

ERRATA,

behorende bij „Nieuwe Studiën over bladstanden” door G. van Iterson Jr., verschenen in Verhandelingen Kon. Ned. Akad. v. Wetenschappen Amsterdam, Afd. Natuurkunde 2e Reeks, Deel 56, No. 2 van 1964.

1e. Op blz. 33 op eerste regel van § 8 staat eidenschappen, hetgeen moet zijn: eigenschappen.

2e. In Tabel VI op blz. 63 staat links boven in de eerste kolom, achter de accolade, $\frac{\Delta_m}{n}$, hetgeen moet zijn: $\frac{\Delta_n}{n}$.

3e. Op regel 19 (van boven af) van blz. 134 staat quincux, hetgeen moet zijn: quincunx.

4e. Op blz. 137 staat op de eerste regel (van bovenaf) „hoofdkenmer”, hetgeen moet zijn: „hoofdkenmerk”.

5e. Op blz. 138 staat in de formule i'^1 , hetgeen moet zijn: i'^2 .

6e. Op blz. 140 staat op de derde regel (van boven af) Töen, hetgeen moet zijn: Töne.

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE NEDERLANDSE
AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN, AFD. NATUURKUNDE
TWEEDE REEKS - DEEL LVI - No. 2

NIEUWE STUDIËN OVER
BLADSTANDEN. I

WITH AN ENGLISH COMMENT ON THE CONTENTS

G. VAN ITERSON JR.

N.V. NOORD-HOLLANDSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ
AMSTERDAM - 1964

AANGEBODEN MEI 1964
GEPUBLICEERD APRIL 1965

Opgedragen aan mijn, nog in leven zijnde, oud-leerlingen en ter nagedachtenis dergenen, die — helaas — reeds voor immer zijn heengegaan.



LEONARDO PISANO

DETTO FIBONACCI

Hiernaast heb ik een afbeelding van een marmeren buste van LEONARDO PISANO (bijgenaamd FIBONACCI) opgenomen, omdat de uitkomst van het door hem opgestelde „Konijntjesprobleem” het „leidmotief” van de hier volgende hoofdstukken vormt.

Hieronder volgt de tekst van het konijntjesprobleem, zoals ik die in een uitgave van 1857 aantrof. Het antwoord op de gestelde vraag is de summatiereeks, die men daarnaast als kantschrift vindt; het is ook ontleend aan FIBONACCI. De reeks wordt, sedert het midden van de 19de eeuw, algemeen met zijn naam gekenmerkt. Inmiddels is het wel waarschijnlijk, dat de reeks zelve, in de Oudheid, aan Griekse wiskundigen bekend was. Men zie ook blz. 46.

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

parium	1
primus	2
Secundus	3
tercius	5
Quartus	8
Quintus	13
Sestus	21
Septimus	34
Octauus	55
Nonus	89
Decimus	144
Undecimus	233
Duodecimus	377

Qvidam posuit unum par coniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense geminat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8; ex quibus paria 5 geminant alia paria 5: quibus additis cum parijs 8, faciunt paria 13 in quinto mense; ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense, sed alia 8 paria pregnantur; et sic sunt in sexto mense paria 21; cum quibus additis parijs 13, que geminantur in septimo, erunt in ipso paria 34; cum quibus additis parijs 21, que geminantur in octauo mense, erunt in ipso paria 55; cum quibus additis parijs 34, que geminantur in nono mense, erunt in ipso paria 89; cum quibus additis rursum parijs 55, que geminantur in decimo, erunt in ipso paria 144; cum quibus additis rursum parijs 89, que geminantur in undecimo mense, erunt in ipso paria 233. Cum quibus etiam additis parijs 144, que geminantur in ultimo mense, erunt paria 377; et tot paria peperit suprascriptum par in prefato loco in capite unius anni. Potes enim uidere in hac margine, qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, uidelicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tercium cum quarto; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, uidelicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum coniculorum summam, uidelicet 377; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus.

INHOUD

INLEIDING	7
TOELICHTING	
van de inhoud der, in Deel I dezer „Nieuwe Studiën” opgenomen, hoofdstukken (I, II, III)	11
HOOFDSTUK I	
Enkele algebraïsche en meetkundige betrekkingen	17
APPENDIX	
Enige historische bijzonderheden	44
HOOFDSTUK II	
Enkelvoudige regelmatige netten van ruiten en kwadraten op een cirkelcilinder	51
HOOFDSTUK III	
Enkelvoudige regelmatige parallelogrammennetten en recht- hoekennetten op een cirkelcilinder	94
APPENDIX	
Opmerkingen over de Quincunx	132
NASCHRIFT	138
INTRODUCTION (translation)	141
COMMENT	
on the contents of the chapters in Part I of these „New Studies” (translation)	144
EPILOGUE (translation)	149

INLEIDING

Die hier volgende „Studiën” zijn te beschouwen als een omwerking en een verbetering van de voorlopige mededeling over bladstanden, die ik ik 1960 in de „Proceedings” van de Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Series C, Vol. LXIII, p. 137, liet verschijnen. Ze vormen intussen slechts een aanloop tot de nader te geven „theoretische verklaring”. Het in 1960 geuite denkbeeld, dat „trillingen van membranen” een overheersende rol spelen, is daarbij behouden.

Ik meende goed te doen door met het publiceren van de aanloop niet te wachten tot de onzekere voltooiing van het verdere deel dier studiën. Daarbij overwoog ik vooral, dat het thans verschijnende deel vrijwel uitsluitend beschouwingen geeft, die van algebraïsche en meetkundige aard ¹⁾ zijn en dus, voor zover dit het geval is, geen hypothesen bevat. Die beschouwingen kunnen dus ook van belang zijn voor het opstellen van andere theorieën over het tot stand komen der natuurlijke bladstanden dan de theorie, waartoe ik nijg.

In hetgeen volgt, heb ik in het bijzonder „regelmatige netwerken” van *congruente* figuren op het oppervlak van een cilinder in het onderzoek betrokken.

Wie met mijn werk uit 1907 bekend is, zal intussen wel niet verwachten, dat ik dit laatste deed, omdat ik een studie van, door logaritmische spiralen op een, onbegrensd plat vlak, centraal-opgebouwde netwerken van *gelijkvormige* figuren voor het opstellen van bladstandentheorieën van minder betekenis acht.

Bij kennismaken (vele jaren na het genoemde jaar) van de publikaties van E. J. ROUTH (uit 1881 en later) over „geconjugeerde functies” en de daarmee verkregen „conforme afbeeldingen” bleek mij echter, dat het mogelijk is om — door het invoeren van een eenvoudige en plausible onderstelling — de afleidingen voor regelmatige netwerken op het oppervlak van een cilinder zonder principiële wijzigingen toe te passen op de zoëven omschreven gelijkvormige constructies op een onbegrensd plat vlak.

Dit betekent nu weer niet, dat de laatst bedoelde constructies overbodig zijn. Ze zijn integendeel van belang, omdat ze figuren opleveren, die veelal dichter naderen tot hetgeen men aan, nog niet uitgegroeide, natuurlijke plantaardige objecten waarneemt. Anderzijds kan het echter ook wel voordeel hebben om de laatst bedoelde figuren om te zetten in zulke op een (afgerold) cilinderoppervlak. Hierbij denk ik vooral aan overgangen van bepaalde bladstanden in andere, zoals ze in het bijzonder aan kiemplanten worden waargenomen. De talrijke microscopische pre-

1) Ik hield ze elementair; ze zijn vooral voor biologen bedoeld.

paraten, die ik daartoe in tekeningen vastlegde, heb ik intussen onbenut moeten laten.

Het zwaartepunt van de hier volgende studiën ligt, naar mijn mening, in het opstellen van de formule voor de divergentie van regelmatige netwerken, opgebouwd uit congruente rechthoeken op een cirkelcilinder, waarvoor de verhouding der rechthoekszijden gegeven is.

Het blijkt namelijk, dat het aannemen van een bepaalde — eenvoudige — verhouding van die zijden, tot divergenties der netwerken leidt, die tot de meest in de natuur voorkomende behoren. Bovendien kan men ze ongedwongen in groepen indelen, die ook bij de natuurlijke objecten zijn aan te wijzen (zie Tabel XII).

Het is mijn bedoeling om — naar ik hoop — binnen niet te lange tijd in volgende „Studiën” de mogelijke oorzaken voor het kiezen der zoëven bedoelde „verhouding” te bespreken.

Hoewel ik daarmee op deze laatste toezegging vooruitloop en daarmee wel degelijk een „hypothese” suggereer, verwijs ik hier naar de, in de tabel XII voorkomende, waarden van de grootheid, die ik daarin aanduidde als $\mathcal{N}_{m,n}$.

Deze waarden geven namelijk de trillingsgetallen weer, die zouden optreden, wanneer de oppervlakte van een holle cilinder zou gevormd worden door een homogeen, overal even dik en overal gelijk gespannen, elastisch membraan, dat zodanig tot trilling wordt gebracht, dat de „knooplijnen”, die daarbij ontstaan, samenvallen met de rechte lijnen van het net, dat in beschouwing is genomen.

Onmiddellijk zal bij een bestudering van de zoëven bedoelde tabel opvallen, dat de trillingsgetallen van daarin op elkaar volgende *rechthoekennetten* summatiereeksen vormen.

Het voorafgaande leidt dan tot de (in een latere „Studie” uit te werken) hypothese, dat de groeipunten van hogere planten zich gedragen als kleine *resonatoren*, die uit een (met een overdrachtelijke uitdrukking aangeduid) „geruis” van trillingen (dat bijvoorbeeld bij schoksgewijze groei van celwanden kan ontstaan) *die* trillingen uitkiezen, welke aan één der *geometrisch-mogelijke* regelmatige indelingen beantwoorden. Het ligt dan verder voor de hand te onderstellen, dat de plaatsen, waar „buiken”, of waar „volledige knopen” ontstaan, degene zijn, waar zijdelingse organen worden aangelegd.

