VERHANDELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde - Weerkunde en Ingenieurswetenschappen)

DEEL VII

MET 19 PLATEN

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER
April 1901

Gedrukt bij Joh. Enschedé en Zonen. — Haarlem.

INHOUD.

1. S. L. VAN OSS. Das regelmässige Sechshundert-Zell und seine Selbstdeckenden Bewegungen. (Mit 14 Tafeln).

2. E. MULDER. Over peroxy-zwavelzuur zilver en peroxy-azijnzuur zilver. (6e Verhandeling).

3. ALICIA BOOLE STOTT. On certain series of sections of the regular four-dimensional Hypersolids. (With 5 plates).

4. P. H. SCHOUTE. Les hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions (Etude de géométrie énumérative).

5. R. SISSINGH. Propriétés générales des images formées par des rayons centraux traversant une série de surfaces sphériques centrées.

6. E. MULDER. Over peroxy-azijnzuur zilver en, als vervolg, over peroxy-zwavelzuur zilver. (7e Verhandeling).

7. J. M. VAN BEMMELEN. Bijdrage tot de wetenschappelijke biographie van G. J. MULDER. Historisch-kritische beschouwing van zijn werk: „De scheikunde der bouwbare aarde."

Das regelmässige Sechshundertzell und seine Selbstdeckenden Bewegungen

VON

S. L. VAN OSS.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VII. N°. 1.

(Mit 14 Tafeln.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
December 1899.

Das regelmässige Sechshundertzell und seine selbsdeckenden Bewegungen

VON

S. L. VAN OSS.

Wesentliche Grundlage dieser Arbeit sind die hierbei vorgelegten Projectionen der Tafeln III bis VIII. Die Projectionen der Tafeln I und II wurden schon in meiner Inaugural-Dissertation [1]) publicirt und untersucht. Ich reproducire sie hier in der Meinung, dass ein Überblick über die sämtlichen regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen wohl erwünscht sei, zumehr weil die Punktgruppen der regelmässigen Z^{600} und Z^{120} diejenigen der einfacheren Zelle enthalten. Das zu vergleichende Material liegt also sämtlich vor. Auch die beiden Tafeln IX und X, welche Projectionen des Z^{120} enthalten, lasse ich ausser Betracht. Sie sind nur der Vollständigkeit wegen hinzugefügt worden. Ihre Leistungsfähigkeit bei irgend welcher geometrischen Untersuchung, dieses Gebilde betreffend, ist wohl nicht fraglich. Ohne Weiteres liefern sie die von Herrn P. H. Schoute [2]) behandelten räumlichen Projectionen nach den Richtungen der ersten, zweiten und dritten Querlinien, während sie mittels sehr einfacher Constructionen die räumlichen Schnitte senkrecht zu diesen Querlinien zu bestimmen gestatten. Sie sind aus den Z^{600} Projectionen der Tafeln IV und V abgeleitet worden. Ich habe es unterlassen alle den Tafeln III bis VIII entsprechenden Z^{120}-Pro-

[1]) Die Bewegungsgruppen der reg. Gebilde von vier Dimensionen 1894.

[2]) Reg. Schnitte und Projectionen des Z^{120} und Z^{600} Verhandelingen I II N°. 7. 1894.

jectionen zu construiren, weil die beiden an dieser Stelle vorgelegten allerdings hinreichend sind, eine klare Vorstellung des Z^{120} zu vermitteln.

Die Projectionen des Z^{600} wurden mit ausschliesslicher Rücksicht auf die Bestimmung der selbstdeckenden Bewegungen dieses Gebildes angefertigt. Idem sie aber, so zu sagen ungefragt, sich darboten zu Bemerkungen allerlei Art, so habe ich im ersten Abschnitte dieser arbeit eenige Ergebnisse, welche ohne jede Construction aus denselben hervorgehen, zusammengestellt.

I.

1. Die Lage eines Gebildes im Raume von vier Dimensionen ist bestimmt durch seine Projectionen auf die Ebenen eines rechtwinkeligen Coordinatensystems. Von diesen Projectionen sind irgend zwei auf ein Paar normaler Ebenen schon genügend, die Lage anzugeben.

Es seien nun die Ebenen X_1OX_2, X_2OX_3, X_3OX_4, X_4OX_1, mit den positiven Halbachsen auf die Ebene des Papiers umgeklappt: OX_1 nach unten, OX_2 nach rechts, OX_3 nach oben, OX_4 nach links, es seien weiter A_{12}, A_{34} die Projectionen eines Punktes A auf X_1OX_2 und X_3OX_4, so lassen sich die Projectionen A_{23} und A_{41} sofort angeben.

Beachtet man nun, dass je zwei nebeneinanderliegende der umgeklappten Ebenen einen Coordinatenraum von drei Dimensionen bestimmen, und dass die Projection eines Punktes auf diesen Raum, durch die Projectionen auf die beiden Ebenen bestimmt wird, so lässt sich das obige System von vier Projectionen nach Belieben auch als die Projectionen auf die vier Coordinatenräume betrachten.

Nach diesem Prinzip habe ich nach den Angaben Puchta's [1]) die Projectionen der Tafel III gezeichnet, und durch Drehung und Doppeldrehung um X_2OX_3 und X_4OX_1 die übrigen Z^{600}-Projectionen hergeleitet. (Ich bin der Puchta'schen Bezeichnung nicht gefolgt, weil es mir zweckmässiger erschien, je zwei diametral gegenübereinanderliegende Ecken durch gleiche positive und negative Zahlen zu bezeichnen).

---

[1]) Wiener Sitzungsberichte. Bd. 95. 1887.

2. Aus irgend welchem dieser Projectionensysteme lässt sich die die folgende Ubersicht über das Z^{600} herleiten.

Die Ecken des Zelles liegen, regelmässige Punktgruppen um irgend eine Hauptdiagonale bildend, in sieben zu dieser Diagonale normalen Räumen. So liegen z. B. um die Diagonale 1–1 herum:

2	—	13	in	einer	Ikosaedergruppe	I_1
14	—	33	„	„	Dodekaeder „	D
34	—	45	„	„	Ikosaeder „	I_2
46	—	−46	„	„	Ik. Dod. „	(ID)
−45	—	−34	„	„	Ikosaeder „	I_2'
−33	—	−14	„	„	Dodekaeder „	D'
−13	—	−2	„	„	Ikosaeder „	I_1'

Diese Punktgruppen liegen alle ähnlich, bezw. reciprok zu einander.

Diese Ecken sind auf folgende Weise durch Kanten verbunden:

180	Die Kanten des I_1, D, (ID), D', I_1' sind Kanten des Zelles.
60	Von 1 aus gehen 12 Kanten nach den Ecken des I_1; die ähnlich liegenden Ecken von I_1, I_2, I_2', I_1' sind nach der Reihe mit einander verbunden, und die Ecken des I_1' mit −1.
2×120	Die Ecken je einer Seitenfläche des D (D') sind verbunden mit den zu dieser Fläche reciprok liegenden Ecken des I_1 und I_2. (I_1' und I_2').
2×60	Die Ecken je einer I-Fläche des (ID) sind verbunden mit der zu dieser Fläche reciproken Ecke des D und des D'.
2×60	Die Ecken je einer D-Fläche des (ID) sind verbunden mit der zu dieser Fläche reciproken Ecke des I_2 und des I_2'.

Die 600 Seitentetraeder liegen wie folgt:

2×20	Tetraeder	von	1	und	— 1	nach	den	Seitenflächen	des	I_1 und des I_1'.
2×20	„	„	den	Ecken	des	D	und	des D'	nach den	Sfl. des I_1 und des I_1'.
2×20	„	„	„	„	„	D	„	„ D'	„ „	I-Fl. „ (ID).
2×30	„	„	„	Kanten	„	D	„	„ D'	„ „	Kanten des I_1 und des I_1'.
5×12	„	„	„	Verbindungen		I_1	I_2	„	„ „	„ D.
5×12	„	„	„	„		I_2	I_2'	„	„ „	„ (ID).
5×12	„	„	„	„		I_2'	I_1'	„	„ „	„ D'.
2×120	„	„	„	Ecken des I_2 und des I_2'				„	„	Flächen welche (ID) mit D und mit D' verbinden.

3. Betrachten wir die vorliegenden Projectionensysteme aus dem Gesichtspunkte, dass je zwei nebeneinanderliegende Projectionen die Projection auf einen Coordinatenraum bestimmen, so fällt es auf, dass die Tafeln III, IV und V gerade die von Prof. Schoute behandelten regelmässigen Projectionen liefern:

Die linke, wie die untere Hälfte der Tafel IV und der Tafel V liefern die Projection des Z^{600} in der Richtung einer Hauptdiagonale D.

Die rechte, wie die obere Hälfte der Tafel V liefern die Projection in der Richtung einer ersten Querlinie Q_1.

Die rechte, wie die obere Hälfte der Tafel IV liefern die Projection in der Richtung einer zweiten Querlinie Q_2.

Irgend welche Hälfte der Tafel III liefert die Projection in der Richtung einer dritten Querlinie Q_3.

Bezeichnen wir mit d, q_1, q_2 die Hauptdiagonalen und Querlinien des Gebildes I_1 und mit s den Schnitt zweier Seitenflächen desselben, die in einer Ecke, doch nicht in einer Kante zusammenstossen, so ist leicht zu sehen, dass:

D	$\pm$ 56	parallel ist zu q_1 (4 12) (7 9)
Q_1	$\pm$ (34 −45)	„ „ „ d 2 13
Q_2	$\pm$ (58 59 −51)	„ „ „ q_2 (5 6 8) (3 10 11).
Q_3	$\pm$ (34 48 49 −45)	„ „ „ s (3 7 10) (3 4 11).

Die Projection des Z^{600} in den Richtungen der D bzw. der Q_1, Q_2, Q_3 gehen also aus dem Zelle hervor, wenn man die um eine Diagonale herumliegenden Gebilde I_1, D, I_2, (ID), I_2', D', I_1' ersetzt durch ihre Projectionen in den Richtungen der q_1, bzw. der d_1, q_2, s.

4. Ein anderes Problem, das zu den Projectionen der Tafel III in naher Beziehung steht, ist die Construction eines Schlegelschen Modelles.

Bekanntlich beansprucht das Modell des Brill'schen Verlags nicht, ein treues Abbild eines *regelmässigen* Z^{600} zu sein. Schon aus der Projection in der Richtung einer Q_3, welche als ein besonderer Fall des Schlegelschen Modelles betracht werden kann, geht hervor, dass die inneren „Drahtkörper", wie das äussere, eine tetraedrische Symmetrie zeigen sollten. Um dies deutlich zu machen, habe ich, aus der Tafel III die den inneren Drahtkörpern entsprechenden Gebilde herausgenommen und in der Tafel III[a] besonders gezeichnet. Wenn auch diese nicht den Drahtkörpern einer centralen Pro-

jection ähnlich sind, so kommen sie doch, was ihre Symmetrie betrift mit denselben uberein, und setzen genügend in 's Licht, wie sehr das jetzige Modell von einer centralen Projection eines *regelmässigen* Z^{600} abweicht.

Es wäre eine geringe Mühe aus den Projectionen der Tafel III eine centrale Projection abzuleiten. Es würde sich dann empfehlen das Projectionscentrum in der umgeschriebenen Hypersphär zu nehmen. Es werden dann die Projectionen aller in Kreisen liegenden Ecken wieder in Kreise fallen. Normale Kreispaare werden in einer solchen Projection zu conjugirten Kreispaaren [1]) u. s. w. Das Modell würde ein Gerüste von 36 conjugirten Paaren von Zehnecken zeigen, welche sich zu je sechs in den 120 Ecken schneiden. (Man vergleiche II 4).

Vielleicht wäre es am zweckmässigsten das Projectionscentrum in einer Ecke zu wählen. Das Modell würde alsdann eine ikosaedrische Symmetrie erhalten. Die Ecken der oben erwähnten Gebilde $I_1, D_1\ I_2, (ID), I_2', D', I_1'$ würden sich in concentrische Schichten Lagern, und zugleich mit dem Erlangen der Vortheile einer stereographischen Projection, würde der Übelstand des jetzigen Modelles, dass die Drahtkörper Abbildungen von in gebrochenen Räumen liegenden Gebilden sind, vermieden.

---

[1]) Zwei Kreise welche bezüglich einander so liegen, dass jeder Kugel durch einen derselben von den andern normal geschnitten wird, heissen conjugirt. Über die Bedeutung solcher Kreispaare für die Abbildung der Bewegungen im vierdimensionalen Räume auf den dreidimensionalen, sieh E. Goursat: Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace. Annales de l'École normale superieure *t*.6 1889. In dieser Arbeit werden alle endlichen Gruppen der orthogonalen Substitutionen von vier Variabeln aufgezählt.

