DETERMINANT VAN SYLVESTER

DOOR

G. VAN DER MEY

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE NEDERLANDSCHE
AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN, AFD. NATUURKUNDE

EERSTE SECTIE, DEEL XIX, N°. 3

1949
N.V. NOORD-HOLLANDSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ
AMSTERDAM

Kon. Ned. Ak. Wet., Verh. Afd. Natuurk. Eerste Sectie Dl. XIX No. 3, p. 1—39, 1949

§ 1. *Specialisaties.*

Laten $F, G, H, \ldots$ polynomia in s onbepaalden $x, y, z, u, \ldots$ met complexe coëfficiënten zijn. Een vervanging van r [$\leqq s$] der onbepaalden door complexe waarden heet een *specialisering*. Hierbij gaan $F, G, H, \ldots$ in het geval $r < s$ in polynomia in de overgebleven onbepaalden en in het geval $r = s$ in constanten over. Deze polynomia en constanten heten *specialisaties* van $F, G, H, \ldots$ en zullen met $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \ldots$ worden aangeduid.

Voorbeeld: $x \to \mathbf{x}$, $z \to \mathbf{z}$: $F \to \mathbf{F} \equiv F(\mathbf{x}, y, \mathbf{z}, u, \ldots)$.

Waar in het vervolg letters vet gedrukt zijn ter aanduiding van specialisaties, zijn natuurlijk die specialisaties bedoeld, welke het gevolg van een zo juist toegepaste specialisering zijn. Een specialisatie van een vorm tussen haakjes zal door verdikking van het tweede haakje aangeduid worden.

Voor specialisaties gelden twee hoofdeigenschappen:

1. $(F + G\boldsymbol{)} \equiv \mathbf{F} + \mathbf{G}$, 2. $(F \cdot G\boldsymbol{)} \equiv \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$.

De *hoofdstelling van de algebraische vergelijkingen* luidt, zoals bekend: „Een polynomium $F(x)$ van de graad $n > 0$ bestaat uit n lineaire factoren".

Hieruit volgt door volledige inductie naar het aantal s der onbepaalden: *Heeft een polynomium F „overal" de waarde nul* (d.w.z. voor elk waardenstelsel $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots)$, dat men voor de onbepaalden substitueert), *dan is F identiek nul*: $F \equiv 0$.

Definitie. Zij $H \not\equiv 0$.

Is hetzij $F \equiv 0$, hetzij F met H onderling ondeelbaar, en heeft elk waardenstelsel $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots)$ der variabelen $x, y, z, \ldots$ waarvoor $\mathbf{F} = 0$ is, de eigenschap $\mathbf{G} \cdot \mathbf{H} = 0$, dan zegt men: *„Bijna overal waar F de waarde nul heeft, heeft ook G de waarde nul".*

In het eerste geval, $F \equiv 0$, geldt de

Stelling. *Heeft een polynomium G bijna overal de waarde nul, dan heeft G overal de waarde nul en is identiek nul.*

B e w ij s. Er is een $H \not\equiv 0$ zo, dat voor elk waardenstelsel $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots)$ geldt: $\mathbf{G} \cdot \mathbf{H} = 0$. Volgens het voorafgaande is dan $G \cdot H \equiv 0$, dus $G \equiv 0$ wegens $H \not\equiv 0$.

§ 2. *De Determinant van* SYLVESTER.

$$f \equiv a_0 x^n + \ldots + a_n, \quad g \equiv b_0 x^m + \ldots + b_m. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Als $a_0 = 0$ is, is de graad van het polynomium f kleiner dan n. Dan heet n de *formele graad* van het polynomium f.

De *Determinant van* SYLVESTER of *resultant* der polynomia f, g is, zoals bekend, de determinant R van $m + n$ rijen en kolommen met de volgende elementen:

in de i-de rij $(i = 1, 2, \ldots m)$ van links naar rechts

$(i - 1)$ nullen; $a_0, a_1, \ldots a_n$; $(m - i)$ nullen,

in de $(m + i)$-de rij $(i = 1, 2, \ldots n)$

$(i - 1)$ nullen; $b_0, b_1, \ldots b_m$; $(n - i)$ nullen.

Is bijv. $n = 3$, $m = 2$, dan is

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Soms zullen de eerste m rijen „a-rijen" en de overigen „b-rijen" genoemd worden.

Geeft men aan de coëfficiënten a_i, b_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ het gewicht i, en stelt het gewicht van een product $\Pi\, a_i\, b_j$ gelijk aan de som van de gewichten der factoren, dan heeft, zoals bekend, elke van nul verschillende determinantterm van R het gewicht, $n \cdot m$:

De determinant R is isobaar van het gewicht $n \cdot m$ (Vgl. § 7, (6)).

Twee polynomia f, g in meerdere onbepaalden $x, y, z, \ldots$ kan men in de vorm (1) brengen en vervolgens de determinant R opstellen. Hierbij zijn de coëfficiënten a_i, b_i polynomia in $y, z, \ldots$.

In het geval dat n, m de werkelijke graden in x betekenen, dus $a_0 \not\equiv 0$, $b_0 \not\equiv 0$ is, zal R de *relatieve resultant naar* x heten, geschreven

$$\overline{R}(f, g).$$

Zijn f, g *homogene* vormen van de graden n, m in $x, y, z, \ldots$ tezamen en kiest men deze n, m als formele graden in x van resp. f, g, dan zal R de *absolute resultant naar* x heten, geschreven

$$R(f, g).$$

Is $a_0 = b_0 = 0$, dan is $R(f, g)$ identiek nul in $y, z, \ldots$.

Is

$$a_0 \neq 0,\ b_0 = b_1 = \ldots = b_{l-1} = 0,\ b_l \not\equiv 0,\ (l \geqq 0)$$

dan is, zoals bij ontwikkeling naar de eerste l kolommen blijkt,

$$R(f, g) \equiv a_0^l \cdot \overline{R}(f, g). \qquad (2)$$

Hierin heeft de determinant $\overline{R}$ $(m-l)$ a-rijen en n b-rijen. (Analoog is het bij verwisseling van de rollen van a en b.)

Uit de gewichtseigenschap volgt:

De absolute resultant $R(f, g)$ is homogeen in $y, z, \ldots$ van de graad $n \cdot m$. Voor twee onbepaalden x, y wordt dus

$$R(f, g) \equiv R \cdot y^{nm}, \qquad (3)$$

waarin R een functie van de coëfficiënten is. *In dit geval noemt men R de resultant van de homogene vormen $f(x, y)$, $g(x, y)$.*

Stelling 1. *Twee polynomia f, g hebben een in x niet-constante G.G.D. D dan en slechts dan, als de relatieve resultant $\overline{R}(f, g)$ identiek nul in $y, z, \ldots$ is.*

Zijn nl. $n > 0$, $m > 0$ de graden van f, g in x, dan komt x in het polynomium D voor, dan en slechts dan, als er twee polynomia

$$f' \equiv d_0 x^{n'} + \ldots + d_{n'}, \quad g' \equiv c_0 x^{m'} + \ldots + c_{m'}$$

$$(n' < n, \ m' < m; \ c_i, d_i \text{ polynomia in } y, z, \ldots)$$

zijn, waarvoor geldt:

$$fg' + gf' \equiv 0$$

en hiervoor is nodig en voldoende, dat $\overline{R}(f, g) \equiv 0$ is.

(Is M_p $(p \geqq 0)$ de matrix, die uit $\overline{R}(f, g)$ door weglating van de onderste p a-rijen en de onderste p b-rijen ontstaat, en is q het grootste getal, waarvoor de matrix M_q niet de rang $m + n - 2q$ heeft, dan heeft de G.G.D. D in x de graad $q + 1$ en is uit M_q berekenbaar.)

Uit (2), (3) en stelling 1 volgt:

Stelling 2. *Twee homogene vormen $f(x, y)$, $g(x, y)$ hebben een niet-constante G.G.D. $D(x, y)$ dan en slechts dan, als hun resultant R gelijk aan nul is.*

Stelling 3. *Zijn $F \not\equiv 0$, $G \not\equiv 0$ polynomia in $x, y, z, \ldots$ en heeft bijna overal waar F de waarde nul heeft, G eveneens de waarde nul, (§ 1), dan komen alle irreducibele factoren f van F in G als factoren voor.* (Mogen in het ondersteide F en G met elkaar verwisseld worden, dan bestaan dus F en G uit dezelfde irreducibele factoren, hoogstens met andere veelvuldigheden.)

B e w ij s. f zij een irreducibele factor van F. Er is een met f onderling ondeelbaar polynomium $H \not\equiv 0$ zo, dat de vergelijking
$f = 0$ tot gevolg heeft: $G \cdot H = 0$. Zij
$g \equiv G \cdot H$.

Minstens één onbepaalde komt in f en in g beiden voor (want in een geval als $f(x)$, $g(y, z, \ldots)$ is de vergelijking $g = 0$ niet het gevolg van $f = 0$).

Men kan aannemen, dat dit x is.

Laten weer n, m de graden van f, g in x zijn (Vgl. (1)) en zij

$$h(y, z, \ldots) \equiv a_0 \cdot b_0.$$

Men kieze waarden $(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots)$ zo, dat hiervoor $\mathbf{h} \neq 0$ is.

Dan hebben de specialisaties $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ in x de graden n, m en is

$$\overline{\mathbf{R}}(f, g) = R(\mathbf{f}, \mathbf{g}).$$

Elk nulpunt $\mathbf{x}$ van $\mathbf{f}$ is ook een nulpunt van $\mathbf{g}$. $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$ zijn dus onderling deelbaar. Er blijkt dus:

Voor elk waardenstelsel $(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots)$, waarvoor slechts $\mathbf{h} \neq 0$ is, is $\overline{\mathbf{R}}(f, g) = 0$.

Uit de stelling van § 1 volgt dan, dat $\overline{R}(f, g) \equiv 0$ is.

Volgens de bovenstaande stelling 1 is dan het (irreducibele) polynomium f een factor van g. Daar de G.G.D. $(f, H) = 1$ is, is f een factor van G, q.e.d.

§ 3. *De Stelling van* BEZOUT.

Van nu af zal

$$x = x_1,\ y = x_2,\ z = x_3$$

geschreven en de polynomia (1) van § 2 als *onderling ondeelbare, homogene vormen in* x_1, x_2, x_3 *van de graden* n, m ondersteld worden.

De relatieve resultant $\overline{R}(f, g)$ naar x_1 is dus niet identiek nul.

De absolute resultant $R(f, g)$ is
in het geval $a_0 = b_0 = 0$ identiek nul,
anders homogeen van de graad $n \cdot m$ in x_2, x_3.

Een greep van drie getallen

$$P = (\varrho\mathbf{x}_1,\ \varrho\mathbf{x}_2,\ \varrho\mathbf{x}_3)$$

waarin $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \neq (0, 0, 0)$ is en het op de factor $\varrho \neq 0$ verder niet aankomt, noemt men een
„punt van het projectieve vlak". Bijv. is

$$O_1 = (1, 0, 0)$$

het eerste hoekpunt van de coördinatendriehoek $\triangle$.

De puntverzameling in het projectieve vlak, die door de vergelijking $f = 0$ bepaald wordt, noemt men een „algebraische kromme van de graad n" en in het geval $n = 1$ ook een „rechte".

Is het bovenstaande punt P een „snijpunt van de (algebraische) krommen $f = 0,\ g = 0$", dan is hiervoor met de schrijfwijze van § 1 $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{g} = 0$.

Voor waarden $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \neq (0, 0)$ is

$$\mathbf{R}(f, g) = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

dan en slechts dan, als op de rechte

$$L \equiv \mathbf{x}_3 x_2 - \mathbf{x}_2 x_3 = 0$$

een snijpunt P van de krommen $f = 0,\ g = 0$ ligt.

B e w ij s. De specialisaties $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ zijn polynomia in x_1. Men heeft de volgende gevallen:

$a_0 = b_0 = 0$. Dan is $R(f, g) = 0$ en voldoet $P = O_1$.

$a_0 \neq 0$, $\mathbf{g} \equiv 0$ in x_1. Dan is $\mathbf{R}(f, g) \equiv 0$ wegens zijn b-rijen.
Daar hier L een factor van g is, voldoet P = snijpunt van $f = 0$ met $L = 0$.

$a_0 \neq 0$, $\mathbf{g} \not\equiv 0$. Met gepaste l is $\mathbf{R}(f, g) = a_0^l \cdot R(\mathbf{f}, \mathbf{g})$.
Dit is $= 0$ dan en slechts dan, als er een $\mathbf{x}_1$ is zo, dat
$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) = 0$ is. Dan voldoet $P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$.
In de laatste twee gevallen kunnen natuurlijk de rollen van f en g verwisseld worden. Hiermee is (1) bewezen.

Verder is voor elk snijpunt P der beide krommen $\overline{\mathbf{R}}(f, g) = 0$. Daar de relatieve resultant $\overline{R}(f, g)$ uit een eindig aantal lineaire factoren L bestaat en elke rechte $L = 0$ hetzij met $f = 0$, hetzij met $g = 0$, slechts eindig veel snijpunten heeft (daar de $G \cdot G \cdot D.$ $(f, g) = 1$ is), blijkt:

De krommen $f = 0$, $g = 0$ hebben slechts eindig veel snijpunten

$$P_r = (p_{r1}, p_{r2}, p_{r3}) \quad (r = 1, 2, \ldots, h).$$

Bij elk tweetal coördinatendriehoeken $\triangle$, $\triangle'$ behoort een stelsel transformatieformules

$$\varrho\, x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} X_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

(de determinant

$$D = |\, a_{ij} \,|$$

is van nul verschillend; de factor $\varrho \neq 0$ mag men willekeurig kiezen) met de volgende eigenschap:

Is P een willekeurig punt van het vlak, (x_i) de coördinaten van P t.o.v. $\triangle$, dan zijn de door (2) gegeven (X_i) de coördinaten van P t.o.v. $\triangle'$. Heeft men een driehoek $\triangle$, dan geeft omgekeerd elk stelsel (2) de overgang van $\triangle$ op een bepaalde driehoek $\triangle'$.

