 \times 5 \times 10^{-5}}.$$

Men moet dus de afmetingen van de figuur in die verhouding vergrooten. Wij hebben voor ons geval de schaal 100 : 1 gekozen, algemeen is zij dus

$$\left[\frac{\sqrt{25 \times 5 \times 10^{-5}}}{\sqrt{p\lambda}} \times 100 \right] : 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

HOOFDSTUK II.

KLEINE OPENINGEN. ¹⁾

§ 1. Voor het eenvoudige geval, dat de buigende opening cirkelvormig is en P op de as van die opening ligt, is het gemakkelijk de amplitude, ook zonder grafische sommeering, aan te geven. Immers is dan ϱ constant en gelijk aan den straal van den cirkel, zoodat de amplitude is [vgl. (4)]

$$A \cos \frac{2\pi t'}{T} + B \sin \frac{2\pi t'}{T} = \left(1 - \cos \frac{\pi \varrho^2}{\rho \lambda}\right) \cos \frac{2\pi t'}{T} + \sin \frac{\pi \varrho^2}{\rho \lambda} \cdot \sin \frac{2\pi t'}{T}$$

Neemt men voor ϱ achtereenvolgens

$$\varrho_1 = \sqrt{\rho \lambda}, \quad \varrho_2 = \sqrt{2\rho \lambda}, \quad \varrho_3 = \sqrt{3\rho \lambda}, \quad \text{enz.},$$

dan is steeds $B = 0$ en

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 2, \quad \text{enz.}$$

In het eerste geval omvat de opening juist één zône van FRESNEL en bezit de vector P juist de dubbele amplitude van het oorspronkelijke licht, in het tweede geval omvat ze twee zônes en is de amplitude nul, enz.

§ 2. De berekening is reeds lastig voor een punt P buiten de as van de cirkelvormige opening gelegen. LOMMEL ²⁾ heeft een methode aangegeven, die door ARKADIEW ³⁾ werd toegepast en aan het experiment getoetst.

In fig. 5 is voor een van de door ARKADIEW behandelde openingen in verschillende punten volgens de grafische methode de lichtintensiteit

¹⁾ Een opening wordt klein (relatief klein) genoemd, wanneer voor elk beschouwd punt P' het eindpunt van de gebruikte constructielineaal bij elken sector buiten de opening valt.

²⁾ LOMMEL, Abh. der Bayerischen Akademie 15, 229, (1884).

³⁾ ARKADIEW, Physik. Zeitschr. Bd 14, 832, (1913).

bepaald. De verkregen kromme sluit bevredigend bij die van ARKADIEW aan.

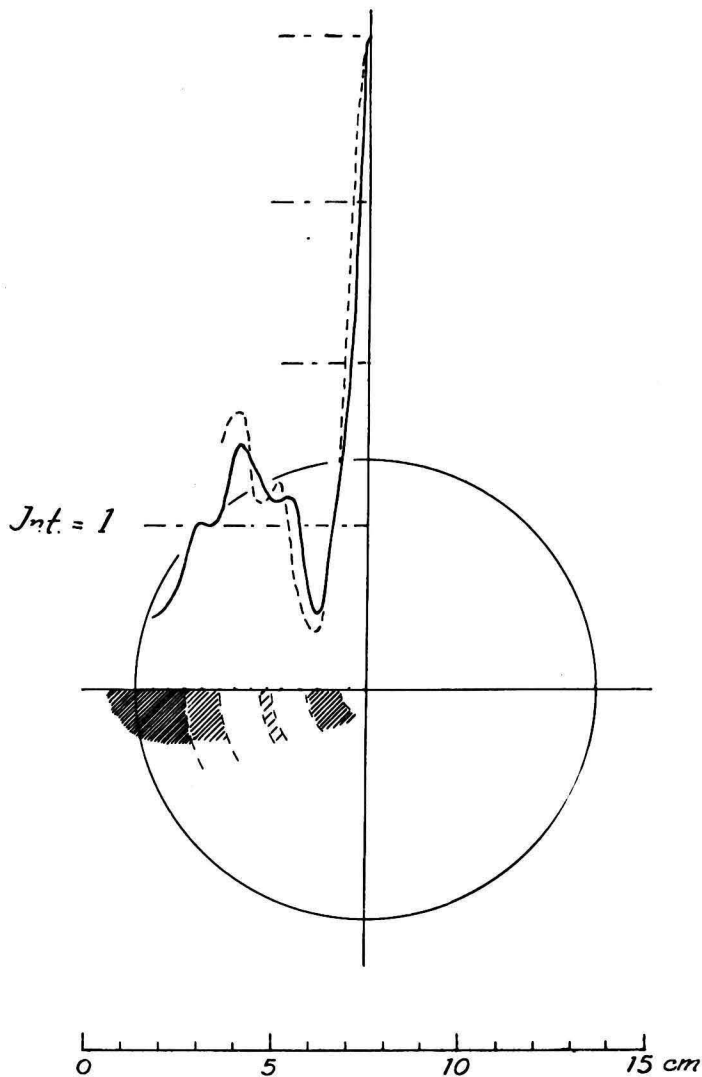


Fig. 5. Buigingsbeeld van een opening $n = 3$ (ARKADIEW l.c.).

---- intensiteit volgens ARKADIEW.

— volgens grafische bepaling.

Langs den horizontalen straal is schematisch de waargenomen intensiteit aangegeven.
Schaal 100 : 1.

HOOFDSTUK III.

KLEINE SCHERMEN ¹⁾; SPLETEN.

§ 1. De betrekkingen (3) (4) (5), die wij in hoofdstuk I afleidden, gelden slechts voor kleine waarden van q/p . Wat wordt er van deze betrekkingen bij groote q/p ?

Wij zoeken eerst de bijdrage van een sector $d\varphi$, die zich van den oorsprong P' (de projectie van P) naar het oneindige uitstrekt. Wij moeten daartoe van de algemeene formule (1) uitgaan:

$$V_P = a \iint \frac{d\sigma}{2rr_1\lambda} \{ \cos(r, n) - \cos(r_1, n) \} ie^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{r+r_1}{\lambda} \right)} \quad . \quad (1)$$

met de constante $= a$ gesteld, welke voor een divergenten lichtbundel geldt.

Wij zullen nu V_P berekenen voor een punt P , waarvoor de verbindinglijn met de lichtbron O loodrecht op het buigingsvlak staat. Denken we ons daarna de lichtbron langs de lijn OP steeds verder verwijderd, dan verkrijgen wij als grensgeval de amplitude van een loodrecht invalenden bundel evenwijdige stralen, in P .

Wij stellen weer $OP' = a$, $PP' = p$ en voeren poolcoördinaten in. De bijdrage van een sector $d\varphi$ is dan:

$$dV_P = a \cdot d\varphi \cdot e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{a+p}{\lambda} \right)} \cdot \int_0^\infty \frac{q dq}{2rr_1\lambda} \left(\frac{p}{r} + \frac{a}{r_1} \right) ie^{2\pi i \left(\frac{p+a-r-r_1}{\lambda} \right)}, \quad . \quad (7)$$

en

$$r^2 = p^2 + q^2,$$

$$r_1^2 = a^2 + q^2,$$

$$r dr = r_1 dr_1 = q dq,$$

$$\cos(r, n) = \frac{p}{r}; \quad \cos(r_1, n) = -\frac{a}{r_1}. \quad ^2)$$

De integraal kan partiëel worden geïntegreerd. Wij laten den factor

¹⁾ Voor de omschrijving van „kleine” geldt m.m. het op blz. 13 gezegde.

²⁾ Vgl. GEIGER en SCHEEL, Handbuch der Physik XX, 169 (1929).