Über Drehungen und Doppeldrehungen um ein Paar conjugirter Kreise sieh des Verfassers Aufsatz in Nieuw Archief IV 1898.

II.

1. Zu der Bestimmung der selbstdeckenden Bewegungen des Z^{600} schicken wir die folgenden Prinzipien voraus:

Eine einfache Drehung um eine Ebene lässt die Projection auf diese Ebene ungeändert, während sie in der Projection auf die normale Ebene eine Drehung hervorbringt.

Eine Doppeldrehung um ein Paar normaler Ebenen erzeugt in den beiden Projectionen auf dieselben eine Drehung um den gemeinsamen Punkt.

Wenn die Substitution der Ecken, welche einer selbstdeckenden Drehung der einen Projection entspricht, die andere, zu dieser normale, gänzlich ungeändert lässt, so entspricht dieser Substitution eine selbstdeckende einfache Rotation des projicirten Gebildes.

Bringt die erwähnte Substitution auch eine Drehung in der normalen Projection hervor, so ist die erzeugende Bewegung eine selbstdeckende Doppeldrehung.

Ist aber die Substitution, welche einer selbstdeckenden Drehung in der einen Projection entspricht, in der andern weder identisch noch einer Drehung aequivalent, so entspricht derselben keine selbstdeckende Bewegung des projicirten Gebildes.

Zu jeder selbstdeckenden Bewegung eines Gebildes gehört eine oder gehören ein Paar regelmässiger Projectionen. Umgekehrt wird die Kenntnis aller regelmässigen Projectionen zu der Bestimmung der selbstdeckenden Bewegungen führen.

Es ist hierbei zu bemerken, dass eine Doppeldrehung, deren beide Componente einander gleich sind, oder, wie diese von Herrn W. A. Wythoff [1]) genannt wurde, eine *gleichschenkliche* Doppeldrehung, zu einer unendlichen Anzahl normaler Ebenenpaare, und desshalb auch zu einer unendlichen Anzahl regelmässiger Projectionen gehört. Wir werden aber im Folgenden sehen, dass die vorliegenden Projectionen gerade diejenige sind, welche zu der Bestimmung der selbstdeckenden Bewegungen des Z^{600} und des Z^{120} nötig sind.

---

[1]) W. A. Wythoff. De Biquatonion als Bewerking in de ruimte van vier afmetingen. Diss. Amsterdam 1898.

2. Tafel III.

Die Projectionsebenen [1]) enthalten, je nach dem Schema $D\ Q_2\ Q_1\ Q_3\ Q_1\ Q_2\ D\ Q_2\ Q_1\ Q_3\ Q_1\ Q_2$, zwei Hauptdiagonalen, vier erste, vier zweite, und zwei dritte Querlinien, zu normalen Paaren angeordnet. Sie schneiden acht Seitenflächen und vier Seitentetraeder.

Die Ebene $X_3 O X_4$, zum Beispiel, geht durch die Ecke 1, durch den Mittelpunkt der Seitenfläche 1412, durch die Mitte der Kante 4 12, durch den Mittelpunkt des Tetraeders 4 12 23 25, u. s. w.

Indem also jede Ebene, zu welcher eine Projection wie die vorliegende gehört, zugleich 8 Seitenflächen normal in zwei symmetrische Teile zerlegt, oder vier Tetraeder normal in einer ersten Querlinie desselben schneidet, ergibt sich für die Anzahl solcher Ebenen $\frac{1200}{8} \times 3$ oder $\frac{600}{4} \times 3 = 450$. Diese Ebenen sind zu 225 normalen Paaren angeordnet.

Wenn man das System dieser Projectionen mit den quadratischen Projectionen des Z^{24} (Tafel II) vergleicht, so sieht man unmittelbar, dass die Z^{600}-Ecken $\pm$ (1 56 46 51 15 17 21 33 18 22 26 30) eine Z^{24}-Punktgruppe bilden. Indem es nun 9 Ebenenpaare gibt, auf welche das Z^{24} sich so projicirt, so ergibt sich für die Anzahl solcher Punktgruppen im Z^{600}: $\frac{225}{9} = 25$. Selbstredend gibt es dann 75 Z^8- und Z^{16}-Punktgruppen (vgl. Tafel I).

Die Projectionen der Ecken sind in neun Kreisen quadratisch angeordnet, der nte Kreis, von aussen ab gezählt, irgend einer Projection, entspricht dem nten von innen ab gezählten der zu dieser normalen Projection. Die Projectionen der Ikosaeder, in deren Ecken die von den Zellecken ausgehenden Kanten enden, zeigen sich daher in neun verschiedenen Formen.

Die Ecken, deren Projectionen auf eine Ebene zu zweien zusammenfallen, haben ihre Projectionen auf der normalen Ebene in bezüglich dem Mittelpunkt gegenübereinanderliegenden Punkten. Die Ecken, deren Projectionen auf eine Ebene zu vieren zusammenfallen, haben ihre Projectionen auf die normale Ebene in den Ecken eines Quadrats.

Eine Substitution der Ecken, die einer Drehung $^1/_2$ irgend einer der vier Projectionen entspricht, lässt entweder die normale Pro-

---

[1]) Hier wie in der Folge wird der Coordinatenursprung im Zellmittelpunkt gedacht.

jection ungeändert, oder sie bringt auch in letzterer die Drehung $^1/_2$ hervor. Hieraus folgt dass die einfache Drehung $^1/_2$ und die Doppeldrehung $^1/_2$ $^1/_2$ zu der Bewegungsgruppe des Z^{600} gehören.

Eine Substitution der Ecken, welche einer Drehung $^1/_4$ irgend einer Projection entspricht, kann nur dann eine Operation der Z^{600} Gruppe sein, wenn sie auch eine Drehung $^1/_4$ in der normalen Projection erzeugt:

Erteilen wir z. B. der Projection auf $X_3\,OX_4$ die Drehung $(^1/_4)_{34}$. Dieser Drehung entsprechen sehr viele Substitionen der Ecken; aber nur zwei derselben sind selbstdeckenden Bewegungen aequivalent, nämlich: (1 56 −1 −56) (51 46 −51 −46) (2 60 −2 −60)... und (1 56 −1 −56) (51 −46 −51 46) (2 −57 −2 57)... Die erste entspricht der Doppeldrehung $(^1/_4)_{34}$ $(^1/_4)_{21}$, die zweite der Doppeldrehung $(^1/_4)_{34}$ $(^1/_4)_{12}$.

Zu jedem der 225 Ebenenpaare gehören also die folgenden Operationen der Z^{600} Gruppe:

2 einfache Drehungen $^1/_2$
4 Doppeldrehungen $^1/_4$ $^1/_4$
1 Doppeldrehung $^1/_2$ $^1/_2$
1 identische Operation.

Zu der Aufzählung der sämtlichen zu diesen Ebenenpaaren gehörigen Operationen ist zu bemerken, dass die Doppeldrehungen $^1/_4$ $^1/_4$ und $^1/_2$ $^1/_2$ solche sind, zu welchen eine unendliche Anzahl von Trägern gehört. Es erhebt sich also die Frage, ob diese wohl alle von einander verschieden seien, und, wenn nicht, wie viele der 225 Ebenenpaare zugleich als Träger einer einzigen Doppeldrehung auftreten? Nun leuchtet ein, dass eine Substitution der Ecken, welche einer Droppeldrehung $^1/_4$ $^1/_4$ aequivalent ist, aus 30 Cykeln, je von vier Elementen, besteht. Jeder Cykel entspricht einer Drehung $^1/_4$ einer der 450 Ebenen in sich selbst; es bewegen sich also jedesmal 15 Paare in sichselbst, und es gibt, also nur $\frac{225}{15} \times 4 = 60$ unter einander verschiedene Doppeldrehungen $^1/_4$ $^1/_4$.

Die Doppeldrehung $^1/_2$ $^1/_2$ vertauscht je zwei diametral-gegenüberliegende Ecken; es ist also ganz gleichgültig, welches Ebenenpaar man als Träger betrachtet. Diese Operation kommt, wie die identische, nur einmal in der Gruppe vor.

Die zu den sämtlichen 225 Ebenenpaaren gehörigen Operationen der Z^{600} Gruppe sind also:

450	einfache Drehungen	$^1/_2$	
60	Doppeldr.	$^1/_4$	$^1/_4$
1	„	$^1/_2$	$^1/_2$
1	identische Operation.		

3. Tafel IV.

Durch geeignete Doppeldrehung um $X_1\ O\ X_2$ und $X_3\ O\ X_4$ lässt sich das Z^{600} der vorigen Tafel in eine solche Lage bringen, dass die Seitenfläche 34 46 –54 zu der Ebene $X_2\ O\ X_3$ parallel wird; zugleich werden dann auch die Seitenflächen 39 52 –44, 41 –36 –55, u. s. w. parellel, und 5 6 8, 3 10 11, 51 58 59 u. s. w. normal zu dieser Ebene. Die Projectionen auf $X_1\ O\ X_4$ und $X_2\ O\ X_3$ werden dann, wie es die Figur zeigt, regelmässig-sechseckig.

Die letztgenannten Projectionsebenen enthalten je abwechselnd 3 Hauptdiagonalen und 3 zweite Querlinien; sie sind zu sechs Seitenflächen parallel und schneiden eine gleiche Anzahl derselben normal in ihren Mittelpunkten. Es gibt also $\frac{1200}{6} = 200$ Ebenen, zu 100 normalen Paaren auf welche das Z^{600} sich regelmässig-sechseckig projicirt.

Die Ecken, deren Projectionen auf die eine Ebene zu dreien zusammenfallen, haben ihre Projectionen auf die normale Ebene in den Ecken eines regelmässigen Dreiecks. Die Ecken, deren Projectionen auf die eine Ebene zu sechsen zusammenfallen, haben ihre Projectionen auf die normale Ebene in den Ecken eines regelmässigen Sechsecks.

Es gibt eine Substitution der Ecken, welche eine Drehung $^1/_3$ in der einen sechseckigen Projection erzeugt, während sie in der zu dieser normalen Projection keine Änderung hervorruft. Hieraus folgt, dass die entsprechende einfache Drehung $^1/_3$ eine selbstdeckende Zellbewegung ist. Weil die Bewegungen um zwei normale Ebenen von einander unabhängig sind, so ist auch die Doppeldrehung $^1/_3$ $^1/_3$ eine Operation der Z^{600} Gruppe. Stellt man diese Bewegungen mit der Operation $^1/_2$ $^1/_2$ zusammen, so erfolgen noch die Doppeldrehungen $^1/_2$ $^1/_6$ und $^1/_6$ $^1/_6$.

Die zu einem Paare 6-eckiger Projectionen gehörige Untergruppe der Z^{600}-Gruppe besteht also aus den folgenden Operationen:

aus 4	einfachen Drehungen	$^1/_3$	
4	Doppeldrehungen	$^1/_6$	$^1/_2$
4	„	$^1/_3$	$^1/_3$

4	Doppeldrehungen	$^1/_6$	$^1/_6$
1	„	$^1/_2$	$^1/_2$
1	identischer Operation.		

Die Doppeldrehungen $^1/_3$ $^1/_3$ und $^1/_6$ $^1/_6$ sind aber nur zum Teil unter einander verschieden. Bei jeder dieser Bewegungen bewegen sich 10 der 100 Ebenenpaare in sich selbst; es ist desshalb nur der zehnte Teil untereinander verschieden.

Die sämtlichen zu den 100 Ebenenpaaren gehörigen Operationen der Z^{600} Gruppe sind also:

400	einfache Drehungen	$^1/_3$	
400	Doppeldrehungen	$^1/_6$	$^1/_2$
40	„	$^1/_3$	$^1/_3$
40	„	$^1/_6$	$^1/_6$

ausser der schon oben bestimmten Operation $^1/_2$ $^1/_2$ und der identischen Operation.

4. Tafel V.

Aus der vorigen Lage wird das Z^{600} durch eine einfache Drehung um $X_3\ O\ X_4$ mit der Kante 1 2 in die Ebene $X_2\ O\ X_3$ gebracht. Die Projectionen auf diese Ebene und auf $X_1\ O\ X_4$ gestalten sich dann, wie es die Figur zeigt, regelmässig-zehneckig.

Man sicht unmittelbar, dass diese Projectionsebenen je zehn Kanten enthalten, welche ein regelmässiges Zehneck bilden. Zugleich ergibt sich für, die Kantenlänge a_{600} der Wert $\frac{1}{2} R \sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Die Anzahl solcher Projectionsebenen ist $\frac{720}{10} = 72$, zu 36 normalen Paaren.