De inverse transformatie van (2) is:

$$\sigma\, X_i = \Sigma_j\, A_{ij}\, x_j \quad \left(\sigma = \frac{D}{\varrho}\right);$$

Hierbij is A_{ij} de cofactor van a_{ji} in de determinant D.
Kortheidshalve zal in het vervolg $\varrho = 1$ genomen worden.

Bij de substitutie van (2) gaat

$$f(x) \to F(X),\ g(x) \to G(X)$$

over. Per definitie is

$$R(F, G)$$

de absolute resultant van de vormen F, G naar X_1. Deze is homogeen van de graad $n \cdot m$ in X_2, X_3.

De X-coördinaten van de punten P_r zijn:

$$P_{ri} = \Sigma_j\, A_{ij}\, p_{rj}.$$

Thans zullen a_{ij} onbepaalden zijn. Men noemt (2) dan een „algemene transformatie". De vormen P_{ri}, F, G, $R(F, G)$ hebben in de onbepaalden a_{ij} de graden resp. 2, n, m, $2nm$.

Er geldt de volgende identiteit:

$$\left.\begin{aligned} R(F, G) &\equiv C \cdot \prod_{r=1}^{h} (P_{r3} X_2 - P_{r2} X_3)^{\mu_r} \equiv \\ &\equiv C \cdot \Pi_r \{(\Sigma_j A_{3j} p_{rj}) X_2 - (\Sigma_j A_{2j} p_{rj}) X_3\}^{\mu_r} \quad (C \neq 0 \text{ const.}) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (3)$$

B e w ij s. Elke specialisatie $\mathbf{a}_{ij}$ van a_{ij}, waarvoor de determinant $\mathbf{D} \neq 0$ is, geeft de overgang van $\triangle$ op een coördinatendriehoek $\triangle'$.

De beide krommen hebben op $\triangle'$ de vergelijkingen $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{G} = 0$; waar $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ de specialisaties van F, G zijn.
$\mathbf{P}_{ri}$ zijn de coördinaten der punten P_r op $\triangle'$.

$$\mathbf{R}(F, G) \equiv R(\mathbf{F}, \mathbf{G})$$

is de resultant der vormen $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ naar X_1. Dan nemen volgens (1) de vormen

$$D \cdot R(F, G) \text{ en } D\,\Pi_r (P_{r3} X_2 - P_{r2} X_3)$$

tegelijk de waarde nul aan voor waarden $\mathbf{a}_{ij}$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$.
Ze bestaan dus volgens § 2, stelling 3 uit dezelfde irreducibele factoren.
(3) is dus juist, afgezien van een factor D^q ($q \gtreqless 0$) in het eerste lid.
Het tweede lid van (3) heeft in P de graad $n \cdot m$, nl. dezelfde graad in P als het eerste lid in X. Het tweede lid van (3) heeft dus in a_{ij} de graad $2nm$, evenals het eerste lid.
Derhalve is $q = 0$ en de identiteit (3) bewezen.

De exponent μ_r in (3) *heet de „multipliciteit van het snijpunt P_r van de krommen $f = 0$, $g = 0$".* Hiervoor geldt de

Stelling van BEZOUT:

$$\sum_{r=1}^{h} \mu_r = n \cdot m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

als direct gevolg van (3).

Als het hoekpunt O_1' van een coördinatendriehoek $\triangle'$ niet met een punt P_r samenvalt, dus hoogstens op één van de krommen $f = 0$ of $g = 0$ ligt, is de desbetreffende resultant $R(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \not\equiv 0$). Is dan L een lineaire factor hiervan met de veelvuldigheid v, dan is, zoals direct door specialisering uit het tweede lid van (3) volgt,

$$v = \Sigma' \mu_r, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

gesommeerd over de indices r, van de punten P_r op de rechte $L = 0$.

Kiest men O_1' buiten de verbindingslijnen van de punten P_r twee aan twee, dan zijn dus de getallen μ_r geheel bepaald als de veelvuldigheden der lineaire factoren van $R(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. Zij zijn dus onafhankelijk van de coördinatendriehoek $\triangle$, waarvan in (3) werd uitgegaan. Men drukt dit als volgt uit:

De multipliciteit μ van een snijpunt P der krommen $f = 0$, $g = 0$ is een „projectieve invariant".

§ 4. *Het snijden met een rechte.*

Een rechte $g = 0$ door twee punten P (p_i), Q (q_i) (i staat hier voor de indices 1, 2, 3) heeft tot parametervoorstelling

$$x_i = sp_i + tq_i.$$

De parameter (s, t) van de snijpunten van $g = 0$ met een kromme $f = 0$ berekent men uit de vergelijking

$$f(sp_i + tq_i) = 0.$$

Is het niet identiek nul in s, t, dan komt er:

$$f(sp_i + tq_i) \equiv \prod_{r=1}^{h} (st_r - ts_r)^{\mu_r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Stelling. *De exponent μ_r in (1) is gelijk aan de multipliciteit van het door (s_r, t_r) bepaalde snijpunt van $f = 0$, $g = 0$.*

B e w ij s. Bij de transformatie (2) van § 3 ging

$f \rightarrow F(X_i) \equiv f(\Sigma_j a_{ij} X_j)$. Is verder $p_i = \Sigma a_{ij} P_j$, $q_i = \Sigma a_{ij} Q_j$

dan blijkt direct door invulling:

$$f(sp_i + tq_i) \equiv F(sP_i + tQ_i) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Bij ontbinding van het tweede lid van (2) en vergelijking met (1) blijkt, dat μ_r projectief invariant is. Men mag dus aannemen, dat

$$P = (0, 1, 0), \; Q = (0, 0, 1)$$

is. Dan wordt de parametervoorstelling van de rechte $g = 0$:

$$x_1 = 0, \; x_2 = s, \; x_3 = t.$$

Met § 2, (1) wordt het eerste lid van (1):

$$f(0, s, t) \equiv a_n(s, t).$$

Voor de resultant vindt men dan bij ontwikkeling naar de eerste rij:

$$R(f, x_1) \equiv (-1)^n \cdot a_n(s, t).$$

Uit deze beiden volgt het beweerde.

Bij ontwikkeling van de leden van (2) naar t komt er:

$$f(sp_i + tq_i) \equiv \sum_{j=0}^{n} f_j(p_i, q_i) \cdot s^{n-j} t^j \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

en analoog voor F. Hierin mogen p_i, q_i onbepaalden zijn.
f_j noemt men de *„j-de poolvorm van de vorm $f(p_i)$ t.o.v. het punt (q_i)"*.
f_j $(j = 0, 1, \ldots n)$ is met f *projectief covariant*, heeft in p_i de graad $n - j$, in q_i de graad j en er geldt:

$$f_j(p_i, q_i) \equiv f_{n-j}(q_i, p_i).$$

Is Q een vast punt, dan heet de kromme

$$f_j(x_i, q_i) \; [= f_j(x, Q)] = 0$$

de „j-de poolkromme van de kromme $f = 0$ t.o.v. het punt Q". Bijv. is

$$f_1(x, Q) \equiv \Sigma_j q_j f'_{x_j} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

de eerste poolkromme t.o.v. het punt Q.

Definitie 1. Een punt P heet een *k-voudig punt* van de kromme $f = 0$, als elke rechte Pq, die geen bestanddeel van de kromme is, deze in P met een multipliciteit $\mu \geqq k$ snijdt en niet voor elke rechte Pq $\mu > k$ is.
In (3) komt dan de factor t^k voor onafhankelijk van de keuze van het punt Q. Dan is

$$f_j(p_i, x_i) \equiv 0 \text{ in } x \ (j < k), \quad f_k(p_i, x_i) \not\equiv 0.$$

Definitie 2.
Elke rechte Pq, die hetzij een bestanddeel van de kromme $f = 0$ is, hetzij de kromme in het k-voudig punt P hiervan met een multipliciteit $\mu > k$ snijdt, heet een *raaklijn van de kromme in het punt P*.
PQ is een raaklijn in het k-voudig punt P, dan en slechts dan, als

$$f_k(P, Q) = 0$$

is. Hieruit volgt tevens, dat de poolkromme $f_k(P, x) = 0$ uit de s $[\leqq k]$ raaklijnen $L_j = 0$ van de kromme $f = 0$ in P bestaat:

$$f_k(p_i, x_i) \equiv \prod_{j=1}^{s} L_j^{v_j} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

v_j zal het veelvoud van de raaklijn $L_j = 0$ in het punt P heten. v_j is projectief invariant, want de vorm f_k is een covariant.
Is speciaal

$$O_1 = (1, 0, 0)$$

een k-voudig punt der kromme, dan is wegens

$$f_j(O_1, x_i) \equiv f_{n-j}(x_i, O_1) \equiv \frac{1}{(n-j)!} \cdot \frac{\partial^{n-j} f}{\partial x_1^{n-j}} \equiv a_j$$

$a_j \equiv 0$ $(j < k)$, dus

$$f \equiv a_k x_1^{n-k} + \ldots + a_n, \quad a_k \equiv f_k(O_1, x). \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

§ 5. *Ontbinding van resultanten. Reducibele krommen.*

Het polynomium $f(x)$ (§ 2, (1)) heet „algemeen", als de graad $n > 0$ is en de coëfficiënten a_i onbepaalden zijn.

Stelling 1. *Voor algemene $f(x)$, $g(x)$ is $R(f, g)$ irreducibel.*
Bewijs. Volledige inductie naar het minimum $M(n, m)$.
$M = 1$. Zij bijv. $m = 1$. Voor de resultant komt er bij ontwikkeling naar de eerste rij:

$$R(f, g) \equiv \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot a_j \cdot b_0^j \, b_1^{n-j}$$

en dat is irreducibel.
Laat dus $M > 1$ en de stelling voor het getal $M - 1$ bewezen zijn.
Was de stelling voor het getal M onjuist, dan bestond er een ontbinding

$$R(f, g) \equiv R_1 \cdot R_2.$$

Bij de specialisering $b_0 \to 0$ gaat

$$g \to \mathbf{g} \text{ (van de graad } m-1). \; R_1 \cdot R_2 \to \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \equiv a_0 \cdot R(f, \mathbf{g}).$$

Hierin is $R(f, \mathbf{g})$ irreducibel volgens veronderstelling. De ontbinding van een vorm in irreducibele factoren is, afgezien van de volgorde (en op constante factoren na) eenduidig. Dan is dus bijv.

$$\mathbf{R}_1 \equiv R(f, \mathbf{g}), \; \mathbf{R}_2 \equiv a_0.$$

De homogene vorm R_i $(i = 1, 2)$ heeft in a, b dezelfde graden als zijn specialisatie $\mathbf{R}_i$. Dan heeft

$$R_1 \text{ de graden } (m-1, n), \; R_2 \text{ de graden } (1, 0) \text{ in } a, b.$$

Bij de specialisering $a_0 \to 0$ vindt men evenzo voor $R_1 \cdot R_2$ de graadparen $(m, n-1)$, $(0, 1)$.
Daar $(1, 0) \neq (0, 1)$ is, moet $(1, 0) = (m, n-1)$, $m = n = 1$, $M = 1$ zijn, in strijd met $M > 1$. Dus is $R(f, g)$ irreducibel, q.e.d.

Is

$$h \equiv c_0 x^p + \ldots + c_p$$

een derde algemeen polynomium, dan geldt:

$$R(f, g \cdot h) \equiv R(f, g) \cdot R(f, h). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

B e w ij s. Volgens stelling 1 zijn de factoren van het tweede lid irreducibel. Als voor waarden $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0 \neq 0$

$$\mathbf{R}(f, g) \; [= R(\mathbf{f}, \mathbf{g})] = 0$$

is, hebben de polynomia $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ een niet-constante *G.G.D.* en is dus $\mathbf{R}(f, g \cdot h) = 0$. Volgens stelling 3 van § 2 is dan $R(f, g)$ (en eveneens $R(f, h)$) een factor van $R(f, g \cdot h)$. Wegens de graden geldt dus (1), als men een gepaste constante factor C aan het tweede lid toevoegt. De beschouwing van de hoofdtermen der drie determinanten leert echter, dat $C = 1$ is. Hiermee is (1) bewezen.

In het geval, dat

$$m = n + p$$

is, bestaat de identiteit

$$R(f, h \cdot f + g) \equiv R(f, g). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

B e w ij s. Stelt men ter afkorting

$$f \cdot h = u \equiv d_0 x^m + \ldots + d_m,$$

dan is volgens (1)

$$R(f, u + g) \cdot R(h, u + g) \equiv R(u, u + g).$$

Trekt men in de determinant $R(u, u + g)$ de i-de rij $(i = 1, 2, \ldots m)$ van de $(m + i)$-de rij af, dan komt er:

$$R(u, u + g) \equiv R(u, g),$$

dus
$$R(f, u+g)R(h, u+g) \equiv R(f, g)R(h, g).$$
De factoren van het tweede lid zijn irreducibel en moeten dus in de een of andere volgorde aan de factoren van het eerste lid gelijk zijn.
Daar nu bij de specialisering $h \to 0$
$$R(f, u+g) \to R(f, g), \text{ echter } R(h, u+g) \to 0$$
overgaat, wordt de enige mogelijkheid door (2) gegeven.

De formules (1), (2) blijven juist, als men de onbepaalde coëfficiënten a_i, b_l, c_i door complexe getallen of door polynomia in variabelen $y, z, \ldots$ met complexe coëfficiënten vervangt, want ook in het laatste geval gelden de in § 1 voor specialisaties genoemde hoofdregels.

Voor de polynomia in x
$$f \equiv \prod_{i=1}^{q} f_i, \quad g \equiv \prod_{j=1}^{s} g_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
leidt men nu uit (1) door volledige inductie naar het aantal der factoren af:
$$R(f, g) \equiv \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{s} R(f_i, g_j). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
Voor § 6 is van belang:

Stelling 2. *Voor twee homogene vormen*
$$f \equiv a_k x_1^{n-k} + \ldots + a_n, \quad g \equiv b_l x_1^{m-l} + \ldots + b_m \quad (k < n, l < m) \quad . \quad (5)$$
in x_1, x_2, x_3 met onbepaalde coëfficiënten a, b is de relatieve resultant $\overline{R}(f, g)$ irreducibel.