Hiermede zou dan de voorkeur voor vele der, in de natuur voorkomende, bladstanden, een verklaring vinden.

Door toevoegen van enige appendices aan de drie hier gepubliceerde hoofdstukken heb ik over enige problemen, die verband houden met hetgeen in die hoofdstukken ter sprake kwam, mijn mening kenbaar gemaakt. Het is immers wel begrijpelijk, dat iemand, die zoals voor mij het geval is, meer dan 50 jaren door een onderwerp geboeid werd, behoefte heeft om de inzichten, die hij daarbij verwierf, althans voor een deel, vast te leggen.

In het bijzonder meende ik ook mijn oordeel over de laatste publikatie van mijn hooggeschatte leermeester Prof. M. W. BEIJERINCK, n.l. die uit 1927, te moeten geven. Ik deed, om dit oordeel toe te lichten, eerst enige historische mededelingen over die publikatie en daarna besprak ik de inhoud kritisch — thans voor de eerste maal. Men zal uit een en ander zien, dat ik, na vele vergeefse pogingen, ten slotte geslaagd meen te zijn om de bedoeling van zijn publikatie grotendeels te begrijpen. Ik ben daarbij tot de slotsom gekomen, dat BEIJERINCK in een belangrijk opzicht, meer intuïtief dan bewijzend, juist zag, maar dat ik over andere zijner uitspraken een afwijzend oordeel moet uitspreken.

Ik hoop, dat mijn oud-leerlingen even naarstig naar hetgeen juist is in mijn uiteenzettingen zullen speuren, als ik dit in de publikatie van mijn leermeester deed.

Augustus 1964.

TOELICHTING

*van de inhoud der, in Deel I dezer „Nieuwe Studiën” opgenomen,
hoofdstukken (I, II en III)*

HOOFDSTUK I, dat tot titel heeft „Enkele algebraïsche en meetkundige betrekkingen”, behandelt in hoofdzaak bijzonderheden van, in de leer der bladstanden veelvuldig voorkomende, getallen en van eenvoudige meetkundige figuren in het platte vlak, waarin die getallen (als verhoudingen van lengten, of als maten van hoeken) een rol spelen.

Hierbij is dus geen sprake van tekeningen op omwentelingsoppervlakken, of op een plat vlak, dat door ontrollen van zulk een oppervlak ontstaat.

Veel van hetgeen in dit hoofdstuk voorkomt, is bekend, maar dit is hier op een andere wijze dan de gebruikelijke samengevoegd en anders belicht. Men treft bij voorbeeld belangrijke gegevens voor dit hoofdstuk aan in mijn werk uit 1907, maar ze zijn daarin zeer verspreid opgenomen.

Het schrijven van dit hoofdstuk was ook wenselijk om de, in deze nieuwe studiën gebruikte, notatie toe te lichten, in het bijzonder voor de getallenreeksen, waarvan de „summatiereksen” de belangrijkste zullen blijken te zijn.

Ook heb ik getracht om in dit hoofdstuk en in de daaraan toegevoegde appendices recht te doen wedervaren aan anderen, die m.i. niet voldoende in de literatuur naar voren kwamen. Hierbij heb ik volstrekt niet naar volledigheid gestreefd.

In dit licht gezien, is het misschien goed, ook in dit overzicht de algemene summatiereeks (p, q) te releveren, waarvoor ik in 1907 eigenschappen afleidde, onbekend met het feit, dat É. LUCAS reeds in 1884 bijzonderheden voor deze reeks had gegeven.

Speciaal verdienen m.i. verder de vier bijzondere rechthoekige driehoeken, die in § 4 van dit hoofdstuk zijn opgenomen, volle aandacht, omdat ze ook in de volgende beschouwingen sterk op de voorgrond treden. Het sterkste is dit het geval voor de twee, die ik met de namen CHURCH en KEPLER heb gekentekend.

HOOFDSTUK II, dat als titel heeft: „Enkelvoudige regelmatige netten van ruiten en van kwadraten op een cirkelcilinder”, geeft evenals verschillende der nog volgende hoofdstukken, beschouwingen over mathematische eigenschappen van netten op een ontrolde cirkelcilinder. Als mazen dier netten zijn onderling congruente ruiten aangenomen met, als bijzondere gevallen, mazen van onderling congruente vierkanten. Daarbij is ondersteld, dat de mazen zonder tussenruimten tegen elkaar aansluiten.

Het zal duidelijk zijn, dat overeenkomstige punten der netten — bij voorbeeld hoekpunten of middelpunten der mazen — een „regelmatig

puntensysteem op het ontrolde oppervlak vormen, waarbij deze uitdrukking wordt gebruikt in de zin, die ik daaraan in 1907 gaf.

Bij de hier nader besproken netten vormen de bedoelde punten vrijwel altijd *enkelvoudige* systemen. Een uitbreiding tot meervoudige netten levert echter weinig moeilijkheden op.

Zoals te verwachten was, vertonen de ruitennetten, die in dit hoofdstuk worden beschouwd, overeenkomst met de „regelmatige systemen op een ontrolde cirkelcilinder van onderling gelijke cirkels, die elkaar in vier, of in zes punten raken, maar die elkaar nergens snijden”, welke laatste systemen ik in 1907 uitsluitend in mijn gezichtskring betrok. Er zijn daarmee echter ook vrij belangrijke punten van verschil te constateren.

Ten einde deze verschillen, zoveel mogelijk, weg te nemen, heb ik mij tot de bespreking van die ruitennetten beperkt, waarvan de mazen de kortste zijden bezitten van alle netten, die de punten van het puntensysteem alle kunnen opnemen. Aan dergelijke netten heb ik de naam van *fundamentele ruitennetten* gegeven.

Het blijkt dan, dat wij de formules, die ik 1907 voor de regelmatige systemen van rakende cirkels op een ontrolde cirkelcilinder heb afgeleid, ook kunnen toepassen op fundamentele ruitennetten.

Dit geldt in de eerste plaats voor de twee verwante formules, die de “divergentie” van het puntensysteem uitdrukken. Voor de kwadratenetten reduceren zij zich tot één formule, welke zich in deze vorm laat schrijven:

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + n\Delta_n}{m^2 + n^2},$$

waarin m en n de aantallen tegengesteld gewonden en loodrecht op elkaar staande, evenwijdige spiralen zijn, die het net vormen en waarin Δ_m en Δ_n de, bij m en n behorende, zogenaamde „encyclische getallen” voorstellen, die eenvoudig zijn te berekenen, maar ook uit een tabel, die ik in § 6 van dit hoofdstuk opnam, zijn af te lezen.

In de tweede plaats zijn ook de twee verwante formules, die ik in 1907 voor het verband tussen de divergentie en de diameter der gelijke cirkels afleidde, op de fundamentele ruitennetten toe te passen, wanneer men, in plaats van de afmeting van de diameter der cirkels, de lengte van de zijden van de ruiten neemt.

Dit laatste lag geenszins voor de hand, aangezien men de cirkels niet als zulke kan beschouwen, die door de vier hoekpunten van ruiten gaan, of die inwendig aan de vier zijden van ruiten raken.

Ik heb, niettegenstaande het feit, dat de hierboven vermelde overeenkomst der formules dit eigenlijk overbodig maakte, toch ook voor de ruitennetten het verband tussen de divergentie en de lengte der zijden van de ruiten, voor verschillende waarden van m en n , in een grafiek vastgelegd en daarover uitvoerige beschouwingen gegeven. Er was mij namelijk veel aan gelegen om mij onafhankelijk van cirkelconstructies te maken.

Op Plaat I (§ 11 van dit hoofdstuk) heb ik de belangrijkste ruitennetten afgebeeld, waarbij uiteraard de kwadratennetten op de voorgrond zijn gebracht. Ik deed dit vooral om de tegenstelling van deze netten met die uit het volgend hoofdstuk te doen uitkomen.

In dit hoofdstuk II zijn verder nog beschouwingen over het uitrekken en inkrimpen van ruitennetten in verticale richting opgenomen, die eveneens voor latere bespreking van dergelijke vervormingen van andere netten van belang zijn.

HOOFDSTUK III, getiteld: „Enkelvoudige regelmatige parallelogrammenetten op een cilinder” brengt de uitbreiding van de beschouwingen uit het vorige hoofdstuk tot die over regelmatige parallelogrammenetten op een dergelijk oppervlak. Regelmatige rechthoeknetten zijn uiteraard bijzondere gevallen van de zoëven bedoelde netten en aangezien ze de belangrijkste zullen blijken te zijn, heb ik mij, wat de parallelogrammenetten betreft, beperkt tot zulke, waarbij de twee stelsels van evenwijdige spiralen, die deze netten opbouwen, tegengesteld gewonden zijn — dit laatste is namelijk ook voor de rechthoeknetten het geval.

Reeds in 1871 heeft de mathematicus G. P. TAIT — zij het ook in andere bewoordingen dan ik heb gebruikt — een korte mededeling over dergelijke parallelogrammenetten gegeven en zelfs een formule opgesteld, die de divergentie der netten uitdrukt in: de waarden van m en n (en de daarvoor te berekenen „encyclische getallen”), alsook in twee nieuw ingevoerde grootheden, die hij met de letters r en s aanduidde, welke het net nader preciseren dan met m en n alleen mogelijk is. Deze nieuwe grootheden zijn vooral aan plantaardige objecten met dicht opeen geplaatste zijdelingse organen gemakkelijk af te lezen en naar zulke objecten ging de belangstelling der plantenmorfologen in die dagen uit.

De hier bedoelde formule van TAIT (die ik in hoofdstuk III door twee onderling verwante formules verving) heeft, door de onvoldoende toelichting, die TAIT daarbij gaf, bij de botanici géén toepassing gevonden.