Hieraus folgt, das eine Hypersphär regelmässig umsponnen wird von 72 Kreisen zu 46 normalen Paaren, welche sich zu je sechs in den Ecken regelmässiger Zehnecke schneiden.

Die Ecken, deren Projectionen auf die eine Ebene zu je fünf zusammenfallen, haben ihre Projectionen auf die normale Ebene in den Ecken regelmässiger Funfecke, während die zehn äusseren Ecken der einen Projection den im Mittelpunkte der anderen zusammenliegenden entsprechen.

Die Drehung der Periode 5 irgend einer der zehneckigen Projectionen ergibt sich als einer selbstdeckenden einfachen Drehung des Z^{600} entsprechend.

Die Combination dieser einfachen Drehungen untereinander und mit der Operation $^1/_2$ $^1/_2$ erzeugt die zu jedem der 36 Ebenenpaare gehörige Untergruppe, welche aus den folgenden Operationen besteht:

4	einf. Drehungen	$^1/_5$
4	„ „	$^2/_5$
4	Doppeldrehungen	$^1/_{10}$ $^1/_2$
4	„	$^3/_{10}$ $^1/_2$
8	„	$^1/_5$ $^2/_5$
8	„	$^3/_{10}$ $^1/_{10}$
4	„	$^1/_{10}$ $^1/_{10}$
4	„	$^1/_5$ $^1/_5$
4	„	$^3/_{10}$ $^3/_{10}$
4	„	$^2/_5$ $^2/_5$
1	„	$^1/_2$ $^1/_2$
1	identischer Operation.	

Es lässt sich nun aus der Figur leicht nachweisen, dass bei jeder der gleichschenklichen Doppeldrehungen der Perioden 5 und 10 sechs gleichberechtigte normale Ebenenpaare sich in sich selbst bewegen. Bei der Aufzählung der sämtlichen zu den 36 Ebenenpaaren gehörigen Operationen sind diese also nur mit dem sechsten Teil in Rechnung zu bringen.

Man erhält also:

144	einf. Drehungen	$^1/_5$
144	„ „	$^2/_5$
144	Doppeldrehungen	$^1/_{10}$ $^1/_2$
144	„	$^3/_{10}$ $^1/_2$
288	„	$^1/_5$ $^2/_5$
288	„	$^1/_{10}$ $^3/_{10}$
24	„	$^1/_{10}$ $^1/_{10}$
24	„	$^1/_5$ $^1/_5$
24	„	$^3/_{10}$ $^3/_{10}$
24	„	$^2/_5$ $^2/_5$

Ausser der Operation $^1/_2$ $^1/_2$ und der identischen.

5. Es ist leicht zu sehen, dass wir zu der Construction der bisher betrachteten regelmässigen Projectionen des Z^{600} geführt wurden durch die Erkenntnis, dass in der Gruppe des Z^{600} Ikosaedergruppen enthalten sind. Dass es noch mehr regelmässige ebene

Projectionen geben muss, zeigt sich schon daraus, dass die durch jene bestimmten Operationen die Gruppe, welche offenbar von der Ordnung 7200 ist, noch nicht erschöpfen.

Die Anwendung der folgenden Sätze, deren Beweis ich unterdrücke, wird uns die Construction der übrigen regelmässigen Projectionen ermöglichen.

I. Es gibt zwei Systeme, je von ∞^2 Ebenen, deren beide Winkel, welche sie mit jeder einzelnen der Ebenen eines normalen Paares α bilden, gleich sind.

II. Eine gleichschenkliche Doppeldrehung um α herum erzeugt in allen Ebenen *eines* dieser Systeme eine Bewegung in sich selbst. Wenn man den Drehungssin *einer* der Componenten umkehrt, so bewegen sich die Ebenen des andern Systems in sich selbst.

III. Wenn die Ebenen eines normalen Paares α mit den Ebenen eines normalen Paares β *ungleiche* Winkel bilden, so gibt es zwei normale Ebenenpaare γ und δ, deren Ebenen mit denen der erstgenannten Paare zwei *gleiche* Winkel bilden.

Es seien $\alpha_1\ \alpha_2$, $\beta_1\ \beta_2$, $\gamma_1\ \gamma_2$, $\delta_1\ \delta_2$ die Ebenen der Paare $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. Der Doppelwinkel $(\alpha_1\ \beta_1)$ sei φ, ψ; so ist:

$$(\alpha_1\gamma_1)=(\alpha_2\gamma_2)=\frac{\varphi+\psi}{2}\ ,\ \frac{\varphi+\psi}{2}\ ;\quad (\beta_1\gamma_1)=(\beta_2\gamma_2)=\frac{\varphi-\psi}{2}\ ,\ \frac{\varphi-\psi}{2}\ ;$$
$$(\alpha_1\delta_1)=(\alpha_2\delta_2)=\frac{\varphi-\psi}{2}\ ,\ \frac{\varphi-\psi}{2}\ ;\quad (\beta_1\delta_1)=(\beta_3\delta_2)=\frac{\varphi+\psi}{2}\ ,\ \frac{\varphi+\psi}{2}\ ;$$
$$(\alpha_1\gamma_2)=(\alpha_2\gamma_1)=\frac{\varphi+\psi+\pi}{2},\ \frac{\varphi+\psi+\pi}{2};\quad (\beta_1\gamma_2)=(\beta_2\gamma_1)=\frac{\varphi-\psi+\pi}{2},\ \frac{\varphi-\psi+\pi}{2};$$
$$(\alpha_1\delta_2)=(\alpha_2\delta_1)=\frac{\varphi+\psi+\pi}{2},\ \frac{\varphi-\psi+\pi}{2};\quad (\beta_1\delta_2)=(\beta_2\delta_1)=\frac{\varphi+\psi+\pi}{2},\ \frac{\varphi+\psi+\pi}{2}.$$

IV. Wenn zu den obigen Ebenenpaaren α und β die beiden (rechts- und links-) gleichschenkligen Doppeldrehungen der Periode p, bzw. der Periode q gehören, so ist jedes der Paare γ und δ Träger einer *ungleichschenklige* Doppeldrehung, deren Periode das kleinste Multiplum von p und q ist.

Aus diesen Sätzen folgt unmittelbar, dass es noch regelmässige 12–, 20– und 30– seitige Projectionen geben muss; und zwar:

2 ×	15 ×	10	normale	Paare	12-seitiger,
2 ×	15 ×	6	„	„	20 „
2 ×	10 ×	6	„	„	30 „

Denn bezüglich der Doppeldrehungen $^1/_4$ $^1/_4$ sind von den 225 Ebenenpaaren, zu welchen sie gehören, nur 15 als untereinander nicht identisch zu rechnen; ebenso reducirt sich die Anzahl der regelmässig-sechsseitigen Projectionen bezüglich der Doppeldrehungen $^1/_6$ $^1/_6$ auf 10, und die regelmässig-zehnseitigen bezüglich der Doppeldrehungen $^1/_{10}$ $^1/_{10}$ auf 6.

6. Nach diesen Prinzipien habe ich die Tafeln VI, VII und VIII so construirt, dass alle von diesen abzulesenden *gleichschenklichen* Doppeldrehungen gerade diejenigen sind, welche die Tafeln III, IV und V schon zeigten.

Der Complicirtheit der neuen Projectionen wegen, sind in diesen Tafeln nur die Ecken des Z^{600} angegeben worden; von den Kanten sind nur solche gezeichnet, welche nötig waren zur Angabe der verschiedenen Projectionsformen der Ikosaeder, auf welche die in einer Ecke zusammenstossenden Seitentetraeder sich stützen. Die Tafeln VI^a VII^a und VIII^a zeigen die neuen Projectionen in pleno.

7. Tafel VI.

Die Ecken der 12-seitigen Projectionen sind in sieben Kreisen angeordnet. Der Mittlere und die zweiten Punktkreise, von innen wie von aussen her gerechnet, sind doppelt. Die 48 Ecken welche sich auf diesen zweiten Punktkreis projiciren, bilden zwei Z^{24}-Punktgruppen. (Man vergleiche die r-12-seitigen Z^{24}-Projectionen der Tafel II). Indem nun die Z^{600} Ecken 25 solcher Punktgruppen enthalten, und ein Z^{24} sich auf 24 normale Ebenenpaare regelmässig-12-seitig projicirt [1]), so folgt auch hieraus, dass es $\frac{25 \times 24}{2} = 300$ normale Ebenenpaare gibt, zu welchen regelmässig-12-seitige Z^{600}-Projectionen gehören.

Diese 300 Ebenenpaare bestimmen ausser den schon früher aufgezählten gleichschenklichen Doppeldrehungen der Perioden 2, 3, 4 und 6:

$300 \times 4 = 1200$ Doppeldrehungen $^1/_{12}$ $^5/_{12}$.

8. Tafel VII.

Die 180 Paare r-20-seitiger Projectionen bestimmen ausser den schon aufgezählten gleichschenklichen Doppeldrehungen der Perioden 2, 4, 5 und 10:

---

[1]) S. des Verfassers. Dissertation.

180 × 4 =	720	Doppeldrehungen	$^1/_{20}$	$^9/_{20}$
180 × 4 =	720	„	$^3/_{20}$	$^7/_{20}$

9. Tafel VIII.

Die 120 Paare r-30-seitiger Projectionen bestimmen ausser den schon aufgezählten gleichschenklichen Doppeldrehungen der Perioden 2, 3, 5, 6 und 10:

120 × 4	Doppeldrehungen	$^1/_{30}$	$^{11}/_{30}$
120 × 4	„	$^1/_{15}$	$^4/_{15}$
120 × 4	„	$^2/_{15}$	$^7/_{15}$
120 × 4	„	$^7/_{30}$	$^{13}/_{30}$

Hiermit sind die 7200 Operationen der $Z^{600/120}$-Gruppe alle aufgezählt.

10. Recapitulation.

Es gibt	225	normale	Paare	reg	-4-seitiger	Projectionen		P_4
„ „	100	„	„	„	6	„	„	P_6
„ „	36	„	„	„	10	„	„	P_{10}
„ „	300	„	„	„	12	„	„	P_{12}
„ „	180	„	„	„	20	„	„	P_{20}
„ „	120	„	„	„	30	„	„	P_{30}.

Diese bestimmen die 7200 Operationen der $Z^{600}/_{120}$. Gruppe wie folgt:

	P_4		
450	Operationen	II	
	P_6		
400	„	$^1/_3$	
400	„	$^1/_6$	$^1/_2$
	P_{10}		
144	„	$^1/_5$	
144	„	$^2/_5$	
144	„	$^1/_{10}$	$^1/_2$
144	„	$^3/_{10}$	$^1/_2$
288	„	$^1/_5$	$^2/_5$
288	„	$^1/_{10}$	$^3/_{10}$

	P_{12}	
1200	Operationen	$^1/_{12}$ $^5/_{12}$
	P_{20}	
720	„	$^1/_{20}$ $^9/_{20}$
720	„	$^3/_{20}$ $^7/_{20}$
	P_{30}	
480	„	$^1/_{30}$ $^{11}/_{30}$
480	„	$^1/_{15}$ $^4/_{15}$
480	„	$^2/_{15}$ $^7/_{15}$
480	„	$^7/_{30}$ $^{13}/_{30}$
	$P_4\ P_{12}\ P_{20}$	
60	„	$^1/_4$ $^1/_4$
	$P_6\ P_{12}\ P_{30}$	
40	„	$^1/_6$ $^1/_6$
40	„	$^1/_3$ $^1/_3$
	$P_{10}\ P_{20}\ P_{30}$	
24	„	$^1/_{10}$ $^1/_{10}$
24	„	$^1/_5$ $^1/_5$
24	„	$^3/_{10}$ $^3/_{10}$
24	„	$^2/_5$ $^2/_5$
	$P_4\ P_6\ P_{10}\ P_{12}\ P_{20}\ P_{30}$	
1	„	$^1/_2$ $^1/_2$
1	identische „	1.

11. *Erzeugung der Gruppe.*

Wir bezeichnen mit I die Ikosaedergruppe, welche den Punkt 1, mit I' die welche den Punkt 56 in sich sellbst überführt, und behaupten: Die Z^{600}-Gruppe wird durch die Combination der Gruppen Iund I' erzeugt. Denn man kann immer die Operationen $I_j\ I'_k\ I_l$ derart wählen dass ihre Combination $I_j\ I'_k\ I_l$ einer beliebigen Operation der Z^{600}-Gruppe acquivalent ist. (Sieh Tafel III).

Bezeichnen wir weiter mit V eine der beiden Doppeldrehungen, welche 1 in 56 überführen, so ist $I' = V^{-1}\,I\,V$; und es sei $I'_k = V^{-1}\,I_k\,V$. Die Operationen der Z^{600}-Gruppe sind also enthalten in der Formel $I_j\,V^{-1}\,I_k\,V\,I_l$.