$e^{2\pi i (\frac{t}{T} - \frac{a+p}{\lambda})}$ verder weg, en noemen de rest de complexe amplitude U_p . Dan is

$$\begin{aligned} dU_p &= a d\varphi \int_0^\infty \frac{\varrho d\varrho}{2r r_1 \lambda} \left(\frac{p}{r} + \frac{a}{r_1} \right) i e^{2\pi i \left(\frac{p+a-r-r_1}{\lambda} \right)} = \\ &= -\frac{d\varphi}{4\pi} \int_0^\infty \frac{a}{r+r_1} \left(\frac{p}{r} + \frac{a}{r_1} \right) d \left\{ e^{2\pi i \left(\frac{p+a-r-r_1}{\lambda} \right)} \right\} = \\ &= -\frac{d\varphi}{4\pi} \cdot \frac{a}{r+r_1} \left(\frac{p}{r} + \frac{a}{r_1} \right) e^{2\pi i \frac{p+a-r-r_1}{\lambda}} \Big|_0^\infty + \\ &+ \frac{d\varphi}{4\pi} \int_0^\infty d\varrho \frac{d}{d\varrho} \left\{ \frac{a}{r+r_1} \left(\frac{p}{r} + \frac{a}{r_1} \right) \right\} e^{2\pi i \frac{p+a-r-r_1}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Wanneer wij nu in den laatsten integrand de differentiatie naar ϱ uitvoeren, en hem dan vergelijken met den integrand in de oorspronkelijke uitdrukking voor dU_p , dan blijkt, dat de integranden in orde van grootte zich verhouden als $\lambda : r$. Nu is de uitdrukking slechts geldig voor kleine waarden van λ/r , zoodat wij dU_p gelijk kunnen stellen aan het geïntegreerde deel, met verwaarloozing van de tweede integraal.¹⁾

Dus is:

$$dU_p = \frac{d\varphi}{4\pi} \cdot \frac{a}{a+p} \cdot 2.$$

Wij splitsen vervolgens in dV_p den constanten phasefactor $e^{-2\pi i a/\lambda}$ af, en gaan dan over tot het geval van een loodrecht invallenden, evenwijdigen bundel door $a = \infty$ te stellen.

Dan is

$$dV_p = \frac{d\varphi}{2\pi} e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{p}{\lambda} \right)}.$$

Willen wij de vergelijking (4) ook voor een oneindigen sector gebruiken, dan blijkt, dat voor oneindig groote ϱ de uitdrukkingen (5) moeten worden vervangen door

$$A = 1, \quad B = 0,$$

m.a.w. de A - en B -waarden naderen tot 1, resp. 0, of op de lineaal tot 10 en 0.

Is in het buigingsvlak geen scherm aanwezig, dan wordt de uitdrukking

$$V_p = e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{p}{\lambda} \right)}$$

en de intensiteit 1, zooals ze ook moet zijn.

¹⁾ Wanneer wij van de volledige uitdrukking van KIRCHHOFF uitgaan, valt de laatste integraal geheel weg. Ons uitgangspunt (1) is reeds de benadering voor groote r en r_1 .

Voor een sector φ geldt

$$\int_0^{\varphi} \frac{A d\varphi}{2\pi} = \frac{\varphi}{2\pi}; \quad \int_0^{\varphi} \frac{B d\varphi}{2\pi} = 0,$$

$$V_P = \frac{\varphi}{2\pi} e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{p}{\lambda} \right)}.$$

§ 2. Het is nu gemakkelijk om voor kleine schermen de buigingsfiguren te construeeren. In elken sector worden bij elken overgang van scherm naar opening, of omgekeerd, de waarden A en B afgelezen zooals beschreven is op pag. 11, en voor den laatsten „overgang”, die in het oneindige licht, wordt $A = 10$, $B = 0$ afgelezen.

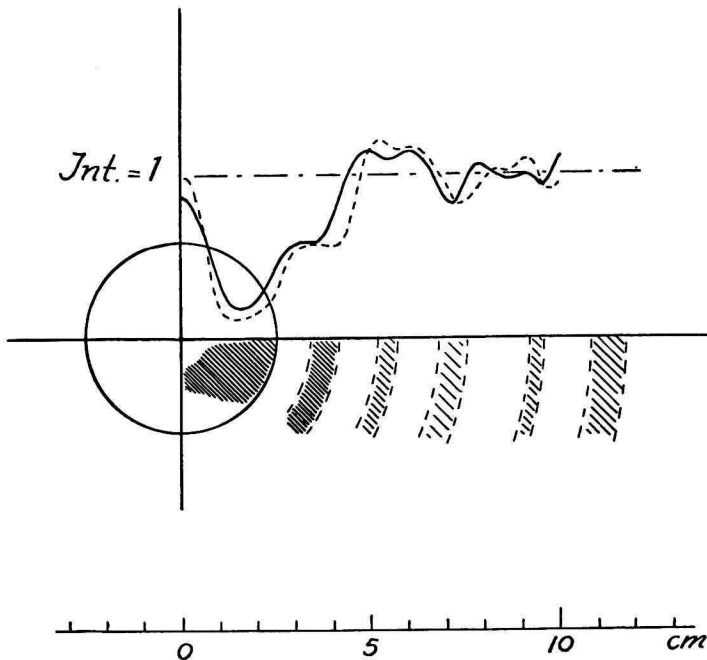


Fig. 6. Als fig. 5; buigingsbeeld van een schijfje $n = 1/2$.

In fig. 6 is voor een cirkelvormig schijfje de figuur afgeleid. Het intensiteitsverloop komt nagenoeg overeen met dat, hetwelk door ARKADIEW volgens de methode van LOMMEL is berekend, het valt echter op, dat onze figuur zich nog iets beter bij de waargenomen lichtverdeling aansluit.¹⁾

§ 3. Wij beschouwen vervolgens de buiging door een spleetvormige opening, en kiezen voorloopig het geval, dat de spleet door evenwijdige

¹⁾ ARKADIEW, Phys. Ztschr. 14, 832 (1913).

rechte randen is begrensd (rechte spleet). Wij behooren van de strenge uitdrukking voor de complexe amplitude [vgl. (7)] uit te gaan: ¹⁾

$$U_P = \int_0^{\infty} \frac{a \cdot d\varphi \cdot \varrho \cdot d\varrho}{2 r r_1 \lambda} \left(\frac{p}{r} + \frac{a}{r_1} \right) i e^{2\pi i \frac{p+a-r-r_1}{\lambda}}, \quad \left. \vphantom{\int_0^{\infty}} \right\} (7a)$$

$$r^2 = p^2 + \varrho^2; \quad r_1^2 = a^2 + \varrho^2.$$

Men gebruikt echter in dit geval de benadering voor kleine openingen ($\varrho < a$, $\varrho < p$) en past haar voor de geheele spleet toe.

Wij willen nagaan in hoeverre dit geoorloofd is.

Wij voeren nu de integratie in (7a) aldus uit, dat eerst bij vasthouden ϱ naar φ wordt geïntegreerd. Zoolang de cirkel met straal ϱ den rand nog niet snijdt, loopt φ van 0 tot 2π , of, als P' buiten de projectie van den rand ligt, blijft ze nul. Vervolgens komt er een gebied voor ϱ ,

waar de cirkel den eenen rand snijdt en den anderen niet. Is tenslotte $\varrho > \varrho_0$, waarbij ϱ_0 de grootste is van de afstanden van P' tot de randen, dan moet men over een hoek φ integreeren welke in ons geval een *monotoon dalende continue* functie (met continue afgeleiden) van ϱ (fig. 7) is.

Bij de spleten, waarvan men gewoonlijk de buigingsfiguren beschouwt, is ϱ_0 klein t. o. v. a en p .

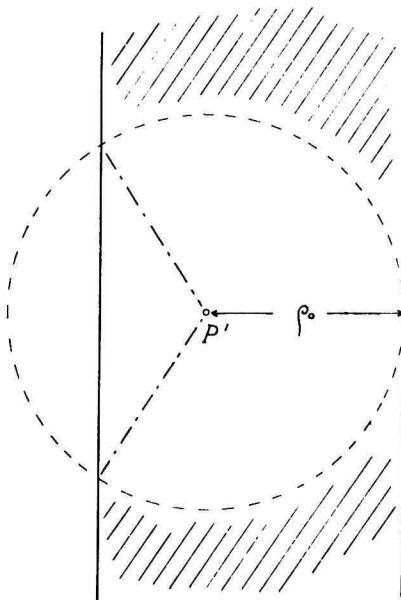
Voor het integratiegebied waarvoor $\varrho \equiv \varrho_0$, is het vervangen van den integrand van (7a) door een vorm, waarin r en r_1 in het niet-periodieke gedeelte door a en p zijn vervangen, geoorloofd. Wij zullen dezen vorm spoedig bepalen (9).

In 't bijzonder bezien wij het gedeelte van de spleet, dat buiten den cirkel met straal ϱ_0 ligt, in fig. 7 geharceerd, en dat de bijdrage levert:

$$U_P = \int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{\varphi(\varrho) \cdot \varrho d\varrho \cdot a}{2 r r_1 \lambda} \left(\frac{p}{r} + \frac{a}{r_1} \right) i e^{2\pi i \frac{p+a-r-r_1}{\lambda}}.$$

De onderste grens behoort iets grooter te zijn dan de afstand van P' tot den rand, om discontinuïteiten in de afgeleiden van $\varphi(\varrho)$ te

¹⁾ Evenals in § 1 wordt ondersteld, dat de lijn lichtbron-stelpunt loodrecht op het buigingsvlak staat.



spleet

Fig. 7. Afleiding van de buigingsfiguur van een spleet.

voorkomen; wij kunnen echter zonder gevaar voor verwarring voortaan onder ϱ_0 een afstand verstaan, grooter dan den grootste der afstanden van P' tot de randen der spleet, maar klein t. o. v. a en p .