Ook een andere formule, die voor parallelogrammenetten geldt — ze werd in 1893 door P. V. KOTURNICKIJ opgesteld — is onopgemerkt gebleven, in dit geval ten gevolge van het feit, dat de publikatie in het Russisch is opgenomen in een weinig verspreid tijdschrift.

De formule van KOTURNICKIJ drukt de waarde van de scherpe hoek (γ) van de parallelogrammen uit in de grootheden m en n (en de daarbij behorende encyclische getallen), alsmede in de grootheden r en s , die TAIT invoerde, en bovendien in de verhouding (k) van de lengten der zijden der parallelogrammen. Ook de formule van KOTURNICKIJ heb ik in hoofdstuk III door twee verwante formules vervangen, die ik langs eenvoudiger weg afleidde dan hij volgde.

De betrekkingen van TAIT en van KOTURNICKIJ gelden — zoals vanzelf spreekt — beide ook voor rechthoeknetten en als men ze op hetzelfde net van deze aard toepast, kan men daaruit r en s elimineren.

Men komt dan tot een verrassend eenvoudige formule voor de divergentie van een rechthoekennet, namelijk:

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + k^2n\Delta_n}{m^2 + k^2n^2}.$$

Zoals te verwachten was, gaat deze formule, wanneer men daarin $k=1$ stelt, over in de formule voor kwadratennetten, die wij hierboven in de toelichting van hoofdstuk II hebben vermeld.

De nieuwe formule is nu in hoofdstuk III voor de studie van belangrijke rechthoekennetten toegepast.

Tot voor de hand liggende voorbeelden van regelmatige rechthoekennetten behoren die, waarvoor $m=1$ en $n=1$ is; daarbij kan k allerlei waarden hebben. Op Plaat III zijn verschillende dezer netten afgebeeld. Bij alle vormt het punt met het nummer 1 het hoekpunt van een rechthoekige driehoek, die de omtrek van de cilinder tot hypotenusa heeft. Voor $k=\chi$ gaat die driehoek over in de driehoek van CHURCH en voor $k=\sqrt{\chi}$ gaat hij over in de driehoek van KEPLER. Uitsluitend oordelende op grond van meetkundige bijzonderheden is er geen aanleiding om aan één, of aan meer der mogelijke rechthoekennetten $m=1$ en $n=1$ een bijzondere betekenis voor de bladstandentheorie toe te kennen.

Belangwekkend zijn verder de netten, die met de nieuwe formule worden verkregen, wanneer men daarin $k=\sqrt{m/n}$ stelt. In de kleine tabelletjes, die in § 17 van hoofdstuk III zijn opgenomen, treft men divergenties voor zulke netten aan, die voor kleine waarden van m en n aan eenvoudige summatiereeksen zijn ontnomen. Bovendien zijn daaruit de limietdivergenties af te lezen, die bij opstijgen in deze reeksen voor het net zullen optreden.

Eén van de bijzonderheden, die uit de berekeningen blijkt, is deze, dat bij de gekozen waarden van m en n divergenties optreden, welke bij natuurlijke objecten worden aangetroffen en wel meestal veelvuldiger naarmate m en n kleiner worden ondersteld.

Men zal zelfs, bij het uitvoeren van overeenkomstige berekeningen, weldra de indruk krijgen, dat alle divergenties van „eenvoudige” bladstanden kunnen worden ondergebracht in tabelletjes, die in dezelfde paragraaf thuis behoren.

Een andere bijzonderheid, die vooral bij bestudering der tekeningen van de netten (men zie hiervoor Plaat IV en Plaat V) zal opvallen, is het feit, dat de rechthoekige driehoeken, die tot top het punt mn bezitten en als basis de omtrek van de cilinder, bij het kiezen van steeds grotere waarden van m en n uit eenzelfde summatiereeks (onverschillig welke), *alle tot dezelfde limietdriehoek* naderen en wel tot de driehoek van KEPLER. Dit zal vooral treffen, omdat men uit de tabelletjes kan aflezen, dat de limietdivergenties wél afhankelijk zijn van de keuze van de summatiereeks.

Ik releveer hier nog, dat er belangrijke verschillen bestaan tussen de hier besproken rechthoekennetten en de kwadratennetten met dezelfde

waarden van m en n . Om de vergelijking van beide soorten netten te vergemakkelijken, heb ik in een grote tabel (n.l. Tabel XII) overeenkomstige grootheden van beide soorten tegenover elkaar gezet.

Intussen mogen wij niet verzwijgen, dat er ook rechthoekennetten zijn, die het cilinderoppervlak volledig aanvullen en die niet in de twee rubrieken ($k=1$ en $k=\sqrt{m/n}$) zijn onder te brengen. Ik heb ook hiervoor in hoofdstuk III enkele voorbeelden gegeven. Het blijkt dan ook nodig, een oorzaak voor de voorkeur van de plant voor *bepaalde* rechthoekennetten aan te wijzen. Dit probleem moet het onderwerp van een volgend hoofdstuk vormen. De zoëven bedoelde, grote tabel bood echter ook de gelegenheid om — daarop vooruitlopende — aan te geven, in welke richting m.i. de oplossing is te vinden. Door opnemen van de waarden der grootheid $\mathfrak{R}_{m,n}$ in die tabel worden namelijk bijzonderheden voor de daarin beschouwde *rechthoekennetten* zichtbaar, die daarvoor kenmerkend zijn.

Ik volsta hier met een verwijzing naar hetgeen ik in de „Inleiding” over die bijzonderheden hebben meegedeeld en naar de gezichtspunten, die daardoor o.i. voor het opstellen van een „bladstandentheorie” worden geopend.

Aan het einde van hoofdstuk III heb ik een bespreking van de laatste publikatie van Prof. M. W. BEIJERINCK opgenomen. Uit het voorafgaande zal duidelijk zijn geworden, dat ik met hem overtuigd ben van de betekenis van de driehoek van KEPLER voor de leer der bladstanden, al verwerp ik de door hem geopperde verklaring van een voorkeur voor die driehoek bij de hogere planten.

In een „Appendix” van hoofdstuk III heb ik ten slotte de term „quincunx” onder de loep genomen.

ENKELE ALGEBRAÏSCHE EN MEETKUNDIGE BETREKKINGEN

§ 1. *De gouden getallen*

Op blz. 46 van mijn werk uit 1907¹⁾ heb ik de positieve wortel van de vergelijking $x^2 + x - 1 = 0$, d.w.z. de waarde:

$$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}),$$

aangeduid met de letter χ . Daarvoor geldt dus de betrekking:

$$\chi^2 + \chi - 1 = 0.$$

W. SCHOOLING heeft in Appendix II van het, door A. COOK in 1914 gepubliceerde, boekwerk „The Curves of Life” (zie aldaar blz. 441) onder verwijzing naar een verhandeling van zijn hand uit december 1912, voorgesteld om de positieve wortel van de vergelijking $x^2 - x + 1 = 0$, d.w.z. de waarde:

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

aan te duiden met de letter φ . Hij was blijkbaar onbekend met mijn voorstel tot invoering van de letter χ . Voor φ geldt de ietwat, van de bovenstaande formule voor χ , afwijkende betrekking, namelijk:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Tussen χ en φ bestaan enige eenvoudige relaties, o.m. de volgende:

$$\chi \cdot \varphi = 1, \quad \varphi = \chi + 1 \quad \text{en} \quad \chi + \varphi = \sqrt{5}.$$

De twee gelijk gerechtigde grootheden χ en φ kunnen m.i. naast elkaar behouden blijven; ik stel voor, hen als *de gouden getallen* aan te duiden.

Ik laat hier nog enige eenvoudige formules met machten van χ volgen, waaruit ook gemakkelijk zulke formules voor φ zijn af te leiden:

$$\chi^3 = 2\chi - 1, \quad \frac{1 - \chi}{1 + \chi} = \chi^3, \quad \frac{1 + \chi^2}{1 - \chi} = 3 + \chi, \quad \frac{1 + \chi^2}{1 + \chi} = 3\chi - 1, \quad \frac{\chi}{1 + \chi} = \chi^2.$$

Bovendien zijn hiermede formules te vinden, waarin op verschillende wijzen verband tussen machten van χ en φ wordt tot uitdrukking gebracht.

Om misverstanden te voorkomen, releveer ik hier, dat ook andere aanduidingen als χ en φ voor de positieve wortels van de twee oorspronke-

¹⁾ G. VAN ITERSUN JUN. Mathematische und mikroskopisch-anatomische Studien über Blattstellungen, nebst Betrachtungen über den Schalenbau der Milioninen. Jena 1907.

lijke vergelijkingen in de literatuur voorkomen, maar dat aan het gebruik daarvan m.i. geen voordelen zijn verbonden, wél enkele — zij het ook niet zeer belangrijke — nadelen. Van de nadelen noem ik: het feit, dat die andere aanduidingen tot verwarring met bekende constante grootheden aanleiding kunnen geven en de omstandigheid, dat ze in formules minder opvallen dan de hierboven vermelde griekse letters.

Men kan de grootheden χ en φ ook als *periodieke kettingbreuken* schrijven. De formule $\chi^2 + \chi - 1 = 0$ kan men daartoe deze vorm geven:

$$\chi = \frac{1}{1 + \chi}$$

en deze formule kan men op haar beurt weer als volgt schrijven:

$$\chi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \chi}}, \text{ of ook: } \chi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \chi}}}$$

of ook:

$$\chi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \chi}}}} \text{ enz.,}$$

zodat men, ten slotte, geleid wordt tot de oneindig doorlopende periodieke kettingbreuk:

$$\chi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Gebruik makende van, vaak toegepaste, vereenvoudigde schrijfwijzen, kan men deze kettingbreuk aldus weergeven:

$$\chi = \{0; 1, 1, 1, 1, 1, \dots\},$$

of ook als volgt:

$$\chi = \{0; \bar{1}, \text{enz.}\}.$$

Op overeenkomstige wijze kan men uit de formule $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ de kettingbreuk afleiden:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

en deze kan men dan aldus schrijven:

$$\varphi = \{1; 1, 1, 1, 1, \text{enz.}\},$$

of ook:

$$\varphi = \{1; \bar{1}, \text{enz.}\}.$$

Door gebruik te maken van de eigenschappen van kettingbreuken kan men nu gemakkelijk benaderende waarden voor χ en voor φ becijferen. Ik ontleen de volgende benadering van φ aan een publicatie van É. LUCAS ¹⁾ uit 1877 (hij duidde de bedoelde grootheid uiteraard anders aan dan hier is geschied):

$$\varphi = 1 + \chi = 1,61803 \ 39887 \ 39894 \ 8482.$$

Hierbij merk ik op, dat mij geen toepassing van gouden getallen bekend is, waarbij een verdere toenadering dan tot 6 decimalen wenselijk is.