Bemerken wir schliesslich, dass die Ikosaederoperationen enthalten sind in der Formel: (Sieh Klein's Vorlesungen ü. d. Ikosaeder)

$$S^\alpha T^\beta S^\gamma U^\delta \qquad \alpha, \gamma = 0, 1, 2, 3, 4 \qquad \beta, \delta = 0,1$$
$$S^5 = T^2 = (ST)^3 = U^2 = 1, \qquad U = S^2 T S^3 T S^2 T,$$

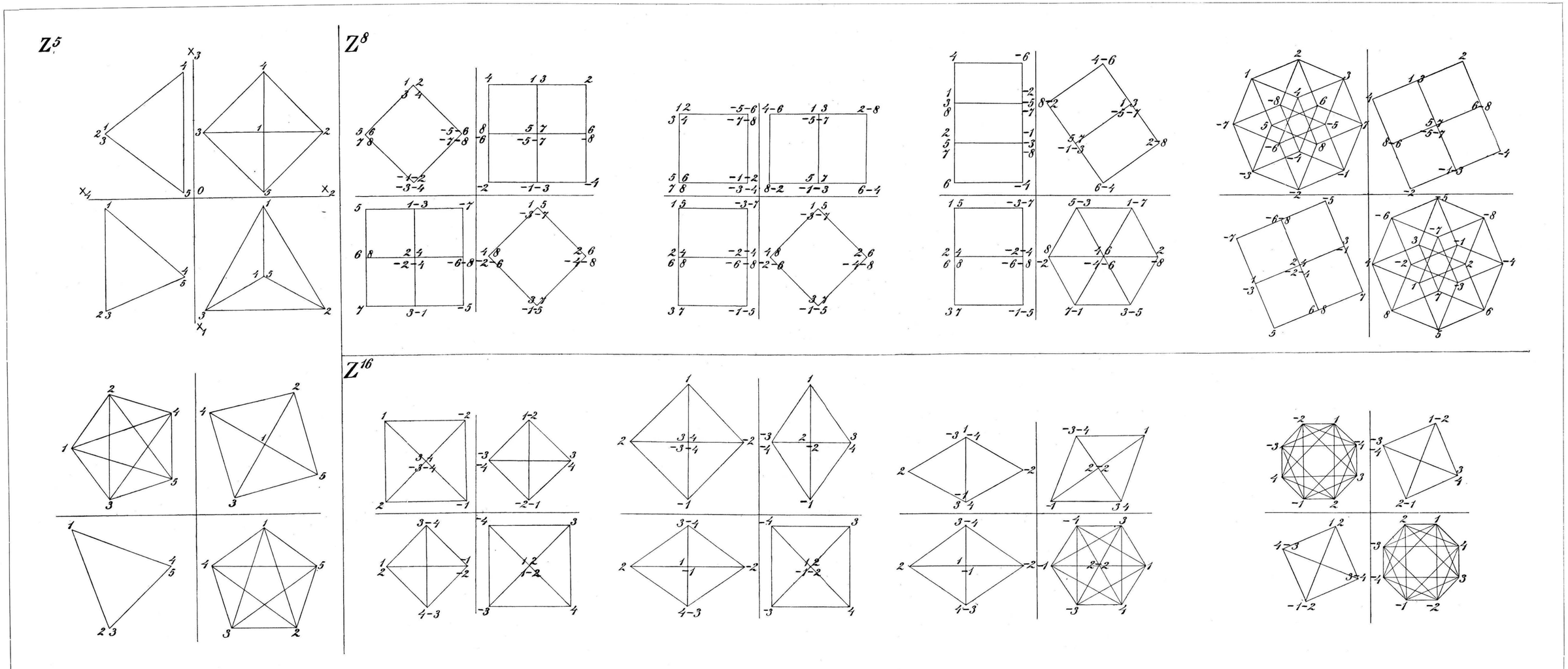
so finden wir, dass die Formel

$$S^\alpha T^\beta S^\gamma U^\delta V^{-1} S^{\alpha'} T^{\beta'} S^{\gamma'} U^{\delta'} V S^{\alpha''} T^{\beta''} S^{\gamma''} U^{\delta''}$$

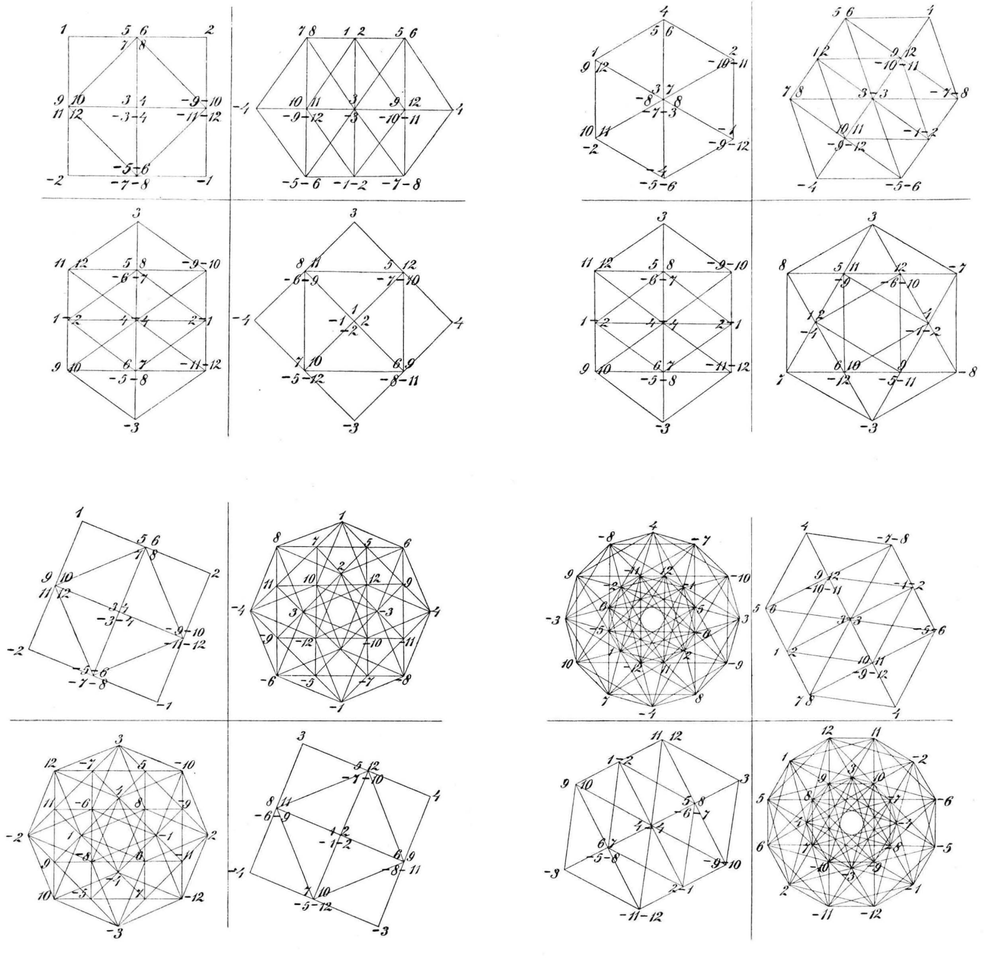
die 7200 Operationen der Z^{600}-Gruppe enthält.

Zalt-Bommel, Januar 1899.

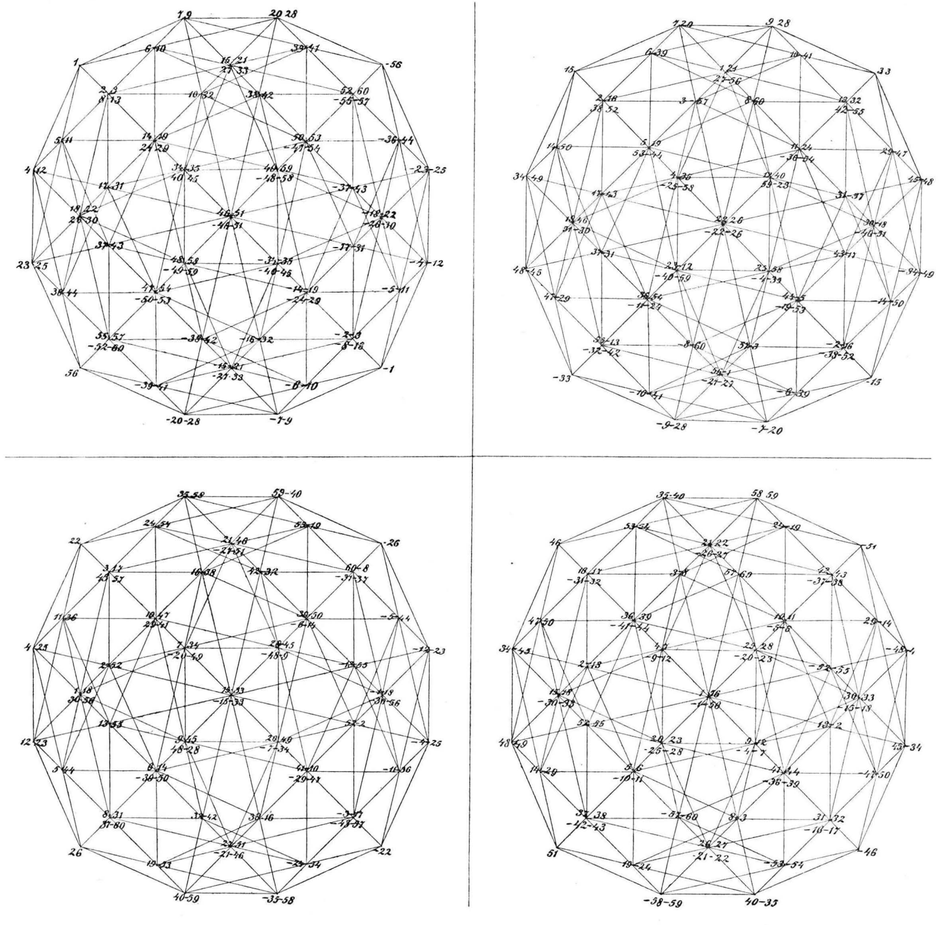
(4 December 1899).