Wij voeren nu als nieuwe veranderlijke in :

$$x = \frac{r+r_1-a-p}{\lambda} \dots \dots \dots (8a)$$

Dan is:

$$\lambda dx = \varrho d\varrho \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right),$$

$$r + r_1 = \lambda x + a + p,$$

$$r - r_1 = \frac{r^2 - r_1^2}{r + r_1} = \frac{p^2 - a^2}{\lambda x + a + p};$$

dus

$$r = \frac{(\lambda x + a + p)^2 + p^2 - a^2}{2(\lambda x + a + p)},$$

$$r_1 = \frac{(\lambda x + a + p)^2 - p^2 + a^2}{2(\lambda x + a + p)}.$$

De uitkomst is:

$$U'_p = \int_{x_0}^{\infty} \frac{\varphi(x) dx \cdot a(a+p)(\lambda x + 2a)(\lambda x + 2p)}{\{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x(a+p) + 2p(a+p)\} \{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x(a+p) + 2a(a+p)\}} ie^{-2\pi ix}, (8)$$

of, als wij de termen in a en p samennemen tot $F(x)$,

$$U'_p = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) \cdot dx \cdot F(x) ie^{-2\pi ix} ; \dots \dots (8b)$$

φ is nu uitgedrukt als functie van x .

In het gebied $x < x_0$ mag nu in het niet-periodieke gedeelte van den integrand $r = p$, $r_1 = a$ worden gesteld, wat beteekent, dat λx t. o. v. a en p mag worden verwaarloosd (8a). In dit gebied neemt $F(x)$ de waarde voor $x = 0$ aan:

$$F(0) = \frac{a}{a+p}.$$

Wij vragen ons af, of wellicht over het geheele integratie-gebied deze vervanging mag plaats hebben, en dus mag worden gesteld:

$$U'_p = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) \cdot dx \cdot \frac{a}{a+p} \cdot ie^{-2\pi ix} \dots \dots (9)$$

§ 4. *Bewijs van deze onderstelling.*

I. Ten eerste moet de convergentie van (9) worden nagegaan. De integraal (9) zal convergeeren wanneer

1^o. $\varphi(x)$ *monotoon tot nul daalt* (blz. 18). ¹⁾

Wij bezien slechts het reële deel R , onder weglating van den constanten factor $a/(a+p)$:

$$R = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) \cdot \sin 2\pi x \cdot dx.$$

Het integratie-interval verdeelen wij in stukken van $1/2$, t.w. $n \cdot 1/2 \rightarrow (n+1)1/2$, enz. De integraal R wordt dan $R = \Sigma b_n$, waarin:

$$b_n = \int_{n \cdot 1/2}^{(n+1)1/2} \varphi(x) \cdot \sin 2\pi x \cdot dx$$

vanaf een zekere beginwaarde van n , die van x_0 afhangt.

Stel nu $x = y + 1/2 n$, dan is

$$b_n = (-1)^n \int_0^{1/2} \varphi(y + \frac{1}{2} n) \cdot \sin 2\pi y \cdot dy,$$

Σb_n is dus een alterneerende reeks. Daar $\varphi(x)$ *monotoon daalt*, en de integrand steeds hetzelfde teeken heeft, is

$$|b_n| > |b_{n+1}|.$$

Bovendien nadert b_n tot 0, als $\varphi(x)$ tot nul nadert. De reeks Σb_n convergeert, en daarmee de integraal. Eenzelfde bewijs geldt voor het imaginaire gedeelte.

Wij zien dus, dat (9) voor een rechte spleet inderdaad convergeert. De integraal (8) convergeert in elk geval, daar $\varphi(x)$ *begrensd is*, en $F(x)$ *monotoon tot nul daalt*. *Voor een opening, waarvoor $\varphi(x)$ niet aan de gestelde eischen voldoet [b.v. een sector $\varphi(x) = \text{const.}$] is de vervanging van (8) door (9) reeds a priori uitgesloten.*

II. Vervolgens moeten wij (8) en (9) in grootte met elkaar vergelijken. Slechts in de omgeving van de onderste grens, waar $F(x)$ door $F(0)$ mag worden vervangen, zijn de integranden bij benadering gelijk. Wij zullen nu (8) en (9) door partiële integratie in reeksen ontwikkelen. Haar gemeenschappelijke vorm is

$$J = \int_{x_0}^{\infty} f(x) \cdot e^{2\pi i x} \cdot dx.$$

Hierin is de exponent $-2\pi i x$ door $2\pi i x$ vervangen, dus de integraal door haar toegevoegd complexe, wat geen essentieel verschil maakt.

¹⁾ Voorwaarden 2^o en 3^o worden genoemd bij het tweede deel van het bewijs (blz. 21).

Nu geldt voor een integraal J :

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{1}{2\pi i} f(x) e^{2\pi i x} \Big|_{x_0}^{\infty} - \\
 & - \frac{1}{(2\pi i)^2} f'(x) e^{2\pi i x} \Big|_{x_0}^{\infty} + \dots \\
 & + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^n} f^{(n-1)}(x) e^{2\pi i x} \Big|_{x_0}^{\infty} + \\
 & + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{x_0}^{\infty} f^{(n)}(x) e^{2\pi i x} dx.
 \end{aligned}$$

Nemen wij nu aan:

1^o. $f(x)$ daalt monotoon tot nul (voldoende voor de convergentie ¹⁾),

2^o. $f(x)$ wordt met haar afgeleiden nul in het oneindige,

3^o. $\int_{x_0}^{\infty} f^{(n)}(x) \cdot e^{2\pi i x} \Big|$ kan voor ten minste één waarde van n genoegzaam klein worden gemaakt, dan is

$$J = e^{2\pi i x_0} \left\{ -\frac{1}{2\pi i} f(x_0) + \frac{1}{(2\pi i)^2} f'(x_0) - \dots \right\}$$

een convergente of asymptotische reeks.

Wij zijn nu in staat, de integralen (8) en (9) te vergelijken.

In (8) is

$$f_1(x) = iF(x) \varphi(x).$$

In (9) is

$$f_2(x) = iF(0) \varphi(x)$$

$$= i \frac{a}{a+p} \varphi(x).$$

Wij denken ons nu, aangenomen dat $\varphi(x)$ en $F(x) \cdot \varphi(x)$ aan de gestelde voorwaarden voldoen voor een zelfde waarde van n , en λx_0 klein is t. o. v. a en p , van elke reeks n termen opgeschreven, en wij vergelijken de overeenkomstige termen met elkaar. Deze bevatten de $f(x)$ en haar afgeleiden voor $x = x_0$ en zullen dus weinig verschillen (blz. 19). De resten zijn klein (voorwaarde 3^o), zoodat de twee integralen weinig van elkaar verschillen, hetgeen wij wilden bewijzen.

Het onderzoek, of een gegeven spleet aan de voorwaarden voldoet, is zeer bewerkelijk; wij zullen dit, ook voor de rechte spleet, niet verder onderzoeken.

¹⁾ van de integraal.

De voorwaarde 3^o verdient nog eenige bespreking. Aan haar zal zijn voldaan, als $f^{(n)}(x)$ klein is voor $x > x_0$ bij groote n , en dit zal, uit hoofde van 1^o en 2^o bij groote x_0 het geval zijn. Echter is de eisch van een groote waarde van x_0 nog zeer goed in overeenstemming met dien van een kleine λx_0 (t. o. v. a en p). In ons geval beteekent dit laatste

$$5 \cdot 10^{-5} x_0 \ll 25.$$

Resumeerende kunnen wij zeggen, dat wij voorwaarden hebben opgesteld, onder welke twee integralen van x_0 naar ∞ met oscilleerenden integrand aan elkaar gelijk mogen worden gesteld, als slechts in de omgeving van x_0 de integranden gelijk zijn.

§ 5. Wij hebben dus het ons interesseerende deel U_p van de complexe amplitude van het door een rechte spleet afgebogen licht herleid tot

$$U_p = \int_{x_0}^{\infty} \frac{a}{a+p} \varphi(x) \cdot i \cdot dx \cdot e^{-2\pi i x}, \dots \dots \dots (9)$$

waarin

$$\begin{aligned} \lambda x &= r + r_1 - a - p = \\ &= \sqrt{p^2 + \varrho^2} + \sqrt{a^2 + \varrho^2} - a - p. \end{aligned}$$

Wij willen nu als nieuwe veranderlijke invoeren:

$$\xi = \frac{\varrho^2}{2\lambda} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{a} \right)$$

d.i. de waarde, die x voor kleine ϱ aanneemt.