§ 2. *Enige goniometrische betrekkingen, waarin de gouden getallen een rol spelen*

1e. Wanneer men een hoek α beschouwt, waarvoor geldt:

$$\sin \alpha = \text{ctg } \alpha,$$

dan geldt voor die hoek ook:

$$\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0.$$

Blijkens de definitie van de grootheid χ , kan men dus voor de cosinus van de hoek α als positieve getallenwaarde opschrijven:

$$\cos \alpha = \chi.$$

Met behulp van een voldoende-nauwkeurige tabel van de *logarithmen der goniometrische verhoudingen* en gebruik makende van de, in onze eerste paragraaf vermelde, waarde van de grootheid χ , vindt men dan:

$$\alpha = 51^\circ 49' 38''.$$

2e. Wanneer men een hoek β beschouwt, waarvoor geldt:

$$\cos \beta = \text{tg } \beta,$$

dan geldt daarvoor:

$$\sin^2 \beta + \sin \beta - 1 = 0,$$

zodat dan, blijkens de definitie van de grootheid χ , de positieve getallenwaarde van $\sin \beta$ wordt gegeven door:

$$\sin \beta = \chi.$$

¹⁾ Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise etc., *Bulletino di Bibliografia e di Storia della Scienze Matematiche e Fisiche*, Tome X, Rome 1877, 126-193 Q. 239-293.

De berekening van hoek β met behulp van de bekende tabellen levert dan:

$$\beta = 38^\circ 10' 22''.$$

Men zal opmerken, dat de hoek β de complementaire hoek is, behorende bij de hierboven beschouwde hoek α . Dit was trouwens te verwachten, immers wanneer geldt: $\cos \alpha = \sin \beta$, dan moeten α en β complementaire hoeken zijn.

3e. Wanneer men een hoek γ beschouwt, waarvoor geldt:

$$\text{ctg } \gamma = \text{tg } \gamma + 1,$$

dan geldt ook:

$$\text{tg}^2 \gamma + \text{tg } \gamma - 1 = 0,$$

zodat, op grond van de definitie van χ , kan worden besloten:

$$\text{tg } \gamma = \chi,$$

waaruit onmiddellijk volgt:

$$\text{ctg } \gamma = \varphi.$$

Bij berekening met behulp van een tabel voor de *logarithmen van goniometrische verhoudingen* leveren deze beide formules:

$$\gamma = 31^\circ 43' 2''.$$

Men kan dit resultaat aldus in woorden brengen:

Wanneer men in een tabel voor de *natuurlijke goniometrische getallen* de hoek opzoekt, waarvoor de cotangent gelijk is aan de tangent vermeerderd met 1, dan vindt men als waarde van die hoek (tot seconden benaderd): $31^\circ 43' 2''$. Die cotangent en die tangent hebben respectievelijk als waarden φ en χ , waarbij men uiteraard bedenken moet, dat de tabel „benaderende” waarden geeft.

De bedoelde tabel is bovendien doorgaans zó ingericht, dat de tangenten en cotangenten van dezelfde hoeken in kolommen naast elkaar voorkomen. Hiervan is dan het gevolg, dat men in de tabel op éézelfde regel, onmiddellijk aan elkaar grenzende, benaderende waarden van γ , φ en χ aantreft.

De hierboven beschouwde hoeken α , β en γ zullen wij later, bij de behandeling van enige meetkundige vraagstukken, die ook voor de leer der bladstanden van belang zijn, opnieuw aantreffen.

Een historische aantekening. Van een hoek, die voldoet aan de gelijkheid:

$$\sin \alpha = \text{ctg } \alpha,$$

is — voor zover ik dit heb kunnen nagaan — het eerste sprake in een publicatie van A. L. CRELLE ¹⁾. Zoals men uit de titel van deze publicatie

¹⁾ Zur näherungsweise Kreis-Quadratur, Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik, herausgegeben v. A. L. CRELLE, 32. Band (1846) 91–92.

kan afleiden, is hij daar in een geheel ander verband beschouwd dan hier is geschied. Zelfs is in deze publicatie de benaderde getallenwaarde van de hoek niet vermeld.

Men vindt de bovenstaande betrekkingen — ook in een ander verband en zonder vermelding van CRELLE's naam — meermalen vermeld in de geschriften van H. NABER ¹⁾.

M. W. BELJERINCK ²⁾ spreekt in zijn laatste publicatie (waarover ik verderop nog enige beschouwingen zal geven) van de betrekkingen $\sin x = \cot x$ en $\cos x = \operatorname{tg} x$ als zulke, die „wel bekend zijn” en hij gaf voor α en β (d.z. de hoeken x , die uit deze twee betrekkingen zijn af te leiden) de juiste getallenwaarden (die wij hierboven vermeldden).

Ik vermoed, dat BELJERINCK de formules aan NABER ontleend heeft, maar hij zegt dit niet.

§ 3. *Verdelingen van lijnstukken, waarbij de „gouden getallen” een rol spelen*

Als een punt op een lijnstuk zó gekozen wordt, dat dit lijnstuk daardoor in uiterste en middelste reden wordt verdeeld, en als daarbij met a het grootste en met b het kleinste deelstuk wordt voorgesteld, dan geldt:

$$(a+b) : a = a : b$$

of $b^2/a^2 + b/a - 1 = 0$.

Blijkens de definitie van χ , moet dan $b/a = \chi$ zijn.

De uitdrukking „proportia divina” voor de indeling in uiterste en middelste reden wordt gewoonlijk aan LUCA PACIOLI ³⁾ toegeschreven, die haar als titel voor zijn, in 1509 verschenen, bekende werk gebruikte.

Ik vermeld hier nog, dat D. A. EMSMANN ⁴⁾ een „inwendige *sectio aurea*” en een „uitwendige” onderscheidde. Hierboven werd alleen de inwendige beschouwd. Bij de uitwendige ligt het verdelende punt in het verlengde van het gekozen lijnstuk.

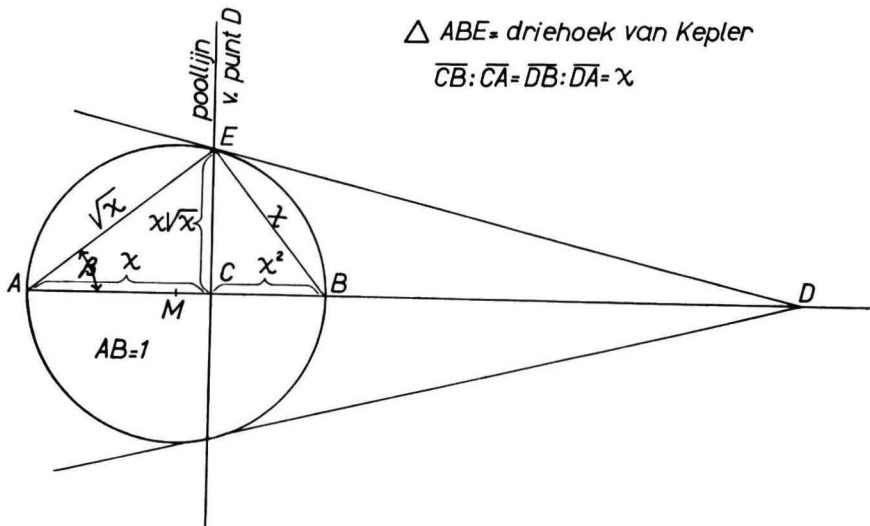
Ik treed hier niet in beschouwingen over deze laatste indelingswijze en beperk mij tot verwijzing naar fig. 1, waarin voor een lijnstuk AB de punten C en D de in- en uitwendige „gouden sneden” bewerkstelligen.

¹⁾ o.a. in „Das Theorem des Pythagoras”, 1908, zie bijv. daar blz. 110 en 114 en in „Van Theorema naar Sectio Divina”, 1939, zie bijv. daar blz. 79.

²⁾ „Verband tusschen de bladstellingen van de hoofdreeks en de natuurlijke logaritmen”. Verslag v. verg. Afd. Natuurkunde Kon. Akad. Wet. 36 (1927) 1–20. Men zie ook aldaar: Errata blz. 929.

³⁾ Ik ontleen aan G. LIBRI „Histoire des Sciences Mathématiques en Italie” t. 3, Paris 1840: „Dans la Summa arithmetica, l'auteur se nomme seulement Frater Lucas de Borgo Sancti Sepulchrii, mais dans la première dédicace de la *Divina proportione* il s'appelle Frater Lucas Patitolius Burgensis et dans la seconde *Pacioli*; c'est le nom qui lui est resté”.

⁴⁾ Zur Section aurea, Stettin 1874 (welk werk mij alleen bekend is door een referaat, gemaakt door CHR. SCHERLING voor Ztf. math. u. naturw. Unterricht 5 (1874), S. 289–291.

De in- en de uitwendige gulden snede van \overline{AB} .

$\triangle ABE = \text{driehoek van Kepler}$
 $\overline{CB} : \overline{CA} = \overline{DB} : \overline{DA} = \chi$

Fig. 1.

Men ziet gemakkelijk in, dat de loodlijn in C op het lijnstuk de „poollijn” van D is ten opzichte van de cirkel, die AB tot middellijn heeft.

In onze figuur is de lengte van het lijnstuk AB gelijk aan de eenheid aangenomen en in deze maat zijn de lengten van de opstaande zijden van de rechthoekige driehoek ABE , en ook de lengte van de hoogtelijn van die driehoek aangegeven. Men ziet, dat die lengten op eenvoudige wijze door het gouden getal χ bepaald worden.

Daarbij merken wij dan nog op, dat de scherpe hoeken van de rechthoekige driehoek ABE gelijk zijn aan de hoeken β en α , welke wij in de vorige paragraaf beschouwden. Die driehoek zullen wij nog nader in de volgende paragraaf ontmoeten en later zal blijken, waarom wij hem als „de driehoek van KEPLER” menen te mogen betitelen.

§ 4. Vier bijzondere driehoekige figuren met een rechte hoek als tophoek

Wij hebben als fig. 2 vier driehoekige figuren weergegeven, die alle een even lange basislijn (de lengte nemen wij gelijk aan de eenheid) bezitten en alle een tophoek van 90° hebben. Drie daarvan bezitten rechte lijnen als opstaande zijden, de vierde figuur heeft als zodanig zeer speciale kromme lijnen. Ter completering moet men ook de spiegelbeelden van deze figuren ten opzichte van een verticale lijn getekend denken.

De eerste driehoek (nader aangeduid als fig. *a*) behoeft geen toelichting; hij stelt een gelijkbenige driehoek voor.

De tweede driehoek (nader aangeduid als fig. *b*) is zodanig geconstrueerd, dat de loodlijn, uit de top op de basis neergelaten, die basis verdeelt in stukken met lengten van de verhouding $1 : \chi^2$. De lengten der deelstukken

Vier bijzondere rechth. driehoeken (a: gelijkb., b: drieh. v. Church, c: drieh. v. Kepler d: exponent. drieh.)

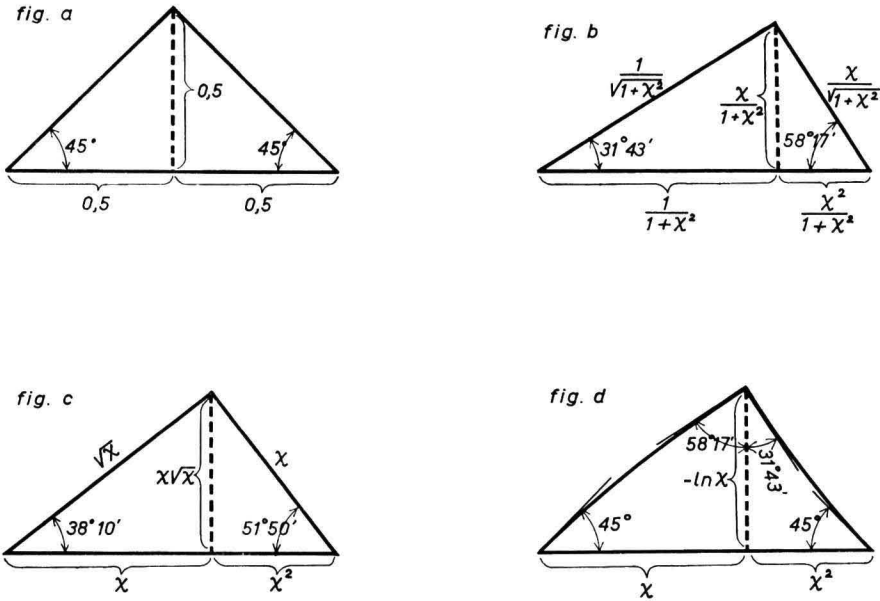


Fig. 2.

van die basis en de lengte van de hoogtelijn, zowel als de lengten der opstaande zijden, zijn dan bepaald; ze zijn naast die lijnen in de figuur aangegeven, uitgedrukt in de waarde χ . Ook de basishoeken zijn dan gemakkelijk te berekenen, waarbij zal opvallen, dat ze gelijk zijn aan de hoeken, die wij in paragraaf 2 hebben genoemd γ en het complement van γ .

Ik stel — zij het ook na overwinnen van enige aarzeling — voor om deze driehoek te noemen: „de driehoek van A. H. CHURCH”.

Mijn aarzeling kwam voort uit het feit, dat die driehoek zelf in de publicatie van CHURCH over bladstanden *niet* vermeld wordt en ook niet afgebeeld is. Wél treft men daarin echter een figuur aan — men kan haar zelfs als de grondslag van de theoretische beschouwingen van CHURCH aanduiden — die ten nauwste met de thans beschouwde driehoek en zijn spiegelbeeld samenhangt. In fig. 34 op blz. 70 van het fundamentele werk van A. H. CHURCH „On the Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws”, London 1904, vindt men namelijk twee figuren afgebeeld, die elkaars spiegelbeelden zijn en ieder door twee (onder verschillende hoeken verlopende), elkaar loodrecht snijdende, logarithmische spiralen begrensd zijn ¹⁾. Wanneer men deze twee figuren, met behulp van de logarithmische functie als „geconjugeerde functie”, „conform” afbeeldt op een, tot een

1) Ik memoreer hier, dat één der beide figuren, met de formules voor beide, is te vinden op blz. 137 van mijn werk uit 1907.

plat vlak afgerold, cirkelcylindervlak, dan gaan ze over in de zoeven beschouwde rechthoekige driehoek en in zijn spiegelbeeld.

Het is wellicht wenselijk hier te vermelden, dat in het werk van J. HAMBIDGE „The Greek Vase”, uitgegeven door de „Yale University Press”, New Haven, in 1920, meermalen (o.a. bij de verwijzing naar fig. 19 op blz. 17) sprake is van een *rechthoek*, waarvan de zijden zich verhouden als $\varphi : 1$. Deze rechthoek wordt door een diagonaal verdeeld in twee congruente rechthoekige driehoeken, welke beide identiek zijn met de thans beschouwde driehoek. Men vindt een dergelijke rechthoek met de twee congruente rechthoekige driehoeken — zelfs met nog twee daarmede gelijkvormige driehoeken — afgebeeld als een *vignet* op het titelblad van HAMBIDGE' zoeven bedoelde werk. Ofschoon HAMBIDGE verder wel degelijk over het verband van zijn beschouwingen (die vooral over de vorm van Griekse vazen handelen) met de bladstandentheorie spreekt (hij citeert ook het werk van A. H. CHURCH), heeft hij dit verband toch slechts zó terloops behandeld, dat er m.i. geen voldoende aanleiding is om HAMBIDGE's naam aan de thans beschouwde driehoek te verbinden.

De *derde rechthoekige driehoek*, die wij thans moeten beschouwen (in onze afbeelding aangeduid als fig. c), is zodanig geconstrueerd, dat de loodlijn uit de top op de basis neergelaten, deze basis verdeelt in stukken, waarvan de verhouding der lengten gelijk is aan χ . Uit onze figuur kan men verder aflezen, dat de lengten der drie *zijden* van deze driehoek de constante verhouding $\sqrt{\chi}$ bezitten, hetgeen — zoals vanzelfspreekt — ook de verhouding is van de lengten der drie zijden van de twee *gelijkvormige* driehoeken, waarin de hoogtelijn de driehoek verdeelt. Verder blijkt, dat de kleinste der rechthoekszijden en het grootste stuk van de, door de loodlijn verdeelde, basis aan elkaar gelijk zijn en dat ze (als die basis gelijk is aan de eenheid) de lengte χ bezitten.

Als basishoeken treft men nu de twee hoeken aan, die wij in een vorige paragraaf met de letters α en β hebben aangeduid.

Er is m.i. geen twijfel aan, of aan deze driehoek mag men de naam „*de rechthoekige driehoek van KEPLER*” geven. Men treft n.l. een afbeelding van en een beschouwing over de merkwaardige eigenschappen van deze driehoek aan in de brief, die JOH. KEPLER¹⁾ in begin oktober 1597 richtte tot zijn oud-leermeester, de mathematicus MICHAEL MÄSTLIN te Tübingen.

Verder teken ik hier aan, dat M. W. BEIJERINCK in zijn laatste publicatie (1927) aan deze driehoek een bijzondere betekenis voor de bladstandentheorie heeft toegekend. Hij was onbekend met het feit, dat KEPLER die driehoek (uitsluitend van wiskundig standpunt bezien) had beschreven. Bovendien zal blijken, dat ik van oordeel ben, dat er in BEIJERINCK's toepassing op de bladstandentheorie een misvatting ligt opgesloten.

¹⁾ Zie: J. KEPLER „Opera Omnia”, editit FRISCH I, S. 34–37, en ook: JOHANNES KEPLER „Gesammelte Werke”, Band XIII, Briefe 1590–1599, herausgegeben von MAX CASPAR, München 1945, S. 140–144.

Ik meen daarom BEIJERINCK's naam niet aan deze driehoek te moeten verbinden.

De vierde driehoekige figuur (die in onze tekening als fig. *d* is aangeduid) komt — voor zover ik dit kan nagaan — niet in de literatuur voor. Aangezien de opstaande zijden door deelstukken van twee „krommen” worden gevormd, is het m.i. het beste, deze figuur als een „quasi-driehoek” aan te duiden.

De zoeven bedoelde krommen zijn door de vergelijkingen $x = e^y - 1$ en $x = e^{-y}$ te definiëren, waarbij de oorsprong der coördinaten samenvalt met het links gelegen basishoekpunt van de driehoek en waarbij de *X*-as samenvalt met de horizontale lijn, waarvan de basis van de driehoek een deelstuk is.

Men ziet gemakkelijk in, dat, naar uit de formules volgt, deze quasi-driehoek inderdaad een basis heeft, die gelijk is aan de eenheid en dat de tophoek gelijk is aan 90° , terwijl de top tot coördinaten heeft $x_1 = \chi$ en $y_{\text{top}} = -\ln \chi$ (bij benadering tot de 7de decimaal vindt men voor y_{top} , d.i. dus de hoogte van de quasi-driehoek: 0,4812137).