Z5
Z8
Z16

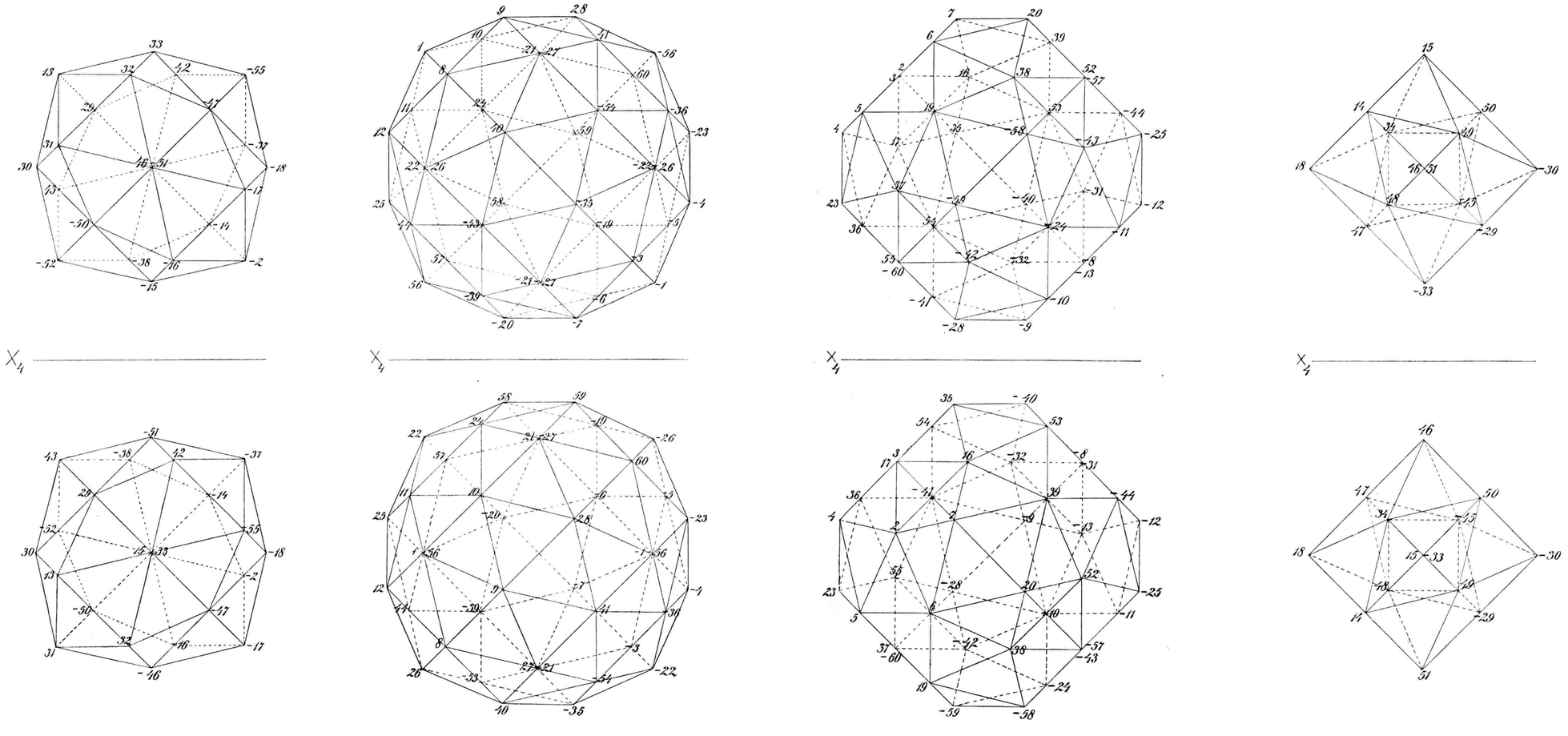
Z^{24}

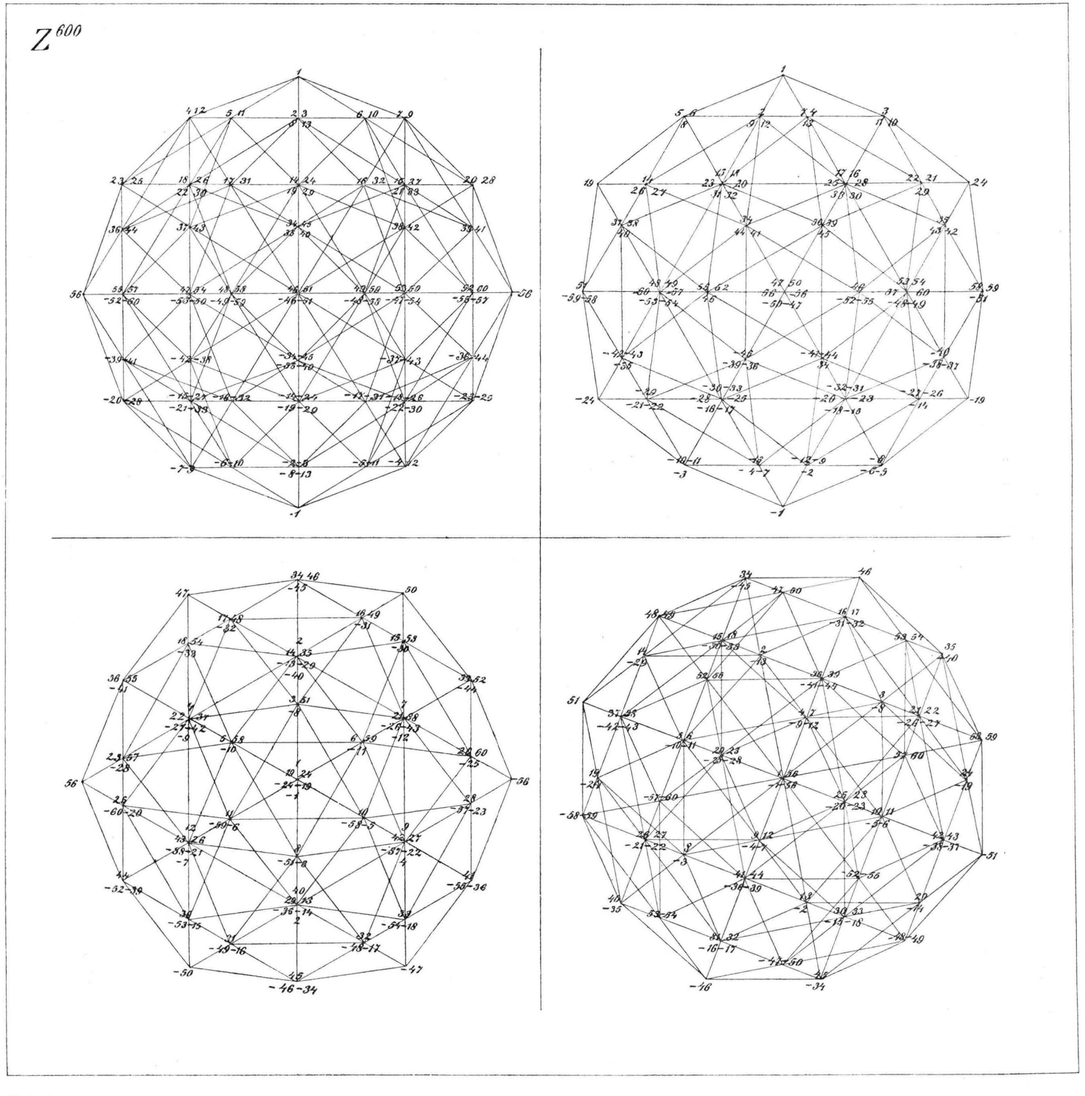


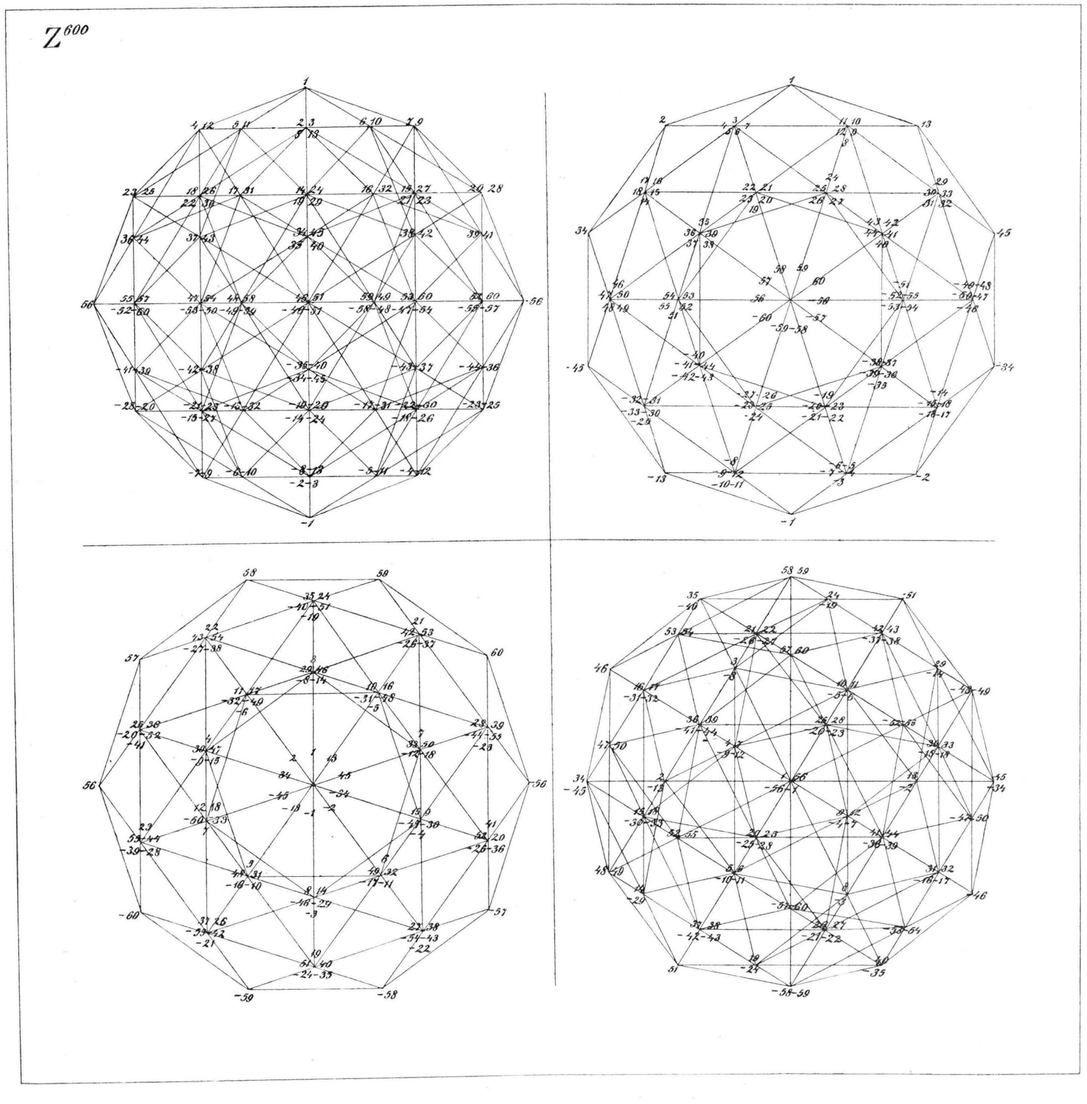
Z^{600}



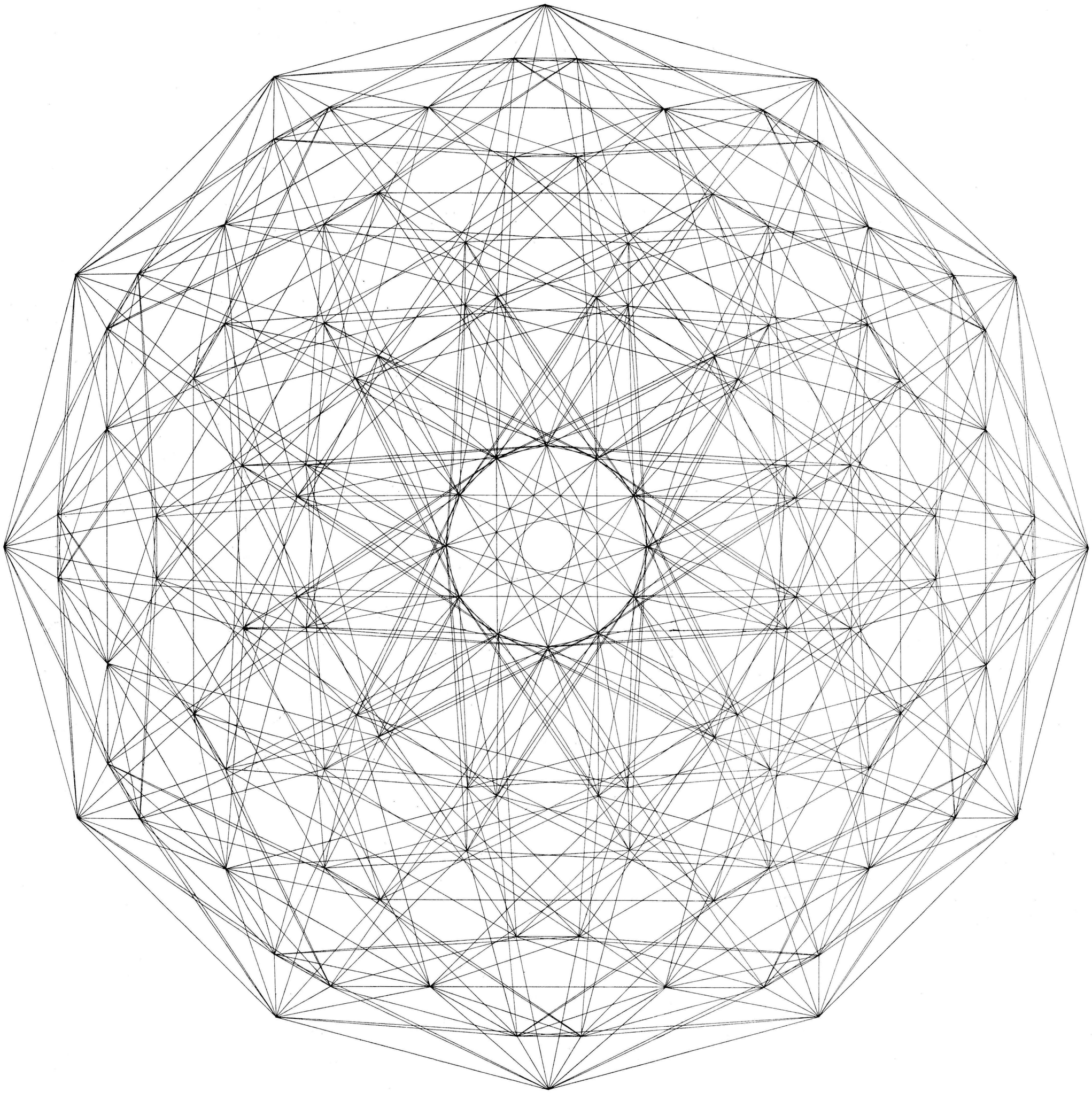
Z^{600}



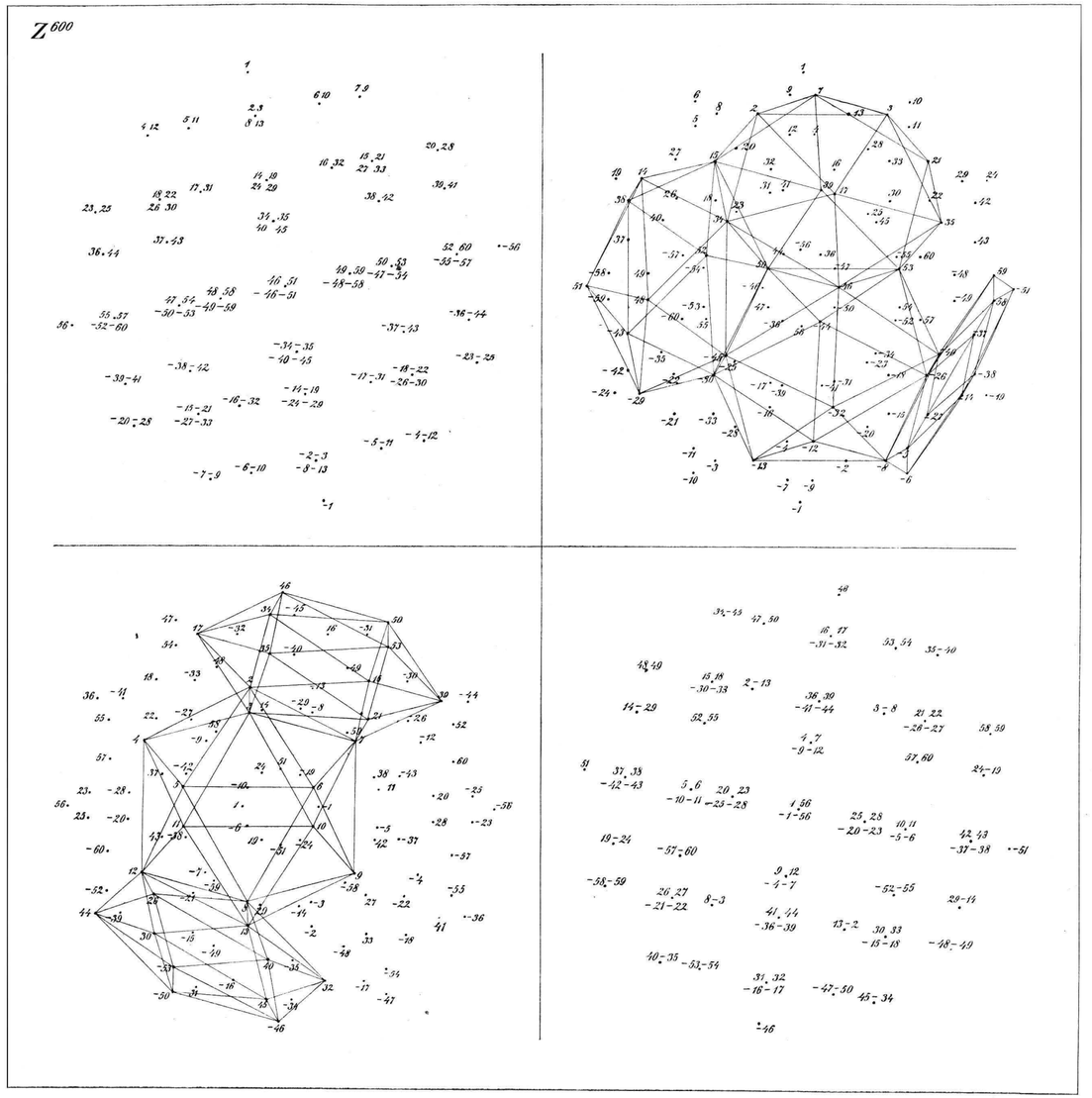

Z^{600}

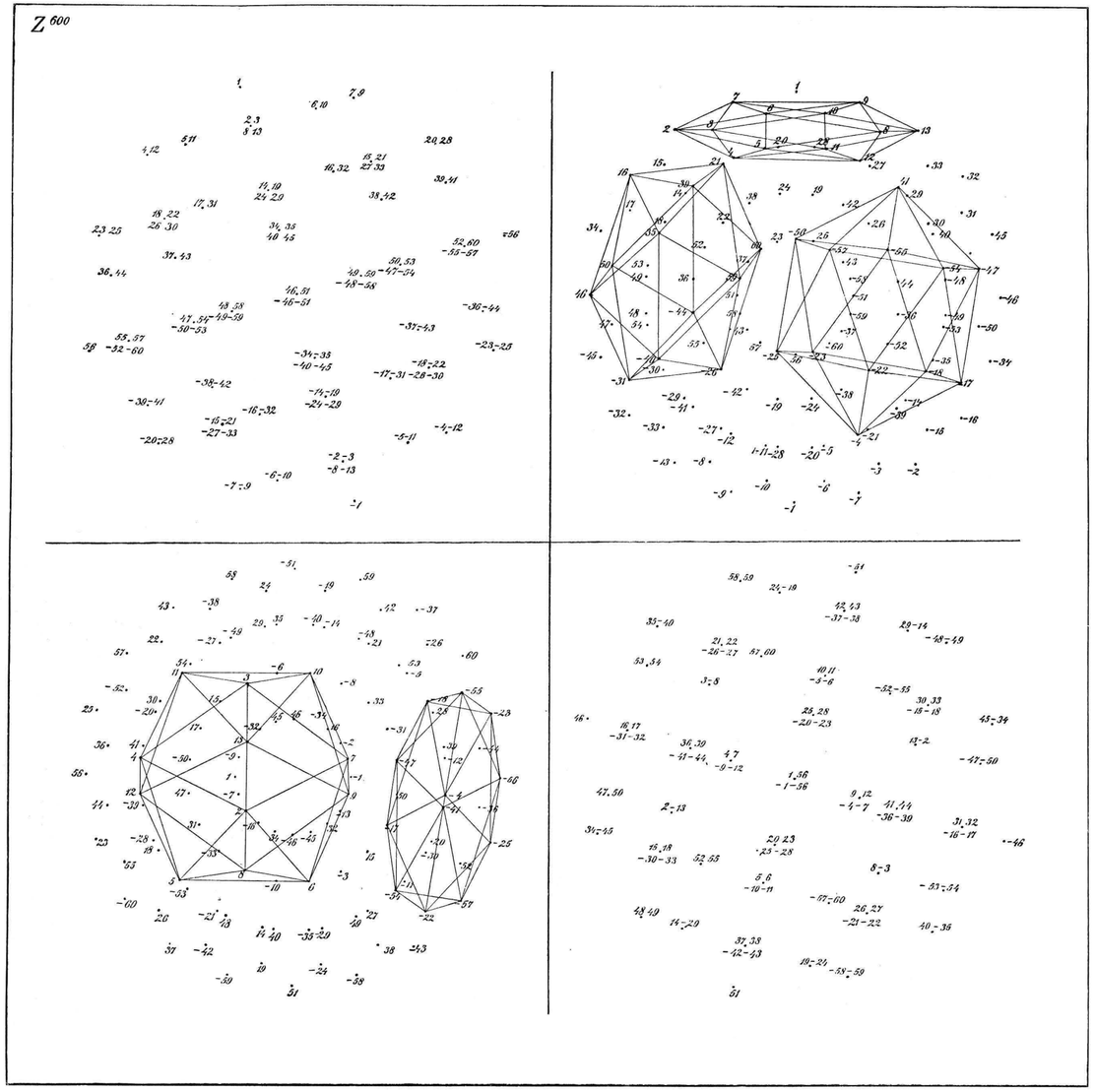

Z^{600}

Z^{600}

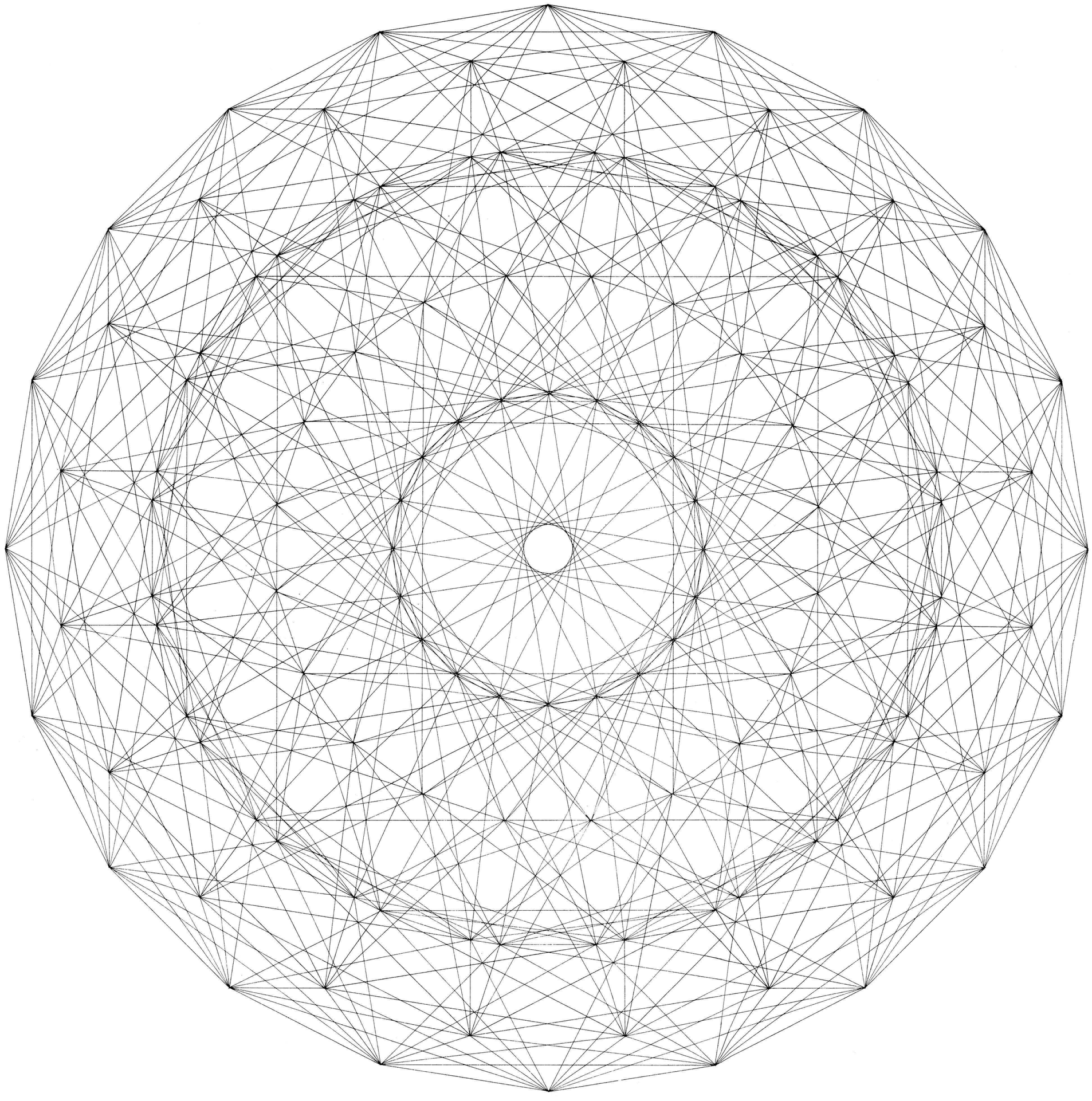


J. Bijtel, lith. P. J. Mulder, impr. Leiden.

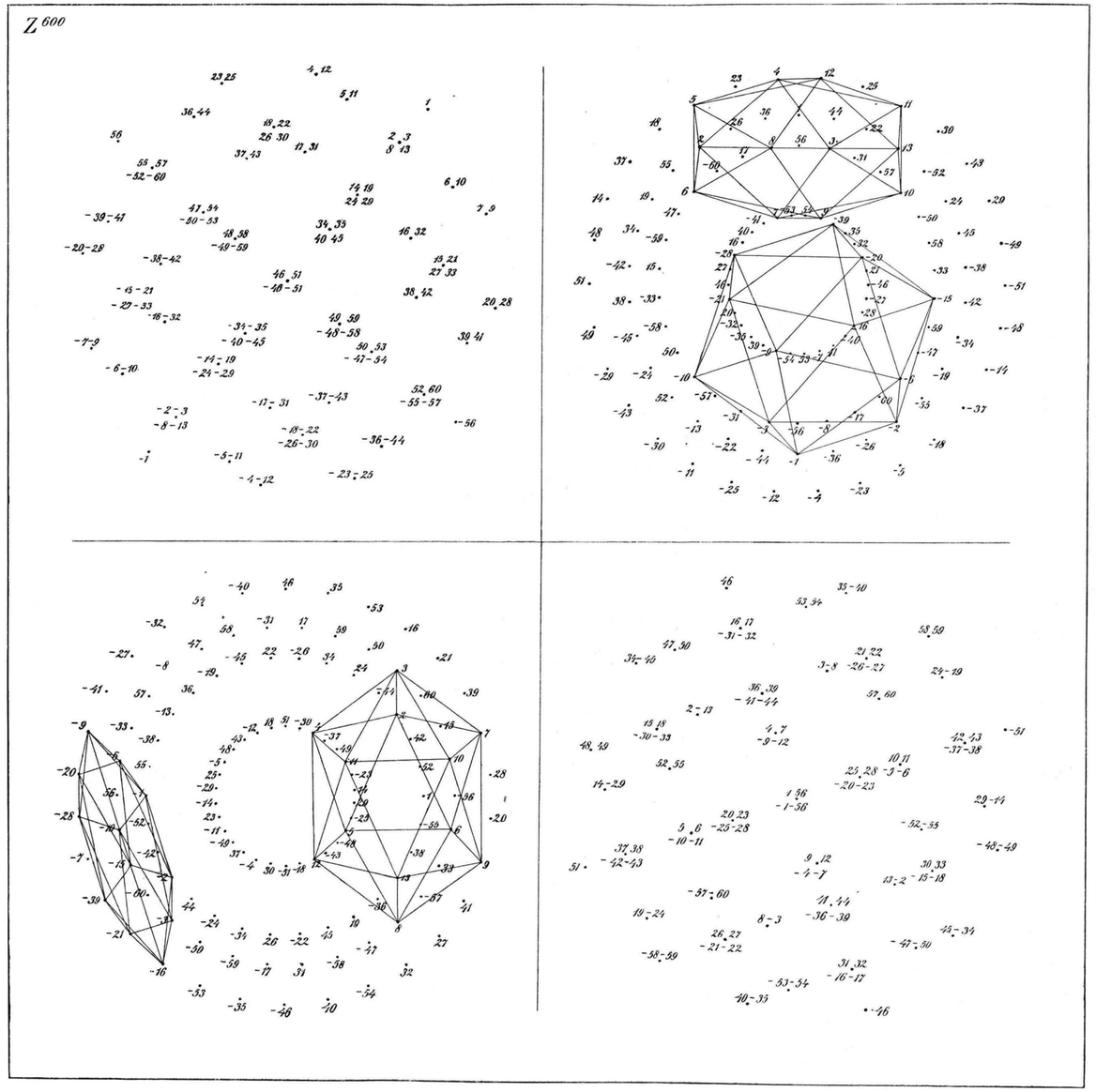

Z 600

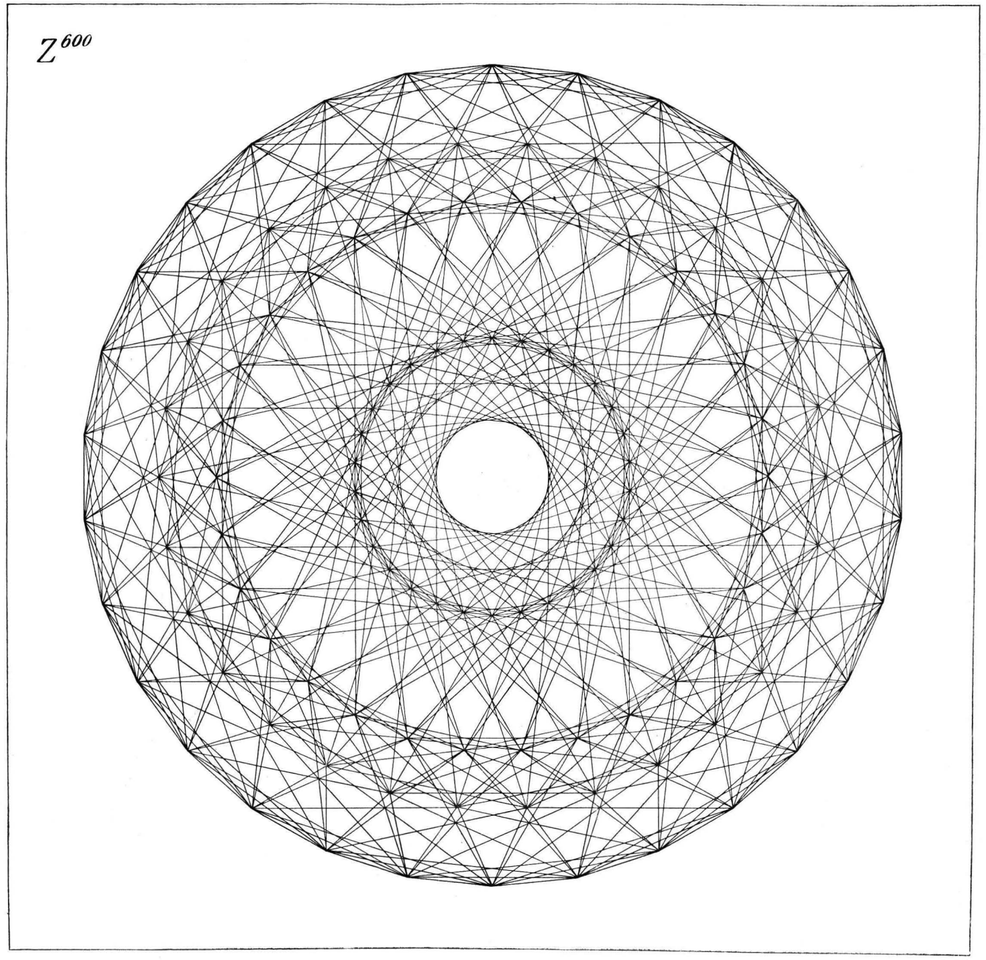

Z 600

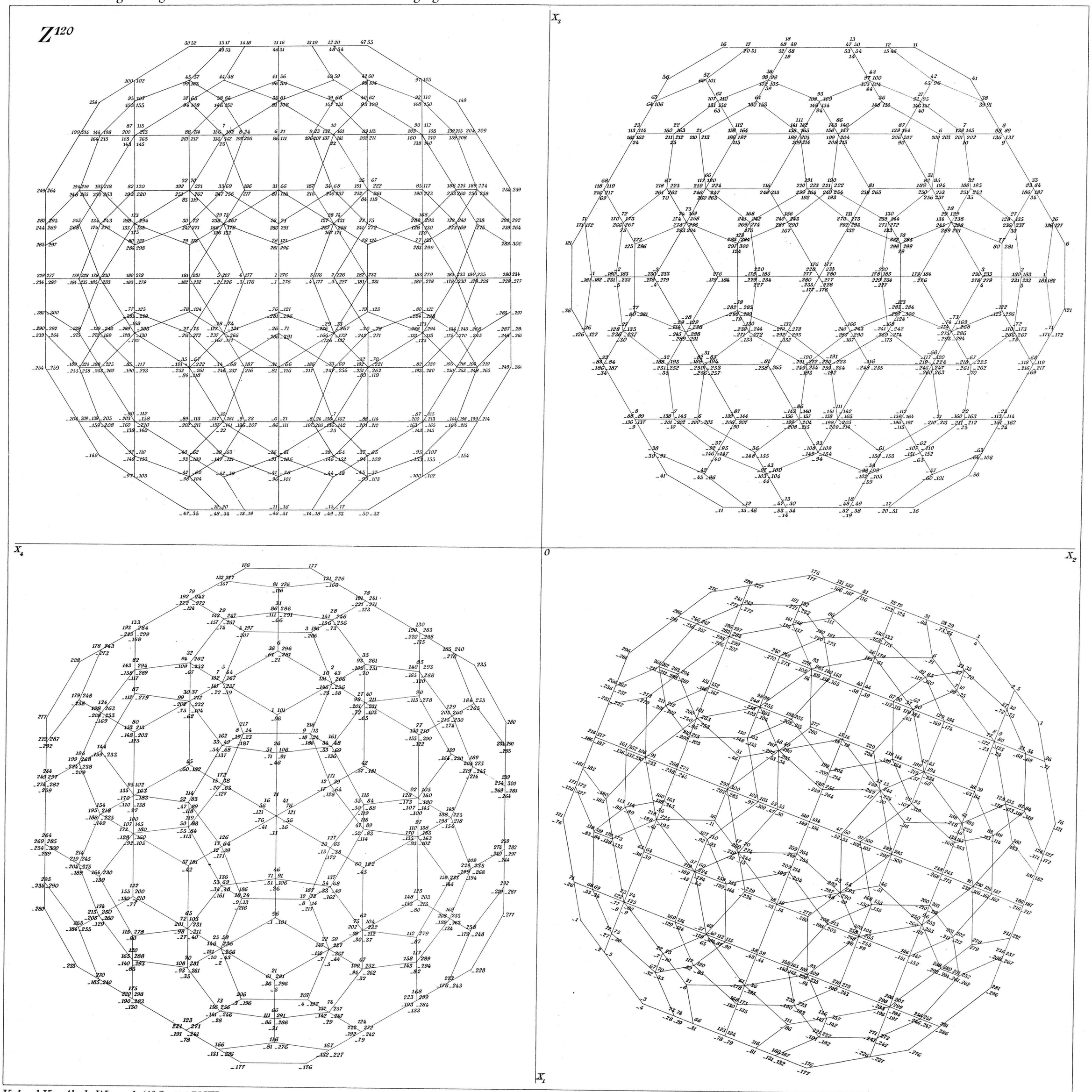
Z^{600}



J. Bijtel, lith. P.J. Mulder, imp. Leiden

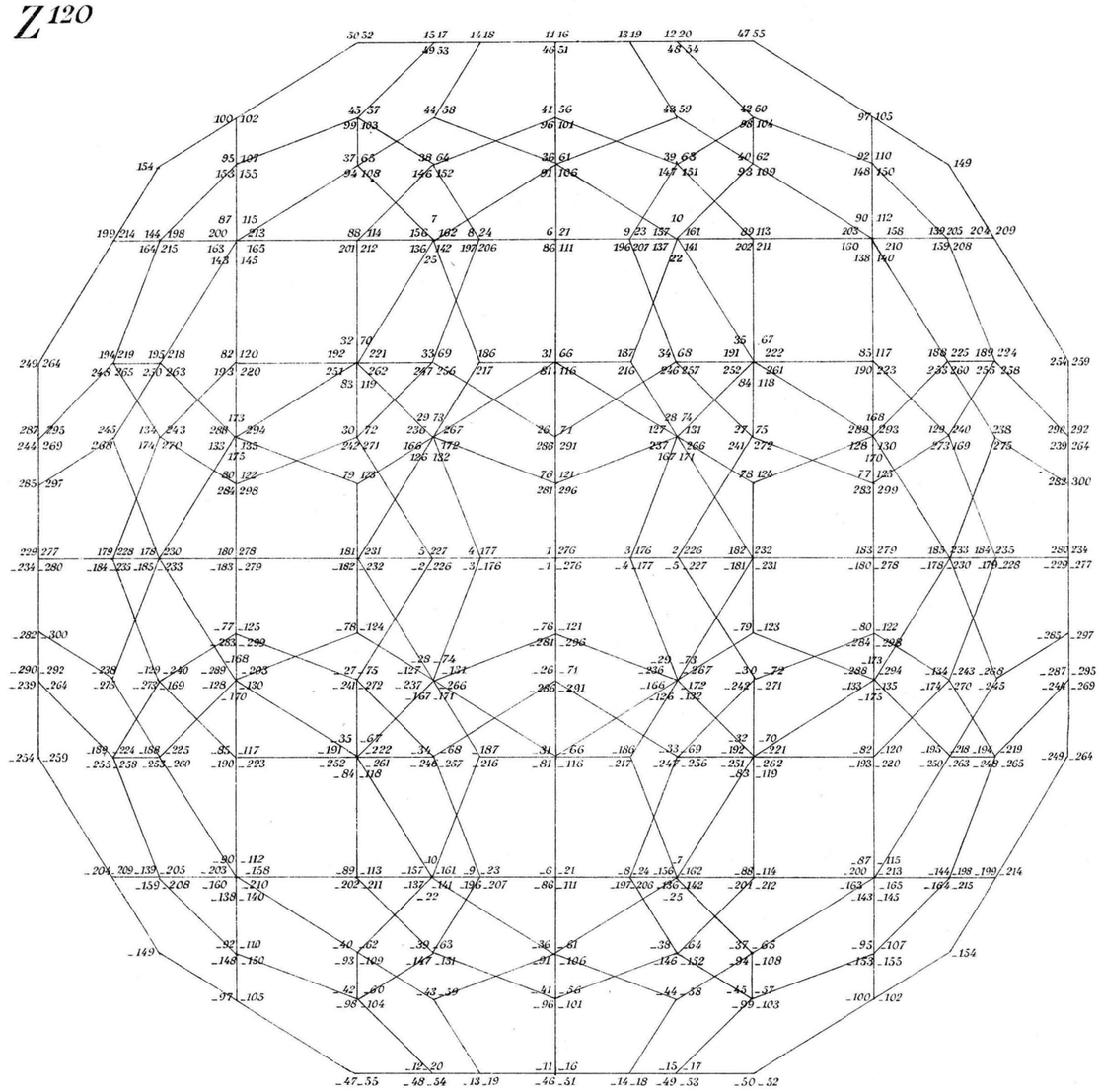

Z 600


Z 600

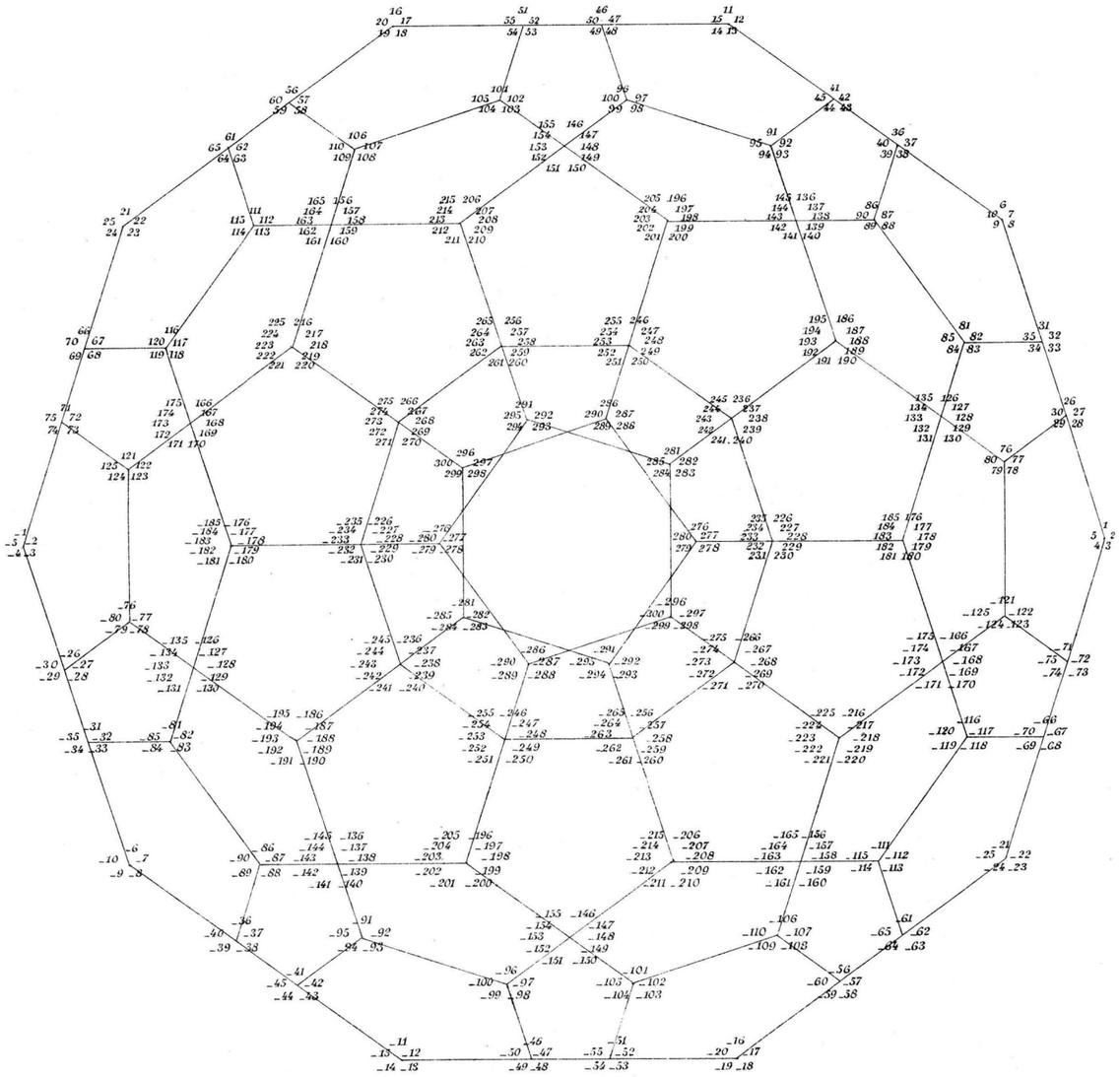


J. Bijtel, lith. P. J. Mulder, vrgr. Leiden.

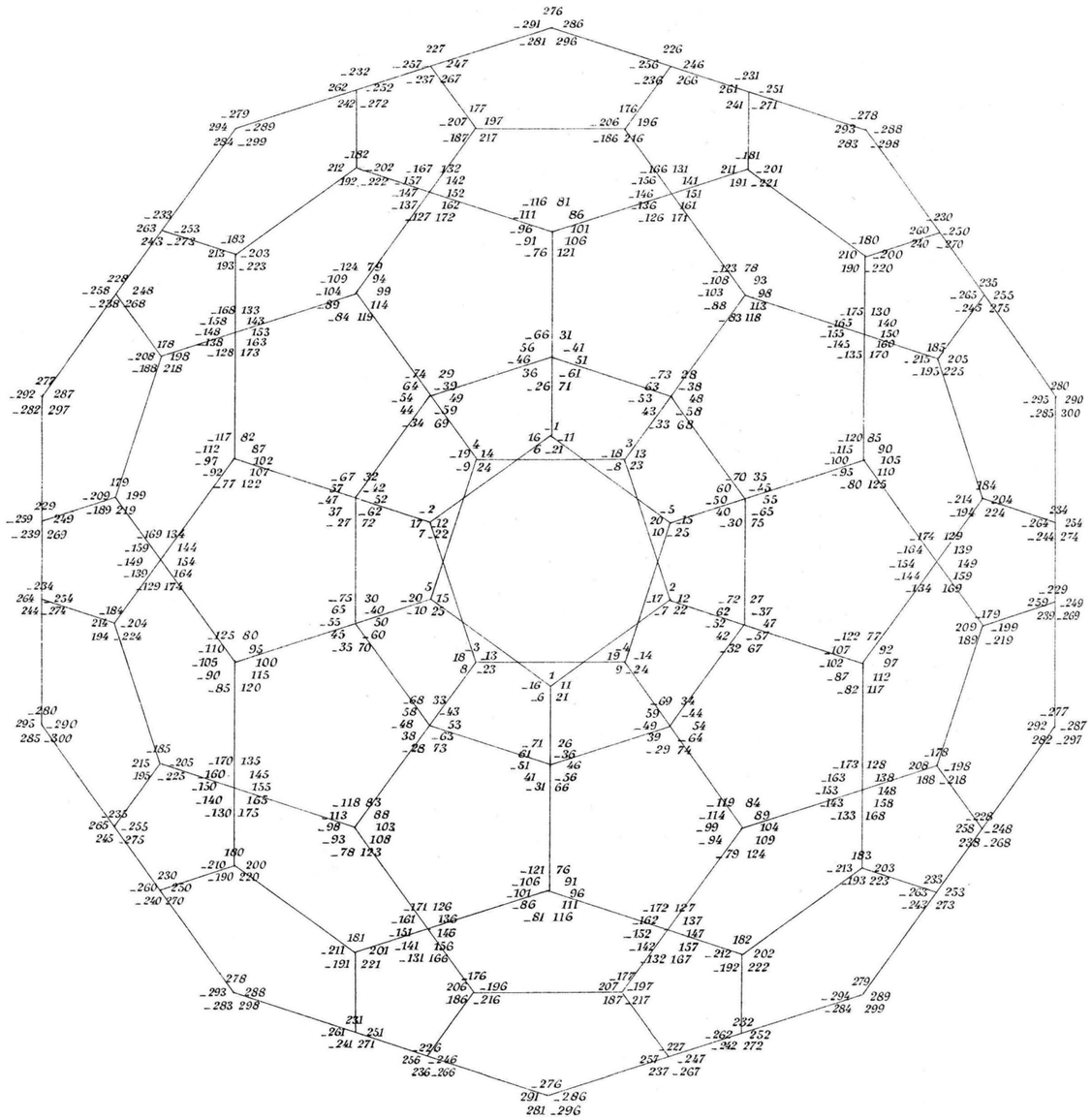
Z^{120}



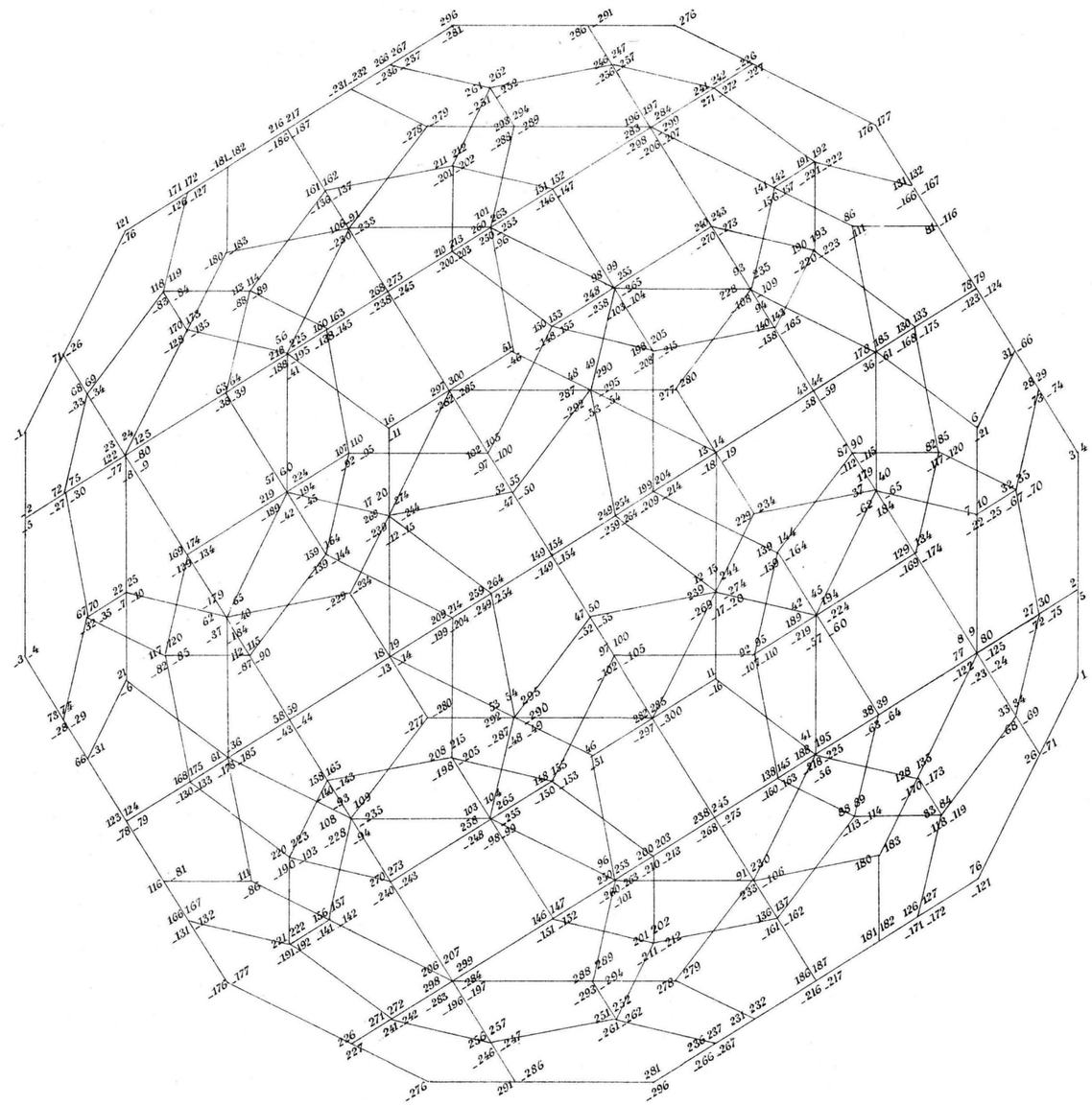
X_3



X_4



O



X_2

X_1

J. Bijtel, lith. P. J. Mulder, uitgv. Leiden.