Anwendung der Cyklographie auf die Lehre von den ebenen Curven

VON

H. DE VRIES.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel VIII. N° 7.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1904.

INHALTSVERZEICHNIS.

ERSTER TEIL.

§ 1. Einleitung. Die cyklographische Fläche ..... S. 5—6

§ 2. Andere Auffassung dieser Fläche..... „ 6—7

§ 3. Ordnung der Fläche. Querschnitt mit B und E_∞ „ 7—9

§ 4. Klasse, Ordnung der Rückkehrkante, Anzahl der stationären Schmiegungsebenen und Erzeugenden. Die Zahlen $\beta, y + d, x + d, g + \Delta, h + D, p$ ..... „ 9—13

§ 5. Die Zahlen d, D, Δ..... „ 13—14

§ 6. Die Zahlen γ, t, R. Tabelle aller charakteristischen Zahlen..... „ 15—17

§ 7. Die Rückkehrkante der Fläche und die Evolute der ebenen Curve. Die Scheitel dieser Curve. Anzahl der Krümmungskreise welche die Curve überdies noch anderswo berühren..... „ 17—23

§ 8. Die Restdoppelcurve der Fläche und das System der die Curve doppelt berührenden Kreise. Die Brennpunkte der Curve. Anzahl der doppelt berührenden Kreise deren einer Berührungspunkt vorgeschrieben ist ..... „ 23—26

§ 9. Die unendlich fernen Punkte der Restdoppelcurve..... „ 26—28

§ 10. Klasse des Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise. Anzahl der Rückkehrpunkte und Doppelpunkte..... „ 28—32

§ 11. Die dreifachen Punkte der Restdoppelcurve und die Anzahl der die gegebene Curve in drei verschiedenen Punkten berührenden Kreise. Anzahl der Punkte welche Mittelpunkte sind von 2 verschiedenen doppelt berührenden Kreisen . „ 32—37

ZWEITER TEIL.

§ 12. Das System der Kreise welche die Curve berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen. Punktindex des Systems der Krümmungs- und der doppelt berührenden Kreise. Spezielle Fälle. Anzahl der Kreise welche die Curve berühren und durch zwei vorgeschriebene Punkte gehen S. 38—42

§ 13. Das System der Kreise welche die Curve und überdies eine gegebene Gerade berühren. Tangentialindex des Systems der Krümmungs- und der doppelt berührenden Kreise. Die Parallelcurven der gegebenen. Kreise welche die Curve und zwei Geraden berühren, oder die Curve und eine Gerade berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen. . . . . „ 42—46

§ 14. Das System der Kreise welche die Curve und einen gegebenen Kreis gleichzeitig berühren. Anzahl der Krümmungs- und doppelt berührenden Kreise dieses Systems. Speziell wenn der gegebene Kreis selbst Krümmungs- oder doppelt berührender Kreis ist. Die beiden Indices des Systems. Anzahl der Kreise welche die Curve und zwei Kreise berühren . . . . . „ 46—48

§ 15. System der Kreise welche zwei Curven zugleich berühren. Anzahl der Krümmungskreise der einen Curve welche die andere berühren. Anzahl der Kreise welche die eine Curve doppelt, die andere einfach berühren. Klasse des Ortes der Mittelpunkte des Systems. Anzahl der Punkte welche Mittelpunkte sind von zwei verschiedenen, die beiden Curven je einmal berührenden Kreisen. Die beiden Indices des Systems. . . . „ 48—56

§ 16. Das Apollonische Problem für 3 beliebige Curven. „ 56—57

Anwendung der Cyklographie auf die Lehre von den ebenen Curven.

VON

H. DE VRIES.

ERSTER TEIL.

Die cyklographische Fläche.

§ 1. Es sei gegeben eine ebene Curve C, von der Ordnung μ, der Klasse ν, mit δ Doppelpunkten, $\varkappa$ Rückkehrpunkten, τ Doppeltangenten, ι Wendetangenten, welche überdies ε-mal durch jeden der beiden absoluten Kreispunkte I_1, I_2 im Unendlichen hindurchgeht, und σ mal die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene berührt. Legt man durch einen beliebigen Punkt P dieser Curve die Normalebene (senkrecht zur Tangente t), und zieht in derselben die beiden Geraden e, e^* durch P und unter 45° gegen die Ebene der Curve, so bilden die cyklographischen Bildkreise [1]) sämtlicher Punkte dieser beiden Geraden das System der die Curve in P berührenden Kreise. Lässt man den Punkt P die ganze Curve durchlaufen, so erzeugen die Geraden e, e^* eine zur Ebene der Curve orthogonalsymmetrische developpable Fläche, developpabel, weil zwei unmittelbar auf einander folgende Kreisbüschel ein Exemplar, nämlich den Krümmungskreis an der betreffenden Stelle der Curve, gemein haben, und also je zwei unmittelbar auf einander folgende Erzeugenden e, (sowie orthogonalsymmetrisch auch die beiden e^*) sich schneiden. Sämtliche Punkte dieser so entstehenden

---

[1]) Wilh. Fiedler: „Cyklographie.". Seite 15.

„cyklographischen Fläche" der Curve haben die Eigenschaft dass ihre Bildkreise die Curve berühren; den besonderen Punkten der Fläche, wie etwa denen der Rückkehr- und Doppelcurve, entsprechen besondere Kreise der Ebene, nämlich die Krümmungs- und doppelt berührenden Kreise, und überhaupt wird man, einmal im Besitz der cyklographischen Fläche, im Stande sein die Antwort zu geben auf alle Fragen welche gestellt werden können in Bezug auf die Kreise welche die Curve unter vorgeschriebenen Bedingungen berühren. Man kann aber weitergehen und zwei oder drei Curven mit ihren zugehörigen Flächen zugleich betrachten; dann gibt das Studium der diesen Flächen gemeinsamen Punkte Aufschluss über die Kreise welche die Curven zugleich berühren, und eventuell noch anderen gegebenen Bedingungen genügen.

Die Beantwortung der hier angeregten Fragen in der angegebenen Weise bildet den Zweck der vorliegenden Abhandlung. Freilich müssen diese Probleme, wie sich das wohl von selbst versteht, auch auf andere Weise erledigt werden können; die Tatsache aber dass bei den hier folgenden stereometrischen Betrachtungen sämtliche Resultate aus einer einzigen Quelle fliessen, und sozusagen von der cyklographischen Fläche unmittelbar abgelesen werden können, sichert denselben vielleicht, wie der Verfasser zu hoffen wagt, ihre Existenzberechtigung.

§ 2. Wir geben von der cyklographischen Fläche eine etwas andere Auffassung, welche das Studium derselben wesentlich erleichtert. Es schliessen ja sämtliche Erzeugenden der Fläche mit der Ebene der Curve, die wir als Bildebene B bezeichnen wollen, Winkel von 45° ein; folglich ist der Richtungskegel der Fläche ein gerader Kreiskegel mit verticaler Axe (B horizontal gedacht), und einem Winkel von 90° an der Spitze; dieser Rotationskegel schneidet die ebene E_∞ in einem gewissen, den imaginären Kugelkreis in den beiden absoluten Punkten I_1, I_2 von B berührenden, Kegelschnitte K_∞, und es müssen also sämtliche Erzeugenden der Fläche die gegebene Curve und den Kegelschnitt K_∞ schneiden. Aber je zwei auf einander folgende Erzeugenden liegen in einer Ebene, welche also sowohl die Curve C wie K_∞ berührt; die cyklographische Fläche ist also einfach die durch diese beiden Curven als Leitcurven bestimmte Developpable.

Es ist diese developpable Fläche, und eine solche der nämlichen Art, wo nämlich unser reeller Kegelschnitt K_∞ durch den imaginären Kugelkreis selbst ersetzt worden ist, und also die ganze Fläche imaginär wird bis auf ihre Doppelcurve, bereits un-

tersucht worden von Herrn W. A. VERSLUYS [1]), nur hat sich der Verfasser dort auf den Fall beschränkt wo die gegebene Curve keine spezielle Lage einnimmt, und also die im § 1 genannten Zahlen ε und σ beide gleich null sind; diese Zahlen beeinflussen aber unsere sämtlichen Resultate in sehr hohem Grade, wir sind also genötigt in aller Kürze die charakteristischen Zahlen unserer Fläche unter Berücksichtigung der Zahlen ε und σ herzuleiten.

§ 3. Nehmen wir für einen Augenblick an es seien ε und σ gleich null, so ist sofort einzusehen dass die Curve C eine Doppelcurve, K_∞ aber eine ν-fache Curve der Fläche ist. Denn irgend eine Tangente von C schneidet g_∞ in einem Punkte P, aus welchem an K_∞ zwei Tangenten gehen; die Verbindungslinien der Berührungspunkte derselben mit demjenigen der zuerst genannten sind Erzeugenden der Fläche, und es gehen deren somit durch jeden Punkt von C zwei. Ist aber P der Schnittpunkt von g_∞ mit einer Tangente von K_∞, so gehen durch denselben an C ν Tangenten, und es ist also jeder Punkt von K_∞ der Schnittpunkt von ν Erzeugenden. Hieraus ergibt sich dann weiter dass die Ordnungszahl der Fläche, also die Rangzahl r ihrer Rückkehrkante, gleich $2\mu + 2\nu$ ist; denn der vollständige Querschnitt mit der Ebene B besteht aus der Doppelcurve C und den zweimal ν Tangenten welche aus den Schnittpunkten von K_∞ mit B, also in unserm Falle aus den beiden Kreispunkten I_1, I_2, an dieselbe gehen, jede dieser Tangenten nur einmal gezählt, weil die Schmiegungsebenen durch dieselben entweder die Tangente in I_1, oder in I_2 an K_∞ enthalten, und also in keinem Falle mit B zusammenfallen.

Oder, indem man die Ebene E_∞ zu Hülfe nimmt, der Querschnitt der Fläche mit dieser setzt sich zusammen aus der ν-fachen Curve K_∞, und den μ mal zwei Tangenten welche aus den Schnittpunkten von g_∞ mit C an jenen Kegelschnitt gelegt werden können, jede derselben, aus dem nämlichen Grunde wie oben, einmal gezählt.

Wenn aber die Curve C die Gerade g_∞ in einem Punkte R berührt, so trennt sich die Ebene E_∞, doppelt gelegt, von der Fläche ab; denn unter den Tangenten aus jedem Punkte P von g_∞ an C findet sich immer die Gerade g_∞ selbst, und es tritt also jeder Strahl des Strahlenbüschels in E_∞ und am Scheitel R zweimal als Erzeugende der Fläche auf, nämlich für die beiden Lagen

---

[1]) „Focales des courbes planes et gauches", Verh. Kon. Akad. Tome VIII, N°. 5.

von P auf den Tangenten in den beiden Schnittpunkten des betreffenden Strahles mit K_∞.

Wenn also die Curve C die Gerade g_∞ σ mal berührt, so wird die Zahl r um 2σ Einheiten kleiner.

Es soll die Curve durch I_1 hindurchgehen. Legen wir dann in diesem Punkte die Tangenten an C und K_∞, so wird die Verbindungslinie der Berührungspunkte derselben innerhalb der durch die beiden Tangenten bestimmten Ebene völlig unbestimmt, weil man eben den Punkt I_1 mit sich selbst verbinden muss, und es trennt sich also diese Ebene von der Fläche ab; und wenn man beobachtet dass sich die Zahl der von I_1 an C gehenden Tangenten um zwei verringert hat, und also der Schnittpunkt irgend einer in B liegenden Gerade mit der Tangente in I_1 selbst für zwei in Wegfall kommende Punkte zählt, so erkennt man dass die sich abtrennende Ebene doppelt in Rechnung zu bringen ist. Geht also unsere Curve ε mal durch jeden der beiden Kreispunkte hindurch, so wird dadurch die Ordnungszahl der Fläche um 4ε Einheiten verringert. Wir finden desshalb:

$$r = 2\mu + 2\nu - 4\varepsilon - 2\sigma.$$

Wir prüfen dieses Resultat an den beiden einfachen Beispielen des Kreises und der Parabel. Für den Kreis ($\mu = \nu = 2$, $\varepsilon = 1$, $\sigma = 0$) finden wir $r = 4$, was offenbar richtig ist, weil in diesem Falle die Fläche aus zwei zur Ebene B orthogonalsymmetrischen Rotationskegeln besteht; und für die Parabel ($\mu = \nu = 2$, $\varepsilon = 0$, $\sigma = 1$) finden wir $r = 6$, was ebenfalls mit den Tatsachen im Einklange ist. [1])

Für die nach Wegfall der sich abtrennenden Ebenen übrig bleibende „eigentliche" cyklographische Fläche ist die Curve C immer noch eine Doppelcurve, und der vollständige Querschnitt mit B setzt sich zusammen aus dieser Doppelcurve und den zweimal $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten welche aus den Punkten I_1, I_2 noch an sie gehen; K_∞ hingegen ist eine $(\nu - \sigma)$-fache Curve, denn aus dem Schnittpunkte irgend einer Tangente von K_∞ mit g_∞ gehen an C ausser g_∞ noch $\nu - \sigma$ Tangenten, durch den Berührungspunkt auf K_∞ gehen also $\nu - \sigma$ Erzeugenden, und der Querschnitt der Fläche mit E_∞ besteht aus diesem $(\nu - \sigma)$-fachen Kegelschnitt, den zweimal $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ Tangenten an denselben aus

---

[1]) Man vergleiche z. B. FIEDLER „Darstellende Geometrie", II, Seite 379, N°. 2. (3e Auflage).

den einfachen *Schnittpunkten* von g_∞ mit C, und den 4σ je zwei und zwei unendlich benachbarten Tangenten aus den σ *Berührungspunkten* von g_∞ mit C. Aus diesem letzten Resultate ergiebt sich zugleich dass E_∞ für jede der 2σ Tangenten an K_∞ aus diesen σ Berührungspunkten Schmiegungsebene ist, und dass sich in jedem dieser Berührungspunkte zweimal zwei nicht benachbarte Erzeugenden der Fläche schneiden, sodass die Restdoppelcurve dieser letzteren einfach durch dieselben hindurchgeht; und schliesslich bemerken wir noch dass die Punkte I_1, I_2, trotzdem sie nicht bloss auf K_∞ liegen sondern zugleich ε-fache Punkte von C sind, dennoch, wie alle andern Punkte von K_∞, $(\nu - \sigma)$-fache Punkte der Fläche sind. Denn irgend eine Gerade durch I_1 in B hat mit der Fläche ausser I_1 $\mu - \varepsilon$ auf C gelegene, und also doppelt zählende, und $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ auf den Tangenten aus I_2 an C liegende, und also einfach zählende, Punkte gemein, das heisst im ganzen $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma$; die Differenz aber dieser letzteren Zahl und $r = 2\mu + 2\nu - 4\varepsilon - 2\sigma$ ist $\nu - \sigma$. Es müssen also auch durch I_1 und I_2, wie durch jeden andern Punkt von K_∞, $\nu - \sigma$ Erzeugenden gehen, und diese sind in der Tat leicht aufzufinden. Erstens haben wir die $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten aus I_1 an C, deren Berührungspunkte ausserhalb g_∞ liegen; sodann aber ist folgendes zu bemerken. Nehmen wir auf g_∞ einen Punkt P ganz in der Nähe von I_1 an, und betrachten von den ε durch I_1 gehenden Zweigen von C nur einen, so gehen aus P an diesen und an K_∞ je 2 Tangenten, deren Berührungspunkte, verbunden, 4 nahe zusammenliegende Erzeugender der Fläche liefern. Nähert sich P dem Punkte I_1 immer mehr um schliesslich mit ihm zusammenzufallen, so nähern sich die 4 Erzeugenden zwei in der durch die Tangenten an K_∞ und den Curvenzweig bestimmten Ebene liegenden, durch I_1 hindurchgehenden Grenzlagen, und weil C ε mal durch I_1 hindurchgeht, so erhalten wir im ganzen 2ε solcher Erzeugenden, welche mit den $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ in B liegenden vereinigt in der Tat die Zahl $\nu - \sigma$ wieder hervorbringen. Zugleich ist ersichtlich dass die genannten Ebenen Schmiegungsebenen, und zwar in Folge der Symmetrie Doppelschmiegungsebenen sind.

§ 4. Zur Bestimmung der Klassenzahl der Fläche betrachten wir entweder einen beliebigen Punkt in B oder in E_∞. Im ersteren Falle gehen durch denselben ν Tangenten an C und also 2ν Berührungsebenen der Fläche; im letzteren gehen durch den Punkt 2 Tangenten an K_∞, durch deren jede $\nu - \sigma$ Schmiegungsebenen gehen; E_∞ selbst aber ist (§ 3) eine 2σ-fache Schmiegungsebene,

also finden wir in beiden Fällen, wenn wir die Klassenzahl, wie üblich, mit n bezeichnen,

$$n = 2\nu.$$

Weitere Grössen, welche einer directen Bestimmung leicht zugänglich sind, sind die Ordnung m der Rückkehrkante, die Anzahl α ihrer stationären Schmiegungsebenen, und die Anzahl θ ihrer stationären Erzeugenden.

Die Zahl m wird bestimmt indem wir die Schnittpunkte der Rückkehrkante mit einer der beiden Ebenen B oder E_∞ aufsuchen. Die Bildkreise der Punkte dieser Curve sind die Krümmungskreise der Curve C, ein Schnittpunkt mit B bedingt also einen Krümmungskreis vom Radius null, und diesen findet man nur in einer Spitze. Die Rückkehrkante geht also durch die $\varkappa$ Spitzen von C, und aus der Entstehungsweise der Fläche ist ohne weiteres klar, dass diese Punkte für die Rückkehrkante Doppelpunkte sind, während die Tangenten in denselben in der Ebene durch die Spitze senkrecht zur Spitzentangente liegen und unter 45° gegen B geneigt sind.

Es hat aber die Rückkehrcurve noch andere Punkte mit B gemein. Wir sahen oben bereits dass sich aus jedem der beiden Punkte I_1, I_2 $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ nicht auf g_∞ berührende Tangenten an C legen lassen, deren jede der cyklographischen Fläche angehört. Die beiden einer solchen Tangente unendlich benachbarten Erzeugenden der Fläche schneiden sich in Folge der Symmetrie im Berührungspunkte, sodass dieser letztere als Schnittpunkt dreier unendlich naher Erzeugenden erscheint; d. h. jeder solche Berührungspunkt ist eine Spitze der Rückkehrcurve, und die Tangente derselben liegt in B und geht durch I_1 oder I_2. Auf diese Weise entstehen also $6(\nu - 2\varepsilon - \sigma)$ neue Schnittpunkte; fügen wir die $\varkappa$ Doppelpunkte hinzu so finden wir:

$$m = 2\varkappa + 6(\nu - 2\varepsilon - \sigma).$$

Es ist aber, wenn wir bedenken dass wir unter δ nur die wirklichen Doppelpunkte von C verstehen, und also die beiden ε-fachen Punkte I_1, I_2 für sich betrachten müssen:

$$\begin{aligned} \iota &= 3\mu(\mu - 2) - 6\delta - 6\varepsilon(\varepsilon - 1) - 8\varkappa \\ 3\nu &= 3\mu(\mu - 1) - 6\delta - 6\varepsilon(\varepsilon - 1) - 9\varkappa, \quad \text{und folglich:} \\ \iota - 3\nu &= -3\mu + \varkappa, \quad \text{oder} \\ \varkappa &= \iota + 3(\mu - \nu); \end{aligned}$$

substituiren wir diesen Wert von $\varkappa$ in die obige Formel, so finden wir

$$m = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma).$$

Die Schnittpunkte der Rückkehrkante mit E_∞ sind dreierlei Natur; zieht man erstens aus dem Schnittpunkt einer Wendetangente von C mit g_∞ die beiden Tangenten an K_∞, so erkennt man leicht dass deren Berührungspunkte einfache Punkte der Rückkehrkante sind; die Anzahl derselben ist also 2ι. Legt man zweitens die beiden Tangenten an K_∞ aus einem der $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ einfachen Schnittpunkte von g_∞ mit C, so sind dieselben Erzeugenden der Fläche, und es lehrt die Anschauung dass sich auch hier wieder die ummittelbar vorhergehende und folgende Erzeugende im Berührungspunkte der betreffenden Tangente begegnen; diese Berührungspunkte sind also wiederum Spitzen mit in E_∞ gelegener Tangente, d. h. auf diese Weise erhalten wir $6(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ neue Schnittpunkte mit E_∞.