De hoeken, die de opstaande zijden van de quasi-driehoek met de basis maken, laten zich uit de vermelde formules berekenen en bedragen beide 45° (juister: 45° en 135°), terwijl die opstaande zijden met de hoogtelijn de hoeken maken, die wij hierboven als γ en het complement van γ hebben aangeduid.

Het zal onmiddellijk opvallen, dat deze quasi-driehoek een merkwaardige combinatie te zien geeft van eigenschappen, die wij bij de drie reeds beschouwde (ware) driehoeken aantreffen.

Een andere bijzonderheid van de quasi-driehoek komt in onze figuur niet tot uitdrukking en wij hebben, om die bijzonderheid te doen uitkomen, de driehoek nogeens afzonderlijk met verlengde opstaande zijden als fig. 3 afgebeeld.

Trekt men binnen de quasi-driehoek op een afstand y_1 van de basis een horizontale lijn, dan volgt uit de formules der opstaande zijden, dat de lengte van het deel der lijn binnen de driehoek, dat wij als l_1 hebben aangeduid, wordt gegeven door:

$$l_1 = e^{-y_1} - e^{y_1} + 1,$$

waarvoor men, door invoeren van de „hyperbolische sinus”, kan schrijven: $-2 \sinh y_1 + 1$.

Beziet men nu een tabel voor waarden van de hyperbolische sinus, dan wordt het duidelijk, dat men in dit geval „bij benadering” voor $\sinh y_1$ mag nemen: y_1 . De grootste waarde van y_1 in de quasi-driehoek is namelijk (zoals wij hierboven vermeldden) $y_{\text{top}} = 0,4812137$ en daarvoor geeft de tabel: $\sinh y_1 = 0,499$ (ongeveer). De lengte van l_1 kan dus *bij benadering* worden voorgesteld door: $1 - 2y_1$.

Wanneer men nu ook binnen de driehoek van fig. *a* van onze tekening een horizontale lijn trekt op een afstand y_1 van de basis dan wordt —

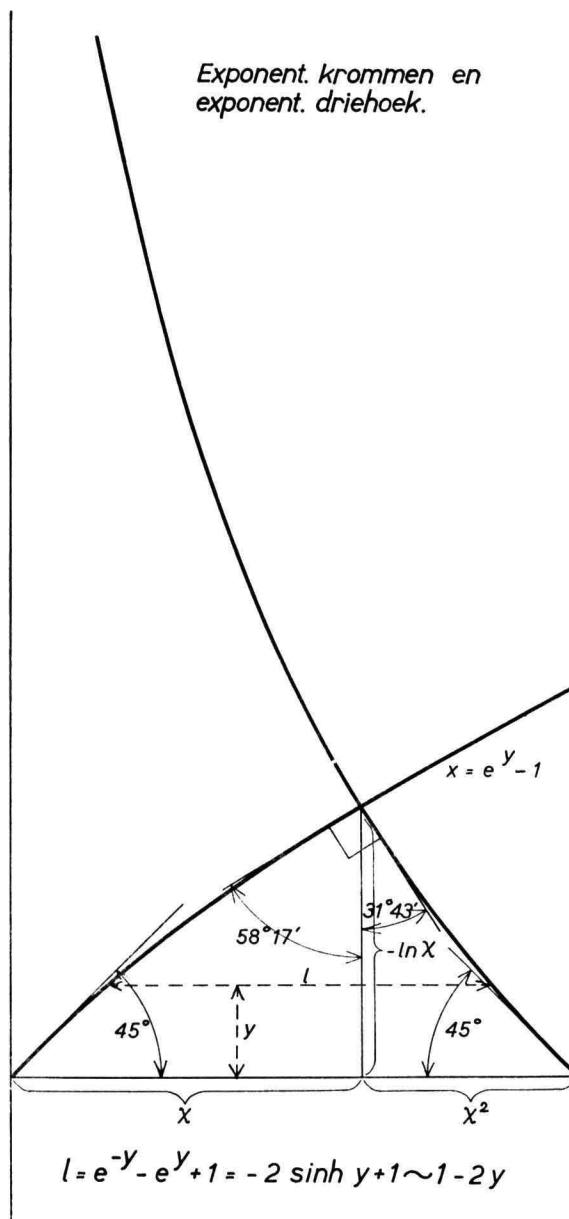


Fig. 3.

zoals men gemakkelijk inziet — de lengte van het stuk binnen de driehoek dáárvan (nu precies) gevonden door te nemen: $1 - 2y_1$. Daaruit volgt, dat *bij benadering* de quasi-driehoek kan beschouwd worden als verkregen te zijn door „afschuiving” van de horizontale laagjes, waarin men de driehoek fig. a kan verdeeld denken. Die afschuiving van de verschillende laagjes zou dan volgens de formule $x = e^y - 1$ moeten geschieden, d.w.z. niet lineair, maar daarvan toch niet sterk afwijkende

en de afschuiving zou in sterker mate moeten geschieden, naarmate men zich verder van de basis verwijderd.

§ 5. *Gouden reeksen en hare grafische voorstelling*

Op blz. 48 van mijn werk uit 1907 heb ik als definitie van *gouden reeksen* gegeven: zulke *meetkundige* reeksen, waarvoor iedere term van de reeks gelijk is aan het verschil, of aan de som, van de twee daaraan voorafgaande termen van de reeks.

Men zal gemakkelijk inzien, dat de *dalende* reeks:

$$a, a\chi, a\chi^2, \dots a\chi^{N-1}, a\chi^N, a\chi^{N+1}, \dots \text{enz.},$$

waarin a een willekeurig geheel getal voorstelt en waarin de exponent van χ een geheel getal is, dat de rang van de term bepaalt, een gouden reeks voorstelt.

Immers deze reeks is een meetkundige met de „reden” χ , terwijl uit de betrekking:

$$\chi^2 = 1 - \chi$$

door vermenigvuldigen van beide leden met $a\chi^{N-2}$ volgt:

$$a\chi^N = a\chi^{N-2} - a\chi^{N-1},$$

hetgeen betekent, dat iedere term van de reeks gelijk is aan het verschil van de twee voorafgaande termen, zodat ook aan de tweede voorwaarde die wij aan de gouden reeksen stelden, is voldaan.

Het zal verder duidelijk zijn, dat de beschouwde reeks ook de enig mogelijke *dalende* gouden reeks is met de beginwaarde a . Immers alleen voor de gouden waarde χ geldt de betrekking $\chi^2 = 1 - \chi$ en alleen voor die waarde geldt dus ook $a\chi^N = a\chi^{N-2} - a\chi^{N-1}$.

Verder ziet men in, dat de reeks:

$$b, b\varphi, b\varphi^2, \dots b\varphi^{N-1}, b\varphi^N, b\varphi^{N+1}, \dots \text{enz.}$$

waarbij nu b een willekeurig getal is, een *stijgende* gouden reeks is, immers ook deze reeks is een meetkundige, nu met de reden φ , terwijl uit de betrekking:

$$\varphi^2 = 1 + \varphi$$

door vermenigvuldigen met $b\varphi^{N-2}$ volgt:

$$b\varphi^N = b\varphi^{N-2} + b\varphi^{N-1},$$

hetgeen betekent, dat nu iedere term gelijk is aan de som van de beide voorafgaande termen.

Ook zal duidelijk zijn, dat de thans besproken reeks de enig mogelijke *stijgende* gouden reeks met de beginwaarde b is.

In onderstaande tabel zijn de gouden reeksen opgenomen, waarvan de hierboven bedoelde grootheden a en b gelijk aan 1 worden ondersteld.

Wij hebben aan het begincijfer van de reeksen het rangnummer 0 toegekend en de verdere rangnummers, bij stijgende waarden der termen, positief, bij dalende, negatief genomen.

TABEL 1

De stijgende en de dalende „gouden reeks” met de beginwaarde gelijk aan 1 (de getallen in de laatste kolom zijn „benaderingen” tot drie decimalen).

Rangnummers			
12	$\varphi^{12} = \chi^{-12} =$	$89 + 144\varphi =$	$233 + 144\chi = 331,997$
11	$\varphi^{11} = \chi^{-11} =$	$55 + 89\varphi =$	$144 + 89\chi = 199,005$
10	$\varphi^{10} = \chi^{-10} =$	$34 + 55\varphi =$	$89 + 55\chi = 122,992$
9	$\varphi^9 = \chi^{-9} =$	$21 + 34\varphi =$	$55 + 34\chi = 76,013$
8	$\varphi^8 = \chi^{-8} =$	$13 + 21\varphi =$	$34 + 21\chi = 46,979$
7	$\varphi^7 = \chi^{-7} =$	$8 + 13\varphi =$	$21 + 13\chi = 29,034$
6	$\varphi^6 = \chi^{-6} =$	$5 + 8\varphi =$	$13 + 8\chi = 17,944$
5	$\varphi^5 = \chi^{-5} =$	$3 + 5\varphi =$	$8 + 5\chi = 11,090$
4	$\varphi^4 = \chi^{-4} =$	$2 + 3\varphi =$	$5 + 3\chi = 6,854$
3	$\varphi^3 = \chi^{-3} =$	$1 + 2\varphi =$	$3 + 2\chi = 4,236$
2	$\varphi^2 = \chi^{-2} =$	$1 + \varphi =$	$2 + \chi = 2,618$
1	$\varphi^1 = \chi^{-1} =$	$\varphi =$	$1 + \chi = 1,618$
0	$\varphi^0 = \chi^0 =$	$1 =$	$1 = 1,000$
- 1	$\varphi^{-1} = \chi =$	$\varphi - 1 =$	$\chi = 0,618$
- 2	$\varphi^{-2} = \chi^2 =$	$2 - \varphi =$	$1 - \chi = 0,382$
- 3	$\varphi^{-3} = \chi^3 =$	$2\varphi - 3 =$	$-1 + 2\chi = 0,236$
- 4	$\varphi^{-4} = \chi^4 =$	$5 - 3\varphi =$	$2 - 3\chi = 0,146$
- 5	$\varphi^{-5} = \chi^5 =$	$5\varphi - 8 =$	$-3 + 5\chi = 0,090$
- 6	$\varphi^{-6} = \chi^6 =$	$13 - 8\varphi =$	$5 - 8\chi = 0,056$
- 7	$\varphi^{-7} = \chi^7 =$	$13\varphi - 21 =$	$-8 + 13\chi = 0,034$
- 8	$\varphi^{-8} = \chi^8 =$	$34 - 21\varphi =$	$13 - 21\chi = 0,021$
- 9	$\varphi^{-9} = \chi^9 =$	$34\varphi - 55 =$	$-21 + 34\chi = 0,013$
- 10	$\varphi^{-10} = \chi^{10} =$	$89 - 55\varphi =$	$34 - 55\chi = 0,008$
- 11	$\varphi^{-11} = \chi^{11} =$	$89\varphi - 144 =$	$-55 + 89\chi = 0,005$
- 12	$\varphi^{-12} = \chi^{12} =$	$233 - 144\varphi =$	$89 - 144\chi = 0,003$

Wij vestigen in het bijzonder de aandacht op de vermelding in het opschrift van de tabel, waaruit blijkt, dat de cijfers uit de laatste kolom slechts benaderingen van de getallenwaarden van de termen van de gouden reeksen zijn. Dit kan men trouwens ook concluderen uit het feit, dat de op elkaar volgende termen van de laatste kolom geen constante verhouding bezitten. Men ziet dit onmiddellijk door de kleinste termen onderling te vergelijken, bijvoorbeeld 0,008, 0,005 en 0,003.

De termen van de gouden reeksen blijken verder — met uitzondering van de term met het rangnummer 0 — „onmeetbare” getallen te zijn; ze bevatten immers een der gouden getallen.

Wij zullen later zien, dat in de leer der bladstanden juist *gehele* getallen — en vooral de lagere — een rol spelen. De gouden reeksen zijn echter van groot *indirect* belang voor die leer; ze maken verschillende afleidingen mogelijk.

Ook wijzen wij er op, dat de *coëfficiënten* der gouden getallen, die de

termen der reeksen te zien geven, juist getallen zijn, die voor de bladstandenleer van betekenis zijn.

Verder maken wij hier melding van de grafische voorstelling van de gouden reeksen, waarbij men de achtereenvolgende termen uitzet op vier stralen, die hoeken van 90° met elkaar vormen. Wij lichten dit toe met fig. 4, die ontleend is aan het hierboven geciteerde werk van HAMBIDGE (waarin ze voorkomt als fig. 20 op p. 17). Hier doen wij uitkomen, dat in die grafiek in het centrum de toppen van „rechtlijnige driehoeken van Church” samenvallen. Door verlengen van de bases dezer driehoeken — zoals in onze fig. 4 is geschied — kan men dan verder een complex van kwadraten verkrijgen, waarin men ook rechthoeken

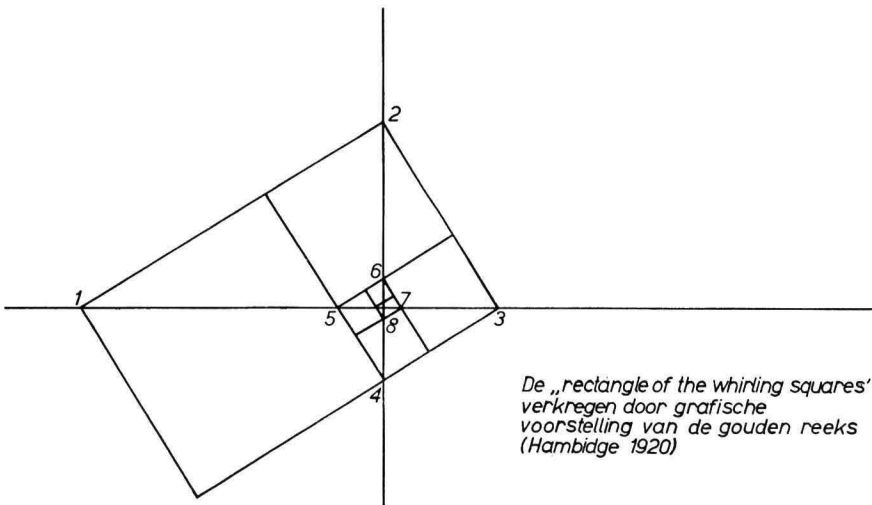


Fig. 4.

aantreft, die door zulke kwadraten worden opgevuld. HAMBIDGE heeft zulk een rechthoek als een „rectangle of the whirling squares” aangeduid. Wij stellen voor hem een „gouden rechthoek” te noemen, omdat de verhouding der rechthoekszijden door een gouden getal wordt uitgedrukt.

§ 6. *Vijf — voor de bladstandentheorie belangrijke — reeksen en haar onderlinge samenhang*

In tabel II hebben wij vijf — voor de bladstanden belangrijke — reeksen opgenomen. De daarbij in de eerste kolom gebruikte aanduidingswijzen van die reeksen zijn „mathematische”. Wij hebben onder de tabel bovendien andere aanduidingen van deze reeksen vermeld, die men „botanische” zou kunnen noemen en die verder gebaseerd zijn op historische gronden. Met een en ander beoogden wij, de verwarring weg te nemen, die in de literatuur over de leer der bladstanden omtrent de wijze van naamgeving van de reeksen bestaat.

TABEL II

Vijf, voor de bladstandentheorie belangrijke, reeksen en hun onderling verband
 (de, bovenaan tussen twee horizontale lijnen geplaatste, getallen zijn de rangnummers der termen)

	(0)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	enz.	N
Reeks (1, 1)	(0)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	„	K_N
Reeks (1, 2)	(1)	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	„	$F_N = K_{N+1}$
Reeks (1, 3)	(2)	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	„	$L_N = K_{N-2} + K_{N-1} \cdot 3 = K_{N+1} + K_N -$
Reeks (1, z)	(z-1)	1	z	1+z	1+2z	2+3z	3+5z	5+8z	8+13z	13+21z	21+34z	34+55z	55+89z	„	$Z_N = K_{N-2} + K_{N-1} \cdot z$
Reeks (p, q)	(q-p)	p	q	p+q	p+2q	2p+3q	3p+5q	5p+8q	8p+13q	13p+21q	21+34q	34+55q	55p+89q	„	$S_N = K_{N-2} \cdot p + K_{N-1} \cdot q$

Het verband met de notatie uit 1907:

$$\begin{aligned}
 m &= K_N, F_N, L_N, Z_N \text{ of } S_N \\
 n &= K_{N+1}, F_{N+1}, L_{N+1}, Z_{N+1} \text{ of } S_{N+1} \\
 m_1 &= K_N \\
 n_1 &= K_{N+1}
 \end{aligned}$$

De vijf reeksen zijn alle summatiereeksen ¹⁾ van gehele positieve getallen (ze zijn dan ook *geen* gouden reeksen, welke laatste immers uit termen met irrationale getallen zijn opgebouwd).

De eerste vier onzer reeksen vangen aan met het getal 1 als beginterm, de laatste reeks heeft als beginterm p , met welke letter wij hier een willekeurig positief geheel getal aanduiden, groter dan 1.

De eerste drie reeksen hebben als tweede term respectievelijk de getallen 1, 2 en 3; de vierde reeks heeft als tweede term z , waarmee wij hier een geheel positief getal aanduiden groter dan 3. De laatste reeks heeft als tweede term q , waarmee wij hier een geheel positief getal aanduiden groter dan het getal p , en zelfs groter dan $2p$ (waardoor p het kleinste getal van de summatiereeks is, dus het begincijfer van die reeks zal zijn ²⁾). Bovendien moeten p en q zó worden gekozen, dat p en q priemgetallen ten opzichte van elkaar zijn.

De hier door ons in de 1e kolom ter aanduiding der reeksen, gebruikte uitdrukkingen zijn, zoals wij reeds mededeelden, aan de eerste twee termen dier reeksen ontleend.

De 12 termen der reeksen, die in de eigenlijke tabel zijn opgenomen, zullen geen verdere toelichting behoeven. Wél is dit het geval voor hetgeen in een laatste kolom voorkomt, welke als opschrift zou kunnen hebben: „Algemene aanduiding van de term van de reeks met het rangnummer N ” ³⁾.

De in de hier bedoelde kolom voorkomende letters K , F , L , Z en S zijn in de historische appendix bij dit hoofdstuk toegelicht ⁴⁾. In die kolom is voor de laatste vier reeksen het verband aangegeven, dat er bestaat tussen een term van de reeks met het ranggetal N en de termen van de reeks (1, 1).

Men zou de reeksen uiteraard ook naar links, dus in dalende zin, kunnen vervolgen, maar dit heeft voor de theorie der bladstanden geen nut. Soms komen in die theorie de termen met het rangnummer 0 ter sprake en wij hebben deze daarom in de tabel tussen haakjes aan de eerste termen der eigenlijke reeksen doen voorafgaan.

¹⁾ Mathematisch beschouwd, lopen summatiereeksen onbeperkt naar links en rechts door; met onze toevoeging van 2 getallen tussen haakjes beoogden wij aan te geven dat wij uitsluitend het deel der reeks beschouwen, dat met deze twee getallen begint en naar rechts doorloopt.

²⁾ Als bijzonderheid, die van deze keus het gevolg is, vermelden wij hier, dat bij de tweede, derde en vierde reeks de tweede term gelijk is aan, of groter dan 2 keer de eerste term; overal elders is een willekeurige term kleiner dan twee keer de voorafgaande.

³⁾ Wij kozen de hoofdletter N in plaats van de gewone letter n , omdat deze laatste letter in 1907 vaak en ook nu nog wel voor een getal uit een der reeksen is gebruikt.

⁴⁾ Hier vermelden wij alleen — vooruitlopende op die toelichting — dat de letter K ontleend is aan den naam KEPLER, de letter F aan FIBONACCI, de letter L aan LUCAS, terwijl de letter Z slaat op de aanduiding van de reeks (1, z) en de letter S ontleend is aan de naam SCHOOLING.

De reeksen kunnen alle als bijzondere gevallen van de reeks (p, q) worden opgevat. Het zal echter blijken, dat de reeks $(1, 1)$ bijzonderheden toont, die de volgende reeksen missen en dat hetzelfde — in minder belangrijke mate — ook voor de reeksen $(1, 2)$ en $(1, 3)$ geldt. Deze drie reeksen zijn bovendien (ik zal betogen, dat dit juist om die reden het geval is) voor de theorie der bladstanden de belangrijkste. Dit is één der redenen, waarom ik bij de nadere behandeling deze drie reeksen voorop liet gaan.

§ 7. *De formules van D. BERNOULLI en L. EULER voor de termen van de reeks $(1, 1)$*

De in de voorafgaande paragraaf ingevoerde notatie stelt ons in staat eenvoudige betrekkingen voor de termen van de gouden reeksen op te schrijven. Het zal namelijk niet moeilijk vallen om, gebruik makende van die notatie, uit de Tabel I op blz. 28 de volgende betrekkingen af te leiden:

1 voor N „even”, zowel als voor N „oneven”, geldt:

$$\chi^{-N} = \varphi^N = K_{N+1} + K_N \cdot \chi = K_{N-1} + K_N \cdot \varphi,$$

2 voor N „even” geldt bovendien:

$$\chi^N = \varphi^{-N} = K_{N-1} - K_N \cdot \chi = K_{N+1} - K_N \cdot \varphi,$$

3 voor N oneven geldt bovendien:

$$\chi^N = \varphi^{-N} = -K_{N-1} + K_N \cdot \chi = -K_{N+1} + K_N \cdot \varphi.$$

Uit deze betrekkingen kan men, door ze twee aan twee van elkaar af te trekken, of bij elkaar op te tellen, de volgende vinden:

1e. voor N „even” geldt:

$$\chi^{-N} - \chi^N = \varphi^N - \varphi^{-N} = K_N(\varphi + \chi),$$

hetgeen (gebruik makende van de omstandigheid, dat $\varphi + \chi = \sqrt{5}$) kan worden geschreven:

$$\chi^{-N} - \chi^N = \varphi^N - \varphi^{-N} = K_N \cdot \sqrt{5},$$

waaruit volgt, dat voor N „even” geldt:

$$K_N = \frac{\chi^{-N} - \chi^N}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^N - \varphi^{-N}}{\sqrt{5}}.$$

2e. voor N „oneven” kan op overeenkomstige wijze worden afgeleid, dat geldt:

$$K_N = \frac{\chi^{-N} + \chi^N}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^N + \varphi^{-N}}{\sqrt{5}}.$$

Deze, hier als 1e en 2e aangeduide, betrekkingen kan men verenigen tot één, die zowel voor N „even” als voor N „oneven” geldt, namelijk:

$$K_N = \frac{\chi^{-N} - (-1)^N \cdot \chi^N}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^N - (-1)^N \varphi^{-N}}{\sqrt{5}}.$$

Wanneer men hierin voor χ en φ de waarden invult, die daaraan op grond van de definities toekomen, dan kan men deze tweevoudige formule zelfs door een enkelvoudige vervangen, namelijk:

$$K_N = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^N - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^N \right\}.$$

Ik ontleen aan R. C. ARCHIBALD ¹⁾, dat deze formule waarschijnlijk reeds in 1724 aan D. BERNOULLI bekend was en dat ze ook in een brief van L. EULER uit 1726 aan D. BERNOULLI voorkomt; ze zou door laatstgenoemde mathematicus in 1728 zijn gepubliceerd. De formule is in 1843 onafhankelijk door J. P. M. BINET gevonden en wordt dan ook door N. N. VOROB'EV in een werkje „Fibonacci Numbers” uit 1961 als „Binet's formula” aangeduid. Het lijkt mij juister, haar „de formule van D. BERNOULLI en L. EULER”, of kortweg van BERNOULLI-EULER te noemen.

§ 8. *Een belangrijke eigenschap van de reeks (1, 1) en haar equivalent bij de andere hier beschouwde reeksen. Invoering van de letter \mathcal{K}*

Als een der belangrijkste eigenschappen van de reeks (1, 1) beschouw ik de volgende betrekking, die voor drie willekeurig gekozen, op elkaar volgende, termen daarvan geldt:

$$K_N^2 - K_{N-1} \cdot K_{N+1} = -(-1)^N,$$

waarin N (d.i. het rangnummer van de middelste van die drie termen) zowel even als oneven kan zijn.

Ter toelichting kies ik $N=1$, $N=2$, $N=3$, $N=4$ enz. Met de termen van de reeks (1, 1), die men aantreft in Tabel II, laat zich dan berekenen, dat de waarde van $(K_N^2 - K_{N-1} \cdot K_{N+1})$ achtereenvolgens gelijk is aan $+1$, -1 , $+1$, -1 enz., welke waarden ook uit het tweede lid der bovenstaande betrekking, namelijk $-(-1)^N$, volgen.

Deze betrekking werd reeds door KEPLER met behulp van aardige, uit kleine vierkantjes opgebouwde, figuren, door *inductie* afgeleid (men zie hiervoor het „aanhangel” bij dit hoofdstuk).

Er zijn verschillende rechtstreekse bewijzen voor de betrekking te geven. Een voor de hand liggend bewijs maakt gebruik van de, in de vorige paragraaf afgeleide, formule van D. BERNOULLI-L. EULER, welke wij, in de gevallen, waar N *oneven* is, in deze vorm kunnen schrijven:

$$K_N = \frac{\chi^{-N} + \chi^N}{\sqrt{5}}.$$

Aangezien bij onze onderstelling geldt, dat $(N-1)$, zowel als $(N+1)$ *even* is, geldt dan:

$$K_{N-1} = \frac{\chi^{-(N-1)} + \chi^{(N-1)}}{\sqrt{5}}$$

¹⁾ Notes on the logarithmic spiral, golden section and the Fibonacci series, 1918, verbeterd en aangevuld opgenomen in het werk van HAMBRIDGE uit 1920; zie speciaal blz. 156, waarin men belangrijke historische bijzonderheden vindt.

en

$$K_{N+1} = \frac{\chi^{-(N+1)} - \chi^{(N+1)}}{\sqrt{5}}$$

zodat in die onderstelling zal gelden:

$$\begin{aligned} K_N^2 - K_{N-1} \cdot K_{N+1} &= \left\{ \frac{\chi^{-N} + \chi^{+N}}{\sqrt{5}} \right\}^2 - \left\{ \frac{\chi^{-(N-1)} - \chi^{N-1}}{\sqrt{5}} \right\} \left\{ \frac{\chi^{-(N+1)} - \chi^{(N+1)}}{\sqrt{5}} \right\} = \\ &= \frac{\chi^{-2N} + 2 + \chi^{2N}}{5} - \frac{\chi^{-2N} - \chi^2 - \chi^{-2} + \chi^{2N}}{5} = \frac{2 + \chi^2 + \chi^{-2}}{5}. \end{aligned}$$

Aangezien: $\chi^2 + \chi^{-2} = 3$ (welke betrekking men gemakkelijk bewijst en ook uit de tabel I kan aflezen), zodat $2 + \chi^2 - \chi^{-2} = 5$ is, vinden wij ten slotte:

$$K_N^2 - K_{N-1} \cdot K_{N+1} = +1.$$

Hadden wij voor N in de formule van BERNOULLI-EULER een „even” getal genomen, dan zouden wij, op volkomen overeenkomstige wijze, de betrekking hebben gevonden:

$$K_N^2 - K_{N-1} \cdot K_{N+1} = -1,$$

waarmee de algemene betrekking voor de termen uit de reeks (1, 1) is bewezen.

De vraag rijst nu onmiddellijk: geldt deze betrekking al of niet voor de andere reeksen uit onze Tabel II?

Voor de reeks (1, 2) is het antwoord zeer gemakkelijk te geven, aangezien daarin dezelfde getallen voorkomen als in de reeks (1, 1) waarbij men echter in aanmerking moet nemen, dat ze in de reeks (1, 2), ten opzichte van de termen in de reeks (1, 1), alle één plaats naar links zijn verschoven, zodat een getal uit de reeks (1, 1) met het rangnummer N zal teruggevonden worden in de reeks (1, 2) met het rangnummer $N-1$. Daaruit volgt, dat voor de reeks (1, 2) zal gelden:

$$F_N^2 - F_{N-1} \cdot F_{N+1} = (-1)^N.$$

Voor de overige reeksen uit Tabel II geldt echter noch de formule voor reeks (1, 1) noch die voor reeks (1, 2).

Wij zullen nu aantonen, dat voor deze andere reeksen een *algemene* betrekking geldt, die wij voor de reeks (p, q) zullen afleiden, waarna wij, door invullen van bepaalde waarden van p en q , de uitkomsten voor de andere reeksen (ook voor de beide boven besproken) verkrijgen.

Wij zullen hiertoe nagaan, wat er wordt van de betrekking:

$$S_N^2 - S_{N-1} \cdot S_{N+1},$$

wanneer wij daarin de volgende waarden invoeren, die uit Tabel II zijn af te leiden:

$$\begin{aligned} S_N &= K_{N-2} \cdot p + K_{N-1} \cdot q, \\ S_{N-1} &= K_{N-3} \cdot p + K_{N-2} \cdot q \text{ en} \\ S_{N+1} &= K_{N-1} \cdot p + