ÉTUDE

SUR LES FORMULES (SPÉCIALEMENT DE GAUSS) SERVANT A CALCULER DES VALEURS APPROXIMATIVES D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE

PAR

B. P. MOORS.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL XI N°. 6.

AMSTERDAM,

JOHANNES MÜLLER.

1913.

Valeur approximative d'une intégrale définie.

§ 1. La plupart du temps la valeur d'une intégrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ ne peut pas, par intégration, être déterminée d'une façon simple; souvent même la fonction placée sous le signe intégral a une forme si compliquée, qu'il est extrêmement difficile et même parfois tout à fait impossible de l'intégrer. Généralement on ne peut non plus, sans des calculs embarrassants, exécuter le calcul approximatif de l'intégrale en développant sa fonction dans une série. Par contre, on peut toujours aisément, et d'habitude assez vite, et cela avec toute l'exactitude désirable, trouver, au moyen de formules dites d'approximation, une valeur approximative de presque toutes les intégrales.

La valeur de l'intégrale $\int \varphi(x)\,dx$, entre les limites a et b, peut, dans le sens géométrique, être représentée par l'aire de la surface plane $A'\,A\,B\,B'$ [1]) limitée par l'axe X, les ordonnées qui appartiennent aux abscisses $O'A' = a$ et $O'B' = b$ et la courbe dont l'équation est

$$y = \varphi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si maintenant la fonction sub (1) *peut* être représentée par une série continue, infinie ou non, de la forme

$$y = f(x) = K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2 + \text{etc.} \ldots\ldots \quad (2)$$

alors on peut toujours, comme nous le verrons ci-dessous, développer des formules par lesquelles il est donné de calculer des *valeurs approximatives* de l'intégrale définie, sans qu'il soit nécessaire d'intégrer ou de connaître la série elle-même, et, dans ce dernier cas, malgré que les formules d'approximation en question se basent sur cette série.

---

[1]) Voir la figure à la fin de cet exposé; les axes des coordonnées sont considérés comme perpendiculaires l'un sur l'autre.

Si la série est convergente, elle peut être représentée, avec un degré illimité d'exactitude, par la série *finie:*

$$y = f(x) = K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + K_3 x^3 + \ldots + K_{z-1} x^{z-1} \ldots . \quad (3)$$

qui représente l'équation d'une courbe parabolique passant par z points de la ligne sub (1).

Dans (3), on peut attribuer à z une valeur aussi grande que l'on voudra.

Nous attribuerons, dans cet exposé, à z une grandeur telle que les deux lignes sub (3) et (1) coïncident à extrêmement peu de chose près, de sorte que l'aire de la figure limitée par la ligne sub (3) a assez bien la même grandeur, que celle limitée par la ligne sub (1). Dans ce cas, la première aire peut prendre la place de la seconde.

§ 2. Les séries, dont il est question sub (3), peuvent être divisées en deux classes.

Dans la première classe se ramènent les séries dans lesquelles les coefficients K représentent *uniquement* des valeurs connues et dans lesquelles dans les n premiers, éventuellement dans les $2n$ premiers termes, *aucun* K n'est égal à zéro, c'est-à-dire qu'aucun des termes avec K_0 jusque K_{n-1} inclusivement, éventuellement jusque K_{2n-1} inclusivement, ne manque [1]).

Toutes les autres séries, nous les considérons comme appartenant à la seconde classe.

§ 3. Alors que, en rapport avec la convergence, il suffit, au point de vue théorique, que la série sub (3) converge, afin d'en pouvoir calculer des valeurs approximatives d'une intégrale définie, *la pratique* exige que la série *converge assez fort pour qu'un nombre borné de termes* (n) puissent donner une approximation suffisante.

L'approximation doit donc, lorsque le nombre des termes de la série augmente ou du moins lorsque cette augmentation est quelque peu considérable, s'améliorer d'une façon *constante.*

Par exemple, dans la série

$$\frac{x}{a+1} + \frac{x^2}{(a+2)^2} + \frac{x^3}{(a+3)^3} + \frac{x^4}{(a+4)^4} + \ldots$$

---

[1]) Ce n'est que dans le § 7 qu'il apparaîtra que par n on entend ici le nombre de termes d'une série dont les coefficients, chacun en particulier, sont, pour la déduction d'une formule d'approximation, assimilés à zéro.

après substitution des valeurs de $x = 1$ et $a = 10.1$ et calcul des termes, les *six* premiers termes semblent être assez convergents; cependant ce qu'ils fournissent ne ressemble aucunement au résultat qu'on doit obtenir, lequel n'apparaît que lorsqu'on prend au moins douze termes.

Des séries dont il faudra prendre plus d'une douzaine de termes afin d'en pouvoir calculer une valeur suffisamment approximative conviennent moins à la déduction de formules d'approximation, parce qu'elles exigeraient des calculs trop étendus.

Dans cet exposé, nous admettrons toujours que les séries sur lesquelles se basent les formules d'approximation en question, convergent suffisamment après un nombre relativement petit de termes.

SECTION I.

Formules d'approximation lorsqu'on peut substituer à la fonction sous le signe intégral une série de la première classe.

Aire exacte d'une figure plane limitée par une courbe parabolique dont l'équation peut être représentée par une série de la première classe.

§ 4. Sans nuire à la généralité du problème que nous traitons dans cette section, nous pouvons admettre que l'origine des abscisses coïncide avec la première ordonnée de la figure.

A ce titre, l'axe $O'Y''$ (voir la figure à la fin de cet exposé) est déplacé du point O' au point A'; par là, à l'égard de la ligne $A'Y'$, considérée comme l'axe des y, l'équation de la vraie ligne limite de la figure sub (1) devient

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

et celle de la courbe parabolique sub (3)

$$y = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \ldots + L_{n-1} x^{n-1} + L_n x^n + \ldots + \\ + L_{2n-2} x^{2n-2} + L_{2n-1} x^{2n-1} + L_{2n} x^{2n} + \ldots + L_{z-1} x^{z-1} \quad \ldots \quad (5)$$

Nous représenterons l'aire de la figure limitée par la courbe, dont il est question sub (5), par I et nous l'appellerons *l'aire exacte* de la figure, parce que z, ayant une valeur aussi grande qu'on le veut, la différence entre I et *l'aire vraie*, c'est-à-dire l'aire parfaite de la figure limitée par la ligne sub (4) est inférieure, en valeur absolue, à toute grandeur donnée si petite qu'on veut.

Si l'on admet $A'B'$ comme unité de longueur, alors I est représenté par

$$I=\int_0^1\left\{L_0+L_1x+L_2x^2+\ldots+L_{n-1}x^{n-1}+L_nx^n+\ldots+L_{z-1}x^{z-1}\right\}dx$$

donc

$$I=L_0+\tfrac{1}{2}L_1+\tfrac{1}{3}L_2+\ldots+\tfrac{1}{n}L_{n-1}+\tfrac{1}{n+1}L_n+\ldots+\tfrac{1}{z}L_{z-1}\ldots \quad (6)$$

Aire approximative de la figure et erreur de l'approximation.

§ 5. Etant donné, que de la vraie ligne limite $y=f(x)$, sub (4), on ne connaît les coordonnées que de n points, soit $n<z$, distribués arbitrairement sur cette ligne limite, il est possible, quelque grossière que puisse être l'approximation, de désigner une aire approximative de la figure $A'ABB'$ par

$$I_1=R_1y_1+R_2y_2+R_3y_3+\ldots+R_ny_n\ldots\ldots \quad (7)$$

où y_1, y_2, $y_3,\ldots y_n$ représentent les ordonnées des n points connus de la vraie ligne limite de la figure et R_1, R_2, $R_3,\ldots R_n$ des nombres arbitraires.

Lorsque l'erreur de l'approximation de I_1 sub (7), c'est-à-dire la différence entre l'aire exacte I et l'aire approximative I_1 est représentée par E alors

$$I-I_1=E \qquad \text{et} \qquad I=I_1+E\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

§ 6. Si les valeurs des ordonnées des n points connus, calculées de $y=f(x)$, sub (4), sont transportées dans (7), alors nous pouvons, en vertu de (5), établir:

$$\begin{aligned}
I_1=R_1&\left\{L_0+L_1x_1+L_2x_1^2+\ldots+L_{n-1}x_1^{n-1}+L_nx_1^n+\ldots+L_{2n-1}x_1^{2n-1}+L_{2n}x_1^{2n}+\ldots+L_{z-1}x_1^{z-1}\right\}+\\
+R_2&\left\{L_0+L_1x_2+L_2x_2^2+\ldots+L_{n-1}x_2^{n-1}+L_nx_2^n+\ldots+L_{2n-1}x_2^{2n-1}+L_{2n}x_2^{2n}+\ldots+L_{z-1}x_2^{z-1}\right\}+\\
+R_3&\left\{L_0+L_1x_3+L_2x_3^2+\ldots+L_{n-1}x_3^{n-1}+L_nx_3^n+\ldots+L_{2n-1}x_3^{2n-1}+L_{2n}x_3^{2n}+\ldots+L_{z-1}x_3^{z-1}\right\}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+R_n&\left\{L_0+L_1x_n+L_2x_n^2+\ldots+L_{n-1}x_{n-1}+L_nx_n^n+\ldots+L_{2n-1}x_n^{2n-1}+L_{2n}x_n^{2n}+\ldots+L_{z-1}x_n^{z-1}\right\}=\\
&=\Sigma\left\{x_1^pR_1+x_2^pR_2+x_3^pR_3+\ldots+x_n^pR_n\right\}L_p.
\end{aligned}$$

Cette équation étant soustraite de celle sub (6), donne, en vertu de (8),

$$E=\Sigma\left\{\tfrac{1}{p+1}-(x_1^pR_1+x_2^pR_2+x_3^pR_3+\ldots+x_n^pR_n\right\}L_p\ldots \quad (9)$$

et

$$I = I_1 + E = I_1 + \Sigma \left\{ \frac{1}{p+1} - (x_1^p R_1 + x_2^p R_2 + x_3^p R_3 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \ldots + x_n^p R_n \right\} L_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

où p doit être remplacé successivement par 0, 1, 2, 3,...(z—1).

§ 7. Dans (9) se présentent, outre les grandeurs tout à fait inconnues L, deux groupes chacun de n grandeurs, à savoir: un groupe de n grandeurs x et un groupe de n grandeurs R, donc en tout $2n$ grandeurs. Aux grandeurs x et R que l'on veut supposer connues, peuvent s'attribuer des valeurs arbitraires, alors que les grandeurs inconnues peuvent se calculer, au moyen des équations que l'on obtient en égalant dans (9) autant de coefficients de L à 0, que contient le nombre des grandeurs inconnues de x et R. Ainsi dans (9) nous pouvons, *indépendamment des valeurs inconnues de* L, éliminer à notre gré 0, 1, 2, etc. jusqu' *au plus* $2n$ termes de E. [1])

§ 8. L'expression dans le dernier membre de (10) donne l'aire *exacte* de toute figure, qui est limitée par une courbe parabolique, dont l'équation se trouve sub (5); elle est valable pour toutes les valeurs attribuées à n, x et R. Cependant, quoique une formule dans laquelle x et R sont arbitraires, soit mathématiquement exacte, elle ne convient pourtant pas pour en obtenir une valeur utilisable de I_1. Notamment, nous ne connaissons aucune des grandeurs L et nous sommes donc obligés de négliger tous les termes de E, sub (9), pour autant qu'ils ne sont pas égalés à 0, qui pris ensemble peuvent constituer une valeur considérable.

Par conséquent on doit tâcher de développer pour I des formules, dans lesquelles les termes de E, sub (9), aussi bien quant à leur nombre que quant à leur grandeur, sont réduits à un minimum; car apparemment dans (10) I_1 diffèrera moins de I à mesure que E, sub (9), devient plus petit.

Quoique nous puissions éliminer chaque terme de chaque groupe de n termes arbitraires de E qui se suivent ou non, il convient que nous prenions à cet effet de préférence les termes dont les grandeurs L sont affectés du plus petit indice, parce que, la série sub (5) étant convergente, les termes affectés de l'indice le plus petit ont ordinairement une valeur considérablement plus grande que ceux affectés d'un indice plus grand. A ce titre, pour la déter-

[1]) Dans chacun de ces cas, il se forme un groupe spécial de formules d'approximation dont quelques-unes, qui sont connues sous le nom de leurs auteurs, seront indiquées dans le § 10.

mination des valeurs de x et R, nous égalerons toujours, dans cet exposé, à zéro les coefficients des termes affectés de l'indice le plus petit dans (9).

Si par conséquent dans (9) les $2n$ coefficients de L_0 jusque L_{2n-1} inclusivement sont chacun en particulier égalés à zéro, si des $2n$ équations qui en résultent on déduit les n valeurs de x et les n valeurs de R, et si on transporte ces valeurs dans (7) et (10), alors on obtient pour (10) une expression pour I dans laquelle les termes de E avec L_0 jusque L_{2n-1} ne se présentent plus et on obtient donc pour (7) une expression pour I_1 qui est la plus exacte qui puisse être déduite de (9).

Si l'on suppose, par exemple, le cas où l'on veut, de n ordonnées, déterminer une valeur approximative d'une intégrale, alors on trouve les n valeurs de R, sub (7), qui pour n ordonnées, conduisent à la formule la plus exacte, au moyen des $2n$ équations qu'on obtient en égalant à 0 chacun en particulier les coefficients de L_0 jusque L_{2n-1} inclusivement. On a de la sorte (pour $p = 0$, 1, 2, 3,...$2n-1$):

$$\left.\begin{array}{rrrr} R_1+ & R_2+ & R_3+\ldots+ & R_n=1\ , \\ x_1 R_1+ & x_2 R_2+ & x_3 R_3+\ldots+ & x_n R_n=\frac{1}{2}\ , \\ x_1^2 R_1+ & x_2^2 R_2+ & x_3^2 R_3+\ldots+ & x_n^2 R_n=\frac{1}{3}\ , \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{2n-1} R_1+ & x_2^{2n-1} R_2+ & x_3^{2n-1} R_3+\ldots+ & x_n^{2n-1} R_n=\frac{1}{2n}\ . \end{array}\right\} \ldots (11)$$

Avant de poursuivre, nous faisons remarquer qu'à chaque x_p, qui satisfait aux équations sub (11), s'attache en même temps une valeur $(1-x_p)$ [1]).

Pour le démontrer on prend des équations sub (11) les $(k+1)$ premières, on les multiplie en numéro d'ordre par les coefficients binomiaux du $k^{\text{ième}}$ degré affectés de signes alternativement $+$ et $-$ et additionne le tout. Alors on obtient

$$R_1\left\{1-\frac{k}{1}x_1+\frac{k(k-1)}{1.\,2}x_1^2-\ldots+(-1)^k x_1^{\,k}\right\}+$$
$$+R_2\left\{1-\frac{k}{1}x_2+\frac{k(k-1)}{1.\,2}x_2^2-\ldots+(-1)^k x_2^{\,k}\right\}+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

---

[1]) Il en résulte immédiatement que les ordonnées doivent se placer deux à deux à égale distance des deux côtés de la ligne qui, au milieu de la base de la figure, est perpendiculaire à cette base. Le nombre des ordonnées doit donc toujours être *pair*; il est vrai deux d'entre elles, notamment *les deux du milieu*, peuvent coïncider et, dans ce cas, le nombre des ordonnées *à calculer* est *impair*. Voyez l'alinéa final du § 26.

$$+R_n\{1-\frac{k}{1}x_n+\frac{k(k-1)}{1.2}x_n^2-\ldots+(-1)^k x_n^k\}=$$
$$=1-\frac{k}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{k(k-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^k\frac{1}{k+1}.$$

Dans le premier membre de cette équation, les formes avec lesquelles R_1, R_2, $R_3,\ldots R_n$ ont été multipliés sont égales aux $k^{\text{ièmes}}$ puissances de $(1-x_1)$, $(1-x_2)$, $(1-x_3)\ldots(1-x_n)$; le second membre est égal à $\frac{1}{k+1}$, notamment égal au terme initial de la série des $k^{\text{ièmes}}$ différences de la série harmonique $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ldots$ [1])

Par conséquent on obtient

$$R_1(1-x_1)^k+R_2(1-x_2)^k+\ldots+R_n(1-x_n)^k=\frac{1}{k+1}.$$

Cette équation est valable pour $k=0, 1, 2,\ldots(2n-1)$. On obtient de nouveau, après substitution de ces valeurs pour k, les

---

[1]) Si l'on forme d'une série de nombres arbitraires

$$A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_3,\ldots A_n$$

les séries des 1e, 2e,...ke différences, alors on obtient pour le terme initial des ke différences, la formule

$$\Delta^k A_1=A_{k+1}-\frac{k}{1}A_k+\frac{k(k-1)}{1.2}A_{k-1}-\ldots+(-1)^k A_1.$$

Si l'on y suppose $A_1=1, A_2=\frac{1}{2}, A_3=\frac{1}{3},\ldots A^k=\frac{1}{k}$ alors, en renversant l'ordre, on a

$$\Delta^k A_1=(-1)^k\{1-\frac{k}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{k(k-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^k\frac{1}{k+1}\}\ \ldots\ldots\ (12)$$

Par une soustraction effective, on obtient dans le cas de la série harmonique:

série donnée	$\frac{1}{1}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{5}$, ...
1e différences	$-\frac{1}{1.2}$,	$-\frac{1}{2.3}$,	$-\frac{1}{3.4}$,	$-\frac{1}{4.5}$,	.....
2e différences	$\frac{1.2.}{1.2.3}$,	$\frac{1.2}{2.3.4}$,	$\frac{1.2}{3.4\ 5}$;	.....	

.....

Par induction, on décide que la série des ke différences peut être représentée par

$$(-1)^k\frac{k!}{(k+1)!},(-1)^k\frac{k!}{(k+2)!},\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La justesse de cette induction apparaît, quand on déduit de ces ke différences supposées les $(k+1)$e. On obtient alors immédiatement la même chose que quand on substitue $(k+1)$ à k.

En simplifiant, on obtient

$$\Delta^k A_1=\frac{(-1)^k}{k+1}$$

En égalant cette expression à celle sub (12) et en divisant par $(-1)^k$ on a

$$\frac{1}{k+1}=1-\frac{k}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{k(k-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^k\frac{1}{k+1}.$$

équations sub (11), seulement chaque x_p est remplacé par $(1-x_p)$, ce qu'il fallait démontrer.

Apparemment cette déduction, où il est supposé que la fonction sous le signe intégral peut être remplacée par une série de la *première* classe, ne peut être poursuivie lorsque cette fonction ne peut être représentée par une série complète. Voir § 23, 3e phrase.

Développement des formules d'approximation lorsque l'axe des ordonnées est placé au milieu de la figure.

§ 9, L'équation de la courbe limite de la figure étant généralement donnée par rapport à la ligne qui, comme axe des y, est élevée perpendiculairement *au milieu* O de la figure, nous supposerons désormais dans cette section, que l'axe $A'Y'$ est placé au point O au lieu du point A', de sorte que l'équation sub (4) de la vraie ligne limite de la figure, par rapport à la ligne OY comme axe des y, devient

$$y = \Psi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

et l'équation sub (5) de la courbe parabolique devient

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{z-1} x^{z-1} \ldots \quad (14)$$

Si nous représentons les coordonnées d'un point, à gauche de l'axe Y, par $(-x_p, y_{-p})$ et celles d'un point qui, à droite, se trouve à la même distance de l'axe Y que le point précédent, par (x_p, y_{+p}), alors il faut, puisque z est ici toujours pair, remplacer z par $2z$, de sorte que nous avons

$$y_{-p} = A_0 - A_1 x_p + A_2 x_p^2 - A_3 x_p^3 + \ldots + A_{2z-2} x_p^{2z-2} - A_{2z-1} x_p^{2z-1}$$

et

$$y_{+p} = A_0 + A_1 x_p + A_2 x_p^2 + A_3 x_p^3 + \ldots + A_{2z-2} x_p^{2z-2} + A_{2z-1} x_p^{2z-1}$$

donc

$$\frac{y_{-p} + y_{+p}}{2} = A_0 + A_2 x_p^2 + A_4 x_p^4 + A_6 x_p^6 + \ldots + A_{2z-2} x_p^{2z-2} \ldots \quad (15)$$

et I est représenté par

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \{ A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \ldots + A_{2z-2} x^{2z-2} \} \, dx ;$$

par conséquent

$$I = A_0 + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^2 A_2 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2})^4 A_4 + \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{2})^6 A_6 + \tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{2})^8 A_8 + \ldots + \\ + \tfrac{1}{2z-1}(\tfrac{1}{2})^{2z-2} A_{2z-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

On peut désigner une valeur approximative de I, c'est-à-dire I_1, par

$$I_1 = R_1 . \frac{y_{-1} + y_{+1}}{2} + R_2 . \frac{y_{-2} + y_{+2}}{2} + R_3 \frac{y_{-3} + y_{+3}}{2} + \ldots + \\ + R_m \frac{y_{-m} + y_{+m}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

où $(y_{-1} + y_{+1})$, $(y_{-2} + y_{+2})$, etc. représentent des couples d'ordonnées des $2m$ points connus de la vraie ligne limite de la figure sub (13) et $R_1, R_2, \ldots R_m$ des nombres arbitraires.

Si l'on représente l'erreur de l'approximation, c'est-à-dire la différence entre l'aire exacte I sub (16) et l'aire approximative I_1 sub (17) par E, alors on a

$$I - I_1 = E \text{ et } I = I_1 + E \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

En transportant dans (17) les demi-sommes calculées de (15) des $2m$ ordonnées connues, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 = {} & R_1 \{A_0 + A_2 x_1^2 + A_4 x_1^4 + \ldots + A_{2z-2} x_1^{2z-2}\} + \\ & + R_2 \{A_0 + A_2 x_2^2 + A_4 x_2^4 + \ldots + A_{2z-2} x_2^{2z-2}\} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + R_m \{A_0 + A_2 x_m^2 + A_4 x_m^4 + \ldots + A_{2z-2} x_m^{2z-2}\} = \\ = {} & \Sigma (x_1^{2p} R_1 + x_2^{2p} R_2 + x_3^{2p} R_3 + \ldots + x_m^{2p} R_m) A_{2p}. \end{aligned}$$

Cette équation soustraite de (16) donne, en vertu de (18)

$$E = \Sigma \{\tfrac{1}{2p+1} (\tfrac{1}{2})^{2p} - (x_1^{2p} R_1 + x_2^{2p} R_2 + x_3^{2p} R_3 + \ldots + x_m^{2p} R_m)\} A_{2p} \quad (19)$$

où il faut remplacer successivement p par 0, 1, 2, 3, ... $z-1$.

Au sujet des formules d'approximation les plus connues, spécialement celles de Gauss.

§ 10. Des expressions pour I_1 et E, développées dans le § précédent on peut déduire les principales formules d'approximation connues, ainsi que les fautes qui y appartiennent comme, par exemple, les formules d'approximation selon Newton-Cotes, Stirling, Euler, MacLaurin, Gauss, Christoffel, Lobatto et Hermite-Tchebicheff.

Toutes les formules mentionnées ci-dessus excepté celle selon Gauss pour un nombre *pair* d'ordonnées et celles selon Hermite-Tchebicheff, s'obtiennent en attribuant certaines valeurs fixées d'avance respectivement à toutes les abcisses $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ ou à une partie seulement d'entre elles et en calculant les valeurs correspondantes de $R_1, R_2, \ldots R_m$ de (19) en y assimilant à zéro autant de coefficients de A que E comporte d'inconnues x et R.

Dans le développement des formules d'approximation selon Her-

MITE-TCHEBICHEFF, les coefficients des premiers m termes de E (19) sont égalés à 0, dans ces coefficients les R sont considérés comme égaux entre eux, c'est-à-dire qu'on prend $R_1 = R_2 = R_3 = \ldots = R_m = \frac{1}{m}$ et au moyen des m équations qui se sont formées de la sorte, on détermine les valeurs de x [1]).

Des formules mentionnées ci-dessus, nous ne discuterons que celles de GAUSS.

Les formules d'approximation de GAUSS.

§ 11. GAUSS traite deux cas [2]).

1e Dans le *premier cas*, aucune des $2m$ grandeurs x et R ne sont considérées comme connues, de sorte que le nombre de coefficients de A, c'est-à-dire le nombre de termes de E qui dans (19) peuvent être égalés à zéro, est de $2m$; le nombre des ordonnées à calculer est, dans ce cas, *pair*.

On a alors pour déterminer x et R les $2m$ équations suivantes

$$\left.\begin{array}{l} R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_m = 1 \;, \\ x_1^2 R_1 + x_2^2 R_2 + x_3^2 R_3 + \ldots + x_m^2 R_m = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \;, \\ x_1^4 R_1 + x_2^4 R_2 + x_3^4 R_3 + \ldots + x_m^4 R_m = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \;, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{4m-2} R_1 + x_2^{4m-2} R_2 + x_3^{4m-2} R_3 + \ldots + x_m^{4m-2} R_m = \frac{1}{4m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m-2}. \end{array}\right\} \ldots (20)$$

Si l'on résoud de (20) x^2 et R, on obtient les carrés des abscisses $x_1, x_2, \ldots x_m$, pour lesquelles les ordonnées $y_{\pm 1}, y_{\pm 2}, y_{\pm 3}, \ldots y_{\pm m}$ doivent être calculées de (13) et pour R les valeurs qui doivent être substituées dans (17) pour obtenir la formule pour I_1, exprimées dans $y_{\pm 1}, y_{\pm 2}, \ldots y_{\pm m}$.

A cet effet on suppose dans les §§ 26 et 27 (où la solution de x^2 et R d'équations comme celles sub (20) est donnée en général) $d = 0$, $k = 2$, $c = o$, $v = m$ et $u_p = \frac{1}{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p}$ et dans § 28: $r = 2m + 1$, $\Delta = 2$, $B_0 = 1$, $B_1 = 2^2 S_1$, $B_2 = 2^4 S_2, \ldots B_m = 2^{2m} S_m$, alors on trouve que les carrés $x_1^2, x_2^2, \ldots x_m^2$ de (20) sont les racines de l'équation (voir (71))

$$(x^2)^m - S_1 (x^2)^{m-1} + \ldots + (-1)^m S_m = 0$$

où, en vertu de (74)

---

[1]) Toutes les formules citées dans ce § sont développées dans notre ouvrage: *Valeur approximative d'une intégrale définie*. PARIS. GAUTHIER-VILLARS. 1905.

[2]) Voyez CARL FRIEDRICH GAUSS *Werke. Dritter Band.* p. 165 et suiv. *Herausgegeben von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.* 1866.

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= (\tfrac{1}{2})^2 \frac{m}{1} \cdot \frac{2m-1}{4m-1}, \\
S_2 &= (\tfrac{1}{2})^2 \frac{m-1}{2} \cdot \frac{2m-3}{4m-3} \cdot S_1, \\
S_3 &= (\tfrac{1}{2})^2 \frac{m-2}{3} \cdot \frac{2m-5}{4m-5} \cdot S_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{m-1} &= (\tfrac{1}{2})^2 \frac{2}{m-1} \cdot \frac{3}{2m+3} \cdot S_{m-2}, \\
S_m &= (\tfrac{1}{2})^2 \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2m+1} \cdot S_{m-1}.
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (21)$$

Les valeurs de R_p s'obtiennent de (68) après substitution de $d = 0$, etc. (voir plus haut); on obtient

$$R_p = \frac{\frac{1}{2m-1}(\frac{1}{2})^{2m-2} - S_{1.p}\frac{1}{2m-3}(\frac{1}{2})^{2m-4} + S_{2.p}\frac{1}{2m-5}(\frac{1}{2})^{2m-6} - \ldots + (-1)^{m-1}S_{m-1.p}}{x_p^{2m-2} - S_{1.p}x_p^{2m-4} + S_{2.p}x_p^{2m-6} - \ldots + (-1)^{m-1}S_{m-1.p}} \cdots (22)$$

L'erreur de I_1 sub (17) est représentée, en vertu de (19), où tous les termes avec A_0 $(p = 0)$, jusque A_{4m-2} $(p = 2m-1)$ inclusivement sont égaux à 0, par

$$E = \{\tfrac{1}{4m+1}(\tfrac{1}{2})^{4m} - (x_1^{4m}R_1 + x_2^{4m}R_2 + x_3^{4m}R_3 + \ldots + x_m^{4m}R_m)\}A_{4m} +$$
$$+ \{\tfrac{1}{4m+3}(\tfrac{1}{2})^{4m+2} - (x_1^{4m+2}R_1 + x_2^{4m+2}R_2 + x_3^{4m+2}R_3 + \ldots + x_m^{4m+2}R_m)\}A_{4m+2} +$$

$+$ et ainsi de suite.

De (21) on peut facilement déduire, voir (56),

$$\left.\begin{aligned}
S_{1.p} &= S_1 - x_p^2, \\
S_{2.p} &= S_2 - S_{1.p}x_p^2, \\
S_{3.p} &= S_3 - S_{2.p}x_p^2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{m-2.p} &= S_{m-2} - S_{m-3.p}x_p^2, \\
S_{m-1.p} &= S_{m-1} - S_{m-2.p}x_p^2.
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

2e. Dans le *second cas*, une grandeur x^2 est préalablement considérée comme connue, c-à-d. $x_1 = 0$, de sorte que les deux ordonnées médianes y_{-1} et y_{+1}, coïncidant dans l'axe des y, ne forment qu'*une seule ordonnée à calculer* et que, par conséquent, le nombre d'ordonnées *à calculer* est *impair*. Les autres $(m-1)$ grandeurs x_p^2 et les m grandeurs R_p forment le nombre d'inconnues à déterminer, c'est pour cette raison que dans (19) il n'y a que $(2m-1)$ coefficients de A qui peuvent être égalés à zéro.

On a

$$\begin{aligned}
R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_m &= 1\,,\\
x_2^2 R_2 + x_3^2 R_3 + \ldots + x_m^2 R_m &= \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^2\,,\\
x_2^4 R_2 + x_3^4 R_3 + \ldots + x_m^4 R_m &= \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2})^4\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_2^{4m-4} R_2 + x_3^{4m-4} R_3 + \ldots + x_m^{4m-4} R_m &= \tfrac{1}{4m-3}(\tfrac{1}{2})^{4m-4}.
\end{aligned}$$

Les valeurs de x^2 de ces équations s'obtiennent de l'équation

$$(x^2)^{m-1} - S_{1.1}(x^2)^{m-2} + S_{2.1}(x^2)^{m-3} - S_{3.1}(x^2)^{m-4} + \ldots + (-1)^{m-1} S_{m-1.1} = 0$$

où

$$\left.\begin{aligned}
S_{1.1} &= (\tfrac{1}{2})^2 \frac{m-1}{1} \cdot \frac{2m-1}{4m-3}\\
S_{2.1} &= (\tfrac{1}{2})^2 \frac{m-2}{2} \cdot \frac{2m-3}{4m-5} S_{1.1}\\
S_{3.1} &= (\tfrac{1}{2})^2 \frac{m-3}{3} \cdot \frac{2m-5}{4m-7} S_{2.1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_{m-2.1} &= (\tfrac{1}{2})^2 \frac{2}{m-2} \cdot \frac{5}{2m+3} \cdot S_{m-3.1}\\
S_{m-1.1} &= (\tfrac{1}{2})^2 \frac{1}{m-1} \cdot \frac{3}{2m+1} \cdot S_{m-2.1}
\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

tandis que les valeurs de R s'obtiennent des deux formules suivantes, notamment la valeur de R_1 de la formule

$$R_1 = \frac{\frac{1}{2m-1}(\frac{1}{2})^{2m-2} - S_{1.1}\frac{1}{2m-3}(\frac{1}{2})^{2m-4} + S_{2.1}\frac{1}{2m-5}(\frac{1}{2})^{2m-6} - \ldots + (-1)^m S_{m-2.1}\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2 + (-1)^{m-1} S_{m-1.1}}{(-1)^{m-1} S_{m-1.1}} \quad (25)$$

et les autres valeurs de R de la formule

$$R_p = \frac{\frac{1}{2m-1}(\frac{1}{2})^{2m-2} - S_{1.p.1}\frac{1}{2m-3}(\frac{1}{2})^{2m-4} + S_{2.p.1}\frac{1}{2m-5}(\frac{1}{2})^{2m-6} - \ldots + (-1)^m S_{m-2.p.1}\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2}{x_p^{2m-2} - S_{1.p.1} x_p^{2m-4} + S_{2.p.1} x_p^{2m-6} - \ldots + (-1)^m S_{m-2.p.1} x_p^2}\,. \quad (26)$$

L'erreur de l'expression pour I_1 de (17) est, en vertu de (19) représentée par

$$E = \{\tfrac{1}{4m-1}(\tfrac{1}{2})^{4m-2} - (x_2^{4m-2} R_2 + x_3^{4m-2} R_3 + \ldots + x_m^{4m-2} R_m)\} A_{4m-2} + \{\tfrac{1}{4m+1}(\tfrac{1}{2})^{4m} - (x_2^{4m} R_2 + x_3^{4m} R_3 + \ldots + x_m^{4m} R_m)\} A_{4m} + \text{ et ainsi de suite.}$$

Ensuite on trouve facilement (voir § 22)

$$\left.\begin{array}{l} S_{1.1.p} = S_{1.1} \quad - x_p^2, \\ S_{2.1.p} = S_{2.1} \quad - S_{1.1.p} \cdot x_p^2, \\ S_{3.1.p} = S_{3.1} \quad - S_{2.1.p} \cdot x_p^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{m-3.1.p} = S_{m-3.1} - S_{m-4.1.p} \cdot x_p^2, \\ S_{m-2.1.p} = S_{m-2.1} - S_{m-3.1.p} \cdot x_p^2. \end{array}\right\} \dots\dots\dots \quad (27)$$

Gauss donne les valeurs numériques de x et R, dont il est question sub (17), pour 1 à 7 ordonnées inclusivement, en 16 décimales exactes (voyez note 2, p. 12). M. R. Radau a encore calculé ces valeurs pour 8, 9 et 10 ordonnées en 10 décimales (Voyez R. Radau, *Etude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie*, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*. 3e série. Tome sixième, 1880). Dans la Table A à la fin de ce travail-ci, on les trouve pour 2 jusque 10 ordonnées en 16 décimales.

§ 12. De toutes les formules d'approximation, celles de Gauss donnent les résultats les plus exacts, pourvu qu'on puisse substituer une série de la *première* classe à la fonction sous le signe de l'intégrale en question; elles exigent cependant, même lorsqu'on applique un petit nombre d'ordonnées, des calculs extrêmement longs, où peuvent aisément se glisser des fautes de calcul [1]).

Gauss suppose qu'en appliquant ses formules, les longueurs des abscisses seront toujours exprimées en 16 décimales, puisque ce n'est que lorsque x compte un nombre suffisant de décimales, que l'on peut être assuré qu'en appliquant sa méthode les premiers $2m$, eventuellement les premiers $(2m-1)$ termes de l'erreur E disparaissent de (19). Si on applique les formules de Gauss et si, dans les calculs des y de $\varphi(x)$, $f(x)$ ou $\Psi(x)$ sub (1), (4) ou (13), les longueurs des abscisses sont exprimées en moins de 16 décimales et si pour R on admet cependant la même valeur, que celle qui s'offre dans les formules de Gauss (Table A), alors il se peut aisément que les coefficients de quelques-uns des termes avec A_2 jusque A_{4m-2} inclusivement ne soient pas assez proches de zéro, auquel cas l'inexactitude de I_1 serait sensiblement plus grande qu'on ne le déduirait de la formule.

---

[1]) Lobatto (*Calcul intégral*, p. 442) dit à ce sujet: „La méthode d'approximation d'après Gauss présente, quant au degré d'exactitude, des avantages évidents et est préférable à celle de Newton et de Cotes. Il est seulement regrettable que cette méthode plus correcte comporte des calculs assez compliqués, qui rendent assez difficile son application."

S'il y a neuf ordonnées ou plus, il sera probablement nécessaire, en appliquant la méthode de Gauss, d'employer parfois pour x plus de *seize* décimales, auquel cas le calcul de ces formules exige un temps extrêmement long.

§ 13. Si l'on calcule les valeurs des coefficients de A de (19) pour *six* ordonnées p.e., on obtient lorsqu'on prend dans la Table A les abscisses seulement en 2 décimales exactes, c'est-à-dire lorsqu'on établit

$$x_1 = 0.12\,, \qquad x_2 = 0.33 \quad \text{et} \quad x_3 = 0.47:$$

$$\begin{aligned}
I = I_1 + E = {} & 0.2339\ 5696\ 7286\ 3455\ (y_{-1} + y_{+1}) + \\
+ 0.1803\ 8078\ 6524\ 0693\ (y_{-2} + y_{+2}) & + 0.0856\ 6224\ 6189\ 5852\ (y_{-3} + y_{+3}) - \\
- 0.0005\ 3714\ A_2 & - 0.0002\ 3546\ A_4 - 0.0000\ 8191\ A_6 - \\
- 0.0000\ 2468\ A_8 & - 0.0000\ 0686\ A_{10} - 0.0000\ 0173\ A_{12} - \\
- 0.0000\ 0039\ A_{14} & - 0.0000\ 0008\ A_{16} - 0.0000\ 00015\ A_{18} - \text{etc.} \qquad (28)
\end{aligned}$$

Si l'on prend x en 5 décimales exactes, alors on a

$$x_1 = 0.11931 \qquad x_2 = 0.33060 \quad \text{et} \quad x_3 = 0.46623$$

et

$$\begin{aligned}
I = I_1 + E = {} & 0.2339\ 5696\ 7286\ 3455\ (y_{-1} + y_{+1}) + \\
+ 0.1803\ 8078\ 6524\ 0693\ (y_{-2} + y_{+2}) & + 0.0856\ 6224\ 6189\ 5852 (y_{-3} + y_{+3}) + \\
+ 0.0000\ 0183\ 4039\ A_2 & + 0.0000\ 0057\ 3819\ A_4 + \\
+ 0.0000\ 0014\ 7821\ A_6 & + 0.0000\ 0003\ 7069\ A_8 + \\
+ 0.0000\ 0000\ 9386\ A_{10} & + 0.0000\ 0009\ 2415\ A_{12} + \\
+ 0.0000\ 0007\ 3335\ A_{14} & + 0.0000\ 0003\ 6299\ A_{16} + \\
+ 0.0000\ 0001\ 4553\ A_{18} & + \text{etc.}\ ^{1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (29)
\end{aligned}$$

Pour x en 10 décimales, on trouve

$$x_1 = 0.1193\ 0959\ 30\,, \quad x_2 = 0.3306\ 0469\ 32 \quad \text{et} \quad x_3 = 0.4662\ 3475\ 71$$

et

$$\begin{aligned}
I = I_1 + E = {} & 0.2339\ 5696\ 7286\ 3455\ (y_{-1} + y_{+1}) + \\
+ 0.1803\ 8078\ 6524\ 0693\ (y_{-2} + y_{+2}) & + 0.0856\ 6224\ 6189\ 5852\ (y_{-3} + y_{+3}) + \\
+ 0.0000\ 0000\ 0012\ 7996\ A_2 & + 0.0000\ 0000\ 0001\ 9693\ A_4 + \\
+ 0.0000\ 0000\ 0000\ 3218\ A_6 & + 0.0000\ 0000\ 0000\ 0511\ A_8 + \\
+ 0.0000\ 0000\ 0000\ 0122\ A_{10} & + 0.0000\ 0009\ 0097\ 4940\ A_{12} + \\
+ 0.0000\ 0007\ 2760\ 5382\ A_{14} & + 0.0000\ 0003\ 6157\ 2569\ A_{15} + \\
+ 0.0000\ 0001\ 4316\ 9388\ A_{18} & + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (30)
\end{aligned}$$

---

[1]) Le coefficient de A_{11} (qui en comparaison du coefficient du terme immédiatement antérieur est remarquablement grand) est à peu près égal au coefficient de A_{12} dans la formule pour *six* ordonnées de la Table A. Voyez aussi les formules sub (30), (31), (32) et (33).

Pour x en 16 décimales, on trouve

$$x_1 = 0.1193\ 0959\ 3041\ 5985 \quad , \quad x_2 = 0.3306\ 0469\ 3233\ 1323$$
$$\text{et } x_3 = 0.4662\ 3475\ 7101\ 5760$$
$$\text{et } I = I_1 + E = 0.2339\ 5696\ 7286\ 3455\ (y_{-1} + y_{-1}) +$$
$$+ 0.1803\ 8078\ 6524\ 0693\ (y_{-2} + y_{+2}) + 0.0856\ 6224\ 6189$$
$$5852\ (y_{-3} + y_{+3}) + 0.0000\ 0009\ 0097\ 4927\ A_{12} + 0.0000$$
$$0007\ 2760\ 5509\ A_{14} + 0.0000\ 0003\ 6157\ 2582\ A_{16} +$$
$$+ 0.0000\ 0001\ 4316\ 9388\ A_{18} + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Formules d'approximation dans lesquelles les longueurs des abscisses selon Gauss sont exprimées en moins de seize décimales.

§ 14. Voici comment on obtient des formules d'approximation qui, avec un nombre égal d'ordonnées et un nombre égal de décimales pour x, sont plus exactes que celles qui ont été développées dans le § précédent.

On prend de la Table A, pour chaque formule en particulier, x en nombre égal, inférieur à seize décimales exactes, et on calcule, suivant ces longueurs arrondies, les valeurs de R de (22), éventuellement de (25) et (26), l'expression pour I_1 de (17) et enfin l'expression pour E de (19).

De cette manière on trouve, pour un nombre égal d'ordonnées et pour les mêmes longueurs des abscisses que celles dont on s'est servi respectivement dans (28), (29) et (30) les formules suivantes:

Pour $x_1 = 0.12$, $x_2 = 0.33$ et $x_3 = 0.47$:

$$I = I_1 + E = 0.2324\ 6285\ 8338\ 5646\ (y_{-1} + y_{+1}) +$$
$$+ 0.1855\ 3350\ 9700\ 1764\ (y_{-2} + y_{+2})\ 0.0820\ 0363\ 1961\ 2591\ (y_{-3} + y_{+3}) -$$
$$- 0.0000\ 1633\ 6188\ A_6 - 0.0000\ 0870\ 1796\ A_8 -$$
$$- 0.0000\ 0317\ 1460\ A_{10} - 0.0000\ 0089\ 5102\ A_{12} -$$
$$- 0.0000\ 0020\ 7914\ A_{14} - 0.0000\ 0003\ 9648\ A_{16} -$$
$$- 0.0000\ 0000\ 6437\ A_{18} - \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Pour $x_1 = 0.11931$, $x_2 = 0.33060$ et $x_3 = 0.46623$

$$I = I_1 + E = 0.2339\ 5631\ 2171\ 0420\ (y_{-1} + y_{+1}) +$$
$$+ 0.1803\ 7353\ 2773\ 4742\ (y_{-2} + y_{+2}) + 0.0856\ 7015\ 5055\ 4838\ (y_{-3} + y_{+3}) +$$
$$+ 0.0000\ 0000\ 4306\ A_6 - 0.0000\ 0000\ 3825\ A_8 +$$
$$+ 0.0000\ 0000\ 1833\ A_{10} + 0.0000\ 0009\ 0771\ A_{12} -$$
$$- 0.0000\ 0007\ 2975\ A_{14} + 0.0000\ 0003\ 6220\ A_{16} +$$
$$+ 0.0000\ 0001\ 4335\ A_{18} + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Pour $x_1 = 0.1193\ 0959\ 30$, $x_2 = 0.3306\ 0469\ 32$ et $x_3 = 0.4662\ 3475\ 71$:

$$I = I_1 + E = 0.2339\ 5696\ 7227\ 0741\ (y_{-1} + y_{+1} +$$
$$+ 0.1803\ 8078\ 6572\ 5009\ (y_{-2} + y_{+2}) + 0.0856\ 6224\ 6198\ 4250\ (y_{-3} + y_{+3}) +$$
$$+ 0.0000\ 0000\ 0000\ 0140\ A_6 - 0.0000\ 0000\ 0000\ 0016\ A_8 -$$
$$- 0.0000\ 0000\ 0000\ 0016\ A_{10} + 0.0000\ 0009\ 0097\ 4921\ A_{12} +$$
$$+ 0.0000\ 0007\ 2760\ 5508\ A_{14} + 0.0000\ 0003\ 6157\ 2582\ A_{16} +$$
$$+ 0.0000\ 0001\ 4316\ 9388\ A_{18} + \text{etc} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

En comparant les formules sub (28), (29) et (30) avec celles sub (32), (33) et (34), on voit immédiatement que, dans les trois premières, I_1 diffère plus de I que dans les trois dernières.

§ 15. Pour montrer, numériquement, la plus grande exactitude des formules du § précédent, lorsque les calculs pour I_1 ont la même étendue, en comparaison de celles du § 13, nous inscrivons ci-dessous, pour chacune de ces sept formules, le résultat du calcul d'une valeur approximative de l'intégrale $\int_8^9 \frac{dx^1}{x^1}$, c'est-à-dire du logarithme *néper*ien de $^9/_8$, valeur qui, en 24 décimales, est exactement équivalente à

0. 1177 8303 5656 3834 5453 8794.

Attendu que l'axe des y est placé au milieu de la figure, nous substituons, pour la commodité, dans l'intégrale ci-dessus $8.5 + x$ à x^1, de sorte qu'on obtient

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{8.5 + x} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{8.5 + x},$$

c'est-à-dire pour *six* ordonnées, ou $m = 3$:

pour $x = -x_1 : y_1 = y_{-1} = \frac{1}{8.5 - x_1}$ et pour $x = x_1 : y = y_{+1} = \frac{1}{8.5 + x_1}$,

„ $x = -x_2 : y_2 = y_{-2} = \frac{1}{8.5 - x_2}$ „ „ $x = x_2 : y = y_{+2} = \frac{1}{8.5 + x_2}$,

„ $x = -x_3 : y_3 = y_{-3} = \frac{1}{8.5 - x_3}$ „ „ $x = x_3 : y = y_{+3} = \frac{1}{8.5 + x_3}$.

On obtient, lorsque les abscisses sont données en deux décimales, notamment lorsque $x = 0.12$, $x_2 = 0.33$ et $x_3 = 0.47$, de la formule

sub (28) $I_1 = 0.\ 1177\ 8392\ldots$

„ (32) $I_1 = 0.\ 1177\ 8303\ 5688 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$

Lorsque les abscisses sont données en 5 décimales, on obtient de la formule

sub (29) $I_1 = 0.\ 1177\ 8303\ 27 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (36)
„ (33) $I_1 = 0.\ 1177\ 8303\ 5656\ 3820 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (37)

Si les abscisses sont prises en 10 décimales, alors on obtient de la formule

sub (30) $I_1 = 0.\ 1177\ 8303\ 5656\ 363 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (38)
„ (34) $I_1 = 0.\ 1177\ 8303\ 5656\ 3834\ 5445\ 91 \ldots$ (39)

Si les abscisses sont exprimées en 16 décimales, on obtient de la formule

sub (31) $I_1 = 0.1177\ 8303\ 5656\ 3834\ 5446\ 29 \ldots$ (40)

Il apparaît, chaque fois, pour six ordonnées:

en comparant (35) avec (36), que le résultat pour x en 2 décimales, suivant la formule (32), sera plus exact que celui pour x en 5 décimales, suivant la formule de la Table B;

en comparant (37) avec (38), que le résultat pour x en 5 décimales, suivant la formule (33), sera plus exact que celui pour x en 10 décimales, suivant la formule de la Table susdite.

Etc.

Sur le nombre de décimales, dans lesquelles il convient d'exprimer x et R.

§ 16. Dans la Table A nous avons, à la suite de GAUSS, aussi pour l'application d'un petit nombre d'ordonnées, exprimé les abscisses en *seize* décimales. Ce nombre est pris arbitrairement; il doit toujours être relativement grand. Mais, dans les deux §§ précédents, il est apparu que, même lorsque la série sub (14) converge assez fortement, on peut, en appliquant *six* ordonnées, se contenter de moins de seize décimales pour x, parce que, dans le cas où la convergence n'est pas trop forte, l'erreur de l'approximation reste assez constante, soit qu'on prenne pour x dix ou seize et plus de décimales [1]).

Si, par exemple, on compare la formule (31) où x a seize décimales, avec celle sub (34), où x n'est donné qu'en dix décimales, il apparaît que, dans les deux formules — qui chacune sont destinées pour six ordonnées — les coefficients des A homonymes, de A_{12} jusque A_{18} inclusivement, sont semblables jusqu'à la 15e décimale ou plus. Dans (34), les termes avec A_6, A_8 et A_{10} se présen-

[1]) En cas de faible convergence, on pourra probablement pour *six* ordonnées se contenter d'encore moins de dix décimales.

tent aussi il est vrai, tandis que dans (31) ils ne paraissent plus; mais ces termes ont dans (34) des coefficients numériques si petits, que leur valeur totale n'a pas d'importance en comparaison de la valeur totale des termes avec A_{12}, A_{14} et A_{16}, dont les coefficients numériques sont respectivement plus de 6, 45 et 22 millions de fois plus grands que ceux des termes avec A_6, A_8 et A_{10} et ce n'est que dans les séries qui convergent extrêmement fort que les relations $\frac{A_6}{A_{12}}$, $\frac{A_8}{A_{14}}$ et $\frac{A_{10}}{A_{16}}$ peuvent se rapprocher de celles dont il est question ici. On obtient alors aussi, comme il résulte de (39) et (40), pour l'intégrale donnée, selon les deux formules (31) et (34) une même approximation, concordante jusque dans *vingt* décimales. Par conséquent, pour des séries qui ne sont pas très fortement convergentes et, à plus forte raison, pour des séries faiblement convergentes, l'exactitude maximum, pour autant que celle-ci puisse être atteinte avec *six* ordonnées, s'obtiendra déjà, et cela à une minime différence près, si x est donné en dix décimales au maximum, lorsque la formule pour I_1 est établie conformément au § 14. Le *surplus d'au moins six décimales*, que GAUSS propose d'employer *toujours*, est donc souvent sans utilité, parce que, malgré la grande augmentation des calculs, l'exactitude du résultat n'en est pas appréciablement accrue.

La chose devient cependant tout autre, quand il s'agit de séries très fortement convergentes. Alors en effet la valeur totale des termes affectés des plus petits indices, peut avoir une influence appréciable sur la dernière décimale dans laquelle I_1 doit être exprimé. Dans ce cas, en appliquant la méthode de GAUSS, on doit, lorsque le nombre des abscisses est assez considérable, exprimer les abscisses en plus de dix, peut-être en seize ou plus de décimales.

Si l'on veut donc appliquer dans tous les cas les formules de la Table A, pour chaque fonction dont on ne sait pas d'avance si elle peut être exprimée par une série faiblement ou fortement convergente, il faut, pour toute sûreté, que pour chaque fonction, chaque x soit exprimé dans un grand nombre de décimales, mais alors encore il y a lieu de se demander si *seize* décimales pour x sont bien toujours suffisantes si on met en compte, par exemple plus de neuf ordonnées.

Le fait, qu'on ne peut pas d'avance juger définitivement combien de décimales il faut prendre pour x pour réduire les termes avec A_2 jusqu'à A_{4m-2} inclusivement, de telle façon que leur valeur totale ne puisse plus avoir d'influence appréciable sur la valeur de I_1, ce fait n'est pas un des moindres inconvénients de la méthode de GAUSS et on est par conséquent, pour toute sûreté, obligé en

appliquant cette méthode, de prendre pour x un nombre plus grand de décimales que peut-être il n'est nécessaire.

D'ailleurs dix décimales pour x donnent déjà lieu à des calculs très longs et très ennuyeux.

C'est pour ces différentes raisons, que dans la Table B, placée à la suite de cet exposé, on n'a pris pour x que deux décimales, par là aucun chiffre n'est de trop et cependant les termes dans (19) avec A_0 jusque A_{2m-2} inclusivement sont absolument sans influence, tandis que les termes homonymes avec A_m etc. sont plus petits que ceux qui appartiennent, entre autre, aux formules selon NEWTON-COTES et MACLAURIN pour un même nombre d'ordonnées. On ne cherche pas alors l'exactitude dans un grand nombre de décimales pour x, mais dans un grand nombre d'ordonnées, qui sont faciles à calculer.

Les nombreuses applications de formules des Tables A et B m'ont prouvé d'une façon évidente, que le calcul des formules pour m ordonnées de la Table A prenait beaucoup plus de temps que le calcul de formules pour $(2m-1)$ ordonnées de la Table B, alors que, en comparant l'exactitude relative des deux Tables, il apparaît encore que les formules pour $(2m-1)$ ordonnées de la Table A sont notablement moins exactes que celles pour le double d'ordonnées moins une, c'est-à-dire pour $(4m-3)$ ordonnées de la Table B.

§ 17. Les valeurs de R sub (22), (25) et (26) consistent également de groupes, formés de suites infinies de décimales, qui ne peuvent donc être inscrites qu'en nombre restreint dans les formules pour I_1.

Le fait de ne mettre en compte qu'un nombre restreint de décimales pour R, ne produit d'ailleurs aucune erreur, si R est exprimé dans un nombre tellement grand de décimales que même si on en prenait davantage encore cela ne pourrait avoir aucune influence appréciable sur le calcul du résultat. C'est pourquoi, dans la Table B, les valeurs pour R sont indiquées par un nombre de décimales plus grand qu'il ne sera jamais nécessaire; cependant ce plus grand nombre de décimales ne complique pas les calculs, parce que la personne qui fait ursage des formules de la table B est elle-même juge du nombre de décimales qu'il lui convient, pour toute sûreté, de prendre dans chaque cas particulier, en rapport avec le degré d'exactitude qu'elle veut atteindre.

Du nombre d'ordonnées à appliquer.

§ 18. La formule (19) indique — conformément à ce qui se

trouve dans la 2e phrase du § 14 — que si toutes les m grandeurs x, donc aussi leurs carrés, sont admises d'avance comme connues, le premier terme de E, dont le coefficient numérique n'est pas égal à 0, sera

$$\left\{\frac{1}{2m+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2m} - (x_1^{2m} R_1 + x_2^{2m} R_2 + x_3^{2m} R_3 + \ldots + x_m^{2m} R_m)\right\} A_{2m}$$

indifféremment si x_1 est égal ou plus grand que zéro.

Il en résulte que, soit que les deux ordonnées médianes coïncident dans l'axe des y, soit qu'elles soient à quelque distance de cet axe, dans les deux cas l'expression algébrique pour le premier terme de l'erreur E, sub (19), donc le *rang* de l'erreur de l'approximation, est la même; seule la grandeur, c'est-a-dire la valeur du coefficient numérique de ce terme diffèrera, étant une fonction des valeurs de x.

J'ai fait expressément dans ce but un grand nombre de calculs de formules pour deux jusque dix ordonnées inclusivement et pour 2 et plus de décimales pour x et j'ai constaté que la différence dans la grandeur de la faute entre l'approximation pour $(2m-1)$ et celle pour $2m$ ordonnées est généralement tout à fait insignifiante. [1])

Si les longueurs d'abscisses sont données en deux décimales corrigées, comme il est indiqué dans le § suivant, alors l'erreur en question pour $(2m-1)$ ordonnées est même quelquefois un peu plus petite que celle pour le nombre pair suivant; jamais cependant il ne me parut que le calcul plus long pour $2m$ ordonnées au lieu de $(2m-1)$ présentât des avantages suffisants. C'est pourquoi j'ai calculé pour la Table B seulement des formules pour $(2m-1)$ ordonnées, comme Stirling l'a fait aussi (Lobatto, *Calcul Intégral*, p. 411).

Correction des longueurs d'abscisses de Gauss, *lorsqu'elles sont exprimées en deux décimales seulement.*

§ 19. Lorsqu'on applique les abscisses de Gauss (pourvu qu'elles soient exprimées dans un nombre suffisant de décimales) pour le calcul de la valeur de I_1, alors les premiers $2m$ termes de l'erreur E, sub (19), sont chacun en particulier égaux à 0. Ceci n'a plus lieu lorsqu'on a posé comme condition, que toutes les abscisses

---

[1]) A cet égard, il convient de faire remarquer, que lorsqu'il s'agit de mesurer un nombre impair d'ordonnées, les deux ordonnées médianes, qui dans ce cas coïncident, sont toujours placées exactement, ce qui, lorsqu'il y a un nombre pair d'ordonnées n'est le cas pour aucune d'entre elles.

seront indiquées dans seulement deux décimales, comme il est question dans § 16, alors les grandeurs x de (19) ne sont pas déduites des équations égalées à 0, mais elles sont déterminées d'avance et les m grandeurs R sont alors les seules inconnues qui restent à déterminer.

Suivant (19), on trouve alors pour le premier terme de l'erreur E' qui appartient à ce groupe d'abscisses réduites à 2 décimales (que nous nommons le premier groupe d'abscisses)

$$\left\{\frac{1}{2m+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2m}-(x_1^{2m}R_1+x_2^{2m}R_2+x_3^{2m}R_3+\ldots+x_m^{2m}R_m)\right\}A_{2m}=\beta.\,A_{2m}\ldots$$

La valeur de β, notamment

$$\beta=\frac{1}{2m+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2m}-(x_1^{2m}R_1+x_2^{2m}R_2+x_3^{2m}R_3+\ldots+x_m^{2m}R_m$$

peut le plus souvent être réduite, en allongeant ou en raccourcissant d'un ou de deux centièmes de l'unité de longueur, une ou plusieurs des longueurs du premier groupe de longueurs d'abscisses, de telle manière qu'il en résulte un nouveau groupe d'abscisses (le deuxième groupe) dans lequel le coefficient du terme avec A_{2m} devient un peu plus petit que celui du premier groupe.

Il ne faut pas perdre de vue ici, que cet allongement ou ce raccourcissement ne peut pas comporter plus de deux centièmes de l'unité de longueur, alors que, en cas d'allongement ou de raccourcissement plus considérable, quelques abscisses pourraient s'écarter trop des abscisses de Gauss et que par là les coefficients avec A_{2m+2} etc. pourraient sensiblement augmenter en valeur.

Si nous représentons les longueurs des abscisses arrondies et non corrigées (ainsi celles du premier groupe) respectivement pas z_1, z_2, $z_3,\ldots z_m$, celles du deuxième groupe par x_1, x_2, $x_3,\ldots x_m$ et si nous remplaçons x_p par $z_p+\alpha_p\delta$ et si $\delta=0.01$ et $\alpha_p=1$ ou 2, alors on peut écrire, suivant (19)

$$\left.\begin{array}{l}
R_1+R_2+R_3+\ldots+R_m=1\,,\\
(z_1+\alpha_1\delta)^2R_1+(z_2+\alpha_2\delta)^2R_2+(z_3+\alpha_3\delta)^2R_3+\ldots+(z_m+\alpha_m\delta)^2R_m=\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2,\\
(z_1+\alpha_1\delta)^4R_1+(z_2+\alpha_2\delta)^4R_2+(z_3+\alpha_3\delta)^4R_3+\ldots+(z_m+\alpha_m\delta)^4R_m=\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(z_1+\alpha_1\delta)^{2m}R_1+(z_2+\alpha_2\delta)^{2m}R_2+(z_3+\alpha_3\delta)^{2m}R_3+\ldots+(z_m+\alpha_m\delta)^{2m}R_m=\frac{1}{2m+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2m}+\beta
\end{array}\right\}\quad(41)$$

Si nous introduisons les notations suivantes

$S_1=$ la somme des m carrés $(z_1+\alpha_1\delta)^2$, $(z_2+\alpha_2\delta)^2,\ldots(z_m+\alpha_m\delta)^2$,

$S_2=$ la somme des produits deux à deux de ces m carrés,

$S_3=$ la somme des produits trois à trois de ces m carrés,

et ainsi de suite,

$S_m=$ le produit (continu) de ces m carrés;

alors ces carrés $(z_1 + \alpha_1\delta)^2$ etc. sont les racines de l'équation du $2m^{\text{ième}}$ degré

$$(z + \alpha\delta)^{2m} - S_1(z + \alpha\delta)^{2m-2} + S_2(z + \alpha\delta)^{2m-4} + \ldots + (-1)^m S_m = 0.$$

Si nous additionnons les équations sub (41) après les avoir multipliées successivement, en commençant par la dernière, par 1, $-S_1$, $+S_2$, $-S_3, \ldots (-1)^m S_m$, nous obtenons l'égalité suivante:

$$\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - S_1 \cdot \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} + S_2 \frac{1}{2 2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4} - \ldots + (-1)^m S_m = \beta \quad (42)$$

Pour pouvoir déterminer maintenant les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$, qui rendent β le plus petit possible, nous remplaçons dans (42) S_1 par la somme de tous les carrés $(z_p + \alpha_p\delta)^2$, S_2 par la somme des produits deux à deux de tous ces carrés, et ainsi de suite, S_m par le produit (continu) de ces carrés, nous développons les puissances et les produits et négligeons tous les termes dans lesquels se présentent des puissances du $2^{\text{ième}}$ et plus haut degré de α_p et de δ; alors s'établit une équation dans laquelle les grandeurs α_p, élevées seulement au premier degré, sont les seules inconnues.

Après l'introduction encore des notations suivantes:

$S_{1.p}$ = la somme des carrés $z_1^2, z_2^2, \ldots z_m^2$, sauf de z_p^2,
$S_{2.p}$ = la somme des produits deux à deux de ces mêmes $(m-1)$ carrés,
$S_{3.p}$ = la somme des produits trois à trois de ces mêmes $(m-1)$ carrés, et ainsi de suite,
$S_{m-1.p}$ = le produit (continu) de ces mêmes $(m-1)$ carrés; et
S_1 = la somme de tous les carrés $z_1^2, z_2^2, z_3^2, \ldots z_m^2$,
S_2 = la somme de leurs produits deux à deux,
S_3 = la somme de leurs produits trois à trois, et ainsi de suite
S_m = leur produit (continu), (42) devient

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - S_1\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} + S_2\frac{1}{2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4} - \ldots + (-1)^m S_m\right\} - \\
&- 2z_1\delta\left\{\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} - S_{1.}\frac{1}{2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4} + S_{2.}\frac{1}{2m-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-6} - \ldots + (-1)^{m-1}S_{m-1.1}\right\}\alpha_1 - \\
&- 2z_2\delta\left\{\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} - S_{1.2}\frac{1}{2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4} + S_{2.2}\frac{1}{2m-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-6} - \ldots + (-1)^{m-1}S_{m-1.2}\right\}\alpha_2 - \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- 2z_m\delta\left\{\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} - S_{1.m}\frac{1}{2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4} + S_{2.m}\frac{1}{2m-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-6} - \ldots + (-1)^{m-1}S_{m-1.m}\right\}\alpha_m = \min \quad (43)
\end{aligned}$$

Valable pour $2m$, c'est-à-dire pour un nombre pair d'ordonnées.

Pour $(2m-1)$, c'est-à-dire pour un nombre impair d'ordonnées, lorsque $z_1 = 0$, on trouve la formule

$$\left\{\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - S_{1.1}\cdot\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} + S_{2.1}\frac{1}{2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4} - \ldots + \right.$$
$$+(-1)^{m-1}S_{m-1.1}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\Big\} - 2z_2\delta\left\{\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} - S_{1.2}\frac{1}{2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4} + \right.$$
$$+ S_{2.2}\frac{1}{2m-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-6} - \ldots + (-1)^m S_{m-2.2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\Big\}\alpha_2 -$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-2z_m\delta\left\{\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} - S_{1.m}\cdot\frac{1}{2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4} + S_{2.m}\frac{1}{2m-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-6} - \ldots + \right.$$
$$+(-1)^m S_{m-2.m}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\Big\}\alpha_m = \min \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

§ 20. Comme application des formules du § précédent, nous posons le cas de $m = 3$, c'est-à-dire qu'il faut calculer $2m = 6$ ordonnées. De la Table A nous obtenons alors pour *le premier groupe* de longueurs d'abscisses

$$z_1 = 0.12 \quad , \quad z_2 = 0.33 \quad \text{et} \quad z_3 = 0.47$$

et de (19) pour le premier terme de l'erreur E, faisant partie de ce groupe

$$\left\{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - (z_1^6 R_1 + z_2^6 R_2 + z_3^6 R_3)\right\} A_6 = -0.0000\ 1633\ 6188\ A_6,$$

tandis que, d'après (43), on trouve pour le premier terme de l'erreur, appartenant au second groupe de longueurs d'abscisses

$$\begin{aligned}
&\Big[\Big\{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - S_1\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + S_2\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - S_3\Big\} - \\
&- 2z_1\delta\Big\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - S_{1.1}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + S_{2.1}\Big\}\alpha_1 - \\
&- 2z_2\delta\Big\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - S_{1.2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + S_{2.2}\Big\}\alpha_2 - \\
&- 2z_3\delta\Big\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - S_{1.3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + S_{2.3}\Big\}\alpha_3 \quad \Big] A_6 = \\
&= \Big[- 0.0000\ 1633\ 6188 - \\
&\quad - 0.0000\ 2177\ 4424\ \alpha_1 + \\
&\quad + 0.0000\ 2592\ 0664\ \alpha_2 - \\
&\quad - 0.0000\ 3565\ 5694\ \alpha_3 \quad \Big] A_6;
\end{aligned}$$

expression, qui devient la plus petite pour $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = -1$, de sorte que les abscisses du second groupe sont

$$x_1 = 0.13 \quad , \quad x_2 = 0.33 \quad \text{et} \quad x_3 = 0.46 \ldots\ldots \quad (45)$$

En effet, on trouve pour ces longueurs de x

$$\begin{aligned}
I = I_1 + E = {} & 0.2466\ 1426\ 3490\,(y_{-1} + y_{+1}) + \\
& + 0.1569\ 3803\ 5364\,(y_{-2} + y_{+2}) + 0.0964\ 4770\ 1146\,(y_{-3} + y_{+3}) - \\
& - 0.0000\ 0314\ 7065\ A_6 + 0.0000\ 0313\ 4520\ A_8 + \\
& + 0.0000\ 0214\ 2798\ A_{10} + 0.0000\ 0094\ 1791\ A_{12} + \\
& + 0.0000\ 0034\ 8202\ A_{14} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)
\end{aligned}$$

Si on compare cette formule à celle sub (32) on constate, que dans (46) non seulement le premier, mais aussi quelques-uns des termes de l'erreur E qui suivent immédiatement le premier terme sont plus petits que les termes homonymes dans (32).

De (46) on trouve pour une valeur approximative de l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{8.5+x}$

$$I_1 = 0.1177\ 8303\ 5657\ 4\ldots$$

contre

$$I_1 = 0.1177\ 8303\ 5688\ \ldots\ \text{de (32), voir (35).}$$

Comme seconde application, nous posons que le nombre des ordonnées à calculer sera de $(2m-1)=5$, tandis qu'ici x sera aussi exprimé en deux décimales, et que maintenant aussi $\delta = 0.01$; dans ce cas, la Table A donne pour le *premier* groupe de longueurs d'abscisses

$$z_1 = 0 \quad , \quad z_2 = 0.27 \quad \text{et} \quad z_3 = 0.45,$$

et on obtient, d'après (44), pour le premier terme de l'erreur, qui fait partie du *second* groupe

$$\begin{aligned}
&\left[\left\{\tfrac{1}{7}\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 - \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 (z_2^2 + z_3^2) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 z_2^2 z_3^2\right\} - \right.\\
&\left. - 0.02\, z_2 \left\{\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 z_3^2\right\} \alpha_2 - 0.02\, z_3 \left\{\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 z_2^2\right\} \alpha_3\right] A_6 = \\
&\qquad = [0.0000\ 1983 + \\
&\qquad + \ 0.0000\ 23625\, \alpha_2 - \\
&\qquad - \ 0.0000\ 57825\, \alpha_3 \quad]\, A_6\,;
\end{aligned}$$

expression qui devient la plus petite pour $\alpha_2 = -1$ et $\alpha_3 = 0$; par conséquent il faut prendre $x_2 = 0.26$ et $x_3 = 0.45$.

Abstraction faite du signe, on trouve ici pour le premier terme de l'erreur E de la formule pour cinq ordonnées, $0.0000\ 0336\ A_6$ contre $0.0000\ 1988\ A_6$ pour celui qui appartient à la formule pour les longueurs d'abscisses en deux décimales empruntées à la Table A.

La formule pour I pour les longueurs d'abscisses corrigées est

$$\begin{aligned}
I = I_1 + E = {} & 0.2688\ 7768\ 7681\, y_1 + \\
& + 0.2398\ 7744\ 5928\,(y_{-2} + y_{+2}) + 0.1256\ 8371\ 0232\,(y_{-3} + y_{+3}) - \\
& - 0.0000\ 0336\, A_6 + 0.0000\ 0133\, A_8 + 0.0000\ 0251\, A_{10} + \\
& + 0.0000\ 0140\, A_{12} + 0.0000\ 0056\, A_{14} + 0.0000\ 0019\, A_{16} + \text{etc.} \quad (47)
\end{aligned}$$

De (47) on trouve pour une valeur approximative de l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{8.5+x}$

$$I_1 = 0.\ 1177\ 8303\ 5657\ 4$$

pour *cinq* ordonnées, tout comme plus haut pour *six* ordonnées. [1])

Les formules pour I_1 de la Table B ont été déduites de la façon exposée dans ce §-ci et dans le § précédent.

---

[1]) Voir la remarque dans la dernière phrase du § 18.

Détermination de l'exactitude d'une valeur approximative.

§ 21. Dans le calcul de la valeur approximative d'une intégrale définie, il est généralement nécessaire de savoir jusqu'à quelle figure (chiffre ou zéro) cette valeur est exacte.

A cet effet, on peut recourir à deux formules, qui dans la Table A (ou dans la Table B) se suivent immédiatement. Nous représentons ces formules, pour les distinguer l'une de l'autre, par I_1 et I_2; la dernière étant arrangée pour plus d'ordonnées que la première, est par conséquent plus exacte que l'autre, de sorte que, à la série ininterrompue de figures égales, comptées à partir du premier chiffre, que les résultats calculés d'après les deux formules pour I_1 et I_2 ont en commun, on peut conclure à une valeur pour I_1 qui est exacte jusqu'à la dernière de ces figures égales. Cette détermination de l'exactitude exige il est vrai le calcul de deux formules avec des ordonnées toutes différentes. C'est d'ailleurs là la voie qu'on doit suivre, lorsqu'on fait usage des formules de Gauss; pour les formules de la Table B, on peut exécuter un calcul plus commode.

Notamment il est plus simple de calculer pour I_1 une des formules de la Table B et de rendre plus faciles les calculs pour I_2 en employant pour I_2 les mêmes ordonnées que pour I_1 en y adjoignant deux nouvelles.

Si nous admettons que, dans la formule à développer pour I_2, on attribue aux $(m-1)$ abscisses $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{m-1}$, les mêmes valeurs que dans la formule pour I_1, il faut alors encore déterminer les valeurs des m grandeurs R et l'abscisse inconnue x_m, donc en tout $(m+1)$ inconnues. A cet effet nous pouvons dans (19) égaler à zéro les coefficients des premiers $(m+1)$ termes de E, chacun en particulier, et, des équations ainsi formées, résoudre les $(m+1)$ inconnues qui en même temps satisfont à ces $(m+1)$ équations. Nous avons

$$\left.\begin{array}{l} R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_m = 1 \\ x_1^2 R_1 + x_2^2 R_2 + x_3^2 R_3 + \ldots + x_m^2 R_m = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{2m} R_1 + x_2^{2m} R_2 + x_3^{2m} R_3 + \ldots + x_m^{2m} R_m = \frac{1}{2m+1}(\frac{1}{2})^{2m}. \end{array}\right| \ldots (48)$$

Si, dans (66) et (69), nous posons $d = 0, k = 2, c = 0, v = m$ et $u_p = \frac{1}{2p+1}(\frac{1}{2})^{2p}$, on trouve de (66) le même groupe d'équations, que celui sub (48) et par conséquent pour ces équations vaut, d'après (68) l'égalité

$$R_p = \frac{\frac{1}{2m-1}(\frac{1}{2})^{2m-2} - S_{1.p}\frac{1}{2m-3}(\frac{1}{2})^{2m-4} + S_{2.p}\frac{1}{2m-5}(\frac{1}{2})^{2m-6} - \ldots + (-1)^{m-1}S_{m-1.p}}{x_p^{2m-2} - S_{1.p}.x_p^{2m-4} + S_{2.p}.x_p^{2m-6} - \ldots + (-1)^{m-1}S_{m-1.p}} \quad \ldots . \quad (49)$$

et d'après la première équation sub (72) l'égalité

$$\frac{1}{2m+1}(\tfrac{1}{2})^{2m} - S_1.\frac{1}{2m-1}(\tfrac{1}{2})^{2m-2} + S_2.\frac{1}{2m-3}(\tfrac{1}{2})^{2m-4} - \ldots + (-1)^{m-1}S_{m-1}.\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^2 + (-1)^m S_m = 0$$

La dernière égalité devient (voir (56)), après substitution de $S_1 = S_{1.m} + x_m^2$, $S_2 = S_{2.m} + S_{1.m}.x_m^2$, etc.

$$\frac{1}{2m+1}(\tfrac{1}{2})^{2m} - (S_{1.m} + x_m^2).\frac{1}{2m-1}(\tfrac{1}{2})^{2m-2} + (S_{2.m} + S_{1.m}.x_m^2)\frac{1}{2m-3}(\tfrac{1}{2})^{2m-4} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-1}(S_{m-1.m} + S_{m-2.m}.x_m^2) + (-1)^m S_{m-1.m}.x_m^2 = 0$$

d'où

$$x_m^2 = \frac{\frac{1}{2m+1}(\frac{1}{2})^{2m} - S_{1.m}\frac{1}{2m-1}(\frac{1}{2})^{2m-2} + S_{2.m}.\frac{1}{2m-3}(\frac{1}{2})^{2m-4} - \ldots + (-1)^{m-1}S_{m-1.m}}{\frac{1}{2m-1}(\frac{1}{2})^{2m-2} - S_{1.m}\frac{1}{2m-3}(\frac{1}{2})^{2m-4} + S_{2.m}\frac{1}{2m-5}(\frac{1}{2})^{2m-6} - \ldots + (-1)^m S_{m-2.m} + (-1)^{m-1}S_{m-1.m}}$$

En appliquant cette formule au cas, par exemple, de $m = 4$, lorsqu' auparavant on pose (voir (45))

$$x_1 = 0.13 \quad , \quad x_2 = 0.33 \quad \text{et} \quad x_3 = 0.46,$$

on trouve

$$x_4^2 = -\tfrac{4}{3}.$$

Cette valeur négative pour x_4^2 montre, que s'il faut attribuer à x_1, x_2 et x_3 les valeurs que nous venons de mentionner, il est impossible d'y joindre une quatrième qui puisse, avec les trois précédentes, satisfaire aux $(m+1) = 5$ équations sub (48).

Pour rester maintenant aussi près que possible de la valeur calculée de x_4^2, on peut poser $x_4 = 0$. Cette valeur de x_4 jointe aux longueurs prescrites des autres abscisses, par conséquent

$$x_1 = 0.13 \quad , \quad x_2 = 0.33 \quad , \quad x_3 = 0.46 \quad \text{et} \quad x_4 = 0,$$

conduite à la formule auxiliaire suivante,

$$I_2 = 0.2414\,1627\,5088\,(y_{-1} + y_{+1}) +$$
$$+ 0.1584\,6732\,4625\,(y_{-2} + y_{+2}) + 0.0960\,7580\,3242\,(y_{-3} + y_{+3}) +$$
$$+ 0.0080\,8119\,4089\,y_4,$$

tandis que, sub (46) on a trouvé pour I_1

$$I_1 = 0.2466\,1426\,3490\,(y_{-1} + y_{+1}) +$$
$$+ 0.1569\,3803\,5364\,(y_{-2} + y_{+2}) + 0.0964\,4770\,1146\,(y_{-3} + y_{+3})$$

Si nous entendons, comme STIRLING [1]) par „correction" ou „corr."

[1]) STIRLING. *Methodus Differentialis*. Londres 1730.

la différence entre la valeur approximative de l'intégrale calculée pour le cas de $2m$ ou de $(2m-1)$ ordonnées et la valeur plus exactement approximative, que l'on obtient en adjoignant au nombre des ordonnées deux ordonnées nouvelles, alors corr. $= I_2 - I_1$ et donc, dans le cas envisagé plus haut,

$$\text{corr.}: = -0.0051\,9798\,8402\,(y_{-1}+y_{+1}) + \\ +0.0015\,2928\,9261\,(y_{-2}+y_{+2}) - 0.0003\,7189\,7904\,(y_{-3}+y_{+3}) + \\ 0.0080\,8119\,4089\,y_4 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

De (46) on a trouvé pour une valeur approximative de $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{8.5+x}$:

$$I_1 = 0.\ 1177\,8303\,5657\,4$$

De (50) on trouve corr.: $= -0.0000\,0000\,0000\,53$, d'où l'on peut conclure que la valeur trouvée pour I_1 est exacte jusqu'à la onzième décimale inclusivement, ce qui est d'accord avec l'énoncé de la valeur approximative de ladite intégrale dans le § 15.