Wij kunnen nu $\varphi(\varrho)$ ook als functie van ξ uitdrukken; in dien vorm moge ze door $\psi(\xi)$ worden voorgesteld. Voor kleine waarden van ϱ zullen $\varphi(x)$ en $\psi(\xi)$ denzelfden analytischen vorm hebben.

Wij vergelijken nu met (9) de volgende uitdrukking:

$$\begin{aligned} \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{a}{a+p} \psi(\xi) i d\xi e^{-2\pi i \xi}, \dots \dots \dots (10) \\ \xi_0 = \frac{\varrho_0^2}{2\lambda} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{a} \right). \end{aligned}$$

De twee integralen verschillen in vorm alleen door de functies φ en ψ , en door de getalwaarde van de onderste grens.

Maar bij onze veronderstellingen over x_0 zullen ξ_0 en x_0 bij benadering aan elkaar gelijk zijn, zoo ook de vormen van φ en ψ in de nabijheid van x_0 of ξ_0 . Immers $\lambda x_0 \ll p$ komt overeen met een kleine waarde van ϱ . Wij kunnen nu het bewijs van § 4 herhalen, en vinden, de uitdrukking (10) als een dubbele integraal schrijvende,

$$U_p = \int_{\xi_0}^{\infty} \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\varphi \cdot d\xi \cdot a}{a+p} i e^{-2\pi i \xi} \dots \dots \dots (10a)$$

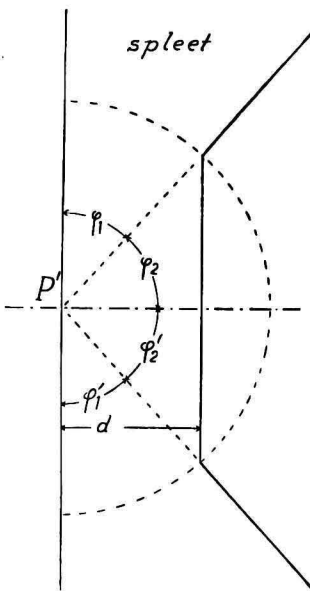
Hierbij kan gevoegd worden de bijdrage van dat gedeelte van de spleet, dat binnen den cirkel met straal ϱ_0 ligt, en waarin de vervanging is geoorloofd, zoodat

$$U_P = \iint \frac{a}{a+p} d\varphi d\left(\frac{\varrho^2}{2\lambda}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{p}\right) ie^{-\frac{\pi i \varrho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{p}\right)} \dots (10b)$$

Gaan wij nu over tot een evenwijdigen lichtbundel, dat is $a \rightarrow \infty$, dan wordt:

$$U_P = \iint \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{p\lambda} ie^{-\frac{\pi i \varrho^2}{p\lambda}} \dots (10c)$$

Dit stemt overeen met de uitdrukking (1c) voor V_P , de uitdrukking, die voor kleine openingen was afgeleid, en welke de basis van onze grafische methode vormt.



§ 6. Om de grafische methode op de spleet toe te passen, bezien wij eerst een eenvoudig geval (fig. 8). Onderstellen wij, dat in P , waarvan P' de projectie is, de intensiteit moet worden bepaald. Voor dit zeer bijzondere geval is ze gemakkelijk aan te geven: men bepaalt eerst de bijdrage van φ_2 en φ_2' volgens hoofdstuk I, § 4, door grafisch te integreren:

$$\int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{2\pi} \left\{ 1 - e^{-\frac{\pi i \varrho^2}{p\lambda}} \right\} + \int_0^{\varphi_2'} \frac{d\varphi}{2\pi} \left\{ 1 - e^{-\frac{\pi i \varrho^2}{p\lambda}} \right\}.$$

Vervolgens bepaalt men de bijdrage van de sectoren φ_1 en φ_1' door berekening:

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2\pi},$$

Fig. 8. Bijzondere vorm van spleet.

of volgens hoofdstuk III, § 2, waarbij telkens $A = 10, B = 0$.

De complexe amplitude U_P is de som van beide bijdragen.

§ 7. Worden I en I' bedekt (fig. 9), dan zal de lichtvector in P t.o.v. die in § 6 bepaald, eenigszins zijn veranderd.

Wij zullen de fout nagaan, die gemaakt wordt door de grafische constructie toe te passen, en de sectoren, die in φ_1 en φ_1' vallen, ¹⁾ als met oneindig ver verwijderde grenzen te onderstellen, m. a. w. door de uitkomst van § 6 in plaats van de gevraagde, die voor de rechte spleet, te nemen.

¹⁾ en waarin de rand door de lineaal niet meer wordt bestreken.

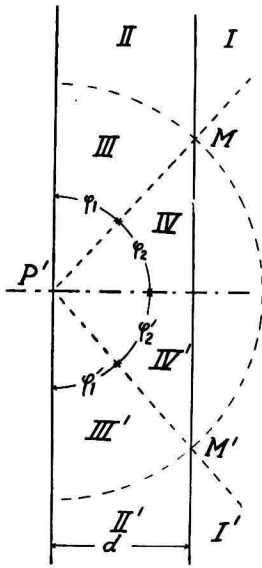


Fig. 9. Constructie van de buigingsfiguur vaneenspleet.

$P'M = R$ zij de lengte van de gebruikte lineaal. Verder is

$$\varphi_1 = \varphi_1', \quad \varphi_2 = \varphi_2'.$$

Stellen wij de complexe amplitude U_P in het beschouwde punt [vgl. (3)]:

$$U_P = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[1 - e^{-\frac{\pi i \rho^2}{\rho \lambda}} \right].$$

In dit geval wordt het verband van ϱ en φ aangegeven door

$$\varrho = \frac{d}{\cos \varphi},$$

waarin d de afstand van P' tot den tegenoverliggenden rand, dus de breedte van de spleet, voorstelt.

Wordt als nieuwe veranderlijke ingevoerd

$$x = \operatorname{tg} \varphi,$$

en zij

$$\frac{\pi d^2}{\rho \lambda} = \alpha,$$

dan luidt de integraal:

$$U_P = \frac{1}{2\pi} \left[\pi - 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} e^{-i\alpha(1+x^2)} \right] \dots \dots \dots (11)$$

Met de grafische methode bepalen wij de bijdrage van IV en IV', zij is

$$U_P = \frac{1}{2\pi} \left[2 \varphi_2 - 2 \int_0^{x_2} \frac{dx}{1+x^2} e^{-i\alpha(1+x^2)} \right], \dots \dots \dots (12)$$

waarin

$$x_2 = \operatorname{tg} \varphi_2;$$

vervolgens die van $(I + II + III) + (I' + II' + III')$, zij is

$$U_P^* = \frac{2\varphi_1}{2\pi}, \dots \dots \dots (12a)$$

zoodat de uitkomst met behulp van de grafische methode gevonden, luidt

$$U_P = U_P + U_P^* = \frac{1}{2\pi} \left[\pi - 2 \int_0^{x_2} \frac{dx}{1+x^2} e^{-i\alpha(1+x^2)} \right] \dots \dots \dots (13)$$

De werkelijke waarde is uitgedrukt door (11). De fout, die wij maken (afgezien van die, welke ontstaat door het vervangen van de integratie door sommatie), is dus

$$F' = \frac{2}{2\pi} \int_{x_2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} e^{-i\alpha(1+x^2)} \dots \dots \dots (14)$$

Zij stelt de bijdrage tot de complexe amplitude van de stukken I en I' voor.

De integraal (14) kan in snel convergeerende reeksen worden ontwikkeld, zowel voor groote als kleine α , maar voor ons doel is de volgende schatting van de fout voldoende.

Laten C_0 en D_0 het reële en imaginaire deel zijn van de amplitude, die met een oneindig gedachte lineaal zouden zijn gevonden, dus van (11), afgezien van de integratiefout.

Bij onze methode, met een eindige lineaal, vinden wij voor ΣA en ΣB : C en D , de reële en imaginaire deelen van (13); insgelijks op de integratiefout na.