Drittens endlich ist E_∞ selbst eine 2σ-fache Schmiegungsebene in den Berührungspunkten der Tangenten an K_∞ aus den Berührungspunkten von C mit g_∞; wir erhalten also noch weitere 6σ Schnittpunkte hinzu, und finden in Übereinstimmung mit dem Vorigen

$$m = 2\iota + 6(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma) + 6\sigma = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma).$$

Betrachten wir noch einmal die soeben gefundenen 2ι einfachen Schnittpunkte der Rückkehrkante mit E_∞. Diese Punkte entstanden aus den Wendetangenten der C, ihre Schmiegungsebenen enthalten also drei auf einander folgende Erzeugenden der Fläche und sind somit stationär; umgekehrt muss jede stationäre Schmiegungsebene die Ebene B schneiden in einer Wendetangente von C; es ist also

$$\alpha = 2\iota.$$

Endlich ergibt sich die Zahl θ der stationären Erzeugenden der Fläche gleich null. Denn eine stationäre Erzeugende bedingt in jedem ebenen Querschnitt der Fläche eine Spitze; nun hat allerdings die C Spitzen, allein diesen entsprechen, wie wir gesehen haben, Doppelpunkte der Rückkehrkante; es ist also in der Tat

$$\theta = 0.$$

Die bis jetzt bestimmten Zahlen r, n, m, α, θ, sind mit einander verbunden durch die Beziehung

$$\alpha - m - \theta = 3\,(n - r)\ ^{1});$$

durch Substitution der oben gefundenen Werte wird dieselbe befriedigt. Zugleich aber sind wir jetzt in den Stand gesetzt zur Berechnung der übrigen charakteristischen Zahlen die CAYLEY-PLÜCKER'schen Formeln anzuwenden, [2]) mit deren Hülfe die nachstehenden Resultate erhalten werden. Man hat in der SALMON-FIEDLER'schen Bezeichnung [3]) die Formel

$$n + \theta - \beta = 3\,(r - m);$$

setzt man hier die bereits bestimmten Werte ein, so erhält man für die Zahl der Spitzen der Rückkehrcurve:

$$\beta = 12\,\mu - 4\,\nu + 6\,\iota - 24\,\varepsilon - 12\,\sigma.$$

Wir benutzen ferner die Formel:

$$m = r\,(r - 1) - 2\,(y + d) - 3\,(n + \theta),$$

wo y die Klassenzahl der der Rückkehrkante doppelt umschriebenen Developpabeln, d die Anzahl der Doppeltangenten dieser Curve bedeutet. Durch Einsetzung der Werte findet man:

$$y + d = 2\,(\mu + \nu - 2\,\varepsilon - \sigma)^2 - 4\,(\mu + \nu) + 8\,\varepsilon + 4\,\sigma - \iota.$$

Weiter nehmen wir:

$$n = r\,(r - 1) - 2\,(x + d) - 3\,(m + \theta),$$

wo x die Ordnung der vollständigen Doppelcurve der cyklographischen Fläche angibt; wir finden:

$$x + d = 2\,(\mu + \nu - 2\,\varepsilon - \sigma)^2 - 10\,\mu - 2\,\nu - 3\,\iota + 20\,\varepsilon + 10\,\sigma.$$

---

[1]) SALMON-FIEDLER „Anal. Geom. d. Raumes", 3e Aufl. 2er Teil. S. 108.

[2]) SALMON-FIEDLER. l. c.

[3]) Vergleiche für dieselbe SALMON-FIEDLER l. c. S. 105 ff. und die tabellarische Uebersicht in PASCAL's „Repertorium", II. S. 228.

Betrachten wir ferner die Formel:

$$r = n(n-1) - 2(g + \Delta) - 3\alpha,$$

wo g die Anzahl der Geraden in einer Ebene angibt durch welche zwei nicht benachbarte Schmiegungsebenen hindurchgehen, und Δ die Zahl der doppelten Schmiegungsebenen bedeutet. Für die Summe dieser beiden Grössen finden wir:

$$g + \Delta = 2\nu(\nu - 1) - \mu - 3\iota + 2\varepsilon + \sigma.$$

Endlich bedienen wir uns der Formel:

$$r = m(m-1) - 2(h + D) - 3\beta,$$

wo h die Zahl der scheinbaren, D diejenige der wirklichen Doppelpunkte der Rückkehrcurve bezeichnet. Wir finden:

$$h + D = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)^2 - 22\mu + 5\nu - 10\iota + 44\varepsilon + 22\sigma.$$

Und zur Bestimmung des Geschlechtes p können wir uns der Formel:

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2} - (h + D) - \beta,$$

oder einer damit gleichwertigen bedienen, und finden leicht:

$$p = \mu - \nu + \iota - 2\varepsilon - \sigma + 1.$$

§ 5. Es sind im letzten § die Summen $x + d$, $y + d$, $g + \Delta$ und $h + D$ ausgerechnet worden; wollen wir also die in denselben auftretenden Grössen einzeln kennen lernen, so muss jetzt nachträglich noch eine directe Bestimmung von d, Δ, D gegeben werden. Was nun zunächst die Zahl d der Doppelerzeugenden der Fläche anbetrifft, so ist schon aus cyklographischen Gründen klar dass dieselbe gleich null sein muss.

Denn die Bildkreise der beiden Berührungspunkte einer solchen Doppellinie mit der Rückkehrkante wären zwei Krümmungskreise der Curve C im nämlichen Punkte und an der nämlichen Tangente, was offenbar nur möglich ist wenn zwei Doppelpunkte von C zusammenrücken in einen Berührungsknoten, d. h. wenn zwei Cur-

venäste sich berühren, was gegen die Voraussetzung geht. Es wäre allerdings denkbar dass sich unter den besonderen Erzeugenden der Fläche, wie etwa denjenigen durch die cyklischen Punkte u. s. w. solche befinden würden die zweimal in Rechnung zu bringen wären; allein in den vorhergehenden §§ haben wir ja dieselben alle untersucht, ohne dass sich die Erscheinung um die es sich hier handelt gezeigt hätte.

Was die Zahl D der wirklichen Doppelpunkte anbetrifft, so fanden wir bereits (§ 4) dass jede Spitze von C ein Doppelpunkt der Rückkehrkante ist, während umgekehrt einleuchtet dass ein Doppelpunkt der letzteren in B einen Punkt vom Krümmungsradius null in C bedingt. Liegt ein Doppelpunkt ausserhalb B, so muss sein Bildkreis die Curve C an zwei verschiedenen Stellen osculieren, was aber im allgemeinen nicht möglich ist. Denn das System der Krümmungskreise bildet eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit; es wird also im allgemeinen eine endliche Anzahl solcher Kreise geben, welche die Curve noch anderwärtig berühren, aber keinen der sie zweimal osculiert. Es ist also:

$$D = \varkappa = \iota + 3(\mu - \nu). \qquad (\S\ 4).$$

Insbesondere mag hervorgehoben werden dass die Rückkehrkante nicht durch die Punkte I_1, I_2 hindurchgeht.

Endlich die Zahl Δ der Doppelschmiegungsebenen. Jede Doppeltangente von C gibt zu zwei solchen Ebenen Veranlassung, welche symmetrisch in Bezug auf B liegen, und weil wir die Anzahl der Doppeltangenten, g_∞ nicht mitgerechnet, gleich τ vorausgesetzt haben, so ist die Anzahl der Ebenen 2τ. Überdies ist E_∞ (§ 3) eine 2σ-fache Schmiegungsebene, oder also die Vereinigung von $\sigma(2\sigma - 1)$ Doppelschmiegungsebenen, und endlich haben wir noch die 2ε Ebenen zu berücksichtigen durch die Tangenten in I_1 und I_2 an K_∞ und C (§ 3, am Schluss); es ist also:

$$\Delta = 2\tau + \sigma(2\sigma - 1) + 2\varepsilon$$

oder, wenn wir den Wert von τ aus der Plücker'schen Formel:

$$\mu = \nu(\nu - 1) - 2\tau - \sigma(\sigma - 1) - 3\iota$$

einsetzen:

$$\Delta = \nu(\nu - 1) - \mu - 3\iota + 2\varepsilon + \sigma^2.$$

§ 6. Aus den in den vorhergehenden Nummern verwendeten Formeln ergeben sich drei Singularitäten nicht, deren Kenntniss dennoch für uns von Wichtigkeit ist; es ist dies erstens die Zahl derjenigen Erzeugenden der cyklographischen Fläche welche die Rückkehrkante, wie natürlich, an einer Stelle berühren, und überdies noch anderswo schneiden. Es ist klar dass die Bildkreise dieser Schnittpunkte die Curve C osculieren und zugleich an einer andern Stelle berühren. Für die Zahl γ dieser Punkte haben wir die Formel:

$$\gamma = r\,m + 12\,r - 14\,m - 6\,n - 8\,\theta - 4\,d - 4\,D\ ^{1)};$$

durch Einsetzung der Werte rechts findet man:

$$\gamma = 4\left\{(\mu + \nu - 2\,\varepsilon - \sigma)(\iota + 3\,\mu - 6\,\varepsilon - 3\,\sigma + 6) - 8\,\iota - 24\,\mu + 42\,\varepsilon + 21\,\sigma\right\}.$$

Für einen beliebigen Kegelschnitt ($\mu = \nu = 2$, $\iota = \varepsilon = \sigma = 0$), und für die Parabel ($\mu = \nu = 2$, $\iota = \varepsilon = 0$, $\sigma = 1$) findet man $\gamma = 0$, was offenbar richtig ist, weil ein Kreis einen Kegelschnitt nicht dreipunktig und überdies noch zweipunktig berühren kann; für den Kreis aber ($\mu = \nu = 2$, $\varepsilon = 1$, $\iota = \sigma = 0$) findet man $\gamma = 24$, was natürlich falsch ist; allein wenn man die Formel nicht in obiger Gestalt, sondern in der von Pascal gegebenen schreibt [1]), so tritt die Grösse β darin auf, also die Zahl der Spitzen der Rückkehrkante, und diese ergibt sich beim Kreise gleich -8; es ist also die Formel auf den Kreis überhaupt nicht anwendbar.

Zweitens haben wir zu betrachten die Zahl t der dreifachen Punkte der Doppelcurve, also die Anzahl der Punkte deren Bildkreise die Curve C an drei verschiedenen Stellen zweipunktig berühren; wir finden dieselbe aus der Formel:

$$t = \frac{1}{6}\left\{r^3 - 3\,r^2 - 58\,r - 3\,r\,(n + 3\,m) + 42\,n + 78\,m\right\}^{1)},$$

wo wir der Einfachheit halber, denn die Formel wird in den griechisen Buchstaben sehr complicirt, die lateinischen stehen lassen. Wir finden hier nicht nur für einen beliebigen Kegelschnitt oder

---

[1]) Salmon-Fiedler l. c. S. 662, oder in etwas andrer Form Pascal-Schepp „Repertorium", II, S. 227, oder Cremona Curtze, „Grundzüge einer allg. Th. d. Oberflächen". S. 87.

eine Parabel, sondern auch für den Kreis, $t = 0$; in Bezug auf den Kreis gilt aber die gleiche Bemerkung wie oben.

Endlich fügen wir noch hinzu die Ordnung R der developpabeln Fläche, deren Rückkehrkante die Doppelcurve der cyklographischen Fläche ist, und für welche die Formel gilt:

$$R = r\,n + 6\,r - 3\,m - 9\,n - 3\,\theta - 2\,\Delta \quad \text{, oder}$$
$$R = 4\,(\nu + 3)\,(\mu + \nu - 2\,\varepsilon - \sigma) - 16\,(\mu + \nu) - 2\,\nu^2 + 36\,\varepsilon + 18\,\sigma - 2\,\sigma^2.$$

Hier finden wir für einen beliebigen Kegelschnitt 8, für die Parabel 4, und für den Kreis 4; aber wenn die Curve C ein beliebiger Kegelschnitt ist, so setzt sich die Doppelcurve zusammen aus C, K_∞, und zwei Kegelschnitten in den Ebenen durch die Axen des Kegelschnittes senkrecht zur Ebene desselben, und es wird also in der Tat eine beliebige Gerade von 8 Tangenten der Doppelcurve getroffen. Bei der Parabel ist K_∞ eine $(\nu - \sigma)$-fache, also nur eine einfache Curve, und die ganze Doppelcurve besteht aus der gegebenen Parabel und einer zweiten in der Ebene durch die Axe der ersten; est ist also richtig $R = 4$. Und beim Kreise endlich besteht die Doppelcurve aus C, K_∞, und den beiden Spitzen der Kegel in welche die cyklographische Fläche zerfällt; also ebenfalls $R = 4$.

Wir stellen jetzt sämtliche bis jetzt erhaltenen Resultate in folgender Tabelle übersichtlich zusammen, wobei wir die Summen $x + d$, $y + d$, $g + \Delta$, $h + D$ in ihre einzelnen Bestandteile zerlegen. Es ist also:

der Rang der Rückkehrkante, oder die Ordnung der cyklographischen Fläche, $r = 2\,(\mu + \nu - 2\,\varepsilon - \sigma)$;

die Klasse der Fläche, $n = 2\,\nu$;

die Ordnung der Rückkehrkante,
$m = 2\,(\iota + 3\,\mu - 6\,\varepsilon - 3\,\sigma)$;

die Anzahl der Spitzen der Rückkehrkante,
$\beta = 12\,\mu - 4\,\nu + 6\,\iota - 24\,\varepsilon - 12\,\sigma$;

die Anzahl der stationären Erzeugenden der Rückkehrkante,
$\theta = 0$;

die Anzahl der Doppelerzeugenden der Rückkehrkante,
$d = 0$;

die Anzahl der stationären Schmiegungsebenenen derselben,
$\alpha = 2\,\iota$;

die Anzahl der Doppelschmiegungsebenen derselben,

$$\Delta = \nu(\nu - 1) - \mu - 3\iota + \sigma^2 + 2\varepsilon \quad ;$$

die Anzahl der Doppelpunkte derselben,

$$D = \iota + 3(\mu - \nu)$$

die Ordnung der vollständigen Doppelcurve,

$$x = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)^2 - 10\mu - 2\nu - 3\iota + 20\varepsilon + 10\sigma \quad ;$$

der Rang der vollständigen Doppelcurve,

$$R = 4(\nu + 3)(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) - 16(\mu + \nu) - 2\nu^2 + 36\varepsilon + 18\sigma - 2\sigma^2 \quad ;$$

die Anzahl der dreifachen Punkte derselben,

$$t = \frac{1}{6}\left\{r^3 - 3r^2 - 58r - 3r(n + 3m) + 42n + 78m\right\} \quad ;$$

die Klasse der der Rückkehrkante doppelt umschriebenen Developpabeln,

$$y = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)^2 - 4(\mu + \nu) - \iota + 8\varepsilon + 4\sigma \quad ;$$

die Zahl der Geraden einer Ebene durch welche zwei nicht benachbarte Schmiegungsebenen hindurchgehen, also die Anzahl der Doppeltangenten irgend eines ebenen Schnittes der cyklographischen Fläche, abgesehen von den Δ aus den Doppelschmiegungsebenen hervorgehenden,

$$g = \nu(\nu - 1) + \sigma(1 - \sigma) \quad ;$$

die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Rückkehrkante,

$$h = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)^2 - 25\mu + 8\nu - 11\iota + 44\varepsilon + 22\sigma \; ;$$

die Zahl der die Rückkehrkante berührenden und zugleich anderswo schneidenden Geraden,

$$\gamma = 4\left\{(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma + 6) - 24\mu - 8\iota + 42\varepsilon + 21\sigma\right\} \quad ;$$

endlich das Geschlecht der Rückkehrkante,

$$p = \mu - \nu + \iota - 2\varepsilon - \sigma + 1.$$

§ 7. Wir unterwerfen jetzt die Rückkehrkante der cyklographischen Fläche einer etwas genaueren Prüfung. Die Bildkreise ihrer Punkte sind die Krümmungskreise der Curve C, ihre orthogonale Projektion auf die Ebene B dieser Curve fällt also zusammen mit der Evolute derselben. Es begegnen sich hier, und auch in der nächsten Nummer, unsere Untersuchungen mit denen des Herrn

VERSLUYS [1]), immerhin, den verschiedenen Zwecken entsprechend, nur flüchtig, und mit dem bereits betonten Unterschiede (§ 2) dass hier auch die Singularitäten ε und σ berücksichtigt worden sind.

Infolge der Symmetrie in Bezug auf die Ebene B fallen die Projektionen je zweier Punkte der Raumcurve zusammen; es ist also die Ordnung der Evolute $= \frac{1}{2} m$, d. h. nach der Tabelle der vorhergehenden Nummer ist

$$\textit{die Ordnung der Evolute} = \iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma.$$

Die Klasse erhalten wir indem wir die Anzahl der Ebenen bestimmen welche durch irgend eine vertikale Gerade gehen und die Rückkehrkante berühren, denn die Spuren dieser Ebenen sind die sämtlichen Tangenten an die Projektion der Curve durch einen Punkt. Es ist diese Zahl im allgemeinen $= r$, infolge der Symmetrie aber in unserm Falle nur $= \frac{1}{2} r$, d. h. es ist

$$\textit{die Klasse der Evolute} = \mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma.$$

Betrachten wir eine Spitze der Rückkehrkante. Es schneiden sich in derselben drei aufeinander folgende Erzeugenden der Fläche, folglich berührt ihr Bildkreis die Curve C 4-punktig, und es muss sich also aus der Zahl der Spitzen der Rückkehrkante die Zahl der „Scheitel" der Curve C ergeben. Allerdings mit einiger Vorsicht. Wir fanden nämlich (§ 4) dass die Berührungspunkte der zweimal $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten an C aus den beiden Punkten I_1, I_2 Spitzen der Rückkehrcurve sind; die Schmiegungsebenen derselben gehen durch die Tangenten in I_1 und I_2 an K_∞, und enthalten somit den Schnittpunkt derselben, oder den Pol von g_∞ in Bezug auf K_∞, oder, weil K_∞ und der imaginäre Kugelkreis sich gerade auf g_∞ doppelt berühren, den Pol von g_∞ in Bezug auf diesen letzteren, d. h. die der Gerade g_∞ senkrecht zugeordnete Richtung Z_∞, also das Projektionscentrum für die orthogonale Projektion auf B. Es verlieren also die Spitzen durch die Projektion ihren Charakter, indem sie übergehen in einfache Punkte der Evolute, allerdings in solche wo die Evolute und die Curve C sich berühren, und wir erhalten also zwar den bekannten Satz: „*die Curve C und ihre Evolute berühren sich in allen denjenigen Punkten, deren Tan-*

---

[1]) l. c. S. 74. ff.

gente durch einen der beiden Kreispunkte geht", aber diese Punkte sind für die Curve C keine Scheitel.