Les corrections qui ont été admises dans la Table B ont le sens donné ci-dessus à „corr.": et ont été développées d'une façon identique à celle que nous venons d'indiquer.

Prenons encore la formule pour 5 ordonnées de cette Table. A la fin du § 20, on a trouvé de cette formule pour une valeur approximative de l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{8.5+x}$

$$I_1 = 0.\ 1177\,8303\,5657\,4$$

tandis que l'on trouve de la formule pour „corr."

$$\text{corr.}: = -0.\ 0000\,0000\,0001\,3$$

d'où il résulte que la valeur calculée de I_1 est exacte jusqu'à la onzième décimale inclusivement et est plus exactement représentée par

$$I_1 = 0.\ 1177\,8303\,5656.$$

Calcul des valeurs de S_p, $S_{p.q}$, etc.

§ 22. Les longueurs d'abscisses corrigées, exprimées seulement en deux décimales et dont nous représentons les carrés par

$$z_1^2\ ,\ z_2^2\ ,\ z_3^2, \ldots z_m^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

étant connues, il est facile, pour de petites valeurs de m, de calculer assez rapidement les valeurs correspondantes des grandeurs S_p, $S_{p.q}$ etc., au moyen des sommes des produits deux à deux, trois à trois, etc. desdits carrés; mais lorsque m est grand, ces calculs deviennent extrêmement compliqués à cause du grand nombre

de produits, qui alors doivent être déterminés. Cependant, on peut donner aux expressions pour S_p, etc. une autre forme, qui est quelquefois plus commode.

1°. Nous représentons en général la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissanses des carrés sub (51), à l'exception des carrés x_q^2 et x_r^2, par $\Sigma^p_{q.r}$, et la somme des produits p à p de ces mêmes $(m-2)$ carrés par $S_{p.q.r}$, alors les carrés sub (51), sauf les carrés z_q^2 et z_r^2, sont les racines de l'équation

$$f(z^2) = (z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)\ldots(z^2 - z_m^2)\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Dans (52), les facteurs $(z^2 - z_q^2)$ et $(z^2 - z_r^2)$ ne se présentent pas; pour (52) on peut écrire aussi

$$f(z^2) = (z^2)^{m-2} - S_{1.q.r}(z^2)^{m-3} + S_{2.q.r}(z^2)^{m-4} - \ldots + (-1)^{m-2} S_{m-2.q.r} = 0$$

la dérivée de cette dernière équation est

$$f^1(z^2) = (m-2)(z^2)^{m-3} - (m-3)\, S_{1.q.r}(z^2)^{m-4} + \ldots + \\ + (-1)^{m-1} S_{m-3.q.r} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Le rapport entre $f^1(z^2)$ et $f(z^2)$ s'exprime par [1])

$$\frac{f^1(z^2)}{f(z^2)} = \frac{1}{z^2 - z_1^2} + \frac{1}{z^2 - z_2^2} + \frac{1}{z^2 - z_3^2} + \ldots + \frac{1}{z^2 - z_m^2};$$

donc

$$f^1(z^2) = \frac{f(z^2)}{z^2 - z_1^2} + \frac{f(z^2)}{z^2 - z_2^2} + \frac{f(z^2)}{z^2 - z_3^2} + \ldots + \frac{f(z^2)}{z^2 - z_m^2};$$

dans la dernière équation les termes $\frac{f(z^2)}{z^2 - z_q^2}$ et $\frac{f(z^2)}{z^2 - z_r^2}$ ne se présentent pas.

Si l'on divise $f(z^2)$ par $(z^2 - z_1^2)$ on obtient

$$\frac{f(z^2)}{z^2 - z_1^2} = (z^2)^{m-3} - S_{1.q.r} + z_1^2 \;\Big|\; (z^2)^{m-4} + S_{2.q.r} - S_{1.q.r}.z_1^2 + z_1^4 \;\Big|\; (z^2)^{m-5} - \ldots$$

Si dans cette dernière équation on remplace z_1^2 successivement par chacune des $(m-3)$ autres racines, on aura en additionnant tous les résultats, l'équation suivante, qui est identique à celle sub (53)

$$f^1(z^2) = (m-2)(z^2)^{m-3} - \{(m-2)\, S_{1.q.r} - \Sigma^1_{q.r}\}(z^2)^{m-4} + \\ + \{(m-2)\, S_{2.q.r} - \Sigma^1_{q.r} \cdot S_{1.q.r} + \Sigma^2_{q.r}\}(z^2)^{m-5} + \ldots\ldots\ldots$$

---

[1]) J. A. Serret. *Cours d'Algèbre Supérieure* I. p. 111 et 377—379.

La comparaison de cette expression pour $f^1(z^2)$ avec celle sub (53), fournit les relations que nous donnons ici:

$$(m-3)\,S_{1.q.r} = (m-2)\,S_{1.q.r} - \Sigma^1_{q.r} \quad ,$$
$$(m-4)\,S_{2.q.r} = (m-2)\,S_{2.q.r} - \Sigma^1_{q.r}.S_{1.q.r} + \Sigma^2_{q.r} \quad ,$$
$$(m-5)\,S_{3.q.r} = (m-2)\,S_{3.q.r} - \Sigma^1_{q.r}\,S_{2.q.r} + \Sigma^2_{q.r}\,.\,S_{1.q.r} - \Sigma^3_{q.r} \quad ,$$

et ainsi de suite.

Après quelques réductions on obtient les équations suivantes, qui ont été données, pour la première fois, par NEWTON:

$$\left.\begin{array}{l}
S_{1.q.r} = \Sigma^1_{q.r} \quad , \\
2\,S_{2.q.r} = \Sigma^1_{q.r}\,.\,S_{1.q.r} - \Sigma^2_{q.r} \quad , \\
3\,S_{3.q.r} = \Sigma^1_{q.r}\,.\,S_{2.q.r} - \Sigma^2_{q.r}\,.\,S_{1.q.r} + \Sigma^3_{q.r} \quad , \\
4\,S_{4.q.r} = \Sigma^1_{q.r}\,.\,S_{3.q.r} - \Sigma^2_{q.r}\,.\,S_{2.q.r} + \Sigma^3_{q.r}\,.\,S_{1.q.r} - \Sigma^4_{q.r} \quad , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
{}^{(m-2)}S_{m-2.q.r} = \Sigma^1_{q.r}\,.\,S_{m-3.q.r} - \Sigma^2_{q.r}\,.\,S_{m-4.q.r} + \dots + (-1)^{m-1}\Sigma_{q.r}{}^{m-2}
\end{array}\right\} \dots (54)$$

2°. Les carrés sub (51) sont les racines de l'équation

$$f(z_2) = (z^2)^m - S_1(z^2)^{m-1} + \dots + (-1)^m S_m = 0 \dots \quad (55)$$

Si l'on isole des carrés sub (51) le carré $x_p{}^2$ et qu'on mette $S_{1.p}$ = la somme des carrés sub (51), excepté le carré $x_p{}^2$, $S_{2.p}$ = la somme des produits deux à deux de ces mêmes $(m-1)$ carrés, et ainsi de suite, alors les $(m-1)$ carrés restants sont les racines de l'équation

$$(z^2)^{m-1} - S_{1.p}(z^2)^{m-2} + \text{etc.}$$

En multipliant cette dernière équation avec $(x^2 - x_p{}^2)$, alors, puisque ce produit est identique à l'équation $f(z^2)$ sub (55), le $(q+1)^{\text{ième}}$ terme du produit sera égal au $(q+1)^{\text{ième}}$ terme de (55), par conséquent on a en général

$$S_m = S_{m.p} + S_{m-1.p}\,.\,x_p{}^2 \dots\dots\dots\dots \quad (56)$$

SECTION II.

Formules d'approximation lorsque la fonction sous le signe intégral ne peut pas être remplacé par une série de la première classe.

§ 23. Les formules des Tables A et B ont été établies dans la supposition que la fonction sous le signe intégral peut être représenté par une série de la *première* classe. Si ces formules sont appliquées à une intégrale dont la fonction ne peut pas être remplacée par une série de puissances complète, les calculs n'atteindront pas à la plus grande exactitude accessible.

Si auparavant on découvre une lacune dans la série, on peut en tenir compte dans le cas où l'on veut connaître les abscisses les plus avantageuses pour l'intégrale, dont on veut calculer une valeur approximative.

Pour la question qui nous occupera dans cette Section, nous introduirons (voir l'alinéa final du § 8) de nouveau les lignes A^1X et A^1Y^1 comme axes des coordonnées et nous considérerons les intégrales de $x^d F(x)\,dx$ et $\frac{1}{a \pm b x^k} \cdot dx$ entre les limites 0 et 1. Les lettres d et k représentent des nombres entiers plus grands que 1.

Dans ces deux fonctions, on voit immédiatement:

Dans la première, que la ligne représentée par l'équation $y = x^d F(x)$ passe par le point d'intersection A^1 des axes A^1X et A^1Y^1 et que par conséquent dans (5) $L = 0$, et, dans la deuxième, que, dans la série, qui peut remplacer $\frac{1}{a \pm bx^k}$, il manque plusieurs termes, et qu'ainsi ces deux séries n'appartiennent pas à celles de la *première classe.*

§ 24. 1°. Lorsque dans $x^d F(x)$, la fonction $F(x)$ elle-même peut être représentée par la série de la *première* classe

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{etc.},$$

alors la valeur de l'intégrale de $x^d F(x) dx$, entre les limites 0 et 1, est

$$I = \int_0^1 x^d F(x)\,dx = \tfrac{1}{d+1} a_0 + \tfrac{1}{d+2} a_1 + \tfrac{1}{d+3} a_2 + \tfrac{1}{d+4} a_3 + \text{etc.}\ldots \quad (57)$$

Si l'on représente les coordonnées des n points connus de la

vraie ligne limite de la figure par $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \ldots (x_n, y_n)$ alors une aire approximative de la figure est

$$I_1 = R_1 y_1 + R_2 y_2 + R_3 y_3 + \ldots + R_n y_n \ldots\ldots \quad (58)$$

et $I = I_1 + E$.

Si l'on substitue dans (58) les n ordonnées calculées, alors on obtient

$$\begin{aligned} I = {} & R_1 (a_0 x_1^d + a_1 x_1^{d+1} + a_2 x_1^{d+2} + a_3 x_1^{d+3} + \text{etc.}) + \\ & + R_2 (a_0 x_2^d + a_1 x_2^{d+1} + a_2 x_2^{d+2} + a_3 x_2^{d+3} + \text{etc.}) + \\ & + R_3 (a_0 x_3^d + a_1 a_3^{d+1} + a_2 x_3^{d+2} + a_3 x_3^{d+3} + \text{etc.}) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + R_n (a_0 x_n^d + a_1 x_n^{d+1} + a_2 x_n^{d+2} + a_3 x_n^{d+3} + \text{etc.}) = \\ & = \Sigma (x_1^{d+p} R_1 + x_2^{d+p} R_2 + x_3^{d+p} R_3 + \ldots + x_n^{d+p} R_n). \end{aligned}$$

La dernière équation soustraite de (57) procure l'équation

$$E = \Sigma \left\{ \frac{1}{d+(p+1)} - (x_1^{d+p} R_1 + x_2^{d+p} R_2 + x_3^{d+p} R_3 + \ldots + x_n^{d+p} R_n) \right\}$$

dans laquelle il faut poser successivement $p = 0, 1, 2$, etc.

Si dans la dernière expression on égale à zéro chacun des $2n$ premiers termes, alors les valeurs de x de

$$\left.\begin{array}{llllll} x_1^d R_1 & + x_2^d R_2 & + x_3^d R_3 & + \ldots + x_n^d R_n & = \frac{1}{d+1} \\ x_1^{d+1} R_1 & + x_2^{d+1} R_2 & + x_3^{d+1} R_3 & + \ldots + x_n^{d+1} R_n & = \frac{1}{d+2} \\ x_1^{d+2} R_1 & + x_2^{d+2} R_2 & + x_3^{d+2} R_3 & + \ldots + x_n^{d+2} R_n & = \frac{1}{d+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{d+2n-1} R_1 & + x_2^{d+2n-1} R_2 & + x_3^{d+2n-1} R_3 & + \ldots + x_n^{d+2n-1} R_n & = \frac{1}{d+2n} \end{array}\right\} \ldots (59)$$

donnent les longueurs d'abcisses pour les formules d'approximation les plus exactes pour n ordonnées. Si dans (66) et (69) nous posons $c = 0$, $k = 1$, $v = n$ et $u_p = \frac{1}{d+p+1}$, on trouve facilement que dans (59) les grandeurs x sont les racines de l'équation

$$x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - S_3^{n-3} + \ldots + (-1)^n S_n = 0$$

tandis qu'en posant dans (72) et (73) $r = d + n + 1$, $v = n$, $\Delta = 1$, $B_0 = 1, B_1 = S_1, \ldots B_n = S_n$, on obtient

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{n}{1} \cdot \frac{d+n}{d+2n}, \\ S_2 &= \frac{n-1}{2} \cdot \frac{d+n-1}{d+2n-1} S_1, \\ S_3 &= \frac{n-2}{3} \cdot \frac{d+n-2}{d+2n-2} S_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$S_{n-1} = \frac{2}{n-1} \cdot \frac{d+2}{d+n+2} S_{n-2},$$

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{d+1}{d+n+1} \cdot S_{n-1}.$$

On trouve, par exemple, pour $d = 1$ et $n = 4$ les grandeurs x de l'équation suivante

$$x^4 - S_1 . x^3 + S_2 x^2 - S_3 x + S_4 = 0$$

où

$$S_1 = \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{9} = \frac{20}{9},$$
$$S_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{20}{9} = \frac{5}{3},$$
$$S_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{21} \text{ et}$$
$$S_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{10}{21} = \frac{5}{126}$$

donc

$$x^4 - \frac{20}{9} x^3 + \frac{5}{3} x^2 - \frac{10}{21} x + \frac{5}{126} = 0$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0.1397\ 5986 \\ x_2 &= 0.4164\ 0957 \\ x_3 &= 0.7231\ 5699 \\ x_4 &= 0.9428\ 9580 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Remarquons ici que la série pour $F(x)$ a été supposée de la *première* classe, ce qui n'est pas toujours facile à constater, il s'en faut, et si, parmi les premiers termes de cette série, il en manquait un ou plusieurs, alors les valeurs sub (60) ne désignent non plus les longueurs d'abscisses les plus favorables.

Pour $d = 1$ et $n = 3$, on trouve

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0.2123\ 4054 \\ x_2 &= 0.5905\ 3314 \\ \text{et } x_3 &= 0.9114\ 1204 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Pour $d = 1$ et $n = 2$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0.3550\ 5103 \\ \text{et } x_2 &= 0.8448\ 4897 \\ \text{et pour } d = 1 \text{ et } n = 1 &: \\ x_1 &= \tfrac{2}{3}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

2°. Remplaçons l'expression $y = \frac{1}{a \pm bx}^k$, dans laquelle on suppose $\frac{b}{a} < 1$, par l'équation suivante

$$y = \frac{1}{a} \mp \frac{b}{a^2} . x^k + \frac{b^2}{a^3} . x^{2k} \mp \frac{b^3}{a^4} . x^{3k} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

dans laquelle, des signes doubles, les signes supérieurs vont ensemble, ainsi que les signes inférieurs.

Nous posons $\frac{1}{a} = a_0$, $\mp \frac{b}{a^2} = a_1$; $\frac{b^2}{a^3} = a_2$, $\mp \frac{b^3}{a^4} = a^3$, etc., d'où (63) devient

$$y = a_0 + a_1 x^k + a_2 . x^{2k} + a_3 . x^{3k} + \text{etc.}$$

Si les abscisses des n points connus de la vraie ligne limite de la figure sont $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, alors

$$\begin{aligned}
I_1 = {} & R_1 (a_0 + a_1 x_1^k + a_2 x_1^{2k} + a_3 x_1^{3k} + \text{etc.}) + \\
& + R_2 (a_0 + a_1 x_2^k + a_2 x_2^{2k} + a_3 x_2^{3k} + \text{etc.}) + \\
& + R_3 (a_0 + a_1 x_3^k + a_2 x_3^{2k} + a_3 x_3^{3k} + \text{etc.}) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + R_n (a_0 + a_1 x_n^k + a_2 x_n^{2k} + a_3 x_n^{3k} + \text{etc.}) = \\
& = (\quad R_1 + \quad R_2 + \quad R_3 + \ldots + \quad R_n) a_0 + \\
& + (x_1^k R_1 + x_2^k R_2 + x_3^k R_3 + \ldots + x_n^k R_n) a_1 + \\
& + (x_1^{2k} R_1 + x_2^{2k} R_2 + x_3^{2k} R_3 + \ldots + x_n^{2k} R_n) a_2 + \\
& + \text{et ainsi de suite.}
\end{aligned}$$

La dernière égalité ayant été soustraite de $I = \int_0^1 \frac{1}{a \pm bx^k} dx$, notamment

$$I = a_0 + \frac{1}{k+1} a_1 + \frac{1}{2k+1} a_2 + \frac{1}{3k+1} a_3 + \text{etc.}$$

donne, pour le calcul des n longueurs d'abscisses, les équations suivantes

$$\begin{aligned}
R_1 + \quad R_2 + \quad R_3 + \ldots + \quad R_n &= 1 \quad , \\
x_1^k R_1 + \quad x_2^k R_2 + \quad x_3^k R_3 + \ldots + \quad x_n^k R_n &= \frac{1}{k+1} \quad , \\
x_1^{2k} R_1 + \quad x_2^{2k} R_2 + \quad x_3^{2k} R_3 + \ldots + \quad x_n^{2k} R_n &= \frac{1}{2k+1} \quad , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1^{(2n-1)k} R_1 + x_2^{(2n-1)k} R_2 + x_3^{(2n-1)k} R_3 + \ldots + x_n^{(2k-1)k} R_n &= \frac{1}{(2n-1)k+1} .
\end{aligned}$$

Pour $k = 2$ et $n = 3$, par exemple, on trouve les longueurs d'abscisses de l'équation

$$(x^2)^3 - S_1 (x^2)^2 + S_2 (x^2) - S_3 = 0$$

où

$$S_1 = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{11} = \frac{15}{11},$$
$$S_2 = \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{15}{11} = \frac{5}{11},$$
$$\text{et } S_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5}{231},$$

par conséquent

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0.2386\ 1920 \\ x_2 &= 0.6612\ 0943 \\ \text{et } x_3 &= 0.9324\ 6953 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

Conclusion.

§ 25. Les distances des pieds des trois ordonnées pour $(2m-1) = 3$ de la Table A, calculées à partir du point A^1, comportent

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0.5 - 0.3872\ 9833 = 0.1127\ 0167 \\ x_2 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0.5 \\ \text{et } x_3 &= 0.5 + 0.3872\ 9833 = 0.8872\ 9833 \end{aligned}\right\} \ldots \quad (65)$$

Si l'on compare ces distances avec les longueurs des abscisses sub (61) et (64) et ces longueurs-ci entre elles, on constate, que toute lacune dans le commencement de la série, qui peut remplacer la fonction sous le signe intégral, peut avoir une très grande influence sur les longueurs des abscisses les plus favorables. C'est ainsi que, par exemple, pour $n = 3$, l'abscisse x_1 dans (64) est plus de deux fois aussi grande que celle dans (65).

Si l'on compare ensuite les $2m = 4$ longueurs d'abscisses sub (60) avec celles correspondantes de la Table A, celles-ci étant comptées à partir du point A^1, notamment

$$x_1 = 0.0694\ 3184,$$
$$x_2 = 0.3300\ 0948,$$
$$x_3 = 0.6699\ 9052,$$
$$\text{et } x_4 = 0.9305\ 6816,$$

on voit, que lorsqu'on applique les longueurs d'après Gauss à des fonctions dont les séries ne sont pas de la *première* classe, *les* 14 *ou* 15 *dernières des* 16 *décimales*, dans lesquelles x est exprimé dans la Table A n'ont *absolument aucune valeur*.

La comparaison des longueurs d'abscisses sub (62) avec celles correspondantes de la Table A donne lieu à une remarque analogue.

De ces différents faits on peut déduire, que les formules de la Table A ne peuvent être employées avec avantage, que pour un nombre restreint de fonctions, notamment pour celles dont on sait avec certitude qu'elles peuvent être remplacées par des séries de

la *première* classe; pour toutes les autres il faudra parvenir à l'exactitude dans le calcul de la valeur de l'intégrale en prenant un nombre considérable d'ordonnées.

Il en résulte, en rapport avec les observations dans les §§ 12, 16 et 21, qu'en général, pour le calcul de la valeur approximative d'une intégrale définie, les formules de la Table B méritent d'être préférées à celles de la Table A.

SECTION III.

Développement de formules sur lesquelles reposent celles destinées au calcul d'une intégrale définie.

§ 26. Des $(c+v)$ équations [1])

$$\left.\begin{array}{llll}
x_1^{\,d}R_1+ & x_2^{\,d}.R_2+ & x_3^{\,d}.R_3+\ldots+ & x_{c+v}^{\,d}R_{c+v}=u_0\ , \\
x_1^{\,k+d}R_1+ & x_2^{\,k+d}R_2+ & x_3^{\,k+d}R_3+\ldots+ & x_{c+v}^{\,k+d}R_{c+v}=u_1\ , \\
x_1^{\,2k+d}R_1+ & x_2^{\,2k+d}R_2+ & x_3^{\,2k+d}R_3+\ldots+ & x_{c+v}^{\,2k+d}R_{c+v}=u_2\ , \\
x_1^{\,3k+d}R_1+ & x_2^{\,3k+d}R_2+ & x_3^{\,3k+d}R_3+\ldots+ & x_{c+v}^{\,3k+d}R_{c+v}=u_3\ , \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_1^{\,(c+v-1)k+d}R_1+ & x_2^{\,(c+v-1)k+d}R_2+ & x_3^{\,(c+v-1)k+d}R_3+\ldots+ & x_{c+v}^{\,(c+v-1)k+d}R_{c+v}=u_{c+v-1}\ ,
\end{array}\right\}\ldots\ (66)$$

où c, v, d et k représentent des nombres positifs arbitraires et les $(c+v)$ grandeurs u, de même les nombres x sont connus et les nombres R sont inconnus, déterminer la valeur d'un R arbitraire [2]).

Solution. Remarquons que toutes les $(c+v)$ grandeurs x se présentent tout à fait de la même façon dans les équations sub (66). C'est pourquoi il ne faut pas résoudre immédiatement chaque R séparément, mais il faut tout d'abord tâcher de déterminer les coefficients de l'équation dont les $(c+v)$ grandeurs x^k sont les racines. C'est à cet effet que nous introduisons les notations suivantes:

$S_{1.p}=$ la somme des puissances $x_1^{\,k},\ldots x_{c+v}^{\,k}$, à l'exception de $x_p^{\,k}$,

$S_{2.p}=$ la somme des produits deux à deux de ces mêmes $(c+v-1)$ puissances,

$S_{3.p}=$ la somme des produits trois à trois de ces mêmes $(c+v-1)$ puissances, et ainsi de suite.

$S_{c+v-1.p}=$ le produit (continu) de ces mêmes $(c+v-1)$ puissances.

[1]) Ici la somme $(c+v)$ pourrait être remplacée par une seule lettre; cependant il est préférable, à cause de la clarté et en rapport avec la solution des équations sub (69) et avec les formules qui doivent en être déduites, de garder la somme $(c+v)$.

[2]) Voir *Mémoires de l'Académie de Berlin.* Recherches par M. DE LA GRANGE. 1775, pag. 183 et 1792, pag. 247.

Les puissances $x_1^k, \ldots x_{c+v}^k$, à l'exception de x_p^k, sont alors les racines de l'équation

$$x^{(c+v-1)k} - S_{1.p} \cdot x^{(c+v-2)k} + S_{2.p} \cdot x^{(c+v-3)k} - \ldots + (-1)^{c+v-1} S_{c+v-1.p} = 0.$$

Nous représentons aussi le premier membre de cette équation par

$$\varphi_p(x^k) = (x^k - x_1^k)(x^k - x_2^k) \ldots (x^k - x_{c+v}^k) = 0 \ldots \quad (67)$$

dans ce produit, il est entendu que le facteur $(x^k - x_p^k)$ ne se présente pas.

Pour résoudre les équations sub (66), nous les additionnons, après les avoir multipliées, la dernière par $+1$, l'avant-dernière par $-S_{1.p}$, la précédente par $+S_{2.p}$, et ainsi de suite, et enfin la première par $(-1)^{c+v-1} S_{c+v-1.p}$.

Si l'on réunit les termes avec le même R, on obtient

$$\begin{array}{lllll}
R_1 & \{x_1^{(c+v-1)k+d} & -S_{1.p} x_1^{(c+v-2)k+d} & +S_{2.p} x_1^{(c+v-3)k+d} & -\ldots + (-1)^{c+v-1} S_{c+v-1.p}\, x_1^d \} + \\
+R_2 & \{x_2^{(c+v-1)k+d} & -S_{1.p} x_2^{(c+v-2)k+d} & +S_{2.p} x_2^{(c+v-3)k+d} & -\ldots + (-1)^{c+v-1} S_{c+v-1.p}\, x_2^d \} + \\
+R_3 & \{x_3^{(c+v-1)k+d} & -S_{1.p} x_3^{(c+v-2)k+d} & +S_{2.p} x_3^{(c+v-3)k+d} & -\ldots + (-1)^{c+v-1} S_{c+v-1.p}\, x_3^d \} + \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
+R_{c+v} & \{x_{c+v}^{(c+v-1)k+d} & -S_{1.p} x_{c+v}^{(c+v-2)k+d} & +S_{2.p} x_{c+v}^{(c+v-3)k+d} & -\ldots + (-1)^{c+v-1} S_{c+v-1.p}\, x_{c+v}^k \} =
\end{array}$$

$$= u_{c+v-1} - S_{1.p} \cdot u_{c+v-2} + S_{2.p} \cdot u_{c+v-3} - \ldots + (-1)^{c+v-1} S_{c+v-1.p} u_0.$$

Le premier membre de cette équation peut être également représenté par

$$R_1 \cdot \varphi_p(x_1^k) x_1^d + R_2 \cdot \varphi_p(x_2^k) x_2^d + R_3 \cdot \varphi_p(x_3^k) x_3^d + \ldots + R_{c+v} \cdot \varphi_p(x_{c+v}^k) x_{c+v}^d$$

où, en vertu de la supposition au sujet de $\varphi_p(x^k)$ sub (67), les coefficients de toutes les grandeurs R, excepté le coefficient de la grandeur R_p, sont égaux à zéro, par conséquent on obtient, après avoir divisé par le coefficient de R_p:

$$R_p = \frac{u_{c+v-1} - S_{1.p} \cdot u_{v+c-2} + S_{2.p} \cdot u_{v+c-3} - \ldots + (-1)^{c+v-1} S_{c+v-1.p} u_0}{x_p^{(c+v-1)k+d} - S_{1.p} \cdot x_p^{(c+v-2)k+d} + S_{2.p} \cdot x_p^{(c+v-3)k+d} - \ldots + (-1)^{c+v-1} S_{c+v-1.p} \cdot x_p^d} \ldots \quad (68)$$

Dans les applications, que dans cet exposé, nous faisons du groupe d'équations sub (66) on a toujours $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{c+v}$ et donc, en vertu de (67), le dénominateur dans (68), abstraction faite du signe, est plus grand que zéro; par conséquent R_p reçoit dans (68) toujours une valeur unique et déterminée. On ne peut pas admettre pour x deux valeurs identiques, par exemple $x_q = x_{q+1}$, parce que, dans ce cas, le dénominateur de (68) serait égal à zéro et que par conséquent la valeur de R_p deviendrait infiniment grande. Il est clair qu'il est bien permis de prendre une des valeurs de x notamment $x_1 = 0$ (voir la note à la p. 8)

§ 27. Des $(c+v)+v=(c+2v)$ équations

$$\left.\begin{array}{llll}
x_1^{\,d}R_1+ & x_2^{\,d}R_2+\ldots+ & x_v^{\,d}R_v+\ldots+ & x_{c+v}^{\,d}R_{c+v}=u_0\ , \\
x_1^{\,k+d}R_1+ & x_2^{\,k+d}R_2+\ldots+ & x_v^{\,k+d}R_v+\ldots+ & x_{c+v}^{\,k+d}R_{c+v}=u_1\ , \\
x_1^{\,2k+d}R_1+ & x_2^{\,2k+d}R_2+\ldots+ & x_v^{\,2k+d}R_v+\ldots+ & x_{c+v}^{\,2k+d}R_{c+v}=u_2\ , \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
x_1^{\,(c+2v-1)k+d}R_1+ & x_2^{\,(c+2v-1)k+d}R_2+\ldots+ & x_v^{\,(c+2v-1)k+d}R_v+\ldots+ & x_{c+v}^{\,(c+2v-1)k+d}R_{c+v}=u_{c+2v-1}.
\end{array}\right\}\ldots(69)$$

dans lesquelles les $(c+2v)$ grandeurs u, de même que les c grandeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots x_c$ sont connues et dans lesquelles les autres v grandeurs x, ainsi que toutes les $(c+v)$ grandeurs R sont inconnues, résoudre les $(c+2v)$ inconnues.

Solution. Du § précédent est apparu comment on peut trouver les valeurs de R au moyen des premières $(c+v)$ équations de (69), quand toutes les grandeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{c+v}$ sont connues. Pour pouvoir exprimer ici R_p dans les données, il nous importe donc d'abord de définir les v grandeurs inconnues x.

A cet effet, nous introduisons les notations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}
S_1 = \text{la somme de toutes les } (c+v) \text{ grandeurs } x_1^{\,k}, x_2^{\,k}, \ldots x_{c+v}^{\,k}, \\
S_2 = \text{la somme de leurs produits deux à deux,} \\
\qquad \text{et ainsi de suite,} \\
S_{c+v} = \text{leurs produit (continu)}
\end{array}\right\}..(70)$$

Les $(c+v)$ grandeurs (x^k) sont alors les racines de l'équation

$$x^{(c+v)k}-S_1x^{(c+v-1)k}+S_2x^{(c+v-2)k}-\ldots+(-1)^{c+v}S_{c+v}=0\ldots(71)$$

Le premier membre de cette égalité peut être également représenté par

$$f(x^k) \text{ ou } (x^k-x_1^{\,k})(x^k-x_2^{\,k})(x^k-x_3^{\,k})\ldots(x^k-x_{c+v}^{\,k})\ ^{1)}$$

Qu'on prenne maintenant, des $(c+2v)$ équations, sub (69), $(c+v+1)$ qui se suivent immédiatement (ce qui peut se faire de v manières) et qu'on les additionne, après les avoir multipliées, la dernière par $+1$, l'avant-dernière par $-S_1$, celle qui précède par $+S_2$, et ainsi de suite, et enfin la première par $(-1)^{c+v}S_{c+v}$. Réunissant les termes avec le même R, on obtient

$$\begin{array}{l}
R_1x_1^{\,zk+d}\{x_1^{(c+v)k}-S_1x_1^{(c+v-1)k}+S_2x_1^{(c+v-2)k}-\ldots+(-1)^{c+v}S_{c+v}\}+ \\
+R_2x_2^{\,zk+d}\{x_2^{(c+v)k}-S_1x_2^{(c+v-1)k}+S_2x_2^{(c+v-2)k}-\ldots+(-1)^{c+v}S_{c+v}\}+ \\
+R_3x_3^{\,zk+d}\{x_3^{(c+v)k}-S_1x_3^{(c+v-1)k}+S_2x_3^{(c+v-2)k}-\ldots+(-1)^{c+v}S_{c+v}\}+ \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+R_{c+v}x_{c+v}^{\,zk+d}\{x_{c+v}^{(c+v)k}-S_1x_{c+v}^{(c+v-1)k}+S_2x_{c+v}^{(c+v-2)k}-\ldots+(-1)^{c+v}S_{c+v}\}= \\
\quad =u_{c+v+z}-S_1\cdot u_{c+v+z-1}+S_2\cdot u_{c+v+z-2}-\ldots+(-1)^{c+v}S_{c+v}\cdot u_z.
\end{array}$$

---

[1]) Le rapport de cette expression avec celle pour $\phi_p(x)$ sub (67) est désigné par $f(x^k)=(x^k-x_p^{\,k})\cdot\phi_p(x^k)$.

Le premier membre de cette égalité peut être également représenté par

$$R_1 x_1^{zk+d}.f(x_1^k)+R_2 x_2^{zk+d}.f(x_2^k)+R_3 x_3^{zk+d}.f(x_3^k)+\ldots+R_{c+v} x_{c+v}^{zk+d}.f(x_{c+v}^k).$$

Puisque, dans cette expression, à cause de la supposition qui a été faite au sujet de $f(x^k)$, tous les termes sont égaux à zéro, nous avons

$$u_{c+v+z}-S_1.u_{c+v+z-1}+S_2.u_{c+v+z-2}-\ldots+(-1)^{c+v}S_{c+v}.u_z=0.$$

Pour z on peut poser successivement les valeurs 0, 1, 2,... $(v-1)$ de sorte qu'on obtient les v équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}
u_{c+v}\ -S_1.u_{c+v-1}+S_2.u_{c+v-2}-S_3.u_{c+v-3}+\ldots+(-1)^{c+v}S_{c+v}.u_0\ =0\\
u_{c+v+1}-S_1.u_{c+v}\ +S_2.u_{c+v-1}-S_3.u_{c+v-2}+\ldots+(-1)^{c+v}S_{c+v}.u_1\ =0\\
u_{c+v+2}-S_1.u_{c+v+1}+S_2.u_{c+v}\ -S_3.u_{c+v-1}+\ldots+(-1)^{c+v}S_{c+v}.u_2\ =0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_{c+2v-1}-S_1.u_{c+2v-2}+S_2.u_{c+2v-3}-S_3.u_{c+2v-4}+\ldots+(-1)^{c+v}S_{c+v}.u_{v-1}=0
\end{array}\right\}..(72)$$

Etablissons encore

$\mathbf{s}_1$ = la somme des c grandeurs connues x_1^k, x_2^k, x_3^k,...x_c^k,

$\mathbf{s}_2$ = la somme de leurs produits deux à deux; etc.

et

$\boldsymbol{S}_1$ = la somme des v grandeurs inconnues x_{c+1}^k, x_{c+2}^k,...x_{c+v}^k,

$\boldsymbol{S}_2$ = la somme de leurs produits deux à deux;

et ainsi de suite.

Si nous substituons ensuite, dans (72) à S_1, S_2, S_3, etc. ses expressions dans $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$,...$\mathbf{s}_c$, $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$,...$\boldsymbol{S}_v$, alors nous obtenons, après quelque réduction

$$\begin{array}{l}
\quad\{u_{c+v}\ -\mathbf{s}_1.u_{c+v-1}+\mathbf{s}_2.u_{c+v-2}-\mathbf{s}_3.u_{c+v-3}+\ldots+(-1)^c.u_v\ \}-\\
-\{u_{c+v-1}-\mathbf{s}_1.u_{c+v-2}+\mathbf{s}_2.u_{c+v-3}-\mathbf{s}_3.u_{c+v-4}+\ldots+(-1)^c.u_{v-1}\}\boldsymbol{S}_1+\\
+\{u_{c+v-2}-\mathbf{s}_1.u_{c+v-3}+\mathbf{s}_2.u_{c+v-4}-\mathbf{s}_3.u_{c+v-5}+\ldots+(-1)^c.u_{v-2}\}\boldsymbol{S}_2-\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+(-1)^v\{u_c\ -\mathbf{s}_1.u_{c-1}+\mathbf{s}_2\,u_{c-2}-\mathbf{s}_3.u_{c-3}+\ldots+(-1)^c\,u_0\ \}\boldsymbol{S}_v=0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\quad\{u_{c+v+1}-\mathbf{s}_1.u_{c+v}+\mathbf{s}_2\,u_{c+v-1}-\mathbf{s}_3.u_{c+v-2}+\ldots+(-1)^c.u_{v+1}\}-\\
-\{u_{c+v}\ -\mathbf{s}_1.u_{c+v-1}+\mathbf{s}_2\,u_{c+v-2}-\mathbf{s}_3.u_{c+v-3}+\ldots+(-1)^c.u_v\ \}\boldsymbol{S}_1+\\
+\{u_{c+v-1}-\mathbf{s}_1.u_{c+v-2}+\mathbf{s}_2\,u_{c+v-3}-\mathbf{s}_3.u_{c+v-4}+\ldots+(-1)^c.u_{v-1}\}\boldsymbol{S}_2-\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+(-1)^v\{u_{c+1}\ -\mathbf{s}_1.u_c\ +\mathbf{s}_2\,u_{c-1}-\mathbf{s}_3.u_{c-2}+\ldots+(-1)^c.u_1\ \}\boldsymbol{S}_v=0.
\end{array}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{l}
\quad\{u_{c+2v-1}-\mathbf{s}_1.u_{c+2v-2}+\mathbf{s}_2.u_{c+2v-3}-\mathbf{s}_3.u_{c+2v-4}+\ldots+(-1)^c.u_{2v-1}\}-\\
-\{u_{c+2v-2}-\mathbf{s}_1.u_{c+2v-3}+\mathbf{s}_2.u_{c+2v-4}-\mathbf{s}_3.u_{c+2v-5}+\ldots+(-1)^c.u_{2v-2}\}\boldsymbol{S}_1+\\
+\{u_{e+2v-3}-\mathbf{s}_1.u_{c+2v-4}+\mathbf{s}_2.u_{c+2v-5}-\mathbf{s}_3\,u_{c+2v-6}+\ldots+(-1)^c\,u_{2v-3}\}\boldsymbol{S}_2-\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+(-1)^v\{u_{c+v-1}-\mathbf{s}_1.u_{c+v-2}+\mathbf{s}_2u_{c+v-3}-\mathbf{s}_3.u_{c+v-4}+\ldots+(-1)^c.u_{v-1}\}\boldsymbol{S}_v=0.
\end{array}$$

De ce groupe de v équations linéaires, on peut résoudre les v grandeurs $S_1, S_2, \ldots S_v$, qui en sont les seules inconnues. Les v inconnues x_k sont alors les racines de l'équation

$$(x^k)^v - S_1(x^k)^{v-1} + S_2(x^k)^{v-2} - S_3(x^k)^{v-3} + \ldots + (-1)^v S_v = 0.$$

Dans les équations sub (69), toutes les lettres u représentent des nombres arbitraires. Cependant dans chacune des formules d'approximation, qui seront développées dans ce travail, il existe un certain rapport entre ces nombres. Si l'on tient compte de ce rapport, alors, comme il apparaîtra dans le prochain §, la relation des grandeurs S devient beaucoup plus simple.

§ 28. Des v équations

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r}B_0 - \frac{1}{r-\Delta}B_1 + \frac{1}{r-2\Delta}\cdot B_2 - \ldots + (-1)^{t-1}\frac{1}{r-(t-1)\Delta}B_{t-1} + (-1)^t\cdot\frac{1}{r-t\Delta}\cdot B_t + \\
&\qquad + \ldots + (-1)^v\frac{1}{r-v\Delta}B_v = 0, \\
&\frac{1}{r+\Delta}\cdot B_0 - \frac{1}{r}B_1 + \frac{1}{r-\Delta}B_2 - \ldots + (-1)^{t-1}\cdot\frac{1}{r-(t-2)}B_{t-1} + (-1)^t\frac{1}{r-(t-1)\Delta}B_t + \\
&\qquad + \ldots + (-1)^v\frac{1}{r-(v-1)\Delta}B_v = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{1}{r+(v-1)\Delta}\cdot B_0 - \frac{1}{r+(v-2)\Delta}B_1 + \frac{1}{r+(v-3)\Delta}B_2 - \ldots + (-1)^{t-1}\frac{1}{r-(t-v)\Delta}B_{t-1} + \\
&\qquad + (-1)^t\frac{1}{r-\{t-(v-1)\}\Delta}B_t + \ldots + (-1)^v\frac{1}{r-\Delta}B_v = 0;
\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

dans lesquelles r, Δ et v sont connus et dans lesquelles on peut attribuer à B_0 une valeur arbitraire, résoudre les v grandeurs inconnues $B_1, B_2, B_3, \ldots B_v$.

Solution. On pose $(-1)^t B_t = \beta_t$ et on transfère les termes avec B_0 du premier au second membre, alors on a:

$$\frac{1}{r-\Delta}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_0} + \frac{1}{r-2\Delta}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_0} + \frac{1}{r-3\Delta}\cdot\frac{\beta_3}{\beta_0} + \ldots + \frac{1}{r-(t-1)\Delta}\cdot\frac{\beta_{t-1}}{\beta_0} + \frac{1}{r-t\Delta}\cdot\frac{\beta_t}{\beta_0} + \ldots + \frac{1}{r-v\Delta}\cdot\frac{\beta_v}{\beta_0} = -\frac{1}{r},$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_0} + \frac{1}{r-\Delta}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_0} + \frac{1}{r-2\Delta}\cdot\frac{\beta_3}{\beta_0} + \ldots + \frac{1}{r-(t-2)\Delta}\cdot\frac{\beta_{t-1}}{\beta_0} + \frac{1}{r-(t-1)\Delta}\cdot\frac{\beta_t}{\beta_0} + \ldots + \frac{1}{r-(v-1)\Delta}\cdot\frac{\beta_v}{\beta_0} = -\frac{1}{r+\Delta},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{r+(v-2)\Delta}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_0}+\frac{1}{r+(v-3)\Delta}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_0}+\frac{1}{r+(v-4)\Delta}\cdot\frac{\beta_3}{\beta_0}+\ldots+\frac{1}{r-(t-v)\Delta}\cdot\frac{\beta_{t-1}}{\beta_0}+$$
$$+\frac{1}{r-\{t-(v-1)\}\Delta}\cdot\frac{\beta_t}{\beta_0}+\ldots+\frac{1}{r-\Delta}\cdot\frac{\beta_v}{\beta_0}=-\frac{1}{r+(v-1)\Delta}.$$

Les fractions $\frac{\beta_p}{\beta_0}$ sont proportionnelles aux déterminants obtenus de la matrice des coefficients en remplaçant la $p^{\text{ième}}$ colonne par la colonne des valeurs connues et les signes négatifs par $+$.

Alors à $\frac{\beta_t}{\beta_0}$ correspond

$$-\begin{vmatrix}
\frac{1}{r-\Delta} & \frac{1}{r-2\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-(t-1)\Delta} & \frac{1}{r} & \frac{1}{r-(t+1)\Delta} & \frac{1}{r-(t+r)\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-v\Delta} \\
\frac{1}{r} & \frac{1}{r-\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-(t-2)\Delta} & \frac{1}{r+\Delta} & \frac{1}{r-t\Delta} & \frac{1}{r-(t+1)\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-(v-1)\Delta} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{r+(v-2)\Delta} & \frac{1}{r+(v-3)\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-(t-v)\Delta} & \frac{1}{r+(v-1)\Delta} & \frac{1}{r-\{t-(v-2)\}\Delta} & & & \\
 & & & \frac{1}{r-\{t-(v-3)\}\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-\Delta} & & &
\end{vmatrix}$$

Avec $\frac{\beta_{t+1}}{\beta_0}$:

$$\begin{vmatrix}
\frac{1}{r-\Delta} & \frac{1}{r-2\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-(t-1)\Delta} & \frac{1}{r-t\Delta} & \frac{1}{r} & \frac{1}{r-(t+2)\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-v\Delta} \\
\frac{1}{r} & \frac{1}{r-\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-(t-2)\Delta} & \frac{1}{r-(t-1)\Delta} & \frac{1}{r+\Delta} & \frac{1}{r-(t+1)\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-(v-1)\Delta} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{r+(v-2)\Delta} & \frac{1}{r-(v-3)\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-(t-v)\Delta} & \frac{1}{r-\{t-(v-1)\}\Delta} & \frac{1}{r+(v-1)\Delta} & & & \\
 & & & \frac{1}{r-\{t-(v-3)\}\Delta} & \frac{1}{r-\{t-(v-4)\}\Delta} & \cdots & \frac{1}{r-\Delta} & &
\end{vmatrix}$$

Qu'on soustraie, dans le premier déterminant, la $(t+1)^{\text{ième}}$ colonne et, dans le deuxième déterminant, la $(t-1)^{\text{ième}}$ colonne, de toutes les autres colonnes; les éléments deviennent alors des fractions, celles qui se trouvent dans la même colonne ont toutes les numérateurs égaux, celles qui se trouvent dans la même ligne horizontale ont toutes un facteur commun dans le dénominateur. On peut ainsi, du premier déterminant, isoler le facteur

$$\frac{-(-1)^t.(t+1)!\,(v-t-1)!\,\Delta^{v-1}}{[r-(t+1)\Delta].[r-t\Delta]\ldots[r-(t-v+2)\Delta]}$$

et, du deuxième déterminant, le facteur

$$\frac{(-1)^t . t!(v-t)!}{[r-t\Delta].[r-(t-1)\Delta]\ldots[r-(t-v+1)\Delta]}.$$

Dans ces deux cas, le déterminant restant est le même. Le rapport des grandeurs B_t et B_{t+1} est par conséquent égal à celui des facteurs isolés. Après simplification, il reste

$$\frac{B_{t+1}}{B_t} = \frac{v-t}{t+1} \cdot \frac{r-(t+1)\Delta}{r-(t-v+1)\Delta}.$$

Si dans cette expression on remplace successivement t par 0, 1, 2, 3, . . . $(v-1)$, alors on obtient

$$\left.\begin{array}{l}
B_1 = \dfrac{r-\Delta}{r+(v-1)\Delta} \cdot \dfrac{v}{1} \cdot B_0 \;, \\
B_2 = \dfrac{r-2\Delta}{r+(v-2)\Delta} \cdot \dfrac{v-1}{2} \cdot B_1 \;, \\
B_3 = \dfrac{r-3\Delta}{r+(v-3)\Delta} \cdot \dfrac{v-2}{3} \cdot B_2 \;, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{v-1} = \dfrac{r-(v-1)\Delta}{r-v} \cdot \dfrac{2}{v-1} \cdot B_{v-2} \;, \\
B_v = \dfrac{r-v\Delta}{r} \cdot \dfrac{1}{v} \cdot B_{v-1} \;.
\end{array}\right\} \ldots\ldots (74)$$