B e w ij s. Bij de specialisering
$$x_2 \to 1, \quad x_3 \to 0$$
gaat $f \to \mathbf{f}$, $g \to \mathbf{g}$ over, waar $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ algemene polynomia van de graden $n-k$ en $m-l$ in x_1 zijn. Hierbij is
$$\overline{\mathbf{R}}(f, g) \equiv R(\mathbf{f}, \mathbf{g}).$$
$R(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ is irreducibel volgens stelling 1. Was
$$\overline{R}(f, g) \equiv R_1 \cdot R_2$$
reducibel, dan zou, zoals op analoge wijze als bij stelling 1 blijkt, één factor R_i de graad nul in a, b hebben. Laat dit $R_2(x_2, x_3)$ zijn. Men specialiseert nu
$$x_2 \to \mathbf{x}_2, \quad x_3 \to \mathbf{x}_3$$
zo, dat $\mathbf{R}_2 = 0$ dus $\overline{\mathbf{R}}(f, g) = 0$ is. Dat kan. Daar $\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_l \not\equiv 0$ in A, B is, hebben $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ een in x_1 niet-constante *G.G.D.* $D(x_1)$. Als factor van g, f kan D geen parameters a, b bevatten. Voor elk nulpunt $\mathbf{x}_1$ van D

zou nu $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = 0$ een betrekking tussen de parameters a van de vorm f zijn. $R(f, g)$ kan dus niet reducibel zijn, q.e.d.

Laten thans $f = 0$, $g = 0$ twee krommen met de bestanddelen (3) zijn. Elk punt P, dat niet op beide krommen $f = 0$, $g = 0$ ligt, zal een *Snijpunt van de multipliciteit nul* genoemd worden

$$\mu_P(f, g) = 0.$$

Analoog is voor elk punt P van het vlak $\mu_P\,(f_i, g_j) \geqq 0$ gedefiniëerd. Uit (4) volgt dan:

$$\mu\,(f, g) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} \mu\,(f_i, g_j) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

voor elk snijpunt P van $f = 0$ en $g = 0$.

Toepassingen van (1) en (2).

1. Is $sf + tg = 0$ een bundel van de graad n met slechts eindig veel basispunten (de G.G.D. $(f, g) = 1$), dan snijden de krommen van de bundel twee aan twee elkaar in een basispunt P met dezelfde multipliciteit μ_P want $(s \neq 0)$

$$f_1 \equiv sf + tg, \qquad g_1 \equiv s' f_1 + t' g,$$

$$R\,f_1, g_1) \equiv R\left(f_i, \frac{s' f_1 + (st' - ts')\,g}{s}\right) \equiv (st' - ts')^n \cdot R\,(f, g).$$

2. Men kan een snijpunt van de multipliciteit μ voor μ éénvoudige snijpunten tellen. Zo bezien, worden de snijpunten van een kromme $f = 0$ met een kromme

$$F \equiv Af + Bg = 0$$

gevormd door de snijpunten met $g = 0$ en die met $B = 0$.

Uit de bekende identiteit

$$R(f, g) \equiv Af + Bg$$

volgt:

$$R\,(f, B) \equiv a_0^{mn}\,R\,(f, g)^{n-1},$$

nl. $R(f, g)\ R(f, B) \equiv R(f, R(f, g)) \equiv a_0^{nm} R(f, g)^n$.
Dan liggen in elk snijpunt van $f = 0$ met $g = 0$ $n - 1$ snijpunten van $f = 0$ met $B = 0$.

3. Is

$$m \geqq n$$

en heeft de vorm f in x_1 de hoogste graad n en deelt men g door f met rest:

$$g \equiv qf + g',$$

waarin g' de graad $m' < n$ in x_1 heeft, dan is

$$R\,(f, g) \equiv a_0^{m-m'}\,\overline{R}\,(f, g').$$

Dat is een determinant van slechts $n + m'$ rijen en kolommen.

§ 6. *De relatieve resultant bij de bepaling van multipliciteiten.*

Laat het hoekpunt O_1 een k-voudig punt van de kromme $f = 0$ en een l-voudig punt van $g = 0$ zijn. Dan hebben de vormen f en g een gedaante zoals in § 5, (5). $P_2, \ldots P_h$ zullen de van O_1 verschillende snijpunten der krommen zijn.

Als men de algemene transformatie § 3, (2) specialiseert tot

$$x_1 = X_1,\ x_2 = X_2,\ x_3 = -uX_1 + X_3 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

waar u een onbepaalde is en gemakshalve $\varrho = 1$ gezet is, gaat de identiteit § 3, (3) over in

$$R(F, G) \equiv (uX_2)^{\mu} \times \prod_{r=2}^{h} \{(up_{r1} + p_{r3}) X_2 - p_{r2} X_3\}^{\mu_r}. \quad . \quad (2)$$

Hierbij is $C = 1$ aangenomen en er zijn geen letters vet gedrukt om aan te duiden, dat het een specialisatie van de identiteit § 3, (3) is. *μ is hier de multipliciteit van het snijpunt O_1.*

Bij ontwikkeling naar (uX_2) neemt (2) de volgende vorm aan:

$$R(F, G) \equiv R_{\mu}(X_2, X_3)(uX_2)^{\mu} + \ldots + R_{mn} \cdot (uX_2)^{mn}. \quad . \quad . \quad (3)$$

$S = S(f, g)$ is per definitie de vorm, waarin R d.w.z. R_{μ}, de eerste van nul verschillende coëfficiënt in (3), overgaat, als men zet:

$$X_2 = x_2,\ \ X_3 = x_3.$$

Dan heeft S in x_2, x_3 de graad $nm - \mu$ en is in het geval $\mu = 0$ gelijk aan de absolute resultant $R(f, g)$ naar x_1. Er geldt:

$$S(f, g \cdot h) \equiv S(f, g) \cdot S(f, h) \quad \ldots\ldots \quad (4a)$$

(als h een derde vorm betekent).

Als men (2) en (3) door $(uX_2)^{\mu}$ deelt en dan $u = 0$ zet, vindt men:

$$S \equiv \prod_{r=2}^{h} (p_{r3} x_2 - p_{r3} x_3)^{\mu_r} \quad \ldots\ldots \quad (4b)$$

Elke factor

$$L \equiv dx_2 - cx_3$$

van S heeft dus de veelvuldigheid

$$v = \Sigma' \mu_r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4c)$$

gesommeerd over de, van O_1 verschillende, op de rechte $L = 0$ gelegen, snijpunten P_r der krommen $f = 0$, $g = 0$.

Een „lineaire schaar" $f = 0$ is de verzameling van al die krommen $\mathbf{f} = 0$ van een gegeven graad n, waarvan de vergelijkingscoëfficiënten (de coëfficiënten van $\mathbf{f}$) aan een gegeven stelsel van homogene en lineaire betrekkingen voldoen. De vorm f is dan homogeen en lineair in een aantal parameters a. Elk stelsel waarden $\mathbf{a}$ van de parameters a levert een kromme $\mathbf{f} = 0$ van de schaar en elke kromme van de schaar kan op deze wijze verkregen worden.

Thans zullen de vormen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ *van* § 5, (5) *schaarvormen zijn met parameters resp.* **a** *en* **b**. De krommen $\mathfrak{f} = 0$, $\mathfrak{g} = 0$ der beide scharen hebben dan o.a. de eigenschap, in het punt O_1 een minstens k-voudig punt resp. een minstens l-voudig punt te bezitten.

Zijn twee specialisaties $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ onderling ondeelbaar, dan heeft het snijpunt O_1 der beide krommen $\mathfrak{f} = 0$, $\mathfrak{g} = 0$ een welgedefinierde multipliciteit $\mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) > 0$.

$$\mu = \mu(f, g)$$

zij het kleinste van al deze getallen $\mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$. Dan is dus

$$0 < \mu(f, g) \leqq \mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Voor de beide schaarvormen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ *geldt de identiteit* (3) *met* $\mu = \mu(f, g)$. De vorm S bevat hier parameters a, b. *Voor elke specialisatie* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, *waarvoor* $\mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \mu(f, g)$ *is, geldt*

$$\mathbf{S}(f, g) \equiv S(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \cdot [\not\equiv 0],$$

voor elke andere specialisatie $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *is*

$$\mathbf{S}(f, g) \equiv 0.$$

B e w ij s. Zij

$$\alpha(a, b)\, u^p X_2^q X_3^{mn-q}$$

een term van $R(F, G)$, waarvoor $q < p$ is, of $p < \mu(f, g)$.
In beide gevallen is $\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ voor elke specialisatie, want voor $R(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ $[\equiv \mathbf{R}(F, G)]$ is (3) al bewezen. Dan is dus volgens de stelling van § 1 $\alpha(a, b) \equiv 0$. Daar minstens één $\mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \mu(f, g)$ is, is niet $R_\mu \equiv 0$. Dus is $S \not\equiv 0$.

In het geval $k = n$ bestaat elke kromme $\mathfrak{f} = 0$ uit tenhoogste n rechten door het punt O_1 en volgt $\mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$ uit § 4 en § 5.
Het geval $l = m$ is analoog. Men mag dus wel aannemen:

$$k < n, \; l < m.$$

Thans zullen nog slechts scharen van het volgende type beschouwd worden:
Met de vormen

$$L_j \equiv d_j x_2 - c_j x_3 \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

de niet-negatieve gehele getallen

$$v'_{ij} \; (k \leqq i \leqq n), \; v''_{ij} \; (l \leqq i \leqq m)$$

$$\left[\sum_{j=1}^{s} v'_{ij} \leqq i, \; \sum_{j=1}^{s} v''_{ij} \leqq i, \; v'_{nj} = v''_{mj} = 0\right]$$

stelt men

$$a_i \equiv \alpha_i(x_2, x_3) \prod_{j=1}^{s} L_j^{v'_{ij}}, \; b_i \equiv \beta_i \prod_{j=1}^{s} L_j^{v''_{ij}}.$$

Dan zullen de coëfficiënten a *van de vormen* α_i en b van β_i *de schaarparameters van* $\mathfrak{f}$ *resp.* $\mathfrak{g}$ *zijn.* Bijv. zijn a_n, b_m algemene vormen.

Is $v'_{kj} > 0$, dan is $L_j = 0$ een raaklijn in O_1 van al die krommen $\mathfrak{f} = 0$, van de schaar $f = 0$, welke in O_1 een slechts *k-voudig* punt hebben. (Vgl. einde § 4.)
Is bovendien $v''_{lj} > 0$, dan is L_j een factor van de relatieve resultant $\overline{R}(f, g)$, zoals men aan de eerste kolom hiervan ziet.
Men kan schrijven:

$$\overline{R}(f, g) \equiv \dot{R} \times \prod_{j=1}^{s} L_j^{o_j}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

waarin L_j met $\dot{R}$ onderling ondeelbaar is, en $o_j \geqq 0$ is.

De vorm $\dot{R}$ is irreducibel.
Is nl. $s = 0$, dan is $\dot{R} \equiv \overline{R}(f, g)$ en is volgens § 5, stelling 2 irreducibel. Is $s > 0$, dan verandert het bewijs van de irreducibiliteit van $\dot{R}$ niet wezenlijk.

Stelling 1. *Voor de door* (6) *bepaalde lineaire scharen is*

$$S \equiv \gamma(a, b)\, \dot{R}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

$$\mu(f, g) = kl + \sum_{j=1}^{s} o_j. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8a)$$

(Voor o_j zie men (7)).
Is voor een specialisatie $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ de *G.G.D.* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = 1$ en $\gamma \neq 0$ dan is $\mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = kl + \Sigma o_j$ en de veelvuldigheid v van elke lineaire factor L van $\dot{\mathbf{R}}$ door (4c) gegeven. Is echter $\gamma = 0$, dan is $\mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) > kl + \Sigma o_j$.

B e w ij s. Is

$$d = \Sigma o_j$$

dan heeft men voor de graden de volgende tabel:

$$\left.\begin{array}{llll} & \text{in } x & \text{in } a & \text{in } b \\ \overline{R}(f, g) & nm - kl & m - l & n - k \\ \dot{R} & nm - kl - d & m - l & n - k \\ R(F, G) & nm & m & n \\ S & nm - \mu & m & n \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

Bij de specialisering

$$f \to \mathfrak{f} \equiv a_k \cdot (x_1^{n-k} + x_2^{n-k})$$

is

$$\mu(f, g) \leqq \mu(\mathfrak{f}, g) \leqq km \leqq nm,$$

zoals uit § 4 en § 5 volgt. Dan is dus

$$nm - \mu > 0.$$

$U(a, b)$ zij het product van de coëfficiënten der vorm $S\,(x_2, x_3)$. Dan is de vergelijking

$$U(a, b) \cdot \overline{R}(f, g) = 0$$

in a, b, x een gevolg van de vergelijking $S = 0$.

Is nl. $\mathbf{U} \neq 0$ voor parameterwaarden **a**, **b**, dan is $\mathbf{S} \not\equiv 0$ en wel van positieve graad $nm - \mu$. Voor twee waarden

$$x_2 = c, \quad x_3 = d,$$

waarvoor $\mathbf{S}(c, d) = 0$ is, hebben de krommen $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{g} = 0$ wegens (4c) een snijpunt (a, c, d). Dan is inderdaad

$$\overline{\mathbf{R}}(f, g)_{(c,d)} = 0.$$

Uit § 2, stelling 3 volgt dan, dat elke in x niet-constante irreducibele factor van de vorm S ook een factor van $\overline{R}(f, g)$ is.
De vormen L_j uit (6) zijn geen factoren van S, want de polynomia

$$f(x_1, c_j, d_j), \; g(x_1, c_j, d_j) \quad (1 \leqq j \leqq s)$$

bevatten parameters a, b zodanig, dat zij onderling ondeelbaar zijn.
Uit $\overline{R}(f, g)$ komt dus (Vgl. (7)) alleen $\dot{R}$ als in x niet-constante, irreducibele factor van de vorm S in aanmerking:

$$S \equiv \gamma\,(a, b)\, \dot{R}^e \quad (e \geqq 1).$$

Wegens (9) heeft de hierin voorkomende vorm γ de volgende graden: in a: $m - e(m - l) \leqq m - m + l = l < m$, in b: $n - e(n - k) < n$. De volgens § 5, stelling 1, irreducibele vorm $R(a_n, b_m)$, welke de graden m, n heeft, is dus geen factor van de vorm γ.