Wir fanden weiter (§ 4) dass jeder einfache Schnittpunkt der Curve C mit g_∞ in den Berührungspunkten der beiden von ihm an K_∞ gehenden Tangenten Spitzen der Rückkehrcurve bedingt, deren Schmiegungsebenen sich in der Tangente in ihm an C schneiden, und erkennen nun überdies dass die Verbindungslinie dieser beiden Spitzen als die Polare des betrachteten Punktes in Bezug auf K_∞ durch das Projektionscentrum Z_∞ geht. Es fallen also die Projektionen der beiden Spitzen zusammen in einen Punkt von g_∞, der dem betrachteten Punkte harmonisch zugeordnet ist in Bezug auf die beiden Kreispunkte, und dieser Punkt ist zwar eine Spitze der Evolute (mit auf g_∞ liegender Rückkehrtangente), führt aber, wie die jetzige Untersuchung gelehrt hat, nicht zu einem Scheitel von C.

Immerhin betonen wir im Vorübergehen den Satz: „*jedem einfachen unendlich fernen Punkte der Curve C entspricht als Krümmungsmittelpunkt eine unendlich ferne Spitze der Evolute mit ganz in unendlicher Ferne gelegener Rückkehrtangente, und die beiden einander auf diese Weise zugeordneten Punkte beider Curven liegen in zu einander senkrechten Richtungen.*"

Wir wollen nun die Zahl $\beta = 12\mu - 4\nu + 6\iota - 24\varepsilon - 12\sigma$ der Spitzen der Rückkehrkante vermindern um die Zahl $2(\nu - 2\varepsilon - \sigma)$ derjenigen welche in B liegen und also nach dem Obigen beim Projiciren verloren gehen; es bleiben dann noch $12\mu - 6\nu + 6\iota - 20\varepsilon - 10\sigma$ übrig, und diese fallen beim Projiciren paarweise zusammen; wir finden also:

die Anzahl der Rückkehrpunkte der Evolute $= 6\mu - 3\nu + 3\iota - 10\varepsilon - 5\sigma$; *von diesen liegen* $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ *im Unendlichen, den übrigen* $5\mu - 3\nu + 3\iota - 8\varepsilon - 3\sigma$ *aber entsprechen ebensoviele Scheitel der Curve C.*

Für einen beliebigen Kegelschnitt erhalten wir hieraus 4 Spitzen im Endlichen und 2 im Unendlichen, für die Parabel resp. 1 und 0, was offenbar richtig ist.

Was nun die übrigen Schnittpunkte der Evolute mit g_∞ anbetrifft, so ist folgendes zu bemerken: die Berührungspunkte der beiden Tangenten an K_∞ aus dem unendlich fernen Punkte einer Wendetangente der C sind nach § 4 einfache Punkte der Rückkehrkante, deren Verbindungslinie, wie wir jetzt wieder hinzufügen wollen, durch Z_∞ geht; *jedem der* ι *Wendepunkte der C entspricht also ein einfacher unendlich ferner Punkt der Evolute, natürlich in einer Richtung senkrecht zur Wendetangente.* Endlich ist E_∞ selbst

Schmiegungsebene in den Berührungspunkten sämtlicher Tangenten an K_∞ aus den σ Berührungspunkten von C mit g_∞, welche Punkte auch wieder, und immer aus dem nämlichen Grunde, paarweise in Geraden durch Z_∞ liegen, und also durch die Projektion übergehen in σ Wendepunkte der Evolute mit unendlich ferner Wendetangente; *„jedem Berührungspunkte von C mit g_∞ entspricht also in der Evolute eine unendlich ferne Inflexion mit unendlich ferner Tangente."*

Addiren wir sämtliche unendlich fernen Punkte so erhalten wir:

$$3(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma) + \iota + 3\sigma = \iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma,$$

also wieder die Ordnungszahl der Evolute.

Nachdem jetzt Ordnung, Klasse und Anzahl der Rückkehrpunkte der Evolute bekannt sind kann nunmehr die Anzahl der Doppelpunkte aus der bekannten PLÜCKER'schen Formel ermittelt werden. Jeder derselben ist die Spur einer durch Z_∞ gehenden vierfachen Sekante der Rückkehrkante, und also der gemeinschaftliche Mittelpunkt zweier verschiedener Krümmungskreise; nach Ausführung der Rechnung erhält man folgendes Resultat:

die Anzahl der Doppelpunkte der Evolute ist gleich

$$\frac{1}{2}\Big\{(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma - 1) - 19\mu + 8\nu - 9\iota + 32\varepsilon + 16\sigma\Big\}.$$

Jeder dieser Punkte ist der Mittelpunkt zweier Krümmungskreise.

Soll die Evolute eine Inflexion aufweisen, so muss entweder die Rückkehrkante eine stationäre Erzeugende besitzen, oder aber es muss eine Schmiegungsebene durch Z_∞ gehen; das erstere ist nach der Tabelle des § 6, S. 16 nicht der Fall, denn es ist $\theta = 0$, und was das letztere anbetrifft, so sind die Schmiegungsebenen durch Z_∞ die $2(\nu - 2\varepsilon - \sigma)$ Schmiegungsebenen durch die beiden Tangenten in I_1 und I_2 an K_∞ (sieh oben), die zweimal ε Doppelschmiegungsebenen durch die nämlichen Tangenten und welche C in den Kreispunkten selbst berühren, und endlich die 2σ-fache Schmiegungsebene E_∞ selbst. Die Ebenen der ersten Gruppe ergaben, wie wir sahen, die Berührungspunkte der Evolute mit der Curve C, gewöhnliche Punkte der Evolute; die der zweiten ergeben je einen Wendepunkt auf den Tangenten in I_1 und I_2 an C, und E_∞ fügt zu denselben noch σ auf g_∞ gelegene hinzu. Es ist also:

die Anzahl der Wendepunkte der Evolute $= 2\varepsilon + \sigma$, *und von diesen liegen* σ *im Unendlichen und die übrigen einzeln auf den Tangenten an* C *in den imaginären Kreispunkten.*

Aus der Ordnung, der Klasse und der Zahl der Wendepunkte erhalten wir in bekannter Weise diejenige der Doppeltangenten. Man findet: *es ist*

die Anzahl der Doppeltangenten der Evolute gleich

$$\frac{1}{2}\left\{(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma - 1) - (\iota + 3\mu)\right\}.$$

Für den allgemeinen Kegelschnitt erhält man 3, nämlich die beiden Axen und g_∞, für die Parabel 0, wie erforderlich. In complicirteren Fällen zählt g_∞ für mehrere Doppeltangenten; es liegen ja auf ihr σ Inflexionen und $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ Spitzen, für welche die Tangente allemal mit g_∞ zusammenfällt. Löst man die vielfache Tangente in Doppeltangenten auf, und subtrahiert die erhaltene Zahl von der obigen, so gibt der Rest die Anzahl der Doppelnormalen der Curve C an. [1])

Wir discutieren endlich noch die Zahl γ der Punkte der Rückkehrkante durch welche je eine nicht benachbarte Erzeugende der Fläche hindurchgeht; nach Abzug einer gewissen Gruppe von im Unendlichen liegenden Punkten dieser Art und nachheriger Division durch zwei erhalten wir diejenigen Krümmungskreise welche C noch anderswo zweipunktig berühren. Diese abzuziehenden Punkte sind die folgenden. Es schneidet erstens die Rückkehrkante die Curve K_∞ einfach in 2ι Punkten, herrührend von den ι Wendepunkten von C; durch jeden dieser Punkte gehen, ausser den beiden unendlich benachbarten Erzeugenden die sich in ihm schneiden, $\nu - \sigma - 2$ andre, und es zählen also alle diese Punkte zusammen für $2\iota(\nu - \sigma - 2)$; dieselben sind abzuziehen weil sie offenbar nicht zu den von uns verlangten Kreisen führen.

In zweiter Linie haben wir die 2σ auf K_∞ gelegenen Punkte der Rückkehrkante zu betrachten welche herrühren von den σ Berührungsstellen von C mit g_∞, die Punkte also für welche E_∞ selbst Schmiegungsebene ist (§ 3). Es schneiden sich in K_∞ $\nu - \sigma$ Blätter der Fläche, an jeder der von uns betrachteten Stellen aber,

---

[1]) Die vorstehenden Resultate sind im Einklang mit den in SALMON-FIEDLER's „Ebene Curven", 2e Aufl. S. 122 gegebenen, sobald man bemerkt dass dort vorausgesetzt worden ist, es gehe die Curve C ε-mal durch *einen* Kreispunkt, während wir, um uns auf reelle Curven beschränken zu können, vorausgesetzt haben sie gehe ε-mal durch beide Kreispunkte. Es ist also in den citirten Formeln jedes ε durch 2ε zu ersetzen.

ausser den beiden durch die Rückkehrkante gehenden, nur $\nu - \sigma - 1$, weil aus einem Berührungspunkte von C mit g_∞ nur noch $\nu - \sigma - 1$ andre Tangenten an dieselbe gehen; an jeder dieser Stellen hat die Rückkehrkante mit jedem dieser Blätter eine zweipunktige Berührung, denn es wird sich aus späteren Betrachtungen ergeben (§ 12), dass von den drei hier unendlich nahe zusammenliegenden unendlich fernen Punkten der Rückkehrkante nur zwei als auf K_∞ liegend betrachtet werden dürfen; es ist also zu subtrahieren die Zahl $4\sigma(\nu - \sigma - 1)$.

Endlich ist noch auf die $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ auf K_∞ liegenden Spitzen der Rückkehrkante zu achten, welche von den gewöhnlichen Schnittpunkten von C mit g_∞ herrühren, und durch deren jede $\nu - \sigma - 2$ Blätter der Fläche gehen ausser den drei durch die Rückkehrkante, entsprechend den Tangenten aus einem gewöhnlichen Curvenpunkte an dieselbe. Weil die Rückkehrtangente zugleich eine Tangente von K_∞ ist, so hat die Spitze mit jedem Blatt 3 zusammenfallende Punkte gemein, es ist also schliesslich noch die Zahl $6(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu - \sigma - 2)$ zu subtrahieren.

Fürht man nun die Rechnung wirklich durch, so erhält man folgendes Resultat:

es besitzt die Curve C

$$\begin{aligned}\gamma' = {} & (2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma - 12) \\ & + \sigma(\nu - \sigma - 1) - 6\mu + 24\nu - 14\iota + 9\sigma\end{aligned}$$

Krümmungskreise, welche sie noch in einem andern Punkte zweipunktig berühren.

Als Beispiel, und teilweise zur Kontrolle, fügen wir die Zahl dieser Kreise hinzu für die verschiedenen Gattungen von Curven dritter Ordnung. Man erhält:

für die C_6^3 (also die allgemeine C^3) 72;
„ „ C_4^3 (also mit Doppelpunkt) 36;
„ „ C_3^3 (also mit Rückkehrpunkt) 22;
„ „ C_6^3 ($\sigma = 1$, welche also g_∞ berührt) 46;
„ „ C_4^3 ($\sigma = 1$) 20;
„ „ C_3^3 ($\sigma = 1$) 10;
„ „ circulare C_6^3 ($\varepsilon = 1$) 0;
„ „ „ C_4^3 ($\varepsilon = 1$) 0;
„ „ „ C_3^3 ($\varepsilon = 1$) 0.

Die letzten drei Resultate ziehen wir zur Kontrolle heran. Es

hat nämlich ein Kreis mit einer C^3 6 Punkte gemein; ist nun die Curve circular, so hat ein Krümmungskreis mit derselben $3 + 2 = 5$ Punkte gemein, und folglich kann er die Curve nicht überdies noch berühren. Das nämliche gilt auch von einer C^4 welche bicircular ist, also die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten hat; in der Tat gibt auch in diesem Falle unsere Formel die Zahl 0, ganz gleichgültig ob die Curve noch einen dritten Doppelpunkt besitzt oder nicht. Weiter kann man in dieser Richtung natürlich nicht gehen, weil eine C^5 mit zwei dreifachen Punkten nicht möglich ist.

§ 8. Das System der die Curve C doppelt berührenden Kreise ergibt sich aus der Betrachtung der Doppelcurve der cyklographischen Fläche; die Bildkreise der Punkte dieser Curve sind im allgemeinen Kreise der verlangten Art. Nun setzt sich aber die vollständige Doppelcurve, deren Ordnung x wir der Tabelle auf Seite 17 entnehmen, aus der Curve C, dem $(\nu - \sigma)$-fachen Kegelschnitt K_∞, und einer Restcurve zusammen, (§ 3), und es ist klar dass nur diese letztere hier in Betracht kommt; ihre Ordnung $2\,x'$ erhalten wir indem wir von der Zahl x die Ordnung μ der C und überdies die Zahl $2\,\dfrac{(\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1)}{1.\,2} = (\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1)$ subtrahieren; man findet:

$$2\,x' = 2\,(\mu + \nu - 2\,\varepsilon - \sigma)^2 - 11\,\mu - \nu^2 + 2\,\nu\,\sigma - \nu - 3\,\iota + 20\,\varepsilon - \sigma^2 + 9\sigma.$$

Diese Restcurve nun ist symmetrisch in Bezug auf die Ebene B; *es ist also der Ort der Centra der die Curve C doppelt berührenden Kreise eine ebene Curve von der Ordnung x'.* [1])

Die Schnittpunkte der Restdoppelcurve mit der Ebene B sind die folgenden:

a) Die $\varkappa$ Spitzen der C. Nach § 4 sind diese Punkte Doppelpunkte der Rückkehrcurve der cyklographischen Fläche, und die beiden Schmiegungsebenen in einem solchen Punkte schneiden sich in der Tangente der Spitze. Es gehen also durch den Punkt 4 je zwei und zwei unendlich benachbarte Erzeugenden der Fläche,

---

[1]) Man erkennt leicht dass es, um darzutun dass die Zahl x' immer durch 2 teilbar ist, genügt zu zeigen dass $\mu + \nu^2 + \nu + \iota + \sigma^2 - \sigma$ immer gerade ist. Nun ist $\mu = \nu(\nu - 1) - 2\,\tau - \sigma(\sigma - 1) - 3\,\iota$, also $\mu + \nu^2 + \nu + \iota + \sigma(\sigma - 1) = 2\,\nu^2 - 2\,\tau - 2\,\iota$, also gerade.

d. h. es schneiden sich in demselben 4 Paare *nicht* benachbarter Erzeugenden, oder es gehen 4 Äste der Doppelcurve durch ihn hindurch, welche aber alle von der nämlichen Tangente, nämlich der Rückkehrtangente von C, berührt werden; zwei dieser Äste bilden die Spitze von C, die beiden andern eine Spitze der Restcurve; in jedem der $\varkappa$ Rückkehrpunkte hat also die Ebene B mit der Restcurve einen dreipunktigen Contact, d. h. es gelten diese Punkte für $3\varkappa$ oder $3\iota + 9(\mu - \nu)$ einfache Schnittpunkte.

b). Die δ Doppelpunkte der C. Jeder dieser Punkte ist der Schnittpunkt von 4 nicht benachbarten Erzeugenden der Fläche, also ein sechsfacher Punkt der vollständigen oder ein vierfacher der Restdoppelcurve, während leicht einzusehen ist dass die Tangenten an die 4 verschiedenen Äste nicht in B liegen. Es gelten also diese Punkte für 4δ einfache Schnittpunkte. Nun ist

$$\nu = \mu(\mu - 1) - 2\delta - 2\varepsilon(\varepsilon - 1) - 3\varkappa \quad \text{, und}$$
$$\varkappa = \iota + 3(\mu - \nu) \quad \text{, folglich}$$
$$4\delta = 2\mu^2 - 20\mu + 16\nu - 4\varepsilon(\varepsilon - 1) - 6\iota.$$

c). Die einfachen Schnittpunkte mit C der zweimal $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten an C aus den beiden imaginären Kreispunkten. Jede solche Tangente hat mit C im Berührungspunkte 2, und im betreffenden Kreispunkte ε Punkte gemein, aber weder die einen noch die andern gehören der Restdoppelcurve an. Denn was den Berührungspunkt anbetrifft, so ist derselbe nach § 4 eine Spitze der Rückkehrcurve, während die zugehörige Schmiegungsebene die Tangente selbst und den Punkt Z_∞ enthält und also senkrecht ist zur Ebene B; nun ist eine Spitze der Rückkehrcurve ein gewöhnlicher Punkt der Doppelcurve, während beide von der nämlichen Gerade berührt werden [1]; es geht also nur die Doppelcurve C durch diesen Punkt, nicht aber die Restcurve. Und was die imaginären Kreispunkte anbetrifft, so wissen wir bereits (§ 3) dass dieselben, wie alle anderen Punkte von K_∞, $(\nu - \sigma)$-fache Punkte der Fläche sind; es geht also die Restdoppelcurve ebensowenig durch die Kreispunkte wie durch irgend einen beliebigen andern Punkt von K_∞.

Es hat aber die von uns betrachtete Tangente noch $\mu - \varepsilon - 2$ einfache Schnittpunkte mit C gemein und diese sind für die Restcurve Doppelpunkte. Weil nämlich die Tangente selbst auf der

---

[1]) Cremona-Curtze „Oberflächen" S. 90.

Fläche liegt, so gehen durch jeden solchen Schnittpunkt 3 Erzeugenden der Fläche; der Punkt ist also ein dreifacher für die vollständige, und somit ein zweifacher Punkt für die Restdoppelcurve, und die beiden Tangenten an die letztere liegen in der soeben genannten vertikalen Schmiegungsebene, aber nicht in B; wir erhalten also zwei Schnittpunkte. Und weil es im ganzen $2(\nu - 2\varepsilon - \sigma)$ Tangenten, und auf jeder derselben $2(\mu - \varepsilon - 2)$ Schnittpunkte gibt, so erhalten wir, alles zusammen genommen,

$$4(\nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu - \varepsilon - 2).$$

d) Die Schnittpunkte der zwei Gruppen von $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten aus den imaginären Kreispunkten unter sich; jeder solche Punkt ist der Schnittpunkt zweier Erzeugenden der Fläche und somit ein einfacher Punkt der Doppelcurve, und weil er weder auf C noch auf K_∞ liegt so gehört er der Restcurve an. Es sind diese Punkte die sogenannten Brennpunkte der Curve C; wir finden also im Vorübergehen den Satz:

es besitzt die Curve C $(\nu - 2\varepsilon - \sigma)^2$ *Brennpunkte.*

e) Endlich sind noch die σ Berührungspunkte von C mit g_∞ zu berücksichtigen. Durch je zwei unendlich benachbarte Schnittpunkte von C mit g_∞ gehen 4 paarweise unendlich benachbarte Tangenten an K_∞, welche (§ 3) Erzeugenden der Fläche sind. Dieselben bilden ein umgeschriebenes Vierseit dessen eine Diagonale die Gerade g_∞ ist; die beiden andern gehen also durch den Pol von g_∞ in Bezug auf K_∞, d. h. durch Z_∞. Eine derselben ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten mit K_∞, die andre verbindet die beiden letzten Ecken, welche den beiden auf g_∞ liegenden unendlich benachbart sind; diese gehören der Curve C an, jene also der Restcurve, d. h. es geht die Restcurve durch die σ Berührungspunkte hindurch und hat dort durch Z_∞ gehende Tangenten; wir erhalten somit zu den schon vorhandenen Schnittpunkten der Restcurve mit B noch σ einfache hinzu, und wenn wir jetzt alle in den Gruppen $a \ldots e$ enthaltenen Punkte addiren, so erhalten wir genau die Zahl $2x'$, womit dieselbe controlirt ist.