Dan is

$$C_0 = C - \Delta C, \quad D_0 = D - \Delta D,$$

$$\Delta C = \frac{2}{2\pi} \int_{x_2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \cos \alpha (1+x^2),$$

$$\Delta D = -\frac{2}{2\pi} \int_{x_2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \sin \alpha (1+x^2).$$

Nu is de werkelijke intensiteit

$$I_0 = C_0^2 + D_0^2,$$

de gemeten

$$I = C^2 + D^2.$$

Dan is, bij benadering,

$$\begin{aligned} I_0 &= C^2 + D^2 - 2 C \Delta C - 2 D \Delta D \\ &= I - 2 C \Delta C - 2 D \Delta D. \end{aligned}$$

Stellen wij nu nog

$$\frac{C}{\sqrt{I}} = \cos \vartheta; \quad \frac{D}{\sqrt{I}} = \sin \vartheta,$$

dan is de fout in de intensiteit

$$\begin{aligned} \Delta I &= I_0 - I = \\ &= -\sqrt{I} \cdot \frac{4}{2\pi} \int_{x_2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \cos \{ \alpha (1+x^2) + \vartheta \}. \end{aligned}$$

De absolute waarde is dus

$$|\Delta I| < \sqrt{I} \cdot \frac{4}{2\pi} \int_{x_1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

$$|\Delta I| < 2\sqrt{I} \cdot \frac{2\varphi_1}{2\pi} \dots \dots \dots (15)$$

De hoek $2\varphi_1$ kan uit de figuur worden afgelezen, hij zal voortaan *onzekere hoek* heeten.

Hij is kleiner, naarmate R , de straal van de lineaal, grooter is.

§ 8. Ligt het punt P' willekeurig, dan bepalen wij de amplitude gemakkelijk, als in §§ 6 en 7 aangegeven, door achtereenvolgens het links van P' gelegen deel der spleet bedekt te onderstellen, daarna het rechts gelegen deel, en de uitkomsten te sommeeren.

De behandeling van het geval, dat er meer dan één spleet aanwezig is, biedt ook geen nieuwe moeilijkheden.

§ 9. Als voorbeeld is de buigingsfiguur van een rechten rand opgenomen (fig. 10). De lineaalengte bedroeg 100×0.125 cm. (schaal 100:1); zelfs bij deze geringe lengte blijken de maxima en de minima tot betrekkelijk ver van den rand op bevredigende wijze te kunnen worden bepaald.

Voor punt T (fig. 10) zijn de foutengrenzen aangegeven. In dit punt zijn er vier sectoren met middelpuntshoek 5° , die niet tot het oneindige onbedekt zijn, maar waar het einde van de lineaal binnen de opening valt.

De grafische bepaling levert

$$\Sigma A = 824, \quad \Sigma B = -8,$$

zoodat

$$I = 824^2 + 8^2 = 679040.$$

Om de absolute intensiteit te vinden, moeten wij vermenigvuldigen met $1/518400$ (pag. 12), zoodat

$$I = 1.31.$$

Nu is

$$|\Delta I| < 2\sqrt{I} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}; \dots \dots \dots (15)$$

φ omvat vier hoeken van 5° , dus

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{18},$$

$$|\Delta I| < \frac{1}{9} \cdot \sqrt{1.31} = 0.13$$

¹⁾ met verwaarloozing van $(\Delta C)^2$ en $(\Delta D)^2$.

en

$$1.18 < I_0 < 1.44.$$

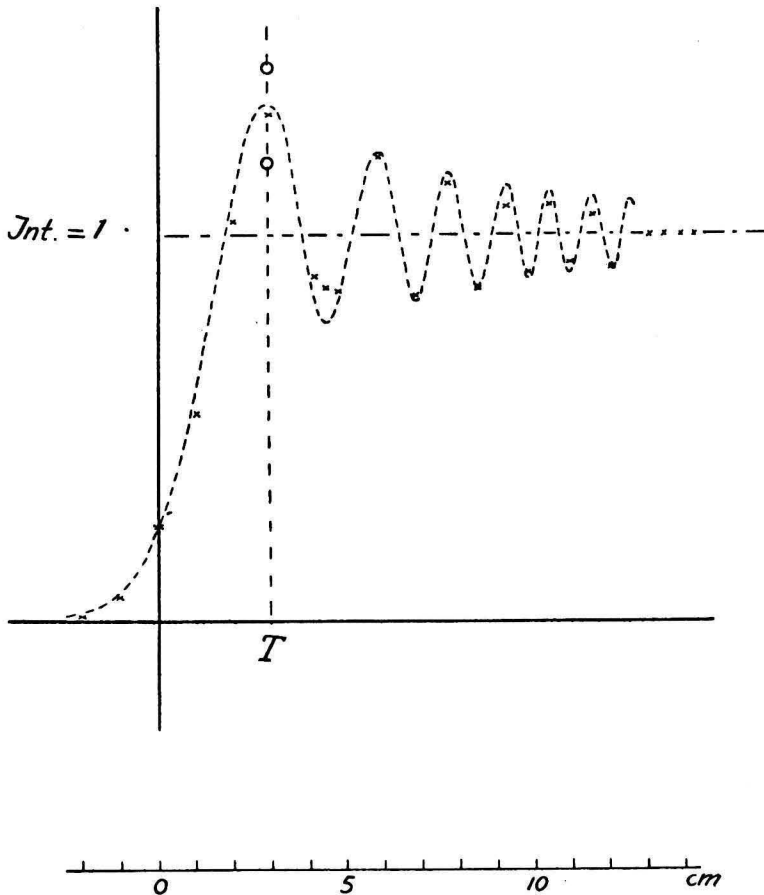


Fig. 10. Buigingsbeeld van een rechten rand.

----- theoretisch. ×××× grafische bepaling. Schaal 100 : 1.

Men vernauwt de foutengrenzen door de lineaal langer te maken.

§ 10. *Spleten van anderen vorm.* De methode van §§ 7 en 8 kan ook op andere spleten worden toegepast. Slechts moeten wij nagaan, hoe groot de grenzen zijn van de fout, ontstaan door het gebruik van een eindige constructielineaal. Wij willen ons hierbij bepalen tot een wigvormige opening, welk voorbeeld genoegzaam de wijze van werken illustreert.

Laat BOD (fig. 11) de wigvormige opening zijn, die zich naar het oneindige uitstrekt. Een straal naar een punt van OB wordt, als functie van φ , ϱ_1 genoemd, een straal naar een punt van OD , ϱ_2 . Verder zijn uit P' de stralen $P'C$ en $P'E$ evenwijdig aan de randen van de wig getrokken. De werkelijke complexe amplitude in P vindt men nu aldus:

Het oneindige gebied tusschen $P'O$, OB en $P'C$, indien geheel onbedekt, levert de bijdrage:

$$U'_P = \int_0^{(\varphi_1 + \varphi_2)} \frac{d\varphi}{2\pi} \left[1 - e^{-\frac{\pi i \rho_1^2}{r \rho^\lambda}} \right].$$

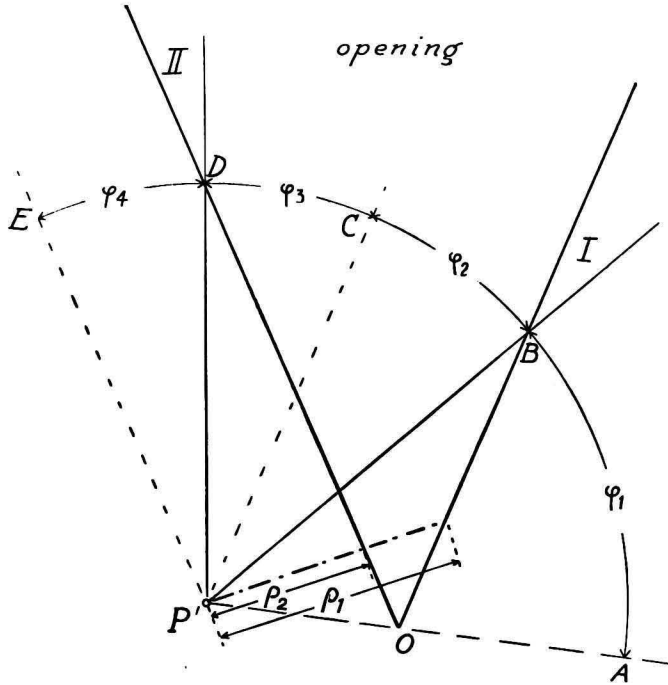


Fig. 11. Wigvormige opening.

Immers de integraal convergeert en mag worden gebruikt (§§ 3, 4, 5). Voor den oneindigen sector $EP'C$ vinden wij:

$$U''_P = \frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2\pi}.$$

Nu moeten wij aftrekken de bijdrage van het gedeelte tusschen $P'O$, OD en $P'E$:

$$U'''_P = \int_0^{(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)} \frac{d\varphi}{2\pi} \left[1 - e^{-\frac{\pi i \rho_2^2}{r \rho^\lambda}} \right].$$

Dan is dus de complexe amplitude:

$$(U_P)_0^1) = U'_P + U''_P - U'''_P = \left. \begin{aligned} &= - \int_0^{(\varphi_1 + \varphi_2)} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-\frac{\pi i \rho_1^2}{r \rho^\lambda}} + \int_0^{(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-\frac{\pi i \rho_2^2}{r \rho^\lambda}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (16)$$

1) de index nul geeft aan dat gebruik van een oneindige lineaal verondersteld is.

Praktisch, d.i. met een eindige lineaal, bepalen wij de amplitude als volgt:

Voor den rand OB stellen wij de afgelezen waarden $A = 10, B = 0$, zoodra de constructiestraal den rand verlaat, dus voorbij punt B . Bij de waarden op OD , die wij negatief aflezen, gebeurt dit voorbij D . Wij lezen dus slechts af over den hoek $AP'D$. Dit komt er op neer, dat wij den sector I onbedekt aannemen, omdat wij $BP'C$ als een oneindigen sector beschouwen, en dat wij de bijdrage van sector II verwaarloozen. De onzekere sectoren zijn dus φ_2 en φ_4 .

In formule:

$$\begin{aligned}
 U_P &= \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{2\pi} \left[1 - e^{-\frac{\pi i \rho_1^2}{\rho^\lambda}} \right] + \frac{\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{2\pi} - \int_0^{(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)} \frac{d\varphi}{2\pi} \left[1 - e^{-\frac{\pi i \rho_2^2}{\rho^\lambda}} \right] - \frac{\varphi_4}{2\pi} \\
 &= - \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-\frac{\pi i \rho_1^2}{\rho^\lambda}} + \int_0^{(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-\frac{\pi i \rho_2^2}{\rho^\lambda}} .
 \end{aligned} \tag{17}$$

De fout is dus het verschil van (17) en (16):

$$F = (U_P)_0 - U_P = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \varphi_2} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-\frac{\pi i \rho_1^2}{\rho^\lambda}} + \int_{(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}^{(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-\frac{\pi i \rho_2^2}{\rho^\lambda}} .$$

Nu de redeneering herhalende van pag. 25, vinden wij:

$$|\Delta I| < 2\sqrt{I} \frac{\varphi_2 + \varphi_4}{2\pi} \tag{18}$$

De daar gevonden uitdrukking voor de fout van de intensiteit is nu op algemeene wijze afgeleid: men deelt de totale hoekwaarde der onzekere sectoren door π , en vermenigvuldigt de breuk met den wortel van de berekende intensiteit.

HOOFDSTUK IV.

AAN ALLE ZIJDEN BEGRENSEDE GROOTE OPENINGEN EN GROOTE SCHERMEN.

De bepaling van het buigingsbeeld van groote openingen en groote schermen kan met onze methode niet anders dan bij benadering geschieden. De sectoren, waarin de constructiestraal den rand niet snijdt, moeten als oneindig ($A = 10$, $B = 0$) worden beschouwd. Is het aantal onzekere sectoren groot, dan wordt wegens (15) of (18) de uitkomst te onbetrouwbaar. Verbetering is dan alleen te krijgen, door de lineaal te verlengen.

HOOFDSTUK V.

A. DIVERGEERENDE LICHTBUNDELS.

§ 1. *Kleine openingen.* Tot nu toe hebben wij de methode alleen uitgewerkt voor evenwijdige, loodrecht invallende lichtbundels. Theoretisch is wel steeds een divergeerende bundel gebruikt, maar in de behandelde gevallen werd de intensiteit alleen nagegaan voor punten, waarvan de verbindingslijn met de lichtbron loodrecht of nagenoeg loodrecht op het buigingsvlak stond.

Wij zullen aantonen, dat de methode alleen in dit geval eenvoudig toe te passen is.

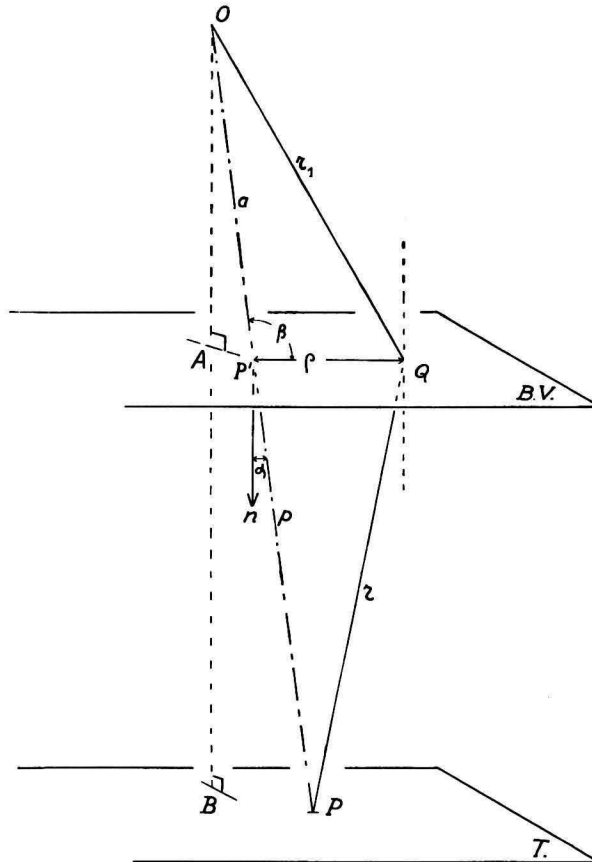


Fig. 12.

In fig. 12 is O de lichtbron, P het punt, waar de intensiteit wordt

gevraagd en Q een punt binnen de opening. P' is het snijpunt van OP met het buigingsvlak; $OP' = a$, $P'P = p$.

Volgens KIRCHHOFF is de lichttrilling in P het reële gedeelte van

$$V_P = \iint \frac{d\sigma}{2rr_1\lambda} \{ \cos(r, n) - \cos(r_1, n) \} ie^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{r+r_1}{\lambda} \right)}, \dots (19)$$

als $OQ = r_1$; $QP = r$.

De constante, die de lichtsterkte aangeeft, is 1 gesteld.

Wanneer nu (als in hoofdstuk I, § 1) de opening klein is t. o. v. r en r_1 en het punt P' binnen de opening valt, of er niet ver van verwijderd is, kunnen wij de volgende vereenvoudigingen aanbrengen.¹⁾

Wij kunnen in den noemer van (19) $r_1 = a$, $r = p$ stellen, en

$$\cos(r, n) = -\cos(r_1, n) = \cos \alpha$$

als α de hoek is, die OP met den normaal maakt.

Wij krijgen dus:

$$V_P = e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{a+p}{\lambda} \right)} \iint \frac{d\sigma \cdot \cos \alpha}{ap\lambda} ie^{-2\pi i \frac{r+r_1-a-p}{\lambda}}, \dots (19a)$$

Nu is, als men $\angle QP'O$ β noemt:

$$r_1^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cos \beta,$$

$$r^2 = p^2 + \varrho^2 + 2p\varrho \cos \beta,$$

dus

$$r_1 = a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{a^2} - \frac{\varrho}{a} \cos \beta - \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{a^2} \cos^2 \beta \right),$$

$$r = p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{p^2} + \frac{\varrho}{p} \cos \beta - \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{p^2} \cos^2 \beta \right)$$

en

$$r + r_1 = a + p + \frac{1}{2} \varrho^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{p} \right) \sin^2 \beta.$$

Wij vinden dus, poolcoördinaten om P' invoerende, en

$$e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{a+p}{\lambda} \right)}$$

weglatende, voor de complexe amplitude [vgl. (1c)]:

$$U_P = \iint \frac{d\varphi \cdot \varrho \cdot d\varrho \cdot \cos \alpha}{ap\lambda} ie^{-\frac{\pi i \varrho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{a} \right) \sin^2 \beta} \dots (19b)$$

¹⁾ In hoofdstuk I, § 1 werd verondersteld, dat de projecties van P en O binnen de opening vielen, d.i. dat PO geheel of nagenoeg loodrecht op het buigingsvlak stond.

Daar nu $\angle QP'O$ een functie van φ is, is het duidelijk, dat wij onze methode slechts kunnen toepassen, als

$$\sin^2 QP'O = \text{const.}$$

kan worden gesteld. Dit is alleen het geval, als OP' loodrecht, of vrijwel loodrecht op het buigingsvlak staat, dus als

$$\cos \alpha = 1.$$

Wij vinden dan, op analoge wijze als in hoofdstuk I, § 2:

$$U_P = \int \frac{d\varphi}{2\pi(a+p)} \left[e^{-\frac{\pi i \rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{a} \right)} \right]_{\rho_1}^{\rho_2} \dots \dots \dots (20)$$

Deze vergelijking is geheel analoog met (3), en kan weer den grondslag vormen voor een grafische methode.

Men neemt A en B als functies van

$$\frac{\pi \rho^2}{p\lambda} \left(1 + \frac{p}{a} \right) \text{ in plaats van } \frac{\pi \rho^2}{p\lambda},$$

en deelt de uitkomst door $a + p$.

Door gebruik te maken van dezelfde lineaal als in de voorgaande hoofdstukken kan men dus zonder meer de intensiteit in elk punt P construeeren.

§ 2. *Andere gevallen.* Voor een spleet hebben wij voor loodrecht invallend divergeerend licht reeds (20) afgeleid in hoofdstuk III, § 5, (10b). Wij kunnen ook met divergeerend licht alle gevallen van de voorgaande hoofdstukken behandelen, als OP vrijwel loodrecht op het buigingsvlak staat.

B. SCHEEF INVALLENDE LICHTBUNDELS.

Wanneer men in (19b) het tweede lid met a vermenigvuldigt, en vervolgens tot de limiet $a \rightarrow \infty$ overgaat (hoofdstuk I, § 1) verkrijgt men de uitdrukking voor het geval van een evenwijdigen lichtbundel, die onder een hoek α met den normaal op het buigingsvlak invalt:

$$U_P = \iint \frac{d\varphi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot \cos \alpha}{p\lambda} i e^{-\frac{\pi i \rho^2}{p\lambda} \sin^2 \beta} \dots \dots \dots (19c)$$

Ook hier kan men de methode slechts toepassen, als de bundel vrijwel loodrecht invalt, zoodat $\cos \alpha = 1$; men vindt dan weer de formules van hoofdstuk I terug.

HOOFDSTUK VI.

VERKORTE METHODE VOOR RECHTE SPLETEN.

§ 1. De in de vorige hoofdstukken ontwikkelde grafische methode berust op het principe, dat de oorsprong van de coördinaten in het buigingsvlak niet vast wordt aangenomen, maar met het stelpunt P verplaatst wordt.

Verder hebben wij gebruik gemaakt van poolcoördinaten, wat bij willekeurig begrensde openingen overwegende voordeelen biedt. Echter is speciaal voor de rechte spleet, het gebruik van *rechthoekige* coördinaten veel eenvoudiger.

§ 2. In P wordt de lichtintensiteit gevraagd voor een loodrecht op het buigingsvlak invallenden bundel evenwijdig licht.

De complexe amplitude is dan volgens hoofdstuk III, § 5, (10c):

$$U_P = \iint \frac{d\sigma}{p\lambda} ie^{-\frac{\pi i \sigma^2}{p\lambda}} .$$

Kiezen wij de X -as loodrecht op de spleetranden, den oorsprong in de projectie P' van P , en zijn de afstanden van P' tot de twee spleetranden x_1 en x_2 , dan is

$$U_P = \int_{x_1 - \infty}^{x_2 + \infty} \int \frac{dx dy}{p\lambda} ie^{-\frac{\pi i (x^2 + y^2)}{p\lambda}} .$$

Men vindt nu op bekende wijze ¹⁾, door de integratie naar y uit te voeren, en $v = x \sqrt{\frac{2}{p\lambda}}$ te stellen, de intensiteit I :

$$I = \frac{1}{2} (C^2 + S^2), \dots \dots \dots (20)$$

waarin

$$C = \int_0^{v_2} \cos \frac{\pi v^2}{2} dv - \int_0^{v_1} \cos \frac{\pi v^2}{2} dv,$$

en

$$S = \int_0^{v_2} \sin \frac{\pi v^2}{2} dv - \int_0^{v_1} \sin \frac{\pi v^2}{2} dv. \text{ } ^2)$$

¹⁾ Enc. Math. Wiss. V, 431 (1924).

²⁾ Zie ook DRUDE, Précis d'Optique I, 273 (1911).

TABEL II.

$x \cdot 100$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \cos$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \sin$	$x \cdot 100$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \cos$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \sin$	$x \cdot 100$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \cos$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \sin$
0.25	0.078	0.0003	7.50	0.428	0.351	14.75	0.317	0.365
0.50	141	0.003	7.75	397	412	15.00	353	316
0.75	212	10	8.00	330	419	15.25	389	366
1.00	281	24	8.25	287	367	15.50	331	382
1.25	348	46	8.50	311	304	15.75	337	322
1.50	411	78	8.75	377	294	16.00	388	351
1.75	466	122	9.00	416	348	16.25	341	386
2.00	511	176	9.25	383	407	16.50	331	327
2.25	541	240	9.50	317	400	16.75	387	348
2.50	551	310	9.75	299	336	17.00	342	384
2.75	540	380	10.00	353	297	17.25	335	327
3.00	506	441	10.25	406	337	17.50	386	353
3.25	451	486	10.50	383	398	17.75	335	379
3.50	384	504	10.75	318	392	18.00	346	323
3.75	315	493	11.00	310	327	18.25	382	368
4.00	259	452	11.25	372	307	18.50	325	367
4.25	229	388	11.50	401	365	18.75	365	326
4.50	238	319	11.75	348	401	19.00	365	381
4.75	279	264	12.00	307	352	19.25	327	341
5.00	345	243	12.25	354	308	19.50	382	346
5.25	411	265	12.50	398	353	19.75	337	376
5.50	450	322	12.75	352	398	20.00	353	325
5.75	444	391	13.00	310	351	20.25	369	376
6.00	393	438	13.25	359	312	20.50	328	344
6.25	324	438	13.50	394	363	20.75	381	349
6.50	275	389	13.75	338	391	21.00	333	370
6.75	278	321	14.00	319	332	21.25	363	329
7.00	331	277	14.25	381	325			
7.25	398	290	14.50	374	386			

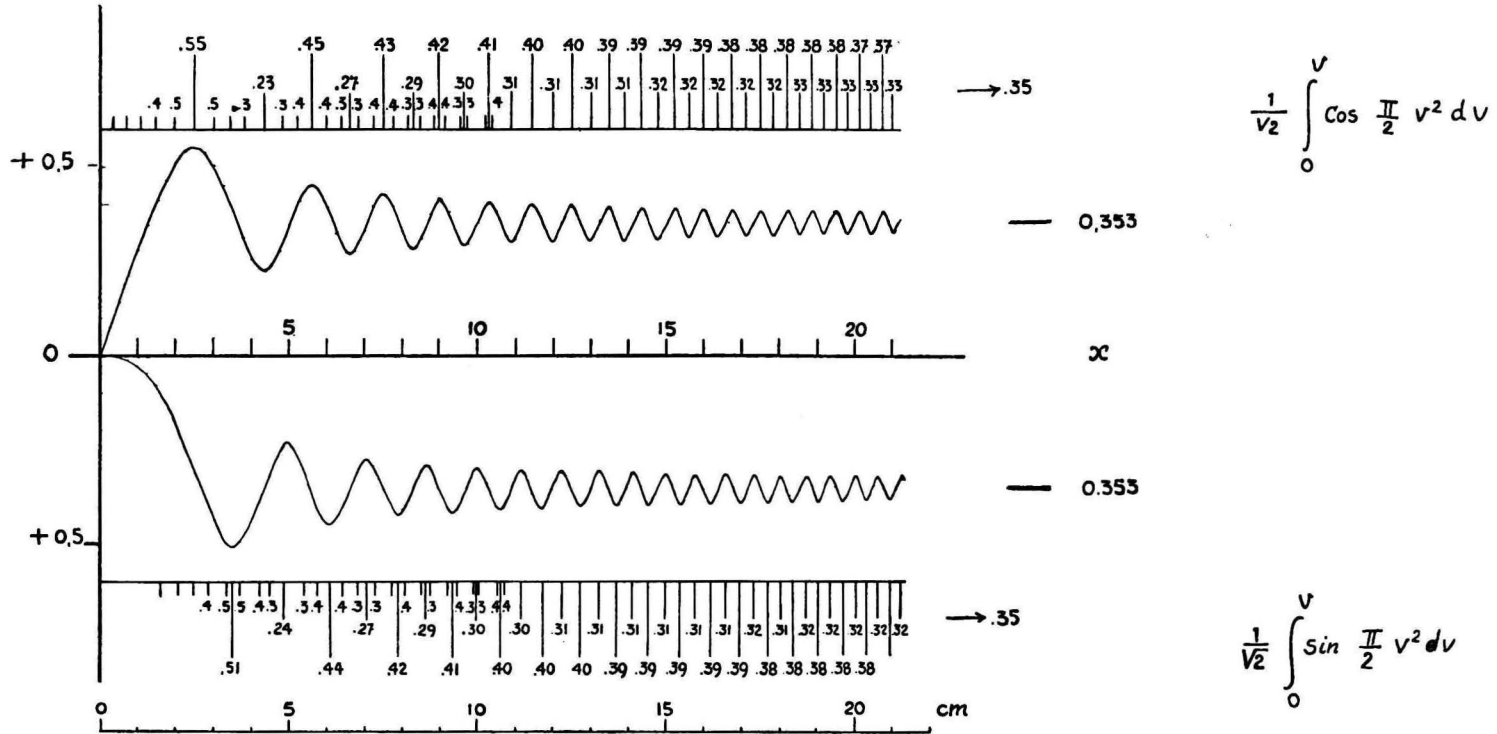


Fig. 13. De verdeling van de constructielineaal voor de verkorte grafische methode.

Schaal 100 : 1, $p = 25$ cm, $\lambda = 5.10^{-5}$ cm.

§ 3. De waarden van de integralen van FRESNEL zijn bepaald. In tabel II zijn een aantal waarden van

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^v \cos \frac{\pi v^2}{2} dv \quad \text{en} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^v \sin \frac{\pi v^2}{2} dv$$

als functies van

$$x = v \sqrt{\frac{p\lambda}{2}}, \quad (p = 25 \text{ cm}, \quad \lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm})$$

opgenomen.

Vervaardigen wij nu een lineaal, waarop aan weerszijden van het nulpunt de bij elke waarde van x behorende waarden van tabel II geplaatst zijn, dan kunnen, — door het nulpunt te laten samenvallen

spleet

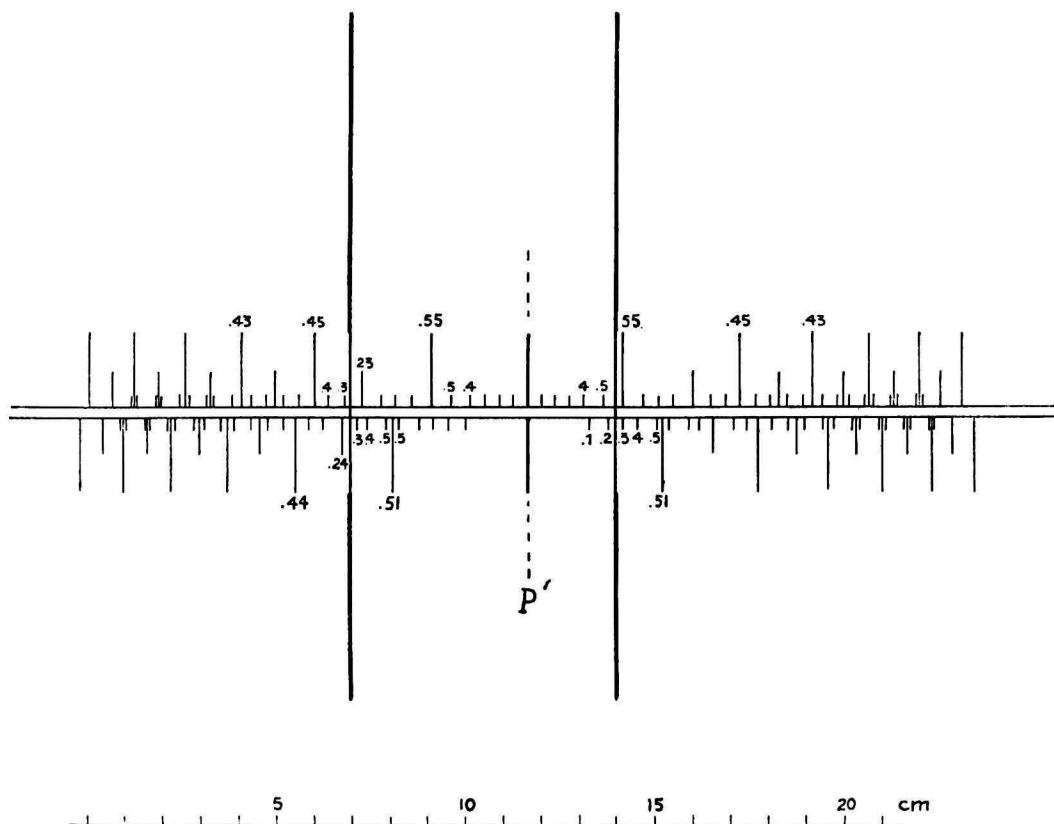


Fig. 14. Bepaling van de lichtintensiteit in P bij een spleet $y = 6$ (ARKADIEW l. c.).

met P' en de lineaal loodrecht op den spletrand te plaatsen — de waarden van

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{v_1} \cos \frac{\pi v^2}{2} dv, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{v_2} \cos \frac{\pi v^2}{2} dv \quad \text{en}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{v_1} \sin \frac{\pi v^2}{2} dv, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{v_2} \sin \frac{\pi v^2}{2} dv$$

worden afgelezen. Het verschil van de tweede en de eerste integraal is dan $C/\sqrt{2}$, dat van de vierde en de derde $S/\sqrt{2}$, en de som der kwadraten dier verschillen geeft de lichtintensiteit (20).

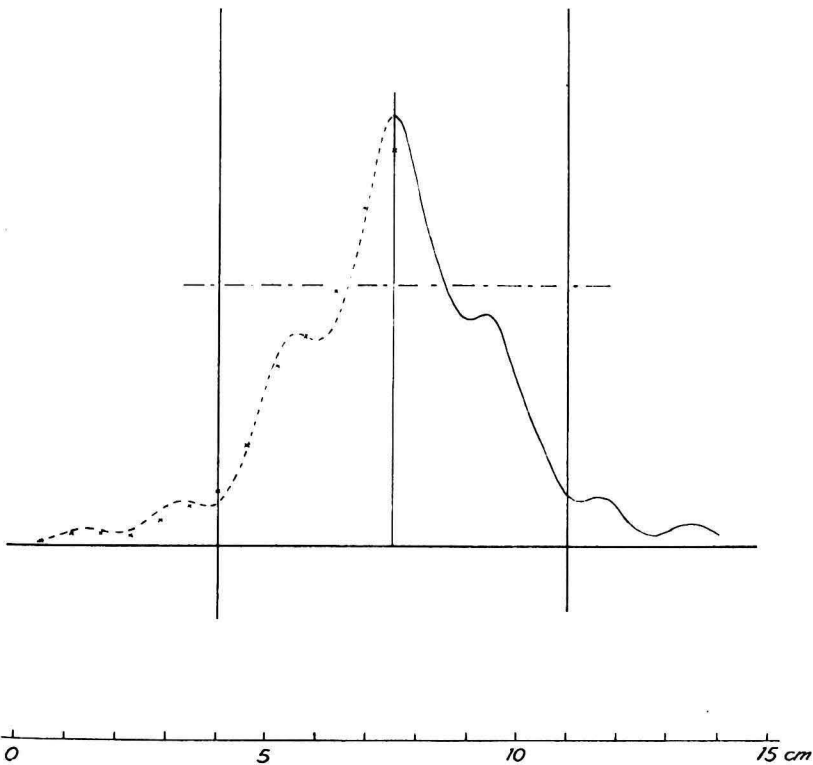


Fig. 15. De verdeling der lichtsterkte bij de spleet $y=6$ (ARKADIEW l. c.).

---- volgens ARKADIEW; $\times\times\times$ volgens de algemeene grafische methode;
 ——— volgens de verkorte grafische methode.

§ 4. In fig. 13 is de verdeling van de lineaal aangegeven (op schaal 100:1, $p=25$ cm, $\lambda=5.10^{-5}$ cm), terwijl in fig. 14 het gebruik wordt aangetoond. Maakt men, van het nulpunt uitgaande, een overgang opening-scherm, dan worden de afgelezen waarden, geheel als in hoofdstuk I, genoteerd zooals ze op de lineaal voorkomen; bij een overgang

scherm-opening wordt het teeken omgekeerd. Voor punt P in fig. 14 is de intensiteit derhalve

$$I_p = [0.28 + 0.53]^2 + [0.27 + 0.24]^2 = 0.916.$$

In fig. 15 is het geheele buigingsbeeld van een spleet geconstrueerd (ARKADIEW, t. a. p.).

§ 5. Op dezelfde wijze als in hoofdstuk I, § 4, kan worden afgeleid, dat de schaal van de lineaal voor andere waarden van p en λ is

$$\left[\frac{\sqrt{25 \times 5 \times 10^{-5}}}{\sqrt{p\lambda}} \times 100 \right] : 1.$$