Dat de exponent

$$e = 1$$

is, ziet men gemakkelijk volgens een idee van prof. dr J. HAANTJES: Men specialisere

$$a_n \to \mathbf{a}_n, \quad b_m \to \mathbf{b}_m$$

zo, dat

$$R(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_m) = 0,$$

echter
$\gamma \neq 0$, $\mathbf{b}_m(c_j, d_j) \neq 0$ $(1 \leqq j \leqq s)$ en de discriminant $D(\mathbf{b}_m) \neq 0$ is.
De vormen $\mathbf{a}_n$ en $\mathbf{b}_m$ hebben dus een factor

$$L \equiv dx_2 - cx_3,$$

die een éénvoudige factor van $\mathbf{b}_m$ is. Nu is
$\dot{\mathbf{R}} \not\equiv 0$, want de $G.G.D.$ $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = 1$ wegens $(\mathbf{f}, \mathbf{b}_m) = 1$ (specialisatie); verder was $\gamma \neq 0$. Dan is

$$\mathbf{S}(f, g) \equiv S(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \; [\not\equiv 0].$$

De polynomia $f(x_1, c, d)$ en $g(x_1, c, d)$ hebben slechts de factor x_1 gemeen. Op de rechte $L = 0$ nemen de vormen $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ dus slechts in het punt O_1 en in het punt

$$P = (0, c, d)$$

tegelijk de waarde nul aan. Dan heeft de vorm $S(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ de factor L met een veelvuldigheid $\mu' > 0$ en is wegens het bovenstaande $\mu' = p \cdot e$ (p natuurlijk getal), dus $\mu' \geqq e$.

Nu specialiseert men

$$\mathbf{g} \to \mathbf{b}_m$$

De kromme $\mathbf{b}_m = 0$ bestaat uit een aantal rechten door het punt O_1, hieronder het éénvoudig bestanddeel $L = 0$ door het punt P. Zij μ'' de multipliciteit van P als snijpunt van $\mathbf{b}_m \equiv \mathbf{g} = 0$ met $\mathbf{f} = 0$. Dan is $\mu'' \geqq \mu'$. (Om dit te zien, moet men een ander hoekpunt O_1 nemen.) Nu is μ'' volgens § 4 de veelvuldigheid van de factor s in

$$\mathbf{f}(s, sc, td) \equiv \ldots . + a_{n-1}(c, d)\, st^{n-1}$$

De opgeschreven term hiervan is niet nul. Dus is

$$\mu'' = 1,\ 1 \geqq \mu' \geqq e > 0,\ e = 1, \text{ q.e.d.}$$

Uit (8) en (9) volgt dan (8a).

Ook ziet men, dat de vorm γ in de parameters a de graad l en in b de graad k heeft.

Stelling 2. *Onder voorwaarde, dat de G.G.D.*

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = 1, \quad \mathbf{a}_k \not\equiv 0 \text{ of } \mathbf{b}_l \not\equiv 0$$

is, heeft, voor parameterwaarden **a**, **b**, *de specialisatie* $\dot{\mathbf{R}}$ *van de vorm* $\dot{R}$ (*Vgl.* (7)) *een factor*

$$L \equiv dx_2 - cx_3$$

met een veelvuldigheid v groter dan de in (4c) *genoemde multipliciteitensom Σ' dan en slechts dan, als $\gamma = 0$ is.*
Is $\mathbf{a}_k \not\equiv 0$, dan is $L = 0$ een raaklijn van de kromme $\mathbf{f} = 0$ in het punt O_1. Is ook $\mathbf{b}_l \not\equiv 0$, dan is het een gemeenschappelijke raaklijn van $\mathbf{f} = 0$ en $\mathbf{g} = 0$.

Bewijs. Uit het onderstelde volgt:

$$\overline{\mathbf{R}}(f, g) \equiv C \cdot \overline{R}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \not\equiv 0 \quad (C \equiv C(x_2, x_3))$$

dus is

$$\dot{\mathbf{R}} \not\equiv 0.$$

a. L zij een factor van $\dot{\mathbf{R}}$ met een veelvuldigheid $v > \Sigma'$. Was $\gamma \neq 0$, dan was wegens (8)

$$\mathbf{S}(f, g) \equiv S(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \not\equiv 0$$

en had $S(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ de factor L^v. Dan zou echter uit stelling 1 volgen: $v = \Sigma'$ in strijd met $v > \Sigma'$. Hieruit blijkt, dat $\gamma = 0$ is.

b. Zij thans $\gamma = 0$.

De beide aan te halen werken zijn van prof. dr B. L. VAN DER WAERDEN.

Een verzameling L heet een „lichaam", indien aan elk paar elementen a, b van L in L een element, genoemd $a + b$, en een element, genoemd $a \cdot b$, is toegevoegd en voor deze „sommen" en „producten" de elementaire rekenregels gelden. Bijv. is het product commutatief: $a \cdot b = b \cdot a$ en de deling a/b ($b \neq 0$) uitvoerbaar. (Moderne Algebra, kap. 3).

C zij het lichaam van de complexe getallen, $C(a, b)$ het lichaam van de rationale functies der parameters a, b met coëfficiënten uit C. $\dot{R}$ was als polynomium in a, b, x irreducibel. Dan is (Moderne Algebra, § 23) $\dot{R}$ als vorm in x_2, x_3 irreducibel t.o.v. het lichaam $C(a, b)$, d.w.z. als men bij de ontbinding geen andere coëfficiënten dan zulke uit $C(a, b)$ gebruikt. Dan is de discriminant $D(\dot{R}) \neq 0$.
$h(x_1)$ zij een polynomium met coëfficiënten uit een lichaam, dat t.o.v. L irreducibel is. Dan is er altijd wel een L omvattend lichaam $\triangle$, waarin de coëfficiënten voor de ontbinding van h in lineaire factoren aanwezig zijn (Moderne Algebra, kap. 5). Men kan dus schrijven:

$$S(f, g) \equiv \gamma \cdot \dot{R} \equiv \prod_{r=1}^{nm-\mu} (q_{r3}\, x_2 - q_{r2}\, x_3)\, (q_{ri} \in \triangle,\ \triangle \geqq C(a, b)). \qquad (10)$$

Alle factoren hiervan zijn éénvoudig, daar $D(\dot{R}) \neq 0$ is.
Men neme vervolgens een lichaam $\Omega \geqq \triangle$, waarin de coëfficiënten aanwezig zijn voor de ontbindingen in lineaire factoren van de polynomia:

$$f_r \equiv f(x_1, q_{r2}, q_{r3}) \text{ en } g_r \equiv g(x_1, q_{r2}, q_{r3}) \quad (r = 1, \ldots, mn - \mu).$$

Een greep van $(p + 1)$ elementen uit Ω (men mag ze met een zelfde element $q \neq 0$ vermenigvuldigen) heet een *abstract punt* van de projectieve p-dimensionale ruimte $R^{(p)}$.
Daar

$$\bar{R}(f, g)(q_{r2}, q_{r3}) = 0$$

is en dus f_r en g_r onderling deelbaar zijn, is er op elke rechte

$$M_r \equiv q_{r3}\, x_2 - q_{r2}\, x_3 = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, nm - \mu) \quad . \quad . \quad (11)$$

een abstract punt

$$Q_r = (q_{ri}, q_{r2}, q_{r3}),$$

waarvoor $f = 0$ en $g = 0$ is. Hiervoor geldt de identiteit:

$$R(F, G) \equiv (uX_2)^{\mu} \times \Pi_r \{(uq_{r1} + q_{r3})\, X_2 - q_{r2}\, X_3\} . \quad . \quad . \quad (12)$$

Meer van dergelijke punten Q_r zijn er niet. In de beide leden van (12), opgevat als polynomia in X_2, X_3 en u, zijn de overeenkomstige coëfficiënten gelijk:

$$u_j(a, b) = w_j(q_{11}, \ldots, q_{nm-\mu, 3}).$$

De betrekkingen

$$u_i \cdot w_j - u_j \cdot w_i = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

zijn homogeen, zowel in a, als in b, als in q_{r1}, q_{r2}, q_{r3}.
Laten $S_1, S_2, \ldots, S_s$ abstracte punten (met coördinaten uit Ω) van de projectieve ruimte $R^{(p)}$ zijn. Met H zij steeds een in de coördinaten van elk punt S_i $(i = 1, \ldots, s)$ homogene vorm met complexe coëfficiënten bedoeld. Als elke betrekking $H = 0$, waaraan door S_i voldaan wordt, tevens voor de abstracte of gewone punten $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_s$ van $R^{(p)}$ geldig is, noemt

men het puntenstelsel der $\mathbf{S}_i$ een *relatiegetrouwe specialisatie* van het stelsel der S_i en schrijft:

$$\{S_1, S_2, \ldots, S_s\} \to \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_s\}.$$

Men heeft de belangrijke stelling (Vgl. Algebraische Geometrie, § 27): *Bij een willekeurig gekozen abstract punt* S_{s+1} *is* $\mathbf{S}_{s+1}$ *te vinden zo, dat geldt:*

$$\{S_1, \ldots, S_s, S_{s+1}\} \to \{\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_s, \mathbf{S}_{s+1}\}.$$

$S_{s+1} \to \mathbf{S}_{s+1}$ heet dan een *voortzetting* van de gegeven relatiegetrouwe specialisatie.
De specialisatie $\{(a), (b)\} \to \{(\mathbf{a}), (\mathbf{b})\}$ van de parameterpunten kan men voortzetten tot

$$\{(a), (b), Q_1, \ldots Q_{nm-\mu}\} \to \{(\mathbf{a}), (\mathbf{b}), \mathbf{Q}_1, \ldots \mathbf{Q}_{nm-\mu}\}. \quad . \quad . \quad (14)$$

(Door het toevoegen van enige coördinaten 0 bereikt men, dat het punten van een zelfde $R^{(p)}$ zijn.)
(13) geldt ook nog na de overgang en kan dan met $(13\mathbf{)}$ [1]) worden aangeduid. Na de overgang zijn de beide leden van (12) niet nul („Overgang" betekent substitutie van vetgedrukte coördinaten) en de overeenkomstige coëfficiënten wegens $(13\mathbf{)}$ evenredig. Vermenigvuldigt men de coördinaten $\mathbf{q}$ der punten $\mathbf{Q}$ met een gepast getal, dan geldt de identiteit (12) ook na de overgang en kan dan met $(12\mathbf{)}$ worden aangeduid. Deelt men de leden van $(12\mathbf{)}$ door

$$(uX_2)^\mu \text{ en zet } X_2 = x_2,\ X_3 = x_3,\ u = 0$$

dan komt er:

$$\mathbf{S}(f, g) \equiv \gamma \cdot \dot{\mathbf{R}} \equiv \Pi_r (\mathbf{q}_{r3}\, x_2 - \mathbf{q}_{r2}\, x_3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10\mathbf{)}$$

Hierin is $\gamma = 0$ volgens veronderstelling en $\dot{\mathbf{R}} \not\equiv 0$ wegens

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = 1.$$

In het laatste lid van (10) moet dus minstens één factor nul zijn. Laat dit de eerste factor zijn. Dan is $\mathbf{Q}_1 = O_1$. Uit

$$Q_1 \to O_1$$

volgt, dat $q_{11} \neq 0$ is. Men kan dus schrijven:

$$Q_1 = (1, p, q).$$

Bij $T = (0, p, q)$ bestaat $\mathbf{T} = (0, c, d)$ zo, dat

$$T \to \mathbf{T}$$

een voortzetting van de specialisatie (14) is.
Uit $\dot{R}(p, q) = 0$ volgt $\dot{\mathbf{R}}(c, d) = 0$.
v zij de veelvuldigheid van

$$L \equiv dx_2 - cx_3$$

als factor van $\dot{\mathbf{R}}$.

---

1) Zie voor de betekenis van de zwaardere haak p. 1.

Als men (12) met het tweede lid van (2) vergelijkt, blijkt *de multipliciteit van elk snijpunt* $P' \neq O_1$ *van de beide krommen* $\mathfrak{f} = 0$, $\mathfrak{g} = 0$ *gelijk te zijn aan het aantal der indices* r, *waarvoor* $\mathbf{Q}_r = P'$ *is.* Zet men de specialisatie verder voort met

$$T_r = (0, q_{r2}, q_{r3}) \rightarrow \mathbf{T}_r = (0, c_r, d_r) \quad (r \geqq 2).$$

dan blijkt v gelijk te zijn aan het aantal der indices r, waarvoor

$$\mathbf{T}_r = \mathbf{T}_1 \, [= \mathbf{T}]$$

is. Daar elk punt $\mathbf{T}_r$ een punt $\mathbf{Q}_r$ op $L = 0$ meebrengt en bij $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}$ het punt $\mathbf{Q}_1 = O_1$ behoort, ziet men nu, dat v groter is dan de in (4*c*) genoemde multipliciteitensom Σ'.

c. De parameterwaarden $s = t = 1$ van Q_1 als snijpunt van de abstracte rechte $M_1 = 0$ (Vgl. (11)) met $f = 0$ voldoen aan de vergelijking

$$f(sO_1 + tT) = 0$$

naar een voorbeeld uit de Algebraische Geometrie. § 39.
Volgens § 4 is dan

$$\sum_{j=k}^{n} f_j(O_1, T) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

De poolvorm f_j is homogeen van de graad j in de coördinaten p, q van T. f_j wordt homogeen van de graad k in p, q, als men in $j-k$ factoren van elke term van f_j substitueert:

$$p = q_{12}, \quad q = q_{13}.$$

(15) is dan homogeen van de graad k in p, q. Wegens $q_{11} = 1$ kan men (15) daarna homogeen maken in de coördinaten q_{11}, q_{12}, q_{13} van Q_1. Uit (15) volgt dan, daar $Q_1 \rightarrow O_1$ overgaat,

$$\mathfrak{f}_k(O_1, \mathbf{T}) = 0, \text{ d.i. wegens § 4 (6) } \mathbf{a}_k(c, d) = 0.$$

Is $\mathbf{a}_k \not\equiv 0$, dan is dus inderdaad $L = 0$ een raaklijn van de kromme $\mathfrak{f} = 0$ in het punt O_1.

Gevolgen van de stellingen 1 en 2.

1. *Is in* (6)

$$\chi = k - \sum_{j=1}^{s} v'_{kj} > 0, \; \lambda = l - \Sigma v''_{lj} > 0,$$

dan is $R(\alpha_k, \beta_l)$ *een factor van* γ (en dus in het geval $s = 0$ wegens de graden χ en λ resp. van α_k en β_l

$$\gamma = C \cdot R(a_k, b_l) \quad (C \neq 0 \text{ const.})).$$

Is $\chi = 0$, $\lambda > 0$, *dan is de parameter* α_k *een factor van* γ (en analoog is het geval $\lambda = 0$, $\chi > 0$).

B e w ij s. Ontwikkeling naar de eerste kolom geeft:

$$\overline{R}(f, g) \equiv A \cdot \alpha_k + B \cdot \beta_l$$

(waarin A, B gehele vormen zijn). Dit, in verbinding met (7), levert een dgl. identiteit voor $\dot{R}$. Zij

$$\chi > 0, \quad \lambda > 0$$

(De andere gevallen bewijst men vrijwel analoog). Zij

$$R(\alpha_k, \beta_l) = 0.$$

Hieruit volgt, dat de vormen $\alpha_k \cdot \beta_l$ een gemeenschappelijke factor

$$L \equiv dx_2 - cx_3$$

hebben. L is dus een factor van $\dot{\mathbf{R}}$. Daar

$$\mathfrak{f}(x_1, c, d) \text{ en } \mathfrak{g}(x_1, c, d)$$

onderling ondeelbaar zijn (hierin komen nog parameters voor), is er op $L = 0$ buiten O_1 geen snijpunt van $\mathfrak{f} = 0$ met $\mathfrak{g} = 0$.
Volgens stelling 2 is dus ook $\gamma = 0$. Volgens § 2, stelling 3 is dus de (irreducibele) vorm $R(\alpha_k, \beta_l)$ een factor van γ.

Uit 1. en stelling 1 volgt de bekende stelling:

„Een punt P, waarin twee krommen $\mathfrak{f} = 0$, $\mathfrak{g} = 0$ een k-voudig resp. l-voudig punt hebben, heeft de multipliciteit $\mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = kl$, of $\mu > kl$, al naar gelang deze krommen in P geen raaklijn, of minstens één raaklijn, gemeen hebben".

2. Definitie (χ, λ waren de graden van α_k, β_l).

$$R(\alpha_k, \beta_l) \begin{matrix} = \alpha_k^\lambda & (\chi = 0) \\ = \beta_l^\chi & (\lambda = 0). \end{matrix} \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Als men slechts in het geval $\chi = \lambda = 0$ van een eventuele factor α_k of β_l der vorm γ afziet, zijn alle overige irreducibele factoren γ_i van γ ook factoren van het product

$$R(\alpha_k, \beta_l) \times \prod_{j=1}^{s} \dot{R}(c_j, d_j). \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

B e w ij s. γ bevat de irreducibele factoren van $R(\alpha_k, \beta_l)$.
Zij γ_i hiervan verschillend. Men specialisere zo, dat

$$\gamma_i = 0, \text{ echter } \alpha_k \cdot \beta_l \neq 0 \text{ en } \mathbf{R}(\alpha_k, \beta_l) \neq 0$$

is (In het geval $\chi > 0$, $\lambda > 0$ is dan de G.G.D. $(\alpha_k, \beta_l) = 1$).
De gemeenschappelijke raaklijn $L = 0$ van $\mathfrak{f} = 0$ en $\mathfrak{g} = 0$ in stelling 2 moet dan met één der rechten $L_j = 0$ $(1 \leq j \leq s)$ samenvallen. Deze L_j is dan een factor van $\dot{\mathbf{R}}$, d.w.z. er geldt:

$$\dot{\mathbf{R}}(c_j, d_j) = 0.$$

Dan heeft het product (17) de waarde nul bijna overal, waar γ_i de waarde nul heeft. Volgens § 2, stelling 3 is dus γ_i een factor van (17).

§ 7. *Een multipliciteitscriterium.*

I n l e i d i n g. Laten

$$t_1 > t_2 > \ldots > t_h > 0$$

rationale getallen,

$$p_0 = 0 < p_1 < \ldots < p_h \leqq N, \quad q_0 = 0 < q_1 < \ldots < q_h \leqq M$$

gehele getallen en

$$u_0, u_1, u_2, \ldots; \; w_0, w_1, w_2, \ldots; \; L$$

onbepaalden zijn. Men stelle:

$$\left.\begin{array}{ll} y_i = y_{p_r} + t_r \cdot (p_r - i) & (p_{r-1} \leqq i \leqq p_r;\; r = 1, 2, \ldots, h) \\ z_i = z_{q_r} + t_r \cdot (q_r - i) & (q_{r-1} \leqq i \leqq q_r) \\ y_i = 0 & (i \geqq p_h) \\ z_i = 0 & (i \geqq q_h) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

In het Euclidische vlak liggen de punten $P_i = (i, y_i)$ $(i \geqq 0)$ op een gebroken lijn H, de punten $Q_i = (i, z_i)$ op een gebroken lijn K. De r-de lijnstukken van H en K hebben beide de richtingscoëfficiënt $-t_r$; ze zijn evenwijdig, doch niet noodzakelijk even lang.
De hoeken tussen opeenvolgende lijnstukken van H (en van K) keren de openingen naar boven. Natuurlijk kunnen de grafieken H en K elkaar snijden.

$$o = \sum_{r=1}^{h} \tfrac{1}{2} \{ (q_r - q_{r-1})(y_{p_{r-1}} + y_{p_r}) + (p_r - p_{r-1})(z_{q_{r-1}} + z_{q_r}) \} = \Sigma\, o_r \quad (2)$$

kan men zien als de oppervlakte van twee gebiedsdelen, welke elk door een grafiek, $\dot{H}$ resp. $\dot{K}$, van het eerste quadrant worden afgesneden.

Als y en z niet gehele getallen zijn, zal L^y slechts een symbool zijn, de formele uitdrukking van het gewicht.
Hiervoor zal gelden:

$$L^y \cdot L^z = L^{y+z}.$$

Dan zij

$$\left.\begin{array}{l} \qquad\qquad U_i = u_i L^{y_i}, \; W_i = w_i L^{z_i}; \\ \quad F = U_0 x^N + \ldots + U_N, \; G = W_0 x^M + \ldots + W_M; \\ f_{i,j} = u_i x^{j-i} + \ldots + u_j, \; g_{i,j} = w_i x^{j-i} + \ldots + w_j \; (i \leqq j); \\ \text{en ter afkorting:} \\ \qquad\qquad f_r = f_{p_{r-1}, p_r}, \; g_r = g_{q_{r-1}, q_r}; \\ \text{en als veralgemening:} \\ \qquad R(f_{i,i}, g_{i',j'}) = u_i^{j'-i'}; \quad R(f_{i,j}, g_{i',i'}) = w_{i'}^{j-i}. \end{array}\right\} \quad . \quad (3)$$

Dan hebben alle van nul verschillende termen van de resultant $R(F, G)$ *in de onbepaalde* L *minstens de* (symbolische) *graad o en de som van de termen, die in* L *de laagste graad o hebben, is gelijk aan*

$$(-1)^{\varepsilon} \cdot L^{o} \cdot R(f_{p_h, N}, g_{q_h, M}) \times \prod_{r=1}^{h} R(f_r, g_r); \varepsilon = \Sigma (M - q_1 - \ldots - q_r) p_r. \quad (4)$$

B e w ij s. Men stelle

$$F_{i,j} = U_i\, x^{j-i} + \ldots + U_j,\ G_{i,j} = W_i\, x^{j-1} + \ldots + W_j, \quad . \quad (5)$$

F_r, G_r analoog aan f_r, g_r. Dan is (Zie (2))

$$R(F_r, G_r) = R(f_r, g_r) \cdot L^{0_r}. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6)$$

Stelt men nl. ter afkorting:

$$p = p_r,\ p' = p_{r-1},\ q = q_r,\ q' = q_{r-1},\ t = t_r.$$

Dan heeft U_i ($p' \leqq i \leqq p$) in L de graad y_i, W_i ($q' \leqq i \leqq q$) de graad z_i. In de determinant $R(F_r, G_r)$ heeft dus elk van nul verschillend element

$\varepsilon_{a,b}$ $\quad (1 \leqq a \leqq q - q')$ de graad $y_{p'+b-a} = y_p + t(p - p' + a - b)$,

$\varepsilon_{q-q'+a,b}$ $(1 \leqq a \leqq p - p')$ de graad $z_{q'+b-a} = z_q + t(q - q' + a - b)$.

Dus hebben de determinanttermen alle dezelfde graad, nl.

$$(q - q')\{y_p + t(p - p')\} + (p - p')\{z_q + t(q - q')\} +$$
$$+ t \cdot \sum_1^{q-q'} a + t \cdot \sum_1^{p-p'} a - t \cdot \sum_1^{p-p'+q-q'} b = 0_r.$$

Hieruit volgt (6).

Het bewijs van (4) gaat verder met volledige inductie naar h.

$h = 1$. Men kort af:

$$p = p_1,\ q = q_1,\ t = t_1.$$

Dan is $o = 0_1 = tpq$.

μ zij de matrix, gevormd door de eerste $p + q$ kolommen van $R(F, G)$. Men neme even aan:

$$U_{p+i} = u_{p+i}\, L^{-ti},\ W_{q+i} = w_{q+i}\, L^{-ti}\ (i > 0).$$

Dan heeft thans elk van nul verschillend element

$\varepsilon_{a,b}$ $(1 \leqq a \leqq M)$ van de matrix μ in L de graad $t(p + a - b)$,

$\varepsilon_{M+a,b}$ $1 \leqq a \leqq N)$ de graad $t(q + a - b)$.

In de matrix μ is dan elke determinant $D' \neq 0$ met c U-rijen en d W-rijen

$$(0 \leqq c \leqq M,\ 0 \leqq d \leqq N,\ c + d = p + q)$$

homogeen in L. Is D'' de determinant met de rijen, welke in de matrix μ de nummers $1, 2, \ldots, c$; $M + 1$, $M + 2, \ldots, M + d$ hebben, en valt D' niet met D'' samen, dan is D' in L van hogere graad dan D'' (Men vergelijke de rijen van D' met die van D''). Daar $c + d = p + q$ is, heeft de determinant D'' de graad

$$t(pc + qd - cd) = tpq + t\,(q - c)^2.$$

De determinant $D'' = D$ met q U-rijen en p W-rijen heeft dus van alle beschouwde determinanten D' de laagste graad in de onbepaalde L, nl. de graad $tpq = o$.

Alle termen van de resultant (Vgl. (6))

$$R(F_1, G_1) = L^\circ \cdot R(f_1, g_1)$$

komen in de determinant D voor. Neemt men, zoals eerst,

$$U_{p+i} = u_{p+i},\ W_{q+i} = w_{q+i} \qquad (i > 0)$$

(vervangt men dus de negatieve exponenten weer door nul), dan verandert $R(F_1, G_1)$ hierdoor niet en is nu gelijk aan de som van die termen van de determinant D, welke in de onbepaalde L de laagste graad (o) hebben.

$\triangle$ zij de onderdeterminant van $R(F, G)$, waarmee D in de ontwikkeling van $R(F, G)$ naar de kolommen van de matrix μ vermenigvuldigd wordt. Vervangt men in $\triangle$ alle elementen van een in L positieve graad door elementen nul, dan gaat $\triangle$ in de resultant $R(f_{p,N}, g_{q,M})$ over, welke in L de graad nul heeft.

In het geval $h = 1$ geldt dus (4).

Laat thans $h > 1$ en (4) voor het getal $h - 1$ bewezen zijn.

Met een nieuwe onbepaalde Z stelle men:

$$y'_i = y_{p_1} + t_2 \cdot (p_1 - i)\ (i \leqq p_1),\ z'_i = z_{q_1} + t_2 \cdot (q_1 - i) \qquad (i \leqq q_1)$$

en voor de overige indices:

$$y'_i = y_i,\ z'_i = z_i,$$

$$U'_i = u_i L^{y'_i},\ W'_i = w_i L^{z'_i} \quad (i \geqq 0);$$

$$F' = U'_0 x^N + \ldots + U'_N,\ G' = W'_0 x^M + \ldots + W'_M;$$

$F'_{i,j}$ en $G'_{i,j}$ analoog aan (5);

$$U''_i = U'_i Z^{y_i - y'_i},\ W''_i = W'_i Z^{z_i - z'_i};$$

$$F'' = U''_0 x^N + \ldots + U''_N,\ G'' = W''_0 x^M + \ldots + W''_M \text{ enz.}$$

$$2 0' = q_2 (y'_0 + y_{p_2}) + p_2 (z'_0 + z_{q_2}),\ 2V = q_1 (y'_0 + y_{p_1}) + p_1 (z'_0 + z_{q_1});$$

$$o' = 0' + \sum_{r=3}^{h} 0_r.$$

Wegens

$$(y'_0 - y_{p_1}) : p_1 = (z_{q_1} - z_{p_2}) : (q_2 - q_1) = t_2 : 1$$

en een tweede dergelijke evenredigheid is

$$0' = V + 0_2.$$

Ook is

$$0_1 - V = (t_1 - t_2)\, p_1\, q_1,$$

dus:

$$o = o' + (t_1 - t_2)\, p_1\, q_1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\{R(F_{i,i+p}, G_{j,j+q})\} \quad (0 \leqq i < i + p \leqq N;\ 0 \leqq j < j + q \leqq M)$$

zij de matrix, waarin de matrix van $R(F, G)$ overgaat, als men hierin alle elementen nul zet behalve de elementen

$\varepsilon_{j+a,\, i+j+b}$ uit het parall. $1 \leqq a \leqq b \leqq a + p \leqq q + p$ en

$\varepsilon_{M+i+a,\, i+j+b}$ uit het parall. $1 \leqq a \leqq b \leqq a + q \leqq p + q$.

Dan is (4) wegens (6) gelijk aan de determinant der matrix

$$\sum_{r=1}^{h} \{R(F_r, G_r)\} + \{R(f_{p_h,N}, g_{q_h,M})\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Wegens (7) en het reeds bewezene is de som der termen van $R(F'', G'')$, die in Z de laagste graad hebben, gelijk aan
$Z^{o-o'}$ maal de determinant

$$|\{R(F'_{0,p_1}, G'_{0,q_1})\} + \{R(F'_{p_1,N}, G'_{q_1,M})\}|. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

De determinanttermen van (9) hebben in L graden $\geqq o'$, want dat geldt immers voor alle termen van $R(F'', G'')$. De termen van (9) behoren tot $R(F', G')$. De som der termen van $R(F', G')$, die in L de laagste graad (de graad o') hebben, is gelijk aan de determinant

$$|\{R(F'_{0,p_2}, G'_{0,q_2})\} + \sum_{r=3}^{h} \{R(F'_r, G'_r)\} + \{R(f_{p_h,N}, g_{q_h,M})\}|. \quad (10)$$

Zet men in de matrix (8) bij F en G accenten, dan bestaat de determinant D' der nieuwe matrix uit alle van nul verschillende termen, welke de beide determinanten (9) en (10) gemeen hebben.

$$D' \cdot Z^{o-o'}$$

is dus gelijk aan de som der termen van $R(F'', G'')$, die in L en Z tezamen de laagste graad $o - o' + o' = o$ hebben. Zet men $Z = L$, dan gaat dit in de determinant (8) en $R(F'', G'')$ in $R(F, G)$ over, waarmee (4) voor het getal h bewezen is.

De door (1) bepaalde punten

$$(p_r + q_r, y_{p_r} + z_{q_r}) \qquad (r = 0, 1, \ldots, h)$$

vormen de hoekpunten van een grafiek C, waarvan het r-de lijnstuk $\bar{C}_r$, evenals de lijnstukken $\bar{H}_r$ en $\bar{K}_r$ van H en K, de richtingscoëfficiënt $-t_r$ heeft.
Men rangschikke het product $F \cdot G$ van de polynomia (3) als volgt:

$$F \cdot G = \sum_{i=0}^{N+M} E_i\, x^{N+M-i}, \; E_i = e_i L^{s_i} + \text{(hogere machten van } L). \quad . \quad (11)$$

Dan liggen de punten (i, s_i): op de grafiek C $(i \leqq p_h + q_h)$; op de X-as $(i \geqq p_h + q_h)$.
en er geldt (Voor f_r, g_r vgl. (3))

$$f_r \times g_r = e_{p_{r-1}+q_{r-1}}\, x^{p_r - p_{r-1} + q_r - q_{r-1}} + \ldots + e_{p_r + q_r}. \quad . \quad (12)$$

B e w ij s. In het Euclidische vlak kan men voor punten en voor evenwijdige lijnen een optelling definiëren:

$P \quad (x, y)$,	$P' \quad (x', y')$:	$P + P' \quad (x + x', y + y')$;
$M \quad y + tx = d$,	$M' \quad y + tx = d'$:	$M + M' \quad y + tx = d + d'$.

Het criterium voor "P *boven* M" is: $y + tx > d$.

Ligt P op M, P' op M' (boven M'), dan ligt $P + P'$ op $M + M'$ (boven $M + M'$).
De lijnstukken $\overline{H}_r$, $\overline{K}_r$ bepalen elk een rechte, H_r resp. K_r. Het lijnstuk $\overline{C}_r$ ligt dan in de rechte $H_r + K_r = C_r$.
Verder zij de X-as ook aangeduid met H (resp. K, $C)_{h+1}$.
De hoeken van H keren de openingen naar boven. Ligt een punt P van H niet op het lijnstuk $\overline{H}_r$, dan ligt P boven de rechte H_r.
Voor K is het analoog.
De som $P + P'$ van een punt P van H met een punt P' van K ligt op het lijnstuk $\overline{C}_r$, dan en slechts dan, als P op $\overline{H}_r$ en P' op $\overline{K}_r$ ligt. Want ligt P niet op $\overline{H}_r$, dus boven H_r, P' op of boven K_r, dan ligt $P + P'$ boven C_r.
Ligt P wel op $\overline{H}_r$ en P' op $\overline{K}_r$,
dus P boven of op H_{r-1}, op H_r en op of boven H_{r+1},
P' boven of op K_{r-1}, op K_r en op of boven K_{r+1},
dan ligt
$P + P'$ boven of op C_{r-1}, op C_r en op of boven C_{r+1}, dus op $\overline{C}_r$ (de rechten H_0, K_0 en C_0 passend gekozen).

In (11) is wegens (3)

$$E_i = \Sigma_j\, u_j\, w_{i-j}\, L^{y_j + z_{i-j}} \qquad (0 \leqq j \leqq N;\ 0 \leqq i - j \leqq M).$$

Zij bijv.

$$p_{r-1} + q_{r-1} \leqq i \leqq p_r + q_r.$$

Is $j = p_{r-1}$, dan is $i - j \geqq q_{r-1}$;
is $j = p_r$, dan is $i - j \leqq q_r$.
Voor enige opeenvolgende indices j $(p_{r-1} \leqq j \leqq p_r)$ is dus

$$q_{r-1} \leqq i - j \leqq q_r.$$

Dan ligt het punt (j, y_j) op $\overline{H}_r$, $(i - j, z_{i-j})$ op $\overline{K}_r$, dus

$$(i, y_j + z_{i-j}) = (i, s_i)$$

op $\overline{C}_r$. Voor alle andere indices j' is $y_{j'} + z_{i-j} > s_i$, dus s_i het in (11) genoemde getal. Dan is inderdaad

$$e_i = \Sigma_j\, u_j\, w_{i-j},$$

gesommeerd over het genoemde interval.

De ordinaten y_{p_r}, z_{q_r} van de hoekpunten der grafieken H, K zullen verder gehele getallen zijn.

$$N = n - k, \quad M = m - l,$$

$\overline{y}$ het kleinste gehele getal $\geqq$ het reële getal y.

$$f \equiv a_k\, x_1^{n-k} + \ldots + a_n$$

zij weer een homogene vorm van de graad n in x_1, x_2, x_3;

$$L \equiv dx_2 - cx_3$$

een factor van a_{k+i} $(0 \leqq i \leqq N)$ met de veelvuldigheid v_i.

Definitie. *„De vorm f laat met betrekking tot de vorm L de grafiek H toe"* wil zeggen:

$$y_i \leqq v_i \quad (0 \leqq i \leqq N);$$

„f past met betrekking tot L bij H" betekent:

$$\bar{y}_i = v_i.$$

Men kan *dan* schrijven

$$a_{k+i} \equiv a'_i L^{\bar{y}_i}$$

(a'_i gehele vorm) en u_i als volgt definiëren:

$$u_i = a'_i(c, d) \quad (\bar{y}_i = y_i); \quad u_i = 0 \quad (\bar{y}_i > y_i). \quad . \quad . \quad (13)$$

Door de getallen u_i en (3) zijn dan polynomia f_r $(1 \leqq r \leqq h)$ bepaald.

Bij een homogene vorm

$$g \equiv b_l x_1^{m-l} + \ldots + b_m$$

die met betrekking tot L de grafiek K toelaat, kan men op analoge wijze getallen w_i $(0 \leqq i \leqq M)$ en polynomia g_r $(1 \leqq r \leqq h)$ bepalen.

Stelling. *Men neme $s \leqq (\min)(k, l)$ vormen*

$$L_j \equiv d_j x_2 - c_j x_3,$$

bij elke vorm L_j een grafiekenpaar (H_j, K_j) van het type (1): De beide grafieken H_j, K_j bestaan elk uit h_j lijnstukken en bepalen analoog aan (2) een getal o_j.

Hebben dan de bovenstaande vormen f en g voor elke index $j = 1, \ldots, s$ de beschreven eigenschap, zodat men hiervoor polynomia

$$f_{jr}, \; g_{jr} \quad (r = 1, 2, \ldots, h_j)$$

kan opstellen en kan schrijven:

$$a_k \equiv \alpha_k \cdot \prod_{j=1}^{s} L_j^{y_{j0}}, \quad b_l \equiv \beta_l \prod_{j=1}^{s} L_j^{z_{j0}} \quad (\alpha_k \text{ en } \beta_l \textbf{ gehele vormen})$$

dan snijden de krommen $f = 0$ en $g = 0$ elkaar in het punt O_1 met de multipliciteit

$$\mu = kl + \sum_{j=1}^{s} o_j, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

tenzij één der resultaten $R(f_{jr}, g_{jr})$ $(1 \leqq j \leqq s;\ 1 \leqq r \leqq h_j)$, $R(\alpha_k, \beta_l)$ nul is, in welk geval μ groter is.

B e w ij s. De beide vormen f en g zullen thans schaarvormen met parameters a resp. b zijn, vastgelegd door de eis, dat met betrekking tot L_j $(j = 1, \ldots, s)$ de vorm f bij de grafiek H_j en g bij K_j past. Dan zijn de eerste en de laatste coëfficiënten van f_{jr} en g_{jr} niet nul, daar de ordinaten van de hoekpunten der grafieken gehele getallen of nul zijn, dus de determinant

$$R(f_{jr}, g_{jr}) \not\equiv 0$$

(De hoofdterm hiervan is niet identiek nul in a, b). (Deze determinant kan reducibel zijn.) Verder zij ter afkorting

$$R_j(f, g) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

de voor het grafiekenpaar (H_j, K_j) met coëfficiënten u_{ji}, w_{ji} gevormde resultant $R(f_{p_h,N}, g_{q_h,M})$ uit (3).
Wegens (4) geldt voor elke index $j = 1, \ldots, s$:

$$\overline{R}(f, g) \equiv A_j L_j^{o_j} \quad (A_j \text{ gehele vorm}). \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Wegens (4) en de getroffen definities gaat bij de substitutie

$$x_2 = c_j \quad x_3 = d_j$$

$$A_j \to \mathbf{A}_j \equiv \pm R_j \prod_{r=1}^{h_j} R(f_{jr}, g_{jr})$$

over en dat is niet nul. Dus is o_j de veelvuldigheid van L_j als factor van $\overline{R}(f, g)$. Volgens § 6, stelling 1, is (14) hiermee bewezen.
Door vergelijking van (16) met § 6, (7) vindt men:

$$\dot{R}(c_j, d_j) \times \prod_{j' \neq j} L_{j'}^{o_j}(c_j, d_j) \equiv \pm R_j \prod_{r=1}^{h_j} R(f_{jr}, g_{jr}) \quad . \quad . \quad (17)$$

(j is vast, j' variabel).

Er moet nu nog worden aangetoond, dat
de vorm γ uit § 6, (8) *en het product*

$$R(\alpha_k, \beta_l) \times \prod_{j=1}^{s} \prod_{r=1}^{h_j} R(f_{jr}, g_{jr}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

uit dezelfde irreducibele factoren bestaan (voor de definitie van $R(\alpha_k, \beta_l)$ zie § 6, (16).)

Op analoge wijze als in § 6, gevolgtrekking 1, bewijst men eerst met (17), dat elke irreducibele factor van $R(f_{jr}, g_{jr})$ in de vorm γ als factor opgaat. Daar hetzelfde voor $R(\alpha_k, \beta_l)$ geldt, gaat inderdaad elke irreducibele factor van het product (18) in γ op. Dan volgt uit (17) en § 6, (17), dat elke irreducibele factor van γ, die niet in (18) opgaat, een factor van het product

$$\prod_{j=1}^{s} R_j$$

moet zijn, of anders, in het geval van de graden $\chi = \lambda = 0$, met één der beide parameters α_k, β_l moet samenvallen.
Met deze laatste vormen is echter γ onderling ondeelbaar.

Bewijs. *a.* $t > (\max)\ (k, l)$ zij een geheel getal,

$$F \equiv a_k x_1^{n+t-k} + \ldots + a_n x_1^t + a_{n+1} x_1^{t-1} + \ldots + a_{n+t} = 0,$$

$$G \equiv b_l x_1^{m+t-l} + \ldots + b_{m+t} = 0$$

twee door de gegevens der stelling bepaalde lineaire scharen. Volgens het reeds bewezene is in het punt O_1

$$\mu(F, G) = \Sigma\, o_j + kl = \mu(f, g)$$

en analoog aan § 6, (8) is

$$S(F, G) \equiv \gamma(F, G) \cdot \dot{R}(F, G).$$

De resultanten $R_j\ (F, G)$, die analoog aan (15) gevormd worden, hebben in de parameters a en b graden $\geqq t$ en zijn volgens § 5, stelling 1, irreducibel. Deze kunnen dus geen factoren van $\gamma(F, G)$ zijn: In $\gamma(F, G)$ komen dus de parameters van a_{n+i} en die van b_{m+i} $(1 \leqq i \leqq t)$ helemaal niet voor. Voor de specialisering

$$a_{n+i} \to 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, t)$$

geldt dus:

$$\gamma(F, G) = \gamma(F, G),$$

$$\mathbf{S}(F, G) \equiv \gamma(F, G) \cdot \dot{\mathbf{R}}(F, G) \equiv S(f \cdot x_1^t, G) \equiv$$

$$\equiv S(x_1^t, G) \cdot S(f, G) \equiv b_{m+t}^t \times \gamma(f, G) \cdot \dot{R}(f, G),$$

$$\gamma(f, G) \equiv \gamma(F, G) \qquad \text{(Vgl. §6, (4))}$$

afgezien van een constante factor. De specialisering

$$b_{m+i} \to 0$$

geeft: $\gamma(f, g) \equiv \gamma(f, G)$.
Dus is

$$\gamma(f, g) \equiv \gamma(F, G)$$

en derhalve met $R_j(f, g)$ onderling ondeelbaar.

b. Eerst zij $\chi > 0$, $\lambda = 0$.

Men neme de schaar

$$G \equiv B_{l+1}\, x_1^{m-l} + \ldots + B_{m+1} = 0,$$

die in O_1 een $(l+1)$-voudig punt heeft zo, dat G met betrekking tot L_j $(j = 1, \ldots, s)$ bij de grafiek K_j past. Wegens $\lambda = 0$ bevat B_{l+1} een algemene factor

$$B'_{l+1}(x_2, x_3)$$

van de graad 1. Verder zij

$$L \equiv dx_2 - cx_3 = 0$$

een van $L_j = 0$ verschillende rechte. Nu is volgens het bewezene

$$\mu(f, G) = k(l+1) + \Sigma o_j = \mu(f, L) + \mu(f, g), \quad S(f, G) \equiv \gamma(f, G) \cdot \dot{R}(f, G).$$

De irreducibele factoren van $\gamma(f, G)$ zijn alle bekend, daaronder

$$R(a_k, B'_{l+1}).$$

Voor de specialisering

$$G \to g \cdot L$$

geldt:

$$\mathbf{B}'_{l+1} \equiv L \cdot \beta_l, \quad \mathbf{R}(a_k, B'_{l+1}) \equiv R(a_k, L) \cdot \beta_l^{\chi},$$

terwijl $\mathbf{R}(f_{jr}, G_{jr})$ geen factor β_l heeft. Dan heeft $\gamma(f, G)$ een χ-voudige factor β_l.

$$\mathbf{S}(f, G) \equiv \gamma(f, G) \cdot \dot{\mathbf{R}}(f, G) \equiv S(f, g \cdot L) \equiv S(f, L) \times \gamma(f, g) \cdot \dot{R}(f, g).$$

Daar $S(f, L)$ geen enkele parameter b bevat, is dus β_l een χ-voudige factor van $\gamma(f, g)$.

Zij thans $\chi = \lambda = 0$.

Volgens het zo juist bewezene heeft $\gamma(f, G)$ (G zoals zoëven) een éénvoudige factor α_k. Dan heeft, bij de specialisering $G \to g \cdot L$, $\gamma(f, G)$ een éénvoudige factor α_k en heeft geen factor β_l.

Deze factor α_k komt echter reeds in $S(f, L)$ voor, want bij de specialisering $\alpha_k \to 0$ is $\mu(\mathrm{f}, L) = k + 1 > k$. Inderdaad heeft dus $\gamma(f, g)$ in het geval $\chi = \lambda = 0$ geen factoren α_k of β_l, q.e.d.

Covariantie-eigenschappen.

$$\varrho\, x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} X_j \text{ met } a_{21} = a_{31} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

is de meest algemene coördinatentransformatie, waarbij het hoekpunt O_1 behouden blijft. Hierbij is de vorm $S(f, g)$ covariant, zoals uit zijn definitie in § 6, (4b) blijkt.

Men kan (19) uit de volgende types opbouwen ($\varrho = 1$ gesteld):

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2 \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= sX_1 \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}$$

en

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1 \\ x_2 &= aX_2 + bX_2 \\ x_3 &= cX_2 + dX_3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

en kan dan bewijzen, dat ook de relatieve resultant $\overline{R}(f, g)$ covariant is bij een transformatie (19).

Uit zijn definitie § 6, (8) blijkt dus, dat γ bij een transformatie (19) invariant is.

Hierbij worden de factoren $R(f_{jr}, g_{jr})$ niet gepermuteerd, maar zijn stuk voor stuk invariant. Bij de transformatie (20) is dat direct te zien.

§ 8. *Het snijden met poolkrommen en Hessiaan.*

$$f \equiv \prod_{i=1}^{w} f_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zij een kromme van de graad n, f_i irreducibel en van de graad n_i;

$$f'_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f''_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j};$$

$$C(Q)\,[= C_f(Q)] \equiv q_1 f'_1 + q_2 f'_2 + q_3 f'_3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

de eerste poolvorm van f t.o.v. het punt $Q = (q_i)$. Hierbij is $C(Q)$ inpl. v. het gebruikelijke $f_1(x, Q)$ geschreven:

$$H\,[= H_f] \equiv \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} & f''_{13} \\ f''_{21} & f''_{22} & f''_{23} \\ f''_{31} & f''_{32} & f''_{33} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

de Hessiaan. *De poolvormen en de Hessiaan van de vorm* f *zijn projectieve covarianten.* Er geldt:

$$H \cdot x_1^2 \equiv -(n-1)^2 \cdot H^* + n\,(n-1)\, f\,(f''_{22} f''_{33} - f''^2_{23}) \quad \ldots \quad (4)$$

met

$$H^* \equiv f'^2_2 f''_{33} - 2 f'_2 f'_3 f''_{23} + f'^2_3 f''_{22}.$$

B e w ij s. Is $n = 1$, dan zijn beide leden van (4) nul. Men mag dus $n \geqq 2$ aannemen. Dan volgt (4) uit de identiteit van EULER als volgt:

$$D \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad D' \equiv \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D \cdot H \cdot D' \equiv (n-1) \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_{21} & f''_{22} & f''_{23} \\ f''_{31} & f''_{32} & f''_{33} \end{vmatrix} \cdot D' \equiv (n-1) \begin{vmatrix} nf & f'_2 & f'_3 \\ (n-1)\, f'_2 & f''_{22} & f''_{23} \\ (n-1)\, f'_3 & f''_{32} & f''_{33} \end{vmatrix}$$

Voor elke poolvorm geldt de formule (Q is weggelaten):

$$R\,(f, C_f) \equiv \prod_{i=1}^{w} R\,(f_i, C_{f_i}) \times \Pi\,\Pi\, R\,(f_i, f_j) \qquad (i \neq j); \quad \ldots \quad (5)$$

voor de Hessiaan:

$$R\,(f, H_f) \equiv (n-1)^{2n}\, \Pi \left[\frac{R\, f_i, H_{f_i})}{(n_i-1)^{2n_i}}\right] \times \Pi\,\Pi\, R\,(f_i, f_j)^3 \quad \ldots \quad (6)$$

$(i \neq j)$ met $[\ldots]_i = 0$ voor $n_i = 1$.

B e w ij s v a n (5). Men ontbinde f in twee factoren:

$$f \equiv u \cdot v; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

u en v hebben de graden p en q en kunnen reducibel zijn.

1. $Q \neq O_1$. Men neemt $O_2 = Q$, houdt O_1 vast. Dan is $C(Q) \equiv f'_2$. Uit (7) en § 5, (1) en (2) volgt:

$$R(f, f'_2) \equiv R(u, uv'_2 + vu'_2)\, R(v, uv'_2 + vu'_2) \equiv R(u, vu'_2)\, R(v, uv'_2) \equiv$$
$$\equiv R\,(u, u'_2)\, R\,(v, v'_2)\, R\,(u, v)\, R\,(v, u),$$

$$R\,(f, C_f) \equiv R\,(u, C_u)\, R\,(v, C_v)\, R\,(u, v)\, R\,(v, u). \quad \ldots \quad (8)$$

2. $Q = O_1$. Men bewijst (8) op vrijwel analoge wijze.

(5) leidt men uit (8) met volledige inductie naar het aantal der factoren van de vorm f af. Keert men met een transformatie § 7, (19) op de oude coördinatendriehoek terug, dan worden de beide leden van (5) met dezelfde constante vermenigvuldigd, wat bij splitsing van deze transformatie (Zie § 7) te zien is.

B e w ij s v a n (6). Men neme de driehoekszijde $x_1 = 0$ niet in een lineair bestanddeel van de kromme $f = 0$. Dan is $R(f, x_1) \not\equiv 0$.
Uit (4), (7) en § 5, (1) (2) volgt:

$$R(f, H)\, R(f, x_1)^2 \equiv (-1)^n (n-1)^{2n} R(u, H_f^*)\, R(v, H_f^*) . \quad . \quad (9)$$

Vult men in H_f^* in: $f_2' = uv_2' + vu_2', \ldots, f_{33}'' = uv_{33}'' + 2\,u_3' v_3' + vu_{33}''$, dan komt er, zoals men bijv. bij de splitsing van de rijen van deze determinant kan zien:

$$H_f^* \equiv v^3 H_u^* + uvV + u^3 H_v^* \quad (V \text{ gehele vorm}),$$

dus

$$R(u, H_f^*) \equiv R(u, H_u^*)\, R(u, v)^3 \equiv (-1)^p R(u, x_1)^2 R(u, v)^3 \left[\frac{R(u, H_u)}{(p-1)^{2p}}\right]$$

$$R(v, H_f^*) \equiv \qquad (-1)^q R(v, x_1)^2 R(v, u)^3 \left[\frac{R(v, H_v)}{(q-1)^{2q}}\right]$$

In (9) ingevuld, geeft dit bij deling door $R(f, x_1)^2$ $(p + q = n)$:

$$R(f, H_f) \equiv (n-1)^{2n} R(u, v)^3 R(v, u)^3 \left[\frac{R(u, H_u)}{(p-1)^{2p}}\right] \left[\frac{R(v, H_v)}{(q-1)^{2q}}\right].$$

Hieruit volgt (6) met volledige inductie naar w. (6) is natuurlijk ook juist, als men $x_1 = 0$ wel in één van de eindig vele lineaire bestanddelen van de kromme $f = 0$ neemt.

De snijpunten van de kromme $f = 0$ met zijn poolkromme $C(Q) = 0$ worden gevormd door de meervoudige punten van $f = 0$ en die éénvoudige punten P, waarvan de raaklijn $f_1(P, x) = 0$ door het punt Q gaat.

Als in een éénvoudig punt P de raaklijn $f_1(P, x) = 0$ de kromme $f = 0$ de kromme $f = 0$ met een multipliciteit $1 + m' \geqq 3$ snijdt, heet P een *buigpunt van de orde* $m' - 1$.

De snijpunten der krommen $f = 0$ en $H = 0$ worden gevormd door de meervoudige punten en buigpunten van $f = 0$.

B e w ij s. Neemt men O_1 in een punt P der kromme $f = 0$, $x_2 = 0$ langs een raaklijn in P, dan is

$$\left.\begin{aligned} f \equiv cx_2 x_1^{n-1} + d_2 x_3^2 x_1^{n-2} + \ldots + d_{m'} x_3^{m'} x_1^{n-m'} + \ldots, \\ f_{11}''(O_1) = f_{13}''(O_1) = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$H(O_1) = -(f_{12}''^2\, f_{33}'')(O_1)$ is gelijk aan nul, dan en slechts dan, als

$$f_{12}''(O_1) = (n-1)\, c = 0,$$

of

$$f_{33}''(O_1) = 2\, d_2 = 0$$

is, q.e.d.

Is een vorm f irreducibel en van een graad $n \geqq 2$, dan is de $G.G.D.$

$$(f, C(Q)) = 1 \quad (Q \text{ willekeurig}), \quad (f, H) = 1 . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

B e w ij s. Neemt men O_1 in Q, dan is $C(Q) = f_1' \not\equiv 0$.

Daar f'_1 de graad $n - 1$ heeft, kan inderdaad f geen factor van $C(Q)$ zijn. De kromme $f = 0$ heeft dus slechts eindig veel meervoudige punten.

Was niet $(f, H) = 1$, dan was f een factor van H en was dus elk van de (eindig vele) meervoudige punten verschillend punt P der kromme $f = 0$ een buigpunt der kromme. Men neme dan de coördinatendriehoek zoals bij (10); dan is in (10)

$$c \neq 0, \; d_2 = 0.$$

Zij

$$d_2 = \ldots = d_{m'} = 0, \quad d_{1+m'} \neq 0.$$

Wegens het onderstelde en (4) zou f ook een factor van H^* zijn. Dan zou dus de buigraaklijn $x_2 = 0$ de kromme $H^* = 0$ in het punt O_1 met een multipliciteit $\mu \geqq 1 + m'$ snijden. In werkelijkheid is echter

$$f'_2(O_1) = c, \quad f'_3(O_1) = \ldots = f^{(m')}_{33\ldots3}(O_1) = 0,$$

$$f^{(1+m')}_{33\ldots33}(O_1) = (1+m')! \cdot d_{1+m'},$$

$$H^{*(i)}_{33\ldots3}(O_1) \begin{array}{ll} = 0 & (i < m' - 1); \\ = (1+m')! \cdot c^2 \; d_{1+m'} \neq 0 & (i = m' - 1), \end{array}$$

dus de genoemde multipliciteit μ gelijk aan $m' - 1$.
Dus is niet f een factor van H, dus $(f, H) = 1$.

Zij thans f *een vorm met slechts éénvoudige factoren* f_i *van graden* $n_i \geqq 2$. Uit (5), (6) en (11) volgt dan:
Elke kromme $C(Q) = 0$, $H = 0$ *snijdt de kromme* $f = 0$ *in slechts eindig veel punten.* Dan heeft de kromme $f = 0$
$e \leqq n(n-1)$ meervoudige punten

$$P_j = (p_{j1}, p_{j2}, p_{j3}).$$

Ligt een punt P buiten de kromme, dan snijden slechts eindig veel rechten door P de kromme in minder dan n verschillende punten. De graad n krijgt hierdoor meetkundig betekenis.

$I_j(Q)$ $(j = 1, 2, \ldots, e)$ zij de multipliciteit van het meervoudige punt P_j als snijpunt van de kromme $f = 0$ met de poolkromme $C(Q) \equiv f_1(x, Q) = 0$. Het getal $I_j(Q)$ is projectief invariant, want de vorm $C(Q)$ is een covariant van de vorm f.
I_j zij de kleinste van alle getallen $I_j(Q)$ met dezelfde index j.
Dan is $I_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, e)$.

De projectieve invariant

$$m = n(n-1) - \sum_{j=1}^{e} I_j \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

heet de „klasse" van de kromme $f = 0$.

P zij een k-voudig punt $(k \geqq 1)$ van de kromme $f = 0$ met s $[\leqq k]$ raaklijnen, van welke de rechte

$$L_j = 0 \; (j = 1, \ldots, s)$$

de kromme $f = 0$ in P met de multipliciteit $k + m_j$ snijdt en het veelvoud v_j (Vgl. § 4, (5)) heeft. Neemt men O_1 in P, dan heeft f de vorm § 4, (6) en is v_j de veelvuldigheid van L_j als factor van de vorm a_k.

H_j zij de *kortste gebroken verbindingslijn* van de beide punten $(0, v_j)$ en $(m_j, 0)$ met de volgende eigenschap: Zijn

$$(i, y_{ji}) \quad (i = 0, 1, \dots, m_j)$$

de punten van H_j, dan is y_{ji} niet groter dan de veelvuldigheid van L_j als factor van de vorm a_{k+i}.

$\frac{1}{2}o_j$ zij de oppervlakte van het door de grafiek H_j van het eerste quadrant afgesneden stuk.

p_{jr} $(r = 0, 1, \dots, h_j)$ de abscissen der hoekpunten van de grafiek H_j, bijv. $p_{j0} = 0$, $p_{j,h_j} = m_j$.

Men stelle volgens § 7, (13) en (3) de polynomia f_{jr} $(r = 1, \dots, h_j)$ met coëfficiënten u_{ji} $(i = 0, 1, \dots, m_j)$ op.

Stelling 1. *Hebben voor een k-voudig punt P van de kromme $f = 0$ met s raaklijnen de bijbehorende polynomia*

$$f_{jr} \quad (j = 1, 2, \dots, s;\ r = 1, 2, \dots, h_j)$$

slechts éénvoudige factoren,
dan gelden voor het punt P de volgende snijdingsmultipliciteiten:

$$\left.\begin{array}{ll}
a. & \text{het punt } Q \text{ buiten de raaklijnen } L_j = 0 \text{ van } f = 0 \text{ in het punt } P\text{:} \\
 & \mu(f, C(Q)) = k(k-1) + \sum\limits_{j=1}^{s} (o_j - m_j) = I; \\
b. & Q \neq P \text{ op } L_i = 0\text{:} \\
 & \mu(f, C(Q)) = I + m_i; \\
c. & \mu(f, C(P)) = I + \sum\limits_{j=1}^{s} (v_j + m_j)\,[\Sigma v_j = k]; \\
d. & \mu(f, H) = 3I + \sum\limits_{j=1}^{s} (m_j - v_j).
\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (13)$$

Is één dezer multipliciteiten $= 0$, dan is P in dat geval geen snijpunt. Heeft één der polynomia f_{jr} een meervoudige factor (wat in het geval $k \geqq 2$ mogelijk is), *dan treedt in de vier relaties het teken $>$ in de plaats van het teken $=$.*

Bewijs. Men neme O_1 in het punt P.

Uit (4) en § 5, (1) en (2) volgt, dat in O_1

$\mu(f, H) = \mu(f, H^*)$ is.

K_j zij de grafiek, die uit H_j door vermenigvuldiging t.o.v. de oorsprong met het getal 3 ontstaat. Dan laat de vorm

$$g \equiv H^* \prod_{j=1}^{s} L_j^2 \equiv b_l x_1^{m-l} + \dots + b_m \quad (l = 3k - 4 + 2s;\ m = 3n - 4 + 2s)$$

met betrekking tot de vorm L_j de grafiek K_j toe.

Om het te zien, neme men de rechte

$$L_j \equiv d_j x_2 - c_j x_3 = 0$$

als driehoekszijde $x_2 = 0$. Dan is $c_j = 0$, $d_j = 1$.
Men kan dat met een transformatie § 7, (20) bereiken.
Hierbij is de vorm g covariant, want H^* is wegens (4) covariant.
De index j van de beschouwde raaklijn zal even worden weggelaten.
§ 7, (13) vereenvoudigt zich hier tot

$$a_{k+i} \equiv u_i x_2^{y_i} x_3^{k+i-y_i} + \text{(termen van hogere graad in } x_2).$$

Hierin is $u_i = 0$, als y_i niet geheel is;

$$f_r [= f_{jr}] \equiv \sum_{i=p_{r-1}}^{p_r} u_i x^{p_r - i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

De vormen

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_2 \equiv f'_2 \prod\limits_{a=1}^{s} L_a \equiv \prod\limits_{a \neq j} L_a \times \sum\limits_{i=0}^{n-k} (y_i u_i x_2^{y_i} x_3^{k+i-y_i} + \ldots) \cdot x_1^{n-k-i}, \\ f'_3,\ f''_{33}, \\ \varphi_{22} \equiv f''_{22} \prod\limits_{a=1}^{s} L_a^2,\ \varphi_{23} \equiv f''_{23} \prod\limits_{a=1}^{s} L_a, \end{array}\right\} \quad (15)$$

geschreven als polynomia in x_1 van de formele graad $n-k$ (De hoogste coëfficiënt kan nul zijn), laten met betrekking tot x_2 alle de grafiek $H\,[= H_j]$ toe. Verder zij

$$\left.\begin{array}{r} y_i = y_{p_r} + t_r \cdot (p_r - i) \quad (p_{r-1} \leqq i \leqq p_r), \\ C = \prod\limits_{a \neq j} L_a(0, 1)\ [\neq 0] \quad \text{(a variabele index)} \end{array}\right\} \ . \quad (16)$$

en telkens P een polynomium of constante.
Dan kan men de aan f_r analoge, tot de vormen (15) behorende, polynomia schrijven:

$$\left.\begin{array}{ll} (\varphi_2)_r & \equiv C \sum\limits_{i=p_{r-1}}^{p_r} y_i u_i x^{p_r - i} \equiv (\text{Vgl. } (14))\ C \cdot t_r \cdot x \cdot \dfrac{df_r}{dx} + P \cdot f_r, \\ (f'_3)_r & \equiv \Sigma (k + i - y_i) u_i x^{p_r - i} \equiv -(t_r + 1) \cdot x \cdot \dfrac{df_r}{dx} + P \cdot f_r, \\ (\varphi_{22})_r & \equiv C^2 \Sigma y_i (y_i - 1) u_i x^{p_r - i}, \\ (\varphi_{23})_r & \equiv C \Sigma y_i (k + i - y_i) u_i x^{p_r - i}, \\ (f''_{33})_r & \equiv \Sigma (k + i - y_i)(k + i - y_i - 1) u_i x^{p_r - i} \\ & \qquad\qquad\qquad (r = 1, 2, \ldots, h\,[= h_j]). \end{array}\right\} \ . \ . \quad (17)$$

Voor de vorm g kan men schrijven:

$$g \equiv \varphi_2^2 f''_{33} - 2\, \varphi_2 f'_3 \varphi_{23} + f'^2_3 \varphi_{22}.$$

Als men § 7, (12) op elk der drie termen T in het tweede lid hiervan twee maal toepast, ziet men, dat T met betrekking tot x_2 de grafiek $K = 3 \cdot H$ toelaat en dat het bijbehorende polynomium T_r een product van drie polynomia (17) is. Ook de vorm g laat dus met betrekking tot x_2 de grafiek K toe en men vindt door optelling:

$$g_r \equiv C^2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{df_r}{dx}\right)^2 \times \{ \sum_{i=p_{r-1}}^{p_r} [t_r^2 (k+i-y_i)(k+i-y_i-1) +$$
$$+ 2t_r (t_r+1) y_i (k+i-y_i) + (t_r+1)^2 y_i (y_i - 1)] \cdot u_i \cdot x^{p_r - i} \} + P \cdot f_r.$$

Hierin is wegens (16)

$$[\ldots]_i = (t_r(k+i)+y_i)^2 - t_r^2 (k+i) - (2t_r+1) y_i =$$
$$= - t_r (t_r+1)(p_r - i) + C',$$

waarin C' niet van i afhangt;

$$\{\ldots\} \equiv - t_r \cdot (t_r+1) \cdot x \cdot \frac{df_r}{dx} + P \cdot f_r.$$

Ten slotte komt er dus:

$$g_r \equiv - C^2 \cdot t_r \cdot (t_r+1) \cdot x^3 \cdot \left(\frac{df_r}{dx}\right)^3 + P \cdot f_r.$$

Daar $R(f_r, x) = \pm$ (een macht van u_{p_r}) $\neq 0$ is, vindt men voor elke index $j = 1, 2, \ldots, s$:

$$R(f_{jr}, g_{jr}) = C_j \times R\left(f_{jr}, \frac{df_{jr}}{dx}\right)^3 \quad (1 \leqq r \leqq h_j;\ C_j \neq 0).$$

f_{jr}, g_{jr} zijn invariant bij een transformatie § 7, (20). Men kan dus de bovenstaande resultanten in één en dezelfde coördinatendriehoek beschouwen. Uit de stelling van § 7 en de bekende eigenschap van discriminanten volgt dan:
Hebben de polynomia f_{jr} slechts éénvoudige factoren, dan is in het punt O_1

$$\mu(f, g) = k(3k - 4 + 2s) + \tfrac{1}{2}\ \ 2 \cdot 3 \sum_j \sum_r \{ (p_r - p_{r-1})(y_{p_{r-1}} + y_{p_r}) \}_j =$$
$$= 3k(k-1) + 3 \Sigma o_j - k + 2ks,$$

verder:

$$\mu(f, g) - \mu(f, H) = 2 \Sigma m_j + 2ks.$$

Door aftrekking volgt hieruit (13) d.

Om (13) $a - c$ te bewijzen, werkt men analoog met krommen resp.

$$g \equiv C(Q) \prod_{a=1}^{s} L_a = 0,\ g \equiv C(Q) \prod_{a \neq i} L_a = 0,\ g \equiv C(O_1) = 0,$$

welke in O_1 een $(k+s-1)$ —, $(k+s-2)$ —, k-voudig punt hebben en met betrekking tot de vorm L_j $(j = 1, \ldots, s)$ de grafiek H_j toelaten (Zie (15)—(17)).

De formules van PLÜCKER.

1. Een raaklijn, waarvan de grafiek gelijk is aan het lijnstuk dat het punt (0, 1) met een punt (m', o) verbindt, heet een *buigraaklijn van de orde* $m' - 1$, in het geval van de orden 1, 0 ook een *gewone buigraaklijn* resp. een *gewone raaklijn*.

Het bijbehorende polynomium

$$f' \equiv ax^{m'} + b$$

heeft éénvoudige factoren. Hier is

$$o' = m'$$

het dubbele van de oppervlakte van de driehoek tussen de assen en het lijnstuk. Een tweevoudig punt (dubbelpunt) met twee van zulke raaklijnen heet een *knooppunt*. Hiervoor is

$$I = 2 \cdot 1 + \Sigma\,(m' - m') = 2,$$

$$\mu(f, H) = 6 + \Sigma\,(m' - 1),$$

gesommeerd over de beide raaklijnen.

2. Een raaklijn met als grafiek het lijnstuk dat een punt $(0, v')$ met het punt $(1, 0)$ verbindt, heet een
keerraaklijn van de orde $v' - 1$, in het geval van de orde 1 een *gewone keerraaklijn*. Hier is

$$f' \equiv ax + b \text{ lineair}, \quad o' = v';$$

een dubbelpunt met een gewone keerraaklijn heet een *Keerpunt*. Dan is

$$I = 2 \cdot 1 + 2 - 1 = 3,$$

$$\mu(f, H) = 3 \cdot 3 + 1 - 2 = 8.$$

Heeft een kromme van de graad n en de klasse m geen andere meervoudige punten dan d knooppunten en q keerpunten en is b het aantal van de naar orde getelde buigraaklijnen, dan is

$$m = n\,(n-1) - 2d - 3q; \qquad b = 3n\,(n-1) - 6\,d - 8q. \quad . \quad (18)$$

3. Zijn er in een k-voudig punt P niet anders dan s' raaklijnen
$L' = 0$ van het type 1 $(v' = 1,\ o' = m')$ en s'' raaklijnen
$L'' = 0$ van het type 2 $(m'' = 1,\ o'' = v'')$, dan is $\Sigma\, v'' = k - s'$,

$$I = k(k-1) + \Sigma\,(v'' - 1) = k^2 - s' - s'';$$

$$\mu\,(f,\,H) = 3I + \Sigma(1 - v'') + \Sigma(m' - 1) = 3k^2 - k - 2s' - 2s'' + \Sigma(m' - 1).$$

Zo'n punt telt men voor

$$d_1 = \tfrac{1}{2}k\,(k-3) + s' + s'' \quad \text{knooppunten en}$$

$$q_1 = k - s' - s'' \qquad \text{keerpunten,}$$

in overeenstemming met de vergelijkingen

$$2d_1 + 3q_1 = I, \quad 6d_1 + 8q_1 = \mu(f, H) - \Sigma\,(m' - 1).$$

4. In een k-voudig punt met slechts één raaklijn, die het verbindingslijnstuk der punten $(0, k)$ en $(k, 0)$ tot grafiek heeft en een polynomium

$$f \equiv ax^k + \ldots + bx + c$$

met éénvoudige factoren tot begeleidend polynomium heeft (een volledige rakingsknoop) zijn er k gewone, lineaire, takken, die elkaar twee aan twee minimaal raken.
Hier is $o = k^2$,

$$I = 2k(k-1), \quad \mu(f, H) = 3I + k - k = 3I.$$

Men telt zo'n punt voor $k(k-1)$ knooppunten.

Heeft een kromme slechts meervoudige punten van de types 3 en 4 en telt men deze op de aangegeven wijze voor knooppunten en keerpunten, dan blijven de formules (15) van kracht.

Thans zij iets algemener $f = 0$ een kromme, waarvoor (13) in alle meervoudige punten nog geldig is (Hiertoe moeten een aantal polynomia enkelvoudige factoren hebben).
Dan ziet men dadelijk, dat voor elk punt P der kromme de raaklijnen $L_j = 0$ in P de meetkundige plaats van alle punten Q vormen, waarvoor

$$\mu_P(f, C(Q)) > I_P$$

is. Geeft men (Zie (13)) aan de raaklijn $L_i = 0$ in P, opgevat als raaklijn vanuit een punt Q, de multipliciteit

$$\varepsilon_i(Q) \begin{array}{ll} = m_i & (Q \neq P); \\ = m_i + v_i & (Q = P); \end{array}$$

dan kan men (13) $a - c$ in één formule samenvatten:

$$\mu(f, CTQ)) = I + \Sigma' \varepsilon_j(Q), \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

gesommeerd over de indices j der raaklijnen $L_j = 0$, welke door het punt Q gaan.

De raaklijnmultipliciteit ε is projectief invariant.

Raakt een rechte in h van zijn punten aan de kromme $f = 0$, dan is zijn totale multipliciteit gelijk aan de som van h multipliciteiten. Uit (12) en (13) volgt nu verder:

Stelling 2. *Voor elk punt Q van het projectieve vlak is de som van de multipliciteiten van de raaklijnen van de kromme $f = 0$, die door het punt Q gaan, gelijk aan de klasse m van de kromme.*