Die Anzahl der die Curve C in einem gegebenen Punkte P und überdies noch an einer andern Stelle berührenden Kreise erhalten wir indem wir eine der beiden durch P gehenden Erzeugenden der Fläche mit der Doppelcurve schneiden. Nun wird eine Erzeugende von $r - 4$ nicht benachbarten geschnitten [1]), unter

---

[1]) CREMONA-CURTZE „Oberflächen" S. 12.

diesen befinden sich aber $\nu - \sigma - 1$ welche die gegebene auf K_∞, und eine welche sie auf C schneidet, sodass für die Restcurve nur $r - (\nu - \sigma) - 4$ übrig bleiben. Indem wir den Wert von r auf Seite 16 einsetzen erhalten wir:

unter den doppelt berührenden Kreisen gibt es jeweils

$$2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 4$$

welche die Curve an einer vorgeschriebenen Stelle berühren. Oder anders ausgedrückt:

unter den x' Schnittpunkten einer beliebigen Normale der Curve C (oder Tangente der Evolute) mit dem Ort der Centra der doppelt berührenden Kreise gibt es $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 4$, deren zugehörige Kreise die Curve im Fusspunkte der Normale berühren.

Ist P ein Doppelpunkt von C so wird jeder der beiden Zweige von $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 6$ doppelt berührenden Kreisen berührt, denn irgend eine der 4 durch P gehenden Erzeugenden der Fläche wird jetzt in P nicht von einer, sondern von drei andern Erzeugenden geschnitten, und wenn endlich P in eine Spitze fällt, so fallen die beiden beim Doppelpunkte getrennt liegenden Systeme zusammen während die Anzahl der Kreise um eine Einheit wächst. Eine Spitze von C ist nämlich ein Doppelpunkt der Rückkehrcurve der Fläche (§ 4), und die Erzeugenden der Fläche in diesem Punkte sind die Doppelpunktstangenten selbst. Jede derselben wird, *ausser von der andern*, noch von $r - 6$ weiteren Erzeugenden geschnitten [1]); im Unendlichen aber ändert sich nichts, also ist die Anzahl der in der Spitze berührenden doppelt berührenden Kreise $r - 6 - (\nu - \sigma - 1) = 2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 5$.

§ 9. Für unsere weiteren Zwecke ist auch eine genaue Kenntnis des Verhaltens der Doppelcurve in unendlicher Ferne notwendig; wir zählen also die Schnittpunkte mit E_∞ wieder der Reihe nach auf. Hier finden wir in erster Linie die σ Berührungspunkte von C mit g_∞ wieder, von denen im vorhergehenden § sub *e*) gezeigt worden ist dass in ihnen die Restdoppelcurve die Ebene E_∞ berührt; wir finden also:

a) 2σ Schnittpunkte in den Berührungspunkten von C mit g_∞.

b) Die Schnittpunkte der Tangenten an K_∞ aus den $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ einfachen Schnittpunkten von C mit g_∞ unter sich, wobei aber

---

[1]) Cremona-Curtze „Oberflächen" S. 88.

die auf C selbst liegenden Schnittpunkte ausser Acht bleiben, eben weil sie auf C und also nicht auf der Restcurve liegen. Jede Tangente muss also mit $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma) - 2$ andern geschnitten werden, sodass wir eine Anzahl Schnittpunkte erhalten gleich

$$2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma - 1).$$

c) Die Schnittpunkte der Tangenten an K_∞ aus den σ Berührungspunkten von C mit g_∞ unter sich, die auf g_∞ selbst liegenden abgerechnet, denn diese sind bereits sub *a*) berücksichtigt. Bedenkt man dass jede dieser Tangenten für zwei unendlich benachbarte gilt, weil die Schmiegungsebene der Rückkehrkante längs derselben mit E_∞ zusammenfällt (§ 4), so sieht man unmittelbar ein dass jeder Schnittpunkt zweier solcher Tangenten für 4 Punkte der Doppelcurve gilt, d. h. dass die Doppelcurve in jedem solchen Punkte einen Doppelpunkt hat und in demselben die Ebene E_∞ berührt. Wir finden also $\frac{4.\,2\sigma(2\sigma - 2)}{2}$ oder $8\sigma(\sigma - 1)$ weitere Punkte.

d) Die Schnittpunkte der sub *b*) und *c*) genannten Geraden unter einander. Weil jede Gerade der Gruppe *c*) doppelt zählt so wird in einem Schnittpunkte einer solchen mit einer Gerade der Gruppe *b*) die Doppelcurve die Ebene E_∞ berühren längs der letzteren; folglich erhalten wir $2.\,2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)\,2\sigma$ neue Schnittpunkte.

e) Betrachten wir noch einmal eine Gerade der Gruppe *b*). Ist S_∞ der zugehörige Schnittpunkt der Curve C mit g_∞, t_∞ eine der beiden Tangenten aus S_∞ an K_∞, und T_∞ der Berührungspunkt, so gehen durch diesen an Erzeugenden der Fläche erstens die Gerade t_∞ selbst, zweitens die *beiden* dieser Gerade zu beiden Seiten unendlich benachbarten (T_∞ ist eine Spitze der Rückkehrkante, § 4), drittens die $\nu - \sigma - 2$ andern welche T_∞ verbinden mit den Berührungspunkten der aus S_∞ noch an C gehenden Tangenten, im ganzen also $\nu - \sigma + 1$. Durch einen *beliebigen* Punkt von K_∞ gehen aber nur $\nu - \sigma$, *also begegnen wir in T_∞ einem Schnittpunkte von K_∞ mit der Restdoppelcurve, und zwar werden durch T_∞ $\nu - \sigma - 2$ Zweige der Restcurve gehen, entsprechend den Schnittpunkten der einen überzähligen Erzeugende t_∞ mit den $\nu - \sigma - 2$ nicht benachbarten, und alle diese Zweige werden von der Gerade t_∞ berührt, weil die Schmiegungsebene längs jeder der $\nu - \sigma - 2$ Erzeugenden durch t_∞ selbst hindurchgeht und also von der Schmiegungsebene längs t_∞ in dieser Gerade selbst geschnitten wird.* Wir erhalten somit $2.\,2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu - \sigma - 2)$ weitere Punkte.

f) Betrachten wir auch noch einmal eine Gerade der Gruppe *c*). S_∞, S'_∞ seien die beiden unendlich benachbarten Schnittpunkte von C mit g_∞, t_∞, t'_∞ die unendlich benachbarten Tangenten aus ihnen an K_∞, so ist der Schnittpunkt T_∞ der Berührungspunkt. Nun gehen aus S_∞ noch $\nu - \sigma - 1$ Tangenten an C, durch T_∞ also ausser t_∞, t'_∞ noch $\nu - \sigma - 1$ Erzeugenden, und also im ganzen wieder $\nu - \sigma + 1$. Die eine überzählige schneidet aber jetzt $\nu - \sigma - 1$ nicht benachbarte, *es gehen also jetzt durch* T_∞ $\nu - \sigma - 1$ *Zweige der Restcurve, welche, aus dem nämlichen Grunde wie sub e), alle von* t_∞ *berührt werden. Allein, was von* t_∞ *gilt, gilt ebenfalls von* t'_∞. *d. h. es hat in diesem Falle jeder der* $\nu - \sigma - 1$ *Zweige der Restcurve in* T_∞ *mit* E_∞ *einen dreipunktigen Contact.* Und die auf diese Weise neu hinzukommende Schnittpunkteanzahl ist also $3 . 2\,\sigma\,(\nu - \sigma - 1)$.

g). Wir haben endlich noch die Doppeltangenten der Curve C zu betrachten. Es habe eine solche mit C gemein die benachbarten Punkte R, R' und R_1, R'_1, während sie g_∞ in S_∞ schneide, und eine Tangente aus S_∞ an K_∞ mit dieser Curve die Nachbarpunkte T_∞, T'_∞ gemein habe. Es gehen aus S_∞ an C noch $\nu - \sigma - 2$ Tangenten, und es gehen also durch T_∞ die Erzeugenden $T_\infty\, R$, $T_\infty\, R_1$ und noch $\nu - \sigma - 2$ andre, und ebenso durch T'_∞ die Erzeugenden $T'_\infty\, R'$, $T'_\infty\, R'_1$ und noch $\nu - \sigma - 2$ andre. Durch jeden dieser beiden Punkte gehen also, wie durch irgend einen andern Punkt von K_∞, nur $\nu - \sigma$ Erzeugenden, aber während im allgemeinen die zu zwei Nachbarpunkten gehörigen Erzeugenden windschief sind haben hier $T_\infty\, R$ und $T'_\infty\, R'_1$, und ebenso $T_\infty\, R_1$ und $T'_\infty\, R'$ einen Punkt gemein; *und es schneidet also die Restcurve die Ebene* E_∞ *in* T_∞, *während leicht einzusehen ist dass die Tangente der vierte harmonische Strahl zu* $T_\infty\, S_\infty$ *in Bezug auf* $T_\infty\, R$, $T_\infty\, R_1$ *ist, d. h. also die Strecke zwischen den Berührungspunkten der Doppeltangente senkrecht halbirt.*

Die Anzahl dieser letzten Gruppe von Schnittpunkten ist $2\,\tau$, oder, indem wir eine der PLÜCKER'schen Formeln benutzen, $\nu\,(\nu - 1) - \mu - 3\,\iota - \sigma(\sigma - 1)$. Und die Addition aller in den Gruppen *a*).....*g*) enthaltenen Anzahlen führt in gehöriger Weise wieder zu der Zahl $2\,x'$.

§ 10. Die Resultate des vorhergehenden Paragraphen sollen jetzt benutzt werden zur Bestimmung der Anzahl und der Natur der vielfachen Punkte unseres Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise. Es kann die Restdoppelcurve keine Doppelpunkte zeigen, ausser etwa in gewissen Punkten welche sie mit C oder

K_∞ gemein hat; denn sobald mehr als zwei Erzeugenden der Fläche sich im nämlichen Punkte begegnen erhält die Doppelcurve mindestens einen dreifachen Punkt; *diese* sind aber für uns von grosser Wichtigkeit, denn ihre Projektionen auf B sind die Mittelpunkte von Kreisen welche die Curve C in drei verschiedenen Punkten berühren; es gilt also deren Anzahl zu bestimmen.

Besitzt die Projektion der Restdoppelcurve Doppelpunkte, so werden diese also herrühren von Geraden senkrecht zur Ebene B welche die Raumcurve in mehr als einem Punkte schneiden, und zwar wird die Anzahl dieser Punkte 4 sein müsssen, infolge der Symmetrie der Curve in Bezug auf B; hieraus ergibt sich dass die Doppelpunkte unsres Ortes Mittelpunkte sind von zwei verschiedenen die Curve C doppelt berührenden Kreisen, und auch die Anzahl *dieser* Punkte ist also für uns von Wichtigkeit.

Zur Bestimmung dieser Anzahlen berechnen wir nun in erster Linie die Klasse des Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise. Denken wir irgend eine Gerade g senkrecht zu B. Dieselbe wird nach § 6, S. 17 von R Tangenten der vollständigen Doppelcurve geschnitten, und unter diesen R Tangenten befinden sich ν, welche an C gehen, und 2 an K_∞; allein K_∞ ist eine $(\nu - \sigma)$-fache Curve der Fläche, und kann also aufgefasst werden als die Superposition von $\frac{1}{2}(\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1)$ Doppelkegelschnitten; jede der beiden Tangenten gilt daher als eine Tangente an jeden dieser Kegelschnitte, beide zusammen gelten also für $(\nu - \sigma)$ $(\nu - \sigma - 1)$. Subtrahieren wir diese letztere Zahl, vermehrt um ν, von R, so erhalten wir die Anzahl der Punkte von g durch welche nummehr Tangenten der Restdoppelcurve gehen, und diese Tangenten werden infolge der Symmetrie im allgemeinen paarweise mit g in einer Ebene liegen, und die Spur einer solchen Ebene wird eine Tangente sein unseres ebenen Ortes aus dem Fusspunkte der Gerade g in B. Allein auch hier gibt es wieder Ausnahmen; denn die Gerade g enthält den Punkt Z_∞, und durch diesen gehen erstens die Tangenten in den $(\nu - 2\,\varepsilon - \sigma)^2$ einfachen Schnittpunkten der Restdoppelcurve mit B (den Brennpunkten von C, § 8, S. 25), und zweitens die Tangenten in den σ unendlich fernen Punkten, welche herrühren von, und zusammenfallen mit, den Berührungspunkten von C mit g_∞ (§ 8, S. 25), und es ist klar dass diese beiden Gruppen von Tangenten hier auszuschliessen sind, weil die Ebenen durch dieselben und g die Raumcurve berühren ohne dass ihre Spuren Tangenten der Projektion derselben sind. Also erst nachdem auch noch die um σ vermehrte Zahl $(\nu - 2\,\varepsilon - \sigma)^2$ abgezogen ist erhalten wir einen Rest, der, durch 2 geteilt, die Klasse

unseres Ortes ergibt. Nennen wir das Resultat der Division R', so erhalten wir: *die Klasse des Ortes der Centra der die Curve C doppelt berührenden Kreise ist gleich*

$$R' = 2(\nu + 3)(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) - 8(\mu + \nu) - 2\nu(\nu - \varepsilon - \sigma) \\ - 2\varepsilon(\varepsilon + \sigma - 9) - 2\sigma(\sigma - 4).$$

Nachdem jetzt die Klasse unsrer Curve bestimmt worden ist brauchen wir nur noch die Anzahl ihrer Rückkehrpunkte zu kennen um mittelst einer der PLÜCKER'schen Formeln auch die Anzahl der Doppelpunkte zu erfahren. In Bezug auf die Rückkehrpunkte nun ist folgendes zu bemerken. Es besitzt erstens die Restdoppelcurve $\varkappa$ Rückkehrpunkte in den $\varkappa$ Spitzen der Curve C (§ 8, S. 23), allein diese verschwinden in der Projektion, weil die Tangentialebenen in denselben senkrecht sind zur Ebene B; in der Projektion erhalten wir hier einfach Übergänge von parasitischen in nicht parasitische Teile. Dann aber zeigt die Restdoppelcurve eine Spitze in jedem Punkte wo die Rückkehrkante von einer diese letztere Curve anderswo berührenden Gerade geschnitten wird; denn in einem solchen Punkte werden zwei längs der Rückkehrkante zusammenstossende Blätter der Fläche von einem einfachen Blatte geschnitten, was, wie die directe Anschauung lehrt, zur Folge hat dass auch die Doppelcurve diesen Punkt enthält, und zwar als Spitze. Die Anzahl dieser Punkte beträgt nach § 7, S. 22 $2\gamma'$; dieselben liegen aber paarweise symmetrisch in Bezug auf B, *sodass die Anzahl der Rückkehrpunkte des Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise* γ' beträgt.

Nennen wir jetzt die Anzahl der Doppelpunkte δ', so ergibt die PLÜCKER'sche Formel:

$$R' = x'(x' - 1) - 2\delta' - 3\gamma', \text{ oder}$$
$$\delta' = \frac{1}{2}\left\{x'(x' - 1) - R' - 3\gamma'\right\}.$$

Allein diese Punkte sind bei weitem nicht alle wirkliche Doppelpunkte, sondern es müssen infolge des complicirten Verhaltens der Restdoppelcurve in unendlicher Ferne mehrere der im vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Anzahlen jetzt wieder subtrahiert werden. Vorher aber sei noch bemerkt dass die δ vierfachen Punkte der Restdoppelcurve, welche mit den Doppelpunkten der C zusammenfallen (§ 8, S. 24), durch die Projektion übergehen in Doppelpunkte, und zwar, wie unmittelbar einzusehen, in solche deren

beide Tangenten die Winkel der Tangenten im nämlichen Punkte an C halbieren; und zweitens dass die § 8, S. 24 sub c) genannten Punkte, welche Doppelpunkte für die Restdoppelcurve sind, diesen Charakter durch die Projektion verlieren, wiederum infolge der Symmetrie.

Es kommen jetzt in Wegfall:

1°. die Punkte sub c) § 9, S. 27, deren Anzahl $2\sigma(\sigma-1)$ beträgt, und in deren jedem die Restdoppelcurve einen Doppelpunkt besitzt mit mit E_∞ zusammenfallender Tangentialebene. Es liegen diese Punkte zu je zwei und zwei auf Geraden durch Z_∞, sie projicieren sich also in $\sigma(\sigma-1)$ Punkte auf g_∞, und diese Projektionen sind offenbar Berührungsknoten für unsern Ort der Centra, so dass jeder derselben zwei Doppelpunkte absorbirt, im ganzen also $2\sigma(\sigma-1)$;

2°. die Punkte T_∞ sub e) § 9, S. 27, durch deren jeden die Restdoppelcurve $\nu-\sigma-2$ Zweige hindurchschickt, alle mit der nämlichen Tangente t_∞. Auch diese Punkte liegen paarweise auf Geraden durch Z_∞, sie projicieren sich also in $\mu-2\varepsilon-2\sigma$ Punkte von g_∞, und es wird in denselben die Gerade g_∞ von $\nu-\sigma-2$ Zweigen des ebenen Ortes der Centra berührt, sodass wir es hier zu tun haben mit einer Vereinigung von zwei $(\nu-\sigma-2)$-fachen Punkten, oder von $(\nu-\sigma-2)(\nu-\sigma-3)$ Doppelpunkten. Weil die Anzahl der hier in Betracht kommenden Punkte $\mu-2\varepsilon-2\sigma$ ist, so kommen also im ganzen in Wegfall $(\mu-2\varepsilon-2\sigma)(\nu-\sigma-2)(\nu-\sigma-3)$ Doppelpunkte;

3°. die Punkte T_∞ sub f) § 9, S. 28. Durch jeden derselben gehen $\nu-\sigma-1$ Zweige der Restcurve, und jeder dieser Zweige hat in T_∞ mit E_∞ einen dreipunktigen Contact. Es gibt 2σ solcher Punkte, allein auch diese liegen wiederum paarweise in Geraden durch Z_∞, und projicieren sich also in σ Punkte von g_∞. Durch jeden derselben gehen $\nu-\sigma-1$ Zweige des Ortes der Centra, und jeder derselben hat im betreffenden Punkte einen Wendepunkt mit mit g_∞ zusammenfallender Tangente. Es liegen also jetzt drei $(\nu-\sigma-1)$-fache Punkte unendlich nahe zusammen, d. h. jeder solche Punkt absorbirt $\frac{3}{2}(\nu-\sigma-1)(\nu-\sigma-2)$ Doppelpunkte; es sind also im ganzen zu subtrahieren $\frac{3}{2}\sigma(\nu-\sigma-1)(\nu-\sigma-2)$ Doppelpunkte.

Nennen wir das Resultat der Subtraktion δ^*, so erhalten wir:

$$\delta^* = \frac{1}{2}\left\{ x'(x'-1) - R' - 3\gamma' \right\} - 2\sigma(\sigma-1) - \left\{ (\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu - \sigma - 3) + \frac{3}{2}\sigma(\nu - \sigma - 1) \right\}(\nu - \sigma - 2).$$

Allein jetzt haben wir immer noch nicht die wirklichen Doppelpunkte, denn unter den δ^* Doppelpunkten befinden sich auch noch die dreifachen, d. h. die Centra der die Curve C dreimal berührenden Kreise. Wir geben die Bestimmung dieser letzteren in der nächsten Nummer, wollen aber vorher zum Schlusse des jetzigen § die verschiedenen unendlich fernen Punkte des Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise tabellarisch zusammenstellen. *Es besitzt dieser Ort auf g_∞:*

a). σ *einfache Punkte in den Berührungspunkten von C mit g_∞;* (Gruppe *a* des § 9);

b). $(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma - 1)$ *weitere einfache Punkte* (Gruppe *b* des § 9), *in Richtungen welche die Winkel der Asymptoten der Curve C halbieren;*

c). $\sigma(\sigma - 1)$ *Berührungsknoten mit mit g_∞ zusammenfallender Tangente* (Gruppe *c* des § 9), *in Richtungen welche die Winkel der Geraden nach den Berührungspunkten von C mit g_∞ halbieren;*

d). $2\sigma(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ *einfache Punkte, in denen aber die Curve die Gerade g_∞ berührt* (Gruppe *d* des § 9), *in Richtungen welche die Winkel zwischen je einer Asymptote und einer Gerade nach einem Berührungspunkt von C mit g_∞ halbieren;*

e). $(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ *Punkte in Richtungen welche denen der $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ einfachen Schnittpunkte von C mit g_∞ senkrecht zugeordnet sind, und in deren jedem $\nu - \sigma - 2$ Zweige der Curve die Gerade g_∞ berühren* (Gruppe *e* des § 9);

f). σ *Punkte in Richtungen welche denen der σ Berührungspunkte von C mit g_∞ senkrecht zugeordnet sind, und in deren jedem $\nu - \sigma - 1$ Zweige der Curve die Gerade g_∞ osculieren* (Gruppe *f* des § 9);

g). τ *einfache Schnittpunkte, entsprechend den τ Doppeltangenten der C; die zugehörigen Asymptoten sind die Geraden, welche die Strecken zwischen den beiden Berührungspunkten jeder Doppeltangente senkrecht halbieren* (Gruppe *g* des § 9).

§ 11. In der Tabelle des § 6, S. 17, findet sich der Vollständigkeit halber auch eine Formel für die Anzahl der dreifachen Punkte der Doppelcurve unserer cyklographischen Fläche, allein es muss bemerkt werden dass diese Formel uns hier nicht nützen kann. Denn es bezieht sich dieselbe auf die *vollständige Doppelcurve*, und

diese hat, sobald $\nu - \sigma > 2$ ist, unendlich viele dreifachen Punkte, weil ja der Kegelschnitt K_∞ eine $(\nu - \sigma)$-fache Curve ist. Wir brauchen also eine Formel für die Anzahl der dreifachen Punkte der *Restdoppelcurve*, und erhalten dieselbe indem wir der Methode folgen nach welcher CREMONA [1]) im allgemeinen Falle die entsprechende Formel für die nicht degenerirte vollständige Doppelcurve gefunden hat, und welche einfach hierin besteht dass man die sämtlichen Schnittpunkte der Curve mit der zweiten Polarfläche irgend eines Poles O in Bezug auf die cyklographische Fläche bestimmt, und bemerkt dass sich unter diesen auch die gesuchten Punkte vorfinden müssen, weil die dreifachen Punkte der Doppelcurve zugleich dreifache Punkte der Fläche, und deshalb auf der zweiten Polarfläche irgend eines beliebigen Poles gelegen sein müssen. Überdies zählt jeder solche Punkt für 3 einfache Schnittpunkte, eben als dreifacher Punkt der Curve. Wir haben also folgendes: es ist die Ordnung der Restdoppelcurve $2\,x'$ (§ 8, S. 23), diejenige irgend einer zweiten Polarfläche $r - 2$, und somit die Anzahl der Schnittpunkte beider $2\,x'\,(r - 2)$, und diese Schnittpunkte setzen sich nun in unserm Falle aus den folgenden zehn Gruppen zusammen:

1°. den Punkten, in denen die Erzeugenden der Fläche, längs welcher die $n = 2\,\nu$ Tangentialebenen aus O an dieselbe sie berühren, von anderen Erzeugenden geschnitten werden. Denn diese Punkte sind für den vollständigen Querschnitt einer solchen Tangentialebene mit der Fläche selbst dreifach (dieser Querschnitt besteht nämlich aus einer Curve von der Ordnung $r - 2$ und der Berührungserzeugende doppelt gezählt), also mit der ersten Polarfläche von O zweifach, und also mit der zweiten einfach. Nun wird jede solche Berührungserzeugende von $r - 4$ anderen geschnitten; einer dieser Schnittpunkte liegt aber auf C, $\nu - \sigma - 1$ andere liegen vereinigt auf K_∞, auf der Restcurve liegen also nicht mehr als $r - \nu + \sigma - 4$, und es besteht also diese erste Gruppe aus $n\,(r - \nu + \sigma - 4)$ Punkten.

2°. Ein Doppelpunkt der Rückkehrcurve ist für die Doppelcurve vierfach, und gilt für zwölf Durchschnittpunkte der letzteren Curve mit der zweiten Polarfläche irgend eines Poles O. [2]) Nun besitzt unsere Rückkehrcurve in der Tat Doppelpunkte, und zwar in den Spitzen der Curve C, deren Anzahl $\varkappa = \iota + 3\,(\mu - \nu)$ ist; in jedem

---

1) „Oberflächen" S. 87, ff.

2) CREMONA-CURTZE „Oberflächen", S. 89.

dieser Punkte besitzt nicht nur die Curve C, sondern auch die Restcurve eine Spitze (§ 8, S. 24), beide mit der nämlichen Tangente, d. h. es verhalten sich die Curve C und die Restcurve in diesen Punkten ganz gleich, und wenn also ein solcher Punkt in Bezug auf die vollständige Doppelcurve 12 Schnittpunkte absorbirt, so repräsentirt er für die Restcurve deren sechs. Und es besteht also diese zweite Gruppe aus

$$6\,D = 6\,\varkappa = 6\,\iota + 18\,(\mu - \nu) \quad \text{Punkten.}$$

3°. Ein Rückkehrpunkt der Rückkehrcurve ist für die Fläche, als Schnittpunkt dreier Erzeugenden, ein dreifacher Punkt, aber von der besonderen Eigenschaft dass der kubische Berührungskegel aus drei mit der Tangentialebene zusammenfallenden Ebenen besteht. Irgend eine erste Polarfläche hat also in ihm einen uniplanaren Doppelpunkt, und jede zweite Polarfläche geht einfach durch ihn hindurch, und berührt in ihm die Tangentialebene der Fläche, und damit auch die Doppelcurve, denn die Doppelcurve und die Rückkehrkante haben in einer Spitze der letzteren die nämliche Tangente. [1]) Wir erhalten also als dritte Gruppe von Schnittpunkten die Anzahl der Rückkehrpunkte der Rückkehrkante, multipliziert mit zwei. Allein vorher sind abzuziehen die $2\,(\nu - 2\,\varepsilon - \sigma)$ in den Berührungspunkten der Tangenten aus den beiden Kreispunkten an C liegenden (§ 4, S. 10), weil diese von der Doppelcurve C, nicht aber von der Restcurve berührt werden, und überdies wollen wir auch noch die $2\,(\mu - 2\,\varepsilon - 2\,\sigma)$ auf K_∞ liegenden Spitzen subtrahieren (§ 4, S. 11), denn diese zeigen ein weit complicirteres Verhalten, und sollen also weiter unten (sub 7) für sich untersucht werden.

Es ist nun die Anzahl der Spitzen überhaupt (§ 6, S. 16):

$$\beta = 12\,\mu - 4\,\nu + 6\,\iota - 24\,\varepsilon - 12\,\sigma\,;$$

subtrahiert müssen werden: $2\,\mu + 2\,\nu - 8\,\varepsilon - 6\,\sigma$, sodass übrig bleiben

$$10\,\mu - 6\,\nu + 6\,\iota - 16\,\varepsilon - 6\,\sigma;$$

und diese Anzahl, multipliziert mit zwei, ergibt als Beitrag dieser dritten Gruppe

$$4\,(5\,\mu - 3\,\nu + 3\,\iota - 8\,\varepsilon - 3\,\sigma).$$

---

[1]) Cremona-Curtze „Oberflächen" S. 90.

4°. Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles hat mit der Doppelcurve einen dreipunktigen Contact in jedem Punkte der Rückkehrkante wo diese letztere von einer anderswo berührenden Erzeugende der Fläche geschnitten wird [1]); jeder solche Punkt ist nämlich ein Rückkehrpunkt für die Doppelcurve, während sich zeigt dass irgend eine zweite Polarfläche die Rückkehrtangente berührt. Die Anzahl der auf der Restdoppelcurve liegenden Punkte dieser Art ist $2\gamma'$ (§ 7, S. 22), der zu unserer Schnittpunkte-anzahl beigesteuerte Betrag also $6\gamma'$.

5°. Ein Doppelpunkt der Curve C ist der Schnittpunkt von 4 Erzeugenden der Fläche, und also für diese ein vierfacher Punkt; jede zweite Polarfläche geht also zweimal durch ihn hindurch, und weil er auch ein vierfacher Punkt für die Restdoppelcurve ist (§ 8, S. 24) so zählt er für 8 einfache Schnittpunkte beider; wir erhalten also eine weitere Anzahl von

$$8\delta = 4\left\{\mu^2 - 10\mu + 8\nu - 2\varepsilon(\varepsilon - 1) - 3\iota\right\}.$$

6°. Aus jedem der beiden Kreispunkte gehen an C $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten, deren jede die Curve in $\mu - \varepsilon - 2$ einfachen Punkten schneidet; diese Punkte sind dreifache Punkte für die cyklographise Fläche und Doppelpunkte für die Restdoppelcurve (§ 8, S. 24), durch jeden geht also die zweite Polarfläche einfach hindurch, während er für zwei der gesuchten Schnittpunkte gilt; der jetzige Beitrag ist also

$$4(\nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu - \varepsilon - 2).$$

7°. Jetzt müssen endlich noch einige Gruppen von unendlich fernen Punkten der Restdoppelcurve in Betracht gezogen werden. Nehmen wir zuerst die $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Berührungspunkte auf K_∞ der Tangenten aus den einfachen Schnittpunkten von C mit g_∞ an jenen gezogen (§ 9, S. 27, e). Durch einen solchen Punkt gehen $\nu - \sigma + 1$ Blätter der Fläche, alle die Tangente an K_∞ berührend, und $\nu - \sigma - 2$ Zweige der Restdoppelcurve, ebenfalls diese Gerade berührend, er absorbirt also $2(\nu - \sigma - 1)(\nu - \sigma - 2)$ Schnittpunkte der Restcurve mit irgend einer zweiten Polarfläche, denn von dieser letzteren gehen offenbar $\nu - \sigma - 1$ Blätter, auch wieder die nämliche Gerade berührend, durch ihn hindurch. Zusammenfassend erhalten wir also $2.2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu - \sigma - 1)(\nu - \sigma - 2)$ neue Punkte.

---

[1]) Cremona-Curtze „Oberflächen" S. 90.

8°. Jetzt nehmen wir einen Punkt T_∞ der Gruppe f, § 9, S. 28. Durch diesen gehen $\nu - \sigma + 1$ Blätter der Fläche selbst, also $\nu - \sigma - 1$ irgend einer zweiten Polarfläche, und $\nu - \sigma - 1$ Zweige der Restcurve, alle die Tangente an K_∞ im betreffenden Punkte, *und die unendlich benachbarte*, berührend; zusammengenommen erhalten wir also $3 . 2\,\sigma\,(\nu - \sigma - 1)^2$.

9°. Auch müssen wir noch die Punkte der Gruppe g, § 9, S. 28 ins Auge fassen, welche herrühren von den Doppeltangenten der Curve C. Es schneidet in diesen Punkten die Restdoppelcurve K_∞ einfach, und durch K_∞ gehen an dieser Stelle $\nu - \sigma$ Blätter der Fläche selbst, und also $\nu - \sigma - 2$ jeder zweiten Polarfläche; die Gesamtzahl der Schnittpunkte ist also

$$2\,\tau\,(\nu - \sigma - 2) = (\nu - \sigma - 2)\left\{\nu\,(\nu - 1) - \mu - 3\,\iota - \sigma\,(\sigma - 1)\right\}.$$

10°. Und schliesslich müssen wir der Punkte gedenken um die es ja eigentlich geht, nämlich der dreifachen Punkte der Restdoppelcurve, deren Anzahl wir gleich $2\,t'$ setzen wollen, weil sie paarweise symmetrisch liegen in Bezug auf B und es uns um ihre Projektionen zu tun ist. Wir erhalten also als letzten Beitrag $6\,t'$, denn durch jeden der $2\,t'$ Punkte, welche sowohl für die Doppelcurve wie für die Fläche dreifach sind, geht eine zweite Polarfläche einfach hindurch.

Eine Gleichung zur Bestimmung der Zahl t' erhalten wir nun indem wir die Summe der in den vorhergehenden zehn Gruppen enthaltenen Anzahlen gleichsetzen der eingangs dieses § gefundenen vollständigen Anzahl $2\,x'\,(r - 2)$. Führt man die Rechnung wirklich durch, so erhält man eine aus 39 Gliedern bestehende Formel, welche allen Versuchen, diese Glieder in einfachere Klammerausdrücke zusammenzufassen, widerstanden hat, sodass wir genötigt sind dieselben in extenso hinzuschreiben. So erhalten wir denn folgenden Satz:

Es gibt:

$$t' = \frac{1}{6}\Big\{4\,\mu^3 + 12\,\mu^2\,\nu - 24\,\mu^2\,\varepsilon - 12\,\mu^2\,\sigma + 6\,\mu\,\nu^2 + 48\,\mu\,\varepsilon^2$$
$$+ 6\,\mu\,\sigma^2 - 48\,\mu\,\nu\,\varepsilon - 12\,\mu\,\nu\,\sigma + 48\,\mu\,\varepsilon\,\sigma + \nu^3 - 12\,\nu^2\,\varepsilon - 3\,\nu^2\,\sigma$$
$$+ 48\,\nu\,\varepsilon^2 + 3\,\nu\,\sigma^2 + 24\,\nu\,\varepsilon\,\sigma - 32\,\varepsilon^3 - 48\,\varepsilon^2\,\sigma - 12\,\varepsilon\,\sigma^2 - \sigma^3$$
$$- 66\,\mu^2 - 45\,\mu\,\nu - 18\,\mu\,\iota + 252\,\mu\,\varepsilon + 93\,\mu\,\sigma - 3\,\nu^2 - 9\,\nu\,\iota$$
$$+ 84\,\nu\,\varepsilon + 24\,\nu\,\sigma - 240\,\varepsilon^2 + 36\,\varepsilon\,\iota - 180\,\varepsilon\,\sigma - 21\,\sigma^2 + 9\,\sigma\,\iota$$
$$+ 194\,\mu - 58\,\nu + 78\,\iota - 304\,\varepsilon - 122\,\sigma\Big\}$$

Kreise, welche die Curve C in 3 verschiedenen Punkten berühren.

Wir besitzen für diese Formel mehrere Kontrollemittel. Erstens muss die rechte Seite immer durch 6 teilbar sein. Nun sind eine ganze Anzahl von Coefficienten an und für sich schon durch 6 teilbar; fassen wir die anderen Glieder zusammen, so lassen sich dieselben in folgende Klammerausdrücke einordnen:

$$3(\nu+\sigma)(\mu+\nu^2+\nu+\iota+\sigma^2-\sigma)+2\{\mu(2\mu^2+1)-\nu(\nu^2-1)$$
$$-\varepsilon(\varepsilon^2+2)+\sigma(\sigma^2-1)\}.$$

Und nun ist $\mu+\nu^2+\nu+\iota+\sigma^2-\sigma$ nach der Bemerkung § 8, S. 23 unten immer eine gerade Zahl, während, wie leicht zu sehen, die Ausdrücke $\mu(2\mu^2+1)$, $\nu(\nu^2-1)$, $\varepsilon(\varepsilon^2+2)$, $\sigma(\sigma^2-1)$ einzeln immer den Factor 3 enthalten. Also, u. s. w.

Dann gibt es eine ziemliche Anzahl von Fällen wo dreifach berührende Kreise unmöglich sind, wie z. B. beim allgemeinen Kegelschnitt und bei der Parabel, und ebenfalls, was wichtiger ist, bei der circularen C_6^3, C_4^3 und C_3^3, und den verschiedenen Varietäten von bicircularen C^4. In allen diesen Fällen gibt die Formel die richtige Antwort. [1])

Nachdem jetzt die Anzahl der dreifachen Punkte des Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise aufgefunden ist, kann nunmehr auch die Anzahl der wirklichen Doppelpunkte dieser Curve bestimmt werden, denn dieselbe ist einfach gleich $\delta^* - 3t'$, wo δ^* der Formel des § 10, S. 32 zu entnehmen ist. Vermindern wir diese Zahl nun auch noch um die Zahl δ, also die Anzahl der Doppelpunkte der gegebenen Curve C, welche ebenfalls Doppelpunkte unserer neuen Curve sind, so erhalten wir die Anzahl derjenigen Punkte der Ebene B welche Mittelpunkte sind von 2 verschiedenen die Curve C doppelt berührenden Kreisen. Also:

Es gibt in der Ebene der Curve C $\delta^* - \delta - 3t'$ Punkte, welche Mittelpunkte sind von zwei verschiedenen die Curve C doppelt berührenden Kreisen.

Die in dieser Formel auftretenden Grössen γ', x', δ, R', t' finden sich der Reihe nach vor in § 7, S. 22, § 8, S. 23, 24, § 10, S. 30, § 11, S. 36.

---

[1]) Wir werden weiterhin, § 15, noch eine weit schärfere Kontrolle finden.

ZWEITER TEIL.

Anwendungen.

§ 12. Wir wollen nun die im ersten Teile dieser Arbeit studierte cyklographische Fläche dazu benutzen weitere Anzahlen herzuleiten welche in Beziehung stehen zu den Kreisen welche die Curve C unter vorgeschriebenen Bedingungen berühren, und fangen an mit der Frage nach denjenigen unter ihnen welche durch einen willkürlich gegebenen Punkt P gehen. Sämtliche Kreise durch P sind die Bildkreise der Punkte eines gleichseitigen Rotationskegels, dessen Spitze in P liegt und dessen Achse in diesem Punkte senkrecht steht auf der Ebene B, eines Kegels also, für welchen die Ebene B eine Symmetriebene ist; und die verlangten Kreise sind somit die Bildkreise der Durchdringungscurve dieses Kegels mit der cyklographischen Fläche. Diese Durchdringungscurve ist eine Raumcurve von der Ordnung

$$2r = 4(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) \qquad , \S\ 6,\ \text{S. } 16,$$

allein dieselbe zerfällt in eine Curve von der Ordnung $2(\nu - \sigma)$, nämlich den Kegelschnitt K_x, $(\nu - \sigma)$-mal gezählt, weil dieser auf beiden Flächen zugleich liegt, und einen Rest von der Ordnung

$$4\mu + 2\nu - 8\varepsilon - 2\sigma.$$

Dieser Rest ist symmetrisch in Bezug auf B, und somit erhalten wir das Resultat: *der Ort der Mittelpunkte der die Curve C berührenden und überdies durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehenden Kreise ist eine Curve von der Ordnung $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma$.*

Einem unendlich fernen Punkte dieser Curve entspricht eine Tangente der Curve C durch P, allein anstatt die Zahl ν zu erhalten erhalten wir $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma$. Dieser scheinbare Widerspruch ist aber sehr leicht zu heben. Denn es besteht der Bildkreis eines durch eine bestimmte Gerade unter 45° Neigung zur Ebene B gegebenen unendlich fernen Punktes aus der Spur derjenigen Ebene durch diese Gerade, für welche diese letztere eine Falllinie ist; allein dann gibt eine zur ersteren parallele Gerade im allgemeinen

eine andere Spur, obgleich sie durch den nämlichen unendlich fernen Punkt hindurchgeht; der Bildkreis eines solchen unendlich fernen Punktes ist also bis zu einem gewissen Grade unbestimmt, indem die denselben vertretende Gerade parallel sich selbst verschoben werden darf, und hieraus erklärt sich die Tatsache dass man unter Umständen unter den Lösungen einer cyklographischen Aufgabe gerade Linien erhalten kann welche der Aufgabe nicht in allen Stücken genügen. Im Übrigen sind im vorliegenden Falle die sämtlichen unendlich fernen Punkte unserer Curve leicht aufzufinden; es liegen deren ν in Richtungen senkrecht zu den Tangenten aus P an C, die übrigen $2\mu - 4\varepsilon - \sigma$ erhalten wir in 2 Gruppen von resp. $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ und 3σ. Betrachten wir nämlich einen Punkt T_∞ der Gruppe *e*) § 9, S. 27. Durch diesen gehen nicht, wie durch irgend einen andern Punkt von K_∞, $\nu - \sigma$, sondern $\nu - \sigma + 1$ Blätter der Fläche, und es gibt also das eine überzählige Blatt durch seinen Querschnitt mit dem Kegel einem durch T_∞ gehenden Zweige der Restdurchdringung den Ursprung, und dieser Zweig wird überdies die Tangente t_∞ berühren, weil sowohl das Blatt der Fläche wie der Kegel dies tun, woraus dann weiter hervorgeht dass unsere ebene Curve, welche die Projektion der Restdurchdringung ist, im entsprechenden Punkte die Gerade g_∞ berühren wird; und die Anzahl dieser Berührungspunkte ist $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$, nämlich die Hälfte der Anzahl der Punkte T_∞. Und die Betrachtung der Punkte T_∞ der Gruppe *f* § 9, S. 28 führt in analoger Weise zu σ weiteren unendlich fernen Punkten, welche aber Wendepunkte der Curve sind, mit mit g_∞ zusammenfallender Inflexionstangente.

Es schneidet also unsere Curve die Gerade g_∞ in ν einfachen Punkten, welche in Richtungen liegen senkrecht zu den Tangenten aus P an C; sie berührt g_∞ in $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ Punkten, in Richtungen senkrecht zu den Asymptoten der C; und sie osculiert g_∞ in σ Punkten, in Richtungen senkrecht zu denjenigen der Berührungspunkte von C mit g_∞.

Die Rückkehrkante der cyklographischen Fläche ist von der Ordnung

$$m = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma) \qquad (\S\ 6,\ \text{S. } 16),$$

folglich ist die Anzahl der Schnittpunkte derselben mit dem quadratischen Kegel gleich $2m$. Von den unendlich fernen Punkten der Rückkehrkante liegen $m - 2\sigma$ auf K_∞ [1]), folglich ist die Anzahl der nicht in unendlicher Ferne liegenden Schnittpunkte gleich

---

[1]) Vergleiche die Note im diesem nämlichen §, S. 41.

$m + 2\sigma$. Diese Punkte sind offenbar Spitzen der Durchdringung; ihre Projektionen auf die Ebene B fallen paarweise zusammen, und sind ebenfalls Spitzen der Projektion, und zugleich Mittelpunkte von Krümmungskreisen welche durch P gehen, während sich andererseits aus dem Umstande dass die Durchdringung auf dem quadratischen Kegel liegt leicht ergibt dass weitere Spitzen nicht existieren. Wir erhalten somit folgende Sätze:

Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise welche durch P gehen und C berühren enthält $\frac{1}{2} m + \sigma = \iota + 3\mu - 6\varepsilon - 2\sigma$ *Rückkehrpunkte.*

Und: *Von den Krümmungskreisen der Curve C gehen jeweils $\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 2\sigma$ durch einen beliebigen Punkt, oder es bilden diese Kreise eine Kreisreihe vom Punktindex $\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 2\sigma$.* [1])

Für den allgemeinen Kegelschnitt, die Parabel, und den Kreis, erhält man resp. 6, 4, 0.

Die Restdoppelcurve der cyklographischen Fläche ist § 8, S. 23 zufolge von der Ordnung $2x'$, sodass dieselbe von unserm Kegel in $4x'$ Punkten geschnitten wird, von welchen im Unendlichen liegen die $4(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu - \sigma - 2)$ Punkte der Gruppe e) § 9, S. 27, die $6\sigma(\nu - \sigma - 1)$ der Gruppe f) ebendaselbst, und die $2\tau = \nu(\nu - 1) - \mu - 3\iota - \sigma(\sigma - 1)$ der darauf folgenden Gruppe g). Werden diese drei Anzahlen subtrahiert so bleiben die im Endlichen befindlichen Schnittpunkte übrig, und diese liegen paarweise symmetrisch in Bezug auf B und stellen die Doppelpunkte der Durchdringung dar, während ihre Projektionen die Doppelpunkte unserer ebenen Curve und zugleich die Mittelpunkte derjenigen doppelt berührenden Kreise sind welche durch P gehen. Die Rechnung nun ergibt folgendes:

Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise welche durch P gehen und C berühren enthält

$$\frac{1}{2}\left\{(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 13\mu - \nu - 3\iota + 24\varepsilon + 7\sigma\right\}$$

Doppelpunkte. Und:

Von den die Curve C doppelt berührenden Kreisen gehen jeweils $\frac{1}{2}\left\{(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 13\mu - \nu - 3\iota + 24\varepsilon + 7\sigma\right\}$ *durch einen beliebigen Punkt, oder es bilden diese Kreise eine Kreisreihe mit der genannten Zahl als Punktindex.*

---

[1]) Cremona-Curtze „Einleitung etc." S. 48.

Beiläufig sei bemerkt dass man, wenn man beweisen will dass der Klammerausdruck gerade ist, wieder auf den Ausdruck $\mu + \nu^2 + \nu + \iota + \sigma^2 - \sigma$ und damit auf die Bemerkung des § 8, S. 23 geführt wird, womit der Beweis geleistet ist. Für allgemeinen Kegelschnitt, Parabel und Kreis gibt die Formel bez. die Anzahlen 4, 2, 0.

Aus der Ordnung, der Anzahl der Doppelpunkte und derjenigen der Rückkehrpunkte lassen sich nun in bekannter Weise die übrigen Singularitäten herleiten; insbesondere findet man für die Klasse das merkwürdig einfache Resultat $2\mu - 2\varepsilon$, welches auch deswegen auffällig ist weil weder ν noch ι noch σ darin auftreten.

Wird P auf der Curve C selbst gewählt so berühren Kegel und Fläche sich längs der beiden Erzeugenden in den Tangentialebenen welche die Tangente in P an C enthalten; hieraus folgt dass sich von unserer ebenen Curve die Normale in P zu C, zweimal gezählt, abtrennt, so dass ein Rest übrigbleibt dessen Ordnung um zwei Einheiten niedriger ist als im allgemeinen Falle. Das Büschel der die C in P berührenden Kreise enthält nach früherem *einen* Krümmungskreis und (§ 8, S. 26) $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 4$ Kreise welche in P selbst und noch an einer andern Stelle berühren; subtrahieren wir diese beide Anzahlen, die erste mit drei, die andre mit zwei multipliziert [1]), vom Punktindex der Kreisreihe der Krümmungskreise und der doppelt berührenden Kreise, so

---

[1]) Die beiden Erzeugenden welche die Fläche und der Kegel gemein haben enthalten je 2 unendlich benachbarte Punkte der Rückkehrkante; die Schmiegungsebenen dieser Punkte sind aber zugleich Tangentialebenen des Kegels, daher die Rückkehrkante an beiden Stellen mit dem Kegel eine dreipunktige Berührung eingeht, oder also 6 Punkte mit demselben gemein hat. Dieselben liegen aber paarweise symmetrisch in Bezug auf B, in der Projektion sind also 3 Einheiten zu subtrahieren. Übrigens ist dies auch wohl aus planimetrischen Gründen evident, denn durch jeden Punkt einer Curve gehen 3 unendlich benachbarte Krümmungskreise. An den Stellen aber wo die nämlichen Erzeugenden der Doppelcurve begegnen findet eine einfache Berührung statt; diese Punkte zählen also nur doppelt. Zugleich erhalten wir jetzt hier ein Mittel um zu zeigen (vergl. § 7, S. 22) dass von den drei in einem Punkte der Gruppe f, § 9, S. 28 vereinigt liegenden Punkten der Rückkehrkante nur zwei als auf $K\infty$ liegend angesehen werden dürfen. Lägen sie nämlich alle drei auf $K\infty$, so würden sämtliche m unendlich fernen Punkte der Rückkehrkante auf $K\infty$ liegen, und es würde also die letztere den quadratischen Kegel in m endlichen Punkten schneiden, d. h. durch einen beliebigen Punkt P würden $\frac{1}{2}m = \iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma$, und durch einen Punkt der Curve selbst $\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma - 3$ Krümmungskreise gehen. Diese Formel gibt für die Parabel die Anzahl 0, was offenbar falsch ist, denn der Krümmungskreis in einem Punkte A schneidet die Parabel noch in einem andern Punkte B; durch B geht also wenigstens *ein* Krümmungskreis, und nicht kein einziger; anstatt -3σ muss die Formel also das Glied -2σ enthalten, dann aber liegen von den drei unendlich benachbarten Punkten nur zwei auf $K\infty$.

erhalten wir: *durch einen beliebigen Punkt der Curve C gehen* $\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 2\sigma - 3$ *Krümmungskreise welche die Curve nicht in diesem Punkte selbst osculieren.* Und:

durch einen beliebigen Punkt der Curve C gehen

$$\frac{1}{2}\left\{(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 21\mu - 5\nu - 3\iota + 40\varepsilon + 11\sigma + 16\right\}$$

doppelt berührende Kreise, deren Berührungspunkte nicht mit diesem Punkte zusammenfallen.

Es gibt die letztere Formel für allgemeinen Kegelschnitt und Parabel null, was offenbar richtig ist, für den Kreis aber 4; allein für den Kreis ist $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 4 = -2$, also negativ; die Formel hat somit für den Kreis keinen Sinn.

Man könnte nun weiter den Punkt P in einem Doppelpunkte der C wählen, oder in einer Spitze, u. s. f., oder, ihn wieder von der Curve entfernend, in einem Brennpunkte, etc., allein zur Vermeidung von Weitschweifigkeit gehen wir an allen diesen Problemen mit Stillschweigen vorüber, prinzipiell dürfen sie aber als gelöst betrachtet werden. Nur folgendes fügen wir zum Schlusse noch hinzu; wählt man ausser P noch einen zweiten Punkt Q, so durchdringen sich die beiden zu P und Q gehörigen Kegel in einer zur Ebene B symmetrischen gleichseitigen Hyperbel, welche zwei Punkte von K_∞ enthält, und deshalb die cyklographische Fläche schneidet in

$$2r = 4(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) \text{ Punkten},$$

von denen aber $2(\nu - \sigma)$ im Unendlichen liegen; subtrahieren wir diese und dividieren den Rest durch zwei, so erhalten wir: *es gibt* $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma$ *Kreise welche die Curve C berühren und überdies durch zwei beliebige Punkte gehen.*

Es ist diese Zahl genau gleich der Ordnungszahl der in diesem § untersuchten ebenen Curve, was aus der Entstehungsweise beider wohl auch evident ist.

Man kann nun wieder einem der beiden Punkte, oder auch beiden, spezielle Lagen erteilen, und so eine ganze Reihe von Spezialfällen bilden, auf die wir aber hier nicht eingehen wollen.

§ 13. Wenn in der Ebene B eine Gerade g gegeben is so kann man fragen nach allen Kreisen welche C berühren und g unter einem Winkel von vorgeschriebenem Cosinus schneiden, bez. ebenfalls berühren. Wenn wir uns auf den Fall des Berührens, als den

interessanteren, beschränken, so haben wir zu bemerken dass sämtliche Kreise welche g berühren die cyklographischen Bildkreise aller Punkte derjenigen beiden Ebenen sind welche durch g gehen und unter 45° gegen B geneigt sind. Fassen wir eine dieser Ebenen ins Auge und schneiden dieselbe mit der cyklographischen Fläche, so erhalten wir unmittelbar den nachstehenden Satz:

der Ort der Centra der die Curve C und die Gerade g berührenden Kreise ist eine ebene Curve von der Ordnung

$$r = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma), \text{ von der Klasse } n = 2\nu, \text{ mit}$$

$m = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)$ *Rückkehrpunkten* [1], *und* $2x' + \mu$ *Doppelpunkten.*

Nämlich, was die Doppelpunkte anbetrifft, so sind dieselben die Projektionen der Schnittpunkte unserer Ebene mit der Restdoppelcurve (§ 8, S. 23) und mit der Curve C selbst. Die μ mit den Schnittpunkten von g und C zusammenfallenden Doppelpunkte sind, cyklographisch gesprochen, von geringer Bedeutung, die $2x'$ übrigen aber sind die Mittelpunkte derjenigen doppelt berührenden Kreise welche auch g berühren, d. h.:

unter den die Curve C doppelt berührenden Kreisen gibt es jeweils $2x'$ welche überdies noch eine beliebige Gerade berühren, oder es bilden diese Kreise eine Kreisreihe vom Tangentialindex $2x'$.

Und entsprechend für die Krümmungskreise:

unter den Krümmungskreisen der Curve C gibt es jeweils $2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)$, welche eine beliebige Gerade berühren, oder es bilden diese Kreise eine Kreisreihe vom Tangentialindex $2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)$.

Unter den singulären Punkten unseres ebenen Ortes gibt es einen der noch nicht hervorgetreten ist. Es schneidet nämlich die durch g gehende Ebene die Ebene E_∞ in einer Gerade t_∞ welche in einem gewissen Punkte T_∞ den Kegelschnitt K_∞ berührt, und es enthält also der Querschnitt der Ebene mit der cyklographischen Fläche $\nu - \sigma$ Zweige welche alle in T_∞ die Tangente t_∞ berühren. Die übrigen unendlich fernen Punkte des Querschnittes sind die $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Schnittpunkte von t_∞ mit den Tangenten an K_∞ aus den *einfachen Schnittpunkten* von C mit g_∞, und die 2σ Schnittpunkte mit den Tangenten aus den σ *Berührungspunkten* von C mit g_∞, jeder der letzteren doppelt gezählt, weil die Tangenten selbst für zwei zählen (§ 3, S. 7). Über das Verhalten unseres ebenen Ortes in unendlicher Ferne lässt sich also folgendes sagen:

der Ort der Centra der die Curve C und die Gerade g berühren-

---

[1]) Man vergleiche für diese Zahlen die Tabelle § 6, S. 16.

den Kreise enthält im Unendlichen einen Punkt, in einer Richtung senkrecht zu g, wo $\nu - \sigma$ Zweige die unendlich ferne Gerade berühren, weiter $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ einfache Punkte, und schliesslich 2σ Berührungspunkte mit g_∞.

Man kann nun wieder der Gerade g eine ganze Reihe von speziellen Lagen erteilen, sie etwa zusammenfallen lassen mit einer beliebigen Tangente, einer Wendetangente, Doppeltangente, Asymptote, einer Gerade welche durch einen der Berührungspunkte von C mit g_∞ geht, u. s. w.; den wichtigsten Spezialfall erhält man aber wenn man g ins Unendliche rückt, und diesen wollen wir daher noch kurz erörtern. Man kann dann für die durch g gehende Ebene jede zu B parallele Ebene nehmen, und erhält daher durch Projektion der Querschnitte auf die Ebene B die zur Curve C gehörigen Parallelcurven. Ordnung, Klasse und Anzahl der Rückkehrpunkte derselben sind einfach gleich Ordnung, Klasse und Ordnungszahl der Rückkehrkante der cyklographischen Fläche, für die Doppelpunkte aber ist die genaue Betrachtung der unendlich fernen Punkte erforderlich. Da erinnern wir uns nun zunächst (§ 8, S. 25, sub *e*) dass die σ Berührungspunkte von C mit g_∞ zugleich Punkte der Restdoppelcurve sind; ausser diesen enthält die Querschnittebene deren noch $2x' - \sigma$, und dies ist also die Anzahl der nicht in unendlicher Ferne liegenden Doppelpunkte der Parallelcurve.

Nennen wir irgend einen der σ hier in Betracht kommenden Punkte P_∞. Es gehen von ihm aus zwei Tangenten an K_∞, welche der cyklographischen Fläche angehören; die Schmiegungsebenen längs derselben fallen beide auf E_∞. P_∞ ist also aufzufassen als der Schnitt der beiden Berührungserzeugenden einer Doppelschmiegungsebene, d. h. es berühren sich in P_∞ zwei Blätter der Fläche, oder schneiden sich in einer Curve mit einem Doppelpunkt in P_∞ (die beiden Zweige sind C und die Restdoppelcurve).

Irgend ein ebener Schnitt durch P_∞ würde nun die beiden Blätter der Fläche schneiden in zwei Curvenästen die sich in P_∞ berühren würden, in unserm Falle aber enthält die Querschnittebene die Tangente an einen der beiden Äste der Doppelcurve (nämlich an C), folglich geht die Berührung über in eine Osculation.

Wenn wir nun, fortfahrend, bemerken dass die $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ einfachen Schnittpunkte von C mit g_∞ gewöhnliche Doppelpunkte der Parallelcurve sind, so bleiben nur noch die imaginären Kreispunkte zu untersuchen übrig. Durch jeden derselben, sagen wir I_1, gehen $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten an C, welche zur Fläche gehören, und deren zugehörige Schmiegungsebenen sämtlich die Tangente in I_1 an K_∞ enthalten (§ 3, S. 9), und ε Doppelschmiegungsebenen,

welche durch die nämliche Tangente an K_∞ und die ε Tangenten an C gehen. Ein ebener Querschnitt durch g_∞ geht also mit $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ einzelnen Zweigen durch I_1, während 2ε andere sich dort paarweise berühren. Und dasselbe gilt von I_2. Zusammenfassend können wir also sagen:

die Parallelcurven der Curve C sind von der Ordnung $r = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)$, und von der Klasse $n = 2\nu$; die Anzahl der Rückkehrpunkte ist gleich $m = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)$, die Anzahl der nicht in unendlicher Ferne liegenden Doppelpunkte $2x' - \sigma$, während die unendlich fernen Punkte sich zusammensetzen aus $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ gewöhnlichen Doppelpunkten, σ Punkten wo zwei Curvenäste sich gegenseitig in drei und g_∞ in zwei Punkten berühren, und den beiden imaginären Kreispunkten. Durch jeden dieser letzteren gehen $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ einzelne, und 2ε sich paarweise berührende Äste hindurch. [1])

Die PLÜCKER'schen Formeln gestatten diese Ergebnisse zu kontroliren, und die Anzahl der Wende- und Doppeltangenten hinzuzufügen; aber aus der planimetrischen Entstehungsweise der Parallelcurven ist ja schon klar dass die Anzahl der Wendepunkte einfach gleich 2ι ist, und dann ergibt sich die Anzahl der Doppeltangenten gleich $2\nu(\nu - 1) - \mu + 2\varepsilon - 2\sigma(\sigma - 1) - 3\iota$.

Es sei ausser der beliebig angenommenen Gerade g noch eine zweite Gerade h gegeben. Schneiden wir eine der zu h gehörigen 45° Ebenen mit den beiden Ebenen durch g so erhalten wir zwei Geraden unter beliebiger Neigung zur Ebene B, deren jede also die cyklographische Fläche in $r = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)$ im allgemeinen im Endlichen liegenden Punkten schneidet; also:

es gibt zweimal $2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)$ Kreise welche die Curve C und zwei beliebige Geraden berühren.

Ist C ein Kreis, so erhalten wir die 8 Lösungen eines der Apollonischen Probleme, und wenn C ebenfalls eine Gerade ist die 4 ein- und angeschriebenen Kreise des Dreiecks.

Es seien ein Punkt P und eine Gerade g gegeben. Eine der zu g gehörigen 45° Ebenen schneidet den zu P gehörigen Kegel in einer Parabel, und diese die cyklographische Fläche in $2r = 4(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)$ Punkten, von welchen aber $2(\nu - \sigma)$ im Unendlichen liegen, weil die Parabel K_∞ berührt; also:

es gibt $2(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)$ Kreise welche durch einen Punkt gehen und überdies eine Gerade und die Curve C berühren; ihre Mittel-

---

[1]) Für einen Teil dieser Ergebnisse vergleiche man SALMON-FIEDLER „Ebene Curven" S. 129, und Versluys l. c. S. 76.

punkte liegen auf der Projektion der Parabel im Raume, also ebenfalls auf einer Parabel, und für diese letztere ist offenbar der Punkt der Brennpunkt, die Gerade die Leitlinie.

Ist auch hier wieder C ein Kreis oder eine Gerade, so erhält man wiederum bekannte elementare Ergebnisse.

Auf die zahlreichen sich hier darbietenden Spezialfälle gehen wir wieder nicht ein.

§ 14. Es sei gegeben ein beliebiger Kreis K. Sämtliche Kreise welche denselben berühren sind die Bildkreise von zwei zur Ebene B symmetrischen gleichseitigen Rotationskegeln, welche sich im Endlichen nur in diesem Kreise durchdringen. Fassen wir einen dieser Kegel ins Auge und schneiden ihn mit der cyklographischen Fläche, so gibt uns die Projektion der Durchdringung auf B den Ort der Mittelpunkte aller Kreise welche zugleich C und K berühren. Nun haben wir bereits im § 12 einen solchen Kegel mit der Fläche geschnitten; allerdings war derselbe damals symmetrisch zur Ebene B, allein dies hat keinen wesentlichen Einfluss auf die Durchdringung selbst, sondern nur auf ihre Projektion; wir werden also hier der Hauptsache nach die doppelten Anzahlen von dort finden müssen.

Wir können das Ergebnis wie folgt in Worte fassen:

der Ort der Centra der die Curve C und einen beliebigen Kreis K berührenden Kreise ist eine Curve von der Ordnung $2(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)$, und welche im Endlichen $2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 2\sigma)$ Spitzen und $(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 11\mu - \nu - 3\iota + 24\varepsilon + 7\sigma$ Doppelpunkte enthält. Die unendlich fernen Punkte bestehen aus 2ν einfachen Punkten, in Richtungen senkrecht zu den gemeinschaftlichen Tangenten von C und K, $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ Punkten, in Richtungen senkrecht zu den Asymptoten der C, wo je 2 Curvenäste einander und g_∞ berühren, und σ Punkten, in Richtungen senkrecht zu denjenigen der Berührungspunkte von C mit g_∞, wo je zwei Äste einander und g_∞ osculieren.

Denn was die unendlich fernen Punkte anbetrifft, so sind dieselben im Raume genau die nämlichen wie im § 12, und aus dem nämlichen Grunde wie dort fallen also auch hier die Projektionen derselben paarweise zusammen; aber die durch diese Punkte hindurchgehenden Curvenäste fallen nun in der Projektion nicht mehr paarweise zusammen, daher die Verdoppelung der resp. Anzahlen derselben.

Weiter ist zu bemerken dass wir bei der Anzahl der endlichen Doppelpunkte anstatt -13μ wie auf S. 40 -11μ geschrieben haben; dies rührt daher weil der Kreis K die Curve C in 2μ

Punkten schneidet welche sowohl für die Durchdringung selbst wie für die Projektion Doppelpunkte sind; die Anzahl der Doppelpunkte im jetzigen Falle ist also gleich zweimal der Anzahl im früheren Falle, vermehrt um 2μ.

Will man die Klasse der Curve bestimmen, so hat man zu bedenken dass in jedem der $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ obengenannten unendlich fernen Punkte zwei, und in jedem der σ Punkte sogar drei Doppelpunkte unmittelbar neben einander liegen; mit Berücksichtigung derselben findet man für die Klasse die Zahl

$$2\left\{(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 2\mu + 2\varepsilon + 4\sigma\right\}.$$

Wenn man im obigen allgemeinen Satze bei der Anzahl der Doppelpunkte die Zahl -11μ wieder ersetzt durch -13μ, so lässt sich aus demselben unmittelbar ablesen wieviel Krümmungskreise oder doppelt berührende Kreise der Curve C einen beliebigen Kreis K berühren; die Anzahlen sind einfach zweimal so gross wie die entsprechenden des § 12. *Und wenn man von diesen beiden Zahlen 4 und resp. 2 Einheiten subtrahiert so hat man die Anzahl der Krümmungskreise welche einen beliebigen Krümmungskreis, und die Anzahl der doppelt berührenden Kreise welche einen beliebigen doppelt berührenden Kreis berühren.* Denn wenn K ein Krümmungskreis wird so fällt die Spitze des zugehörigen Kegels auf die Rückkehrkante der cyklographischen Fläche, und die beiden durch die Kegelspitze gehenden Erzeugenden der Fläche liegen zugleich auf dem Kegel; die Rückkehrkante schneidet also den Kegel in der Spitze und in zwei Nachbarpunkten, aber diese Punkte zählen für 4, weil die Kegelspitze als Doppelpunkt des Kegels doppelt zählt. Und wenn K ein doppelt berührender Kreis ist so fällt die Kegelspitze auf die Doppelcurve der Fläche, absorbirt aber jetzt, wie leicht zu sehen, nur zwei Schnittpunkte.

Es sei zur Bestimmung von Punkt- und Tangentialindex der hier betrachteten Kreisreihe ausser dem Kreise K ein Punkt P gegeben. Der zu P gehörige Kegel schneidet die beiden zu K gehörigen je in einem Kegelschnitt, dessen unendlich ferne Punkte auf K_∞ liegen und also zusammen $2(\nu - \sigma)$ Schnittpunkte mit der Fläche absorbiren, sodass $2r - 2(\nu - \sigma) = 2(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)$ übrigbleiben. Weil die beiden Kegelschnitte in Bezug auf B symmetrisch liegen, so hat man folgenden Satz:

es gibt $2(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)$ Kreise welche die Curve C und einen beliebigen Kreis K berühren, und überdies durch einen vorgeschriebenen Punkt gehen; die Mittelpunkte derselben liegen auf einem Kegelschnitt.

Ist an Stelle des Punktes P eine Gerade g gegeben, so schneidet eine der beiden 45° Ebenen durch g die beiden zu K gehörigen Kegel in 2 verschiedenen Parabeln, also:

es gibt zwei Systeme von je $2(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)$ *Kreisen welche* C, *einen beliebigen Kreis und eine beliebige Gerade berühren, und die Mittelpunkte aller dieser Kreise sind über zwei Parabeln verteilt.*

Und wenn endlich zwei Kreise K_1, K_2 gewählt werden, so schneidet einer der beiden zu K_1 gehörigen Kegel die beiden zu K_2 gehörigen in zwei verschiedenen Kegelschnitten;

es gibt also ebenfalls zwei Systeme von je $2(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)$ *Kreisen welche* C *und zwei beliebige Kreise berühren, und die Mittelpunkte aller dieser Kreise sind über zwei Kegelschnitte verteilt.*

§ 15. Wir gehen jetzt über zur Betrachtung von zwei Fundamentalcurven C und C_1 zugleich und wollen die beiden zu ihnen gehörigen cyklographischen Flächen mit F und F_1 bezeichnen, und überhaupt alle mit der zweiten Curve oder Fläche in Verbindung stehenden Grössen durch den Index 1 auszeichnen. Die Durchdringung der beiden cyklographischen Flächen muss uns über die Kreise belehren welche die beiden gegebenen Curven zu gleicher Zeit berühren, denn die Projektion der Durchdringung auf die Ebene B ist der Ort der Mittelpunkte dieser Kreise. Es setzt sich diese Durchdringung aus zwei Teilen zusammen, nämlich aus einer gewissen Raumcurve und dem Kegelschnitt K_∞; denn letzterer liegt auf beiden Flächen zugleich, und zwar als $(\nu - \sigma)$-fache Curve auf F und als $(\nu_1 - \sigma_1)$-fache Curve auf F_1, woraus sich ergibt dass er bei der Durchdringung als $(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$-fachen Kegelschnitt in Rechnung zu bringen ist, und weil die Ordnungszahl der vollständigen Durchdringung $= rr_1$ ist (§ 6, S. 16), so ist die Raumcurve von der Ordnung $rr_1 - 2(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$, und weil diese letztere symmetrisch ist in Bezug auf die Ebene B so erhalten wir:

der Ort der Centra der die beiden Curven C *und* C_1 *berührenden Kreise ist eine Curve von der Ordnung*

$$x'' = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu_1 + \nu_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1) - (\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1).$$

Fragen wir zunächst nach dem Verhalten unserer Curve in unendlicher Ferne. Wenn durch einen Punkt von K_∞ genau $(\nu - \sigma)$ Blätter der einen Fläche und $(\nu_1 - \sigma_1)$ der andern gehen, so gilt dieser Punkt als $(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$-facher Punkt der Durchdringung, und gehört als solcher, mit einer einzigen Ausnahme von der gleich nachher die Rede sein soll, zu K_∞ aber nicht zur Raumcurve; die

unendlichen Äste der Raumcurve werden also dort zu suchen sein wo mehr als $(\nu - \sigma)$ und resp. $(\nu_1 - \sigma_1)$ Blätter der einen oder andern Fläche in einem Punkte von K_∞ zusammenstossen, das heisst also in den Punkten der Gruppen *e*) und *f*) des § 9, S. 27. Betrachten wir einen Punkt T_∞ der Gruppe *e*). Gehört er zu F so schneidet das eine überzählige Blatt $(\nu_1 - \sigma_1)$ Blätter von F_1, und es gehen also $(\nu_1 - \sigma_1)$ Zweige der Raumcurve durch ihn hindurch, alle die Tangente t_∞ in ihm an K_∞ berührend. Und das entsprechende gilt wenn der Punkt zu F_1 gehört.

Die Anzahlen dieser Punkte sind $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ und resp. $2(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)$, und die Punkte und die durch dieselben hindurchgehenden Curvenäste fallen in der Projektion paarweise zusammen.

Ist T_∞ einer der 2σ, resp. $2\sigma_1$, Punkte der Gruppe *f*), so gehen durch ihn wiederum $(\nu_1 - \sigma_1)$ und resp. $(\nu - \sigma)$ Zweige der Durchdringung; jetzt aber haben dieselben, entsprechend den früheren Erörterungen, mit K_∞, und also auch unter sich, eine dreipunktige Berührung, und ihre Projektionen fallen wieder paarweise zusammen.

Die Ausnahme, von der oben die Rede war, bezieht sich auf die $\nu\nu_1 - \sigma\sigma_1$ im Endlichen liegenden gemeinschaftlichen Tangenten von C und C_1; wir haben hier genau den nämlichen Fall vor uns wie in der Gruppe *g*) des § 9, S. 28, und können also unmittelbar hinschreiben dass unsere Raumcurve K_∞ in den $2(\nu\nu_1 - \sigma\sigma_1)$ zu den genannten Tangenten gehörigen Punkten T_∞ einfach schneidet. Und die Projektionen dieser Punkte fallen natürlich wieder paarweise zusammen.

Wir können nun weiter die $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Tangenten von K_∞ der Gruppe *e*) und welche liegen auf der Fläche F mit den entsprechenden Geraden der andern Fläche schneiden; dies gibt $4(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)$ einfache Punkte der Durchdringung, in Paaren auf Geraden durch Z_∞. Wir können aber auch die Geraden der Gruppe *e*) auf der Fläche F schneiden mit den $2\sigma_1$ Geraden der Gruppe *f*) auf F_1 und umgekehrt; in diesen Punkten wird die Durchdringung die Ebene E_∞ berühren, und zwar sind die Geraden der Gruppe *e*) die Tangenten; die Anzahl dieser Punkte beträgt $4(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)\sigma_1$ und resp. $4(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)\sigma$, sie liegen aber paarweise auf Geraden durch Z_∞.

Endlich sind die 2σ Geraden der Gruppe *f*) auf F zu schneiden mit den $2\sigma_1$ entsprechenden auf F_1; *diese* Punkte sind Doppelpunkte der Durchdringung, und die Berührungsebene ist E_∞; sie liegen paarweise auf Geraden durch Z_∞, und in ihren Projektionen

werden zwei Äste der ebenen Curve einander und g_∞ berühren.

Hiermit sind sämtliche unendlich fernen Punkte unserer ebenen Curve bekannt; fassen wir dieselben zusammen so können wir folgenden Satz aussprechen:

der Ort der Centra der die Curven C und C_1 berührenden Kreise enthält im Unendlichen:

1°. $(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ *Punkte, in Richtungen senkrecht zu den Asymptoten der Curve C, wo $(\nu_1 - \sigma_1)$ Zweige, und $(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)$ Punkte, in Richtungen senkrecht zu den Asymptoten der Curve C_1, wo $(\nu - \sigma)$ Zweige einander und g_∞ berühren;*

2°. σ *Punkte, in Richtungen senkrecht zu denjenigen der Berührungspunkte von C mit g_∞, wo $(\nu_1 - \sigma_1)$ Zweige, und σ_1 Punkte in Richtungen senkrecht zu denjenigen der Berührungspunkte von C_1 mit g_∞, wo $(\nu - \sigma)$ Zweige einander und g_∞ osculieren;*

3°. $(\nu\nu_1 - \sigma\sigma_1)$ *einfache Punkte, in Richtungen senkrecht zu den gemeinsamen Tangenten von C und C_1; die Asymptoten in diesen Punkten halbieren die Strecken zwischen den Berührungspunkten senkrecht;*

4°. $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)$ *weitere einfache Punkte, in Richtungen welche die Winkel zwischen je einer Asymptote der Curve C und einer solchen der C_1 halbieren;*

5°. $2\sigma_1(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ *Berührungspunkte mit g_∞, in Richtungen welche die Winkel zwischen den Asymptoten der C und den Geraden nach den Berührungspunkten von g_∞ mit C_1 halbieren, und die $2\sigma(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)$ entsprechenden;*

6°. $2\sigma\sigma_1$ *Punkte, in Richtungen welche die Winkel der Geraden nach je einem Berührungspunkte von g_∞ mit C und mit C_1 halbieren; in diesen Punkten berühren zwei Curvenäste einander und g_∞.*

Vergleicht man diese Resultate mit denen am Schlusse des § 10, (S. 32), so springt die Analogie sofort in die Augen, und die Notwendigkeit dieser Analogie ergibt sich unmittelbar aus folgender Überlegung. Fassen wir die beiden Curven C und C_1 zusammen als ein System $C + C_1$ auf, von der Ordnung $\mu + \mu_1$, der Klasse $\nu + \nu_1$, u. s. w., so setzt sich die zugehörige cyklographische Fläche aus unseren beiden Flächen F und F_1 zusammen; die Rückkehrkante dieser Gesamtfläche besteht einfach aus den beiden Rückkehrkanten von F und F_1, die Doppelcurve aber ausser aus den beiden Doppelcurven von F und F_1, aus der Durchdringungscurve der beiden Flächen, um welche es sich ja gerade in diesem § handelt; diese letztere spielt also die Rolle einer Doppelcurve und zeigt deshalb auch ein analoges Verhalten im Unendlichen.

Es kann diese neue Auffassung der Durchdringung dazu benutzt

werden weitere Resultate zu kontroliren oder geradezu zu finden. Zur Kontrolle wollen wir sie benutzen bei der Bestimmung der Anzahl der im Endlichen liegenden Rückkehrpunkte der Durchdringung. Diese Punkte finden sich offenbar unter den Schnittpunkten der Rückkehrkanten jeder der beiden Flächen mit der jeweiligen andern; nun ist die Rückkehrkante von F von der Ordnung m (§ 6, S. 16), sodass sie die Fläche F_1 in $m\,r_1$ Punkten schneidet, von welchen aber $(m - 2\,\sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$ im Unendlichen liegen. Es bleiben also $m\,r_1 - (m - 2\,\sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$ endliche Schnittpunkte übrig, und diese liegen paarweise symmetrisch in Bezug auf B, und aus dem Schnitt der Rückkehrkante von F_1 mit F entstehen $m_1\,r - (m_1 - 2\,\sigma_1)(\nu - \sigma)$ neue Punkte der nämlichen Art. Wir finden also, indem wir für die m und r die Werte aus der Tabelle substituiren, für den zu untersuchenden ebenen Ort $(\iota + 3\,\mu - 6\,\varepsilon - 3\,\sigma)(2\,\mu_1 + \nu_1 - 4\,\varepsilon_1 - \sigma_1) + (\iota_1 + 3\,\mu_1 - 6\,\varepsilon_1 - 3\,\sigma_1)(2\,\mu + \nu - 4\,\varepsilon - \sigma) + \sigma(\nu_1 - \sigma_1) + \sigma_1(\nu - \sigma)$ Spitzen, und können nun diese Zahl sofort mittelst unserer neuen Auffassung der Durchdringung als Bestandteil der Doppelcurve der Gesamtfläche kontroliren. Dann nämlich sind die obigen Punkte von der Natur der Punkte γ, also Punkte wo die Rückkehrkante der Fläche diese Fläche von neuem schneidet; nehmen wir also die Formel für γ', § 7, S. 22, ersetzen in derselben μ durch $\mu + \mu_1$, ν durch $\nu + \nu_1$, u. s. w. und subtrahieren dann die Anzahlen γ' und γ'_1, welche zu C und C_1 gehören, so muss der Rest genau gleich der obigen Zahl der Spitzen sein; man sieht fast ohne Rechnung dass dies in der Tat der Fall ist [1]).

Schreiben wir das Resultat noch ausdrücklich hin: *der Ort der Centra der die Curven C und C_1 berührenden Kreise enthält* $\gamma'' = (\iota + 3\,\mu - 6\,\varepsilon - 3\,\sigma)(2\,\mu_1 + \nu_1 - 4\,\varepsilon_1 - \sigma_1) + (\iota_1 + 3\,\mu_1 - 6\,\varepsilon_1 - 3\,\sigma_1)(2\,\mu + \nu - 4\,\varepsilon - \sigma) + \sigma(\nu_1 - \sigma_1) + \sigma_1(\nu - \sigma)$ *Rückkehrpunkte.* Und:
es gibt $\gamma_{01} = (\iota + 3\,\mu - 6\,\varepsilon - 3\,\sigma)(2\,\mu_1 + \nu_1 - 4\,\varepsilon_1 - \sigma_1) + \sigma(\nu_1 - \sigma_1)$ *Krümmungskreise der Curven C welche C_1 berühren, und eine entsprechende Anzahl γ_{10} für C_1 und C.*

Unsere Durchdringungscurve erhält einen Doppelpunkt sobald die Doppelcurve von F die Fläche F_1 schneidet oder umgekehrt, oder wenn die beiden Flächen sich berühren. Das letztere ist im Endlichen nicht möglich weil, wenn die Flächen in irgend einem Punkte ihrer Durchdringung die nämliche Tangentialebene hätten,

---

[1]) In derselben Weise ergibt sich die Ordnung unserer Curve aus der Zahl x' des § 8, S. 23; deshalb haben wir dieselbe ebenfalls mit dem Buchstaben x bezeichnet.

die Spur derselben von den beiden Curven C und C_1 im nämlichen Punkte berührt werden müsste, nämlich im Fusspunkte des Perpendikels aus dem Berührungspunkte im Raume auf dieselbe gefällt; dies aber würde eine spezielle Lage der beiden Curven fordern die wir nicht voraussetzen wollen. Im Unendlichen werden sich die Flächen allerdings berühren, und zwar in den Punkten welche herrühren von den $(\nu\,\nu_1 - \sigma\,\sigma_1)$ gemeinsamen Tangenten der beiden Curven; allein die unendlich fernen Punkte betrachten wir immer für sich. Wir erhalten somit die nicht in unendlicher Ferne liegenden Doppelpunkte der Durchdringung indem wir 1°) die Restdoppelcurve von F schneiden mit F_1 und die unendlich fernen Schnittpunkte subtrahieren; 2°) das nämliche tun für die Restdoppelcurve von F_1 und die Fläche F; 3°) die Curven C und C_1 mit einander schneiden; denn die $\mu\,\mu_1$ Punkte dieser letzten Gruppe sind vierfache Punkte der Durchdringung, und gehen in Doppelpunkte über beim Projiciren, cyklographisch aber sind sie offenbar ohne Interesse.

Die Restdoppelcurve von F schneidet F_1 in $2\,x'.\,r_1$ Punkten (§ 8, S. 23), von welchen die folgenden im Unendlichen liegen:

1°. die Punkte der Gruppe *e*) § 9, S. 27. Durch jeden derselben gehen $(\nu - \sigma - 2)$ Zweige der Restcurve von F, und $(\nu_1 - \sigma_1)$ Blätter von F_1, alles mit der nämlichen Tangente; jeder solche Punkt absorbirt also $2\,(\nu - \sigma - 2)\,(\nu_1 - \sigma_1)$ Schnittpunkte, und die Anzahl dieser singulären Punkte ist $2\,(\mu - 2\,\varepsilon - 2\,\sigma)$.

2°. die $2\,\sigma$ Punkte der Gruppe *f*) § 9, S. 28. Durch jeden derselben gehen $(\nu - \sigma - 1)$ Zweige der Restcurve und $(\nu_1 - \sigma_1)$ Blätter von F_1, aber sowohl die einen wie die anderen haben jetzt mit E_∞ einen dreipunktigen Contact in den nämlichen drei unendlich benachbarten Punkten von K_∞; jeder Punkt der jetzigen Gruppe absorbirt also $3\,(\nu - \sigma - 1)\,(\nu_1 - \sigma_1)$ Schnittpunkte.

3°. die $2\,\tau = \nu\,(\nu - 1) - \mu - 3\,\iota - \sigma\,(\sigma - 1)$ einfachen Schnittpunkte der Restcurve von F mit K_∞; jeder derselben absorbirt offenbar $(\nu_1 - \sigma_1)$ Schnittpunkte.

Indem wir nun die in diesen drei Gruppen enthaltenen Anzahlen von $2\,x'.\,r_1$ subtrahieren, dann das nämliche machen für die Restcurve von F_1 und die Fläche F, und die Resultate addiren, erhalten wir die im Endlichen, aber nicht in B liegenden Doppelpunkte der Durchdringung. Bedenken wir dann endlich dass je zwei dieser Punkte symmetrisch liegen in Bezug auf B, so erhalten wir folgendes Ergebnis: *es gibt*

$$\delta_{01} = x'\,r_1 - 2\,(\mu - 2\,\varepsilon - 2\,\sigma)\,(\nu - \sigma - 2)\,(\nu_1 - \sigma_1) - 3\,\sigma\,(\nu - \sigma - 1)\,(\nu_1 - \sigma_1) - \tau\,(\nu_1 - \sigma_1)$$

Kreise welche C doppelt und C_1 einfach berühren; und eine entsprechende Anzahl δ_{10} gilt für C_1 und C.

Dieses neue Resultat liefert uns jetzt eine sehr scharfe Kontrolle für die bereits § 11, S. 36 gefundene Anzahl t' der Kreise welche die Curve C in drei verschiedenen Punkten berühren. Denn wenn wir unsere Durchdringungscurve als Bestandteil der Doppelcurve des Systems $F + F_1$ auffassen, so sind die von uns soeben aufgefundenen Doppelpunkte der Durchdringung offenbar dreifache Punkte der Gesamtdoppelcurve, und ihre Projektionen auf B Centra von Kreisen welche die Curve $C + C_1$ dreimal berühren; wenn wir also in der Formel für t' auf S. 36 μ ersetzen durch $\mu + \mu_1$, ν durch $\nu + \nu_1$, u. s. w., und dann die zu C und C_1 gehörigen Zahlen t' und t'_1 subtrahieren, so muss genau die Summe der im obigen Satze enthaltenen Anzahlen δ_{01} und δ_{10} übrigbleiben; die allerdings etwas umständliche Rechnung bestätigt dies.

Die $\delta_{01} + \delta_{10}$ im obigen Satze aufgefundenen Doppelpunkte stellen nicht sämtliche Doppelpunkte unserer zu untersuchenden Curve dar, auch nicht wenn man noch die $\mu\,\mu_1$ Schnittpunkte von C und C_1 hinzufügt, denn die Durchdringungscurve wird von einer gewissen Anzahl senkrecht auf der Ebene B stehender Geraden in zwei Paaren von in Bezug auf B symmetrisch liegenden Punkten geschnitten werden, und die Durchstosspunkte dieser Geraden werden also Doppelpunkte der Projektion der Durchdringung sein; cyklographisch unterscheiden sich dieselben von den $\delta_{01} + \delta_{10}$ bereits gefundenen dadurch dass sie nicht die Mittelpunkte sind je *eines* Kreises der die eine Curve zweimal, die andere einmal berührt, sondern im Gegenteil von je zwei verschiedenen Kreisen welche beide Curven nur einmal berühren; und auch rein äusserlich sind diese scheinbaren Doppelpunkte von den wirklichen leicht zu unterscheiden, denn von diesen letzteren liegen die δ_{01} auf dem Ort der Centra der die Curve C, und die δ_{10} auf dem Ort der Centra der die Curve C_1 doppelt berührenden Kreise.

Die Bestimmung der Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte gelingt nun indem wir, die Durchdringungscurve als Teil der Gesamtdoppelcurve des Systems $F + F_1$ auffassend, zunächst die Klasse ihrer Projektion bestimmen. Dazu brauchen wir einfach in der Formel für R', § 10, S, 30, die nun schon mehrfach benutzten Substitutionen $\mu + \mu_1$ anstatt μ, u. s. w., zu machen und dann die Zahlen R' und R_1' zu subtrahieren; man findet dann folgendes Resultat:

die Klasse des Ortes der Centra der die Curven C und C_1 berührenden Kreise ist gleich:

$$R'' = 2\nu(\mu_1 + \nu_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1) + 2\nu_1(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) - 2\nu(\nu_1 - \varepsilon_1 - \sigma_1) - 2\nu_1(\nu - \varepsilon - \sigma) - 2\varepsilon(\varepsilon_1 + \sigma_1) - 2\varepsilon_1(\varepsilon + \sigma) - 4\sigma\sigma_1.$$

Und nun gibt die Plückersche Formel:

$$R'' = x''(x'' - 1) - 2\delta'' - 3\gamma''$$

sofort:

$$\delta'' = \frac{1}{2}\left\{x''(x'' - 1) - R'' - 3\gamma''\right\}.$$

Diese Anzahl δ'' enthält nun erstens die $\delta_{01} + \delta_{10}$ wirklichen Doppelpunkte, zweitens die $\mu\mu_1$ Schnittpunkte von C und C_1, drittens die vielfachen Punkte im Unendlichen, und endlich viertens die gesuchten scheinbaren Doppelpunkte; es sind also noch die Punkte der dritten Gruppe in einfache Doppelpunkte aufzulösen. Diese Punkte sind die folgenden:

1°) diejenigen der Gruppe 1 S. 50. In jedem derselben liegen zwei $(\nu_1 - \sigma_1)$-fache, resp. $(\nu - \sigma)$-fache Punkte unmittelbar neben einander, jeder zählt also für $(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_1 - \sigma_1 - 1)$, resp. $(\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1)$ Doppelpunkte; im ganzen erhalten wir also

$$(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_1 - \sigma_1 - 1) + (\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)(\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1).$$

2°) die Punkte der Gruppe 2 S. 50. Hier liegen je drei vielfache Punkte unendlich nahe zusammen, sodass wir erhalten

$$\frac{3}{2}\sigma(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_1 - \sigma_1 - 1) + \frac{3}{2}\sigma_1(\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1).$$

3°) die Punkte der Gruppe 6 S. 50. Jeder derselben zählt für zwei Doppelpunkte, und die Anzahl der Punkte ist $2\sigma\sigma_1$, also erhalten wir einen letzten Beitrag von $4\sigma\sigma_1$.

Bezeichnen wir die Summe der in diesen drei Gruppen enthaltenen Anzahlen mit δ_∞, die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte aber mit δ^*, so ist nun

$$\delta^* = \delta'' - \mu\mu_1 - \delta_{01} - \delta_{10} - \delta_\infty.$$

Also:

es gibt $\delta^* = \frac{1}{2}\left\{x''(x'' - 1) - R'' - 3\gamma''\right\} - \mu\mu_1 - \delta_{01} - \delta_{10} - \delta_\infty$

Doppelpunkte in unserer ebenen Curve welche Mittelpunkte sind

von zwei verschiedenen die Curven C und C_1 je einmal berührenden Kreisen.

Die in dieser Formel auftretenden Grössen x'', γ'', δ_{01}, δ_{10}, R'', δ_∞ finden sich resp. auf SS. 48, 51, 52, 54.

Wir bestimmen zum Schlusse noch die beiden Indices der Reihe der Kreise welche die Curven C und C_1 zugleich berühren. Es sei ein beliebiger Punkt P gegeben und der zugehörige cyklographische Kegel konstruirt worden; derselbe schneidet die Durchdringungscurve der Flächen F und F_1 in $2\left\{r\,r_1 - 2(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1)\right\} = 8(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu_1 + \nu_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1) - 4(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$ Punkten, und von diesen liegen im Unendlichen:

1°) die Punkte der Gruppe *e*) § 9, S. 27 (Vergleiche auch S. 50). Durch jeden derselben geht der Kegel einfach und die Durchdringungscurve $(\nu - \sigma)$- und resp. $(\nu_1 - \sigma_1)$-fach, und die Tangenten fallen alle mit der Tangente an K_∞ zusammen; wir erhalten also im ganzen $4(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu_1 - \sigma_1) + 4(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1)(\nu - \sigma)$ Schnittpunkte,

2°) die Punkte der Gruppe *f*) § 9, S. 28 resp. 50. In jedem derselben liegen $3(\nu_1 - \sigma_1)$ und resp. $3(\nu - \sigma)$ Schnittpunkte vereinigt, und die Anzahlen der Punkte sind 2σ und $2\sigma_1$. Diese Gruppe gibt also einen Beitrag von $6\sigma(\nu_1 - \sigma_1) + 6\sigma_1(\nu - \sigma)$ neuen Schnittpunkten.

3°) die $2(\nu\nu_1 - \sigma\sigma_1)$ einfachen Schnittpunkte der Durchdringung mit K_∞, herrührend von den gemeinschaftlichen Tangenten von C und C_1.

Subtrahiert man die Summe dieser drei Anzahlen von der oben angegebenen vollständigen Anzahl, so erhält man die Anzahl der endlichen Schnittpunkte des Kegels mit der Durchdringung, und wenn man beachtet dass diese paarweise symmetrisch liegen in Bezug auf B, so ergibt sich:

der Punktindex der Reihe der die Curven C und C_1 berührenden Kreise ist gleich $(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)(2\mu_1 + \nu_1 - 4\varepsilon_1 - \sigma_1)$.

Und diese Formel lässt sich mittelst der nun schon mehrere Male vorgenommenen Manipulation auch herleiten aus der entsprechenden Formel des § 12, S. 40.

Zur Bestimmung des Tangentialindex brauchen wir eine beliebige Gerade g. Die eine der durch dieselbe hindurchgehenden 45° Ebenen schneidet die Durchdringung in $2x''$ Punkten (§ 15, S. 48), und diese liegen, wenn g beliebig ist, alle im Endlichen; also:

der Tangentialindex der Reihe der die Curven C und C_1 berührenden Kreise ist gleich $2x''$.

Wir haben bereits bemerkt dass die Zahl $2x''$ sich in bekannter Weise herleiten lässt aus $2x'$.

§ 16. In diesem letzten § betrachten wir noch kurz die gemeinschaftlichen Punkte von drei cyklographischen Flächen F, F_1, F_2, und lösen damit das Apolloni'sche Problem für drei beliebige Curven C, C_1, C_2. Zu diesem Zwecke schneiden wir die Durchdringungscurve der beiden ersten Flächen, welche § 15, S. 48 zufolge von der Ordnung $2x''$ ist, mit der dritten, und ziehen die unendlich fernen Punkte ab. Die vollständige Anzahl der Schnittpunkte ist gleich

$$2x''.r_2 = 8(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu_1 + \nu_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1)(\mu_2 + \nu_2 - 2\varepsilon_2 - \sigma_2)$$
$$- 4(\mu_2 + \nu_2 - 2\varepsilon_2 - \sigma_2)(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1),$$

und von diesen liegen im Unendlichen:

1°. die $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Punkte der Gruppe e) § 9, S. 27, resp. § 15, S. 50. Jeder derselben absorbirt $2(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_2 - \sigma_2)$ Schnittpunkte; wir erhalten also, indem wir auch die entsprechenden Punkte der Fläche F_1 berücksichtigen:

$$4(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_2 - \sigma_2) + 4(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)(\nu - \sigma)(\nu_2 - \sigma_2)$$
Punkte.

2°. Die Punkte der Gruppe f) § 9, S. 28, resp. § 15, S. 50. Jeder derselben absorbirt $3(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_2 - \sigma_2)$ resp. $3(\nu - \sigma)(\nu_2 - \sigma_2)$ Punkte, zusammen also $6\sigma(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_2 - \sigma_2) + 6\sigma_1(\nu - \sigma)(\nu_2 - \sigma_2)$.

3°. Die $2(\nu\nu_1 - \sigma\sigma_1)$ einfachen Punkte welche herrühren von den gemeinschaftlichen Tangenten der Curven C und C_1.

Weil die Fläche F_2 $(\nu_2 - \sigma_2)$-mal durch K_∞ hindurchgeht so repräsentieren diese Punkte $2(\nu\nu_1 - \sigma\sigma_1)(\nu_2 - \sigma_2)$ einfache Schnittpunkte der drei Flächen.

Nach Subtraktion der in diesen drei Gruppen enthaltenen unendlich fernen Punkte von der Gesamtzahl $2x''.r_2$ und nachheriger Division durch 2 erhält man die Anzahl der Kreise welche die drei vorgelegten Curven C, C_1, C_2 gleichzeitig berühren. Führt man die Rechnung durch so erhält man zunächst einen Ausdruck welcher in Bezug auf die Charakteristiken der drei Curven nicht symmetrisch ist, aber durch Umrechnung auf eine einfache symmetrische Form gebracht werden kann. So entsteht der folgende Satz:

es gibt:

$$(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)(2\mu_1 + \nu_1 - 4\varepsilon_1 - \sigma_1)(2\mu_2 + \nu_2 - 4\varepsilon_2 - \sigma_2)$$
$$- 4(\mu - 2\varepsilon)(\mu_1 - 2\varepsilon_1)(\mu_2 - 2\varepsilon_2)$$

Kreise welche die drei Curven C, C_1, C_2 gleichzeitig berühren.

Die Formel gibt für drei gerade Linien 4, für drei Kreise 8, für 3 Kegelschnitte 184, für 2 Kegelschnitte und einen Kreis 72, für einen Kegelschnitt und zwei Kreise 24, für 2 beliebige Kegelschnitte und eine Parabel 148, einen Kegelschnitt und zwei Parabeln 118, 3 Parabeln 93, für 3 beliebige C_6^3 1620, 3 circulare C_6^3 508, u. s. w.

Schlussbemerkung. Den Ausgangspunkt der vorhergehenden Betrachtungen bildeten die Büschel der Kreise welche in den Punkten der gegebenen Curve die zugehörigen Tangenten berühren. Lässt man alle diese Büschel um 90° drehen so erhält man sämtliche Kreise welche die gegebene Curve rechtwinklig schneiden, und die durch *dieses* Kreissystem abgebildete cyklographische Fläche, deren einfachste Gestalt, abgesehen von der Ebene, durch das gleichseitige Rotationshyperboloid dargestellt wird (nämlich wenn die gegebene Curve ein Kreis ist), und welche also nicht mehr developpabel ist, muss uns belehren über die Kreise welche die gegebene Curve ein oder mehrere Male rechtwinklig schneiden, über den Ort der Punkte von wo aus an die Curve zwei gleich lange Tangenten gelegt werden können, u. s. f. Es fragt sich in wie fern hierbei Resultate zu Tage treten welche die Mühe der Untersuchung lohnen.

Delft, im December 1903.

(10 Mei 1904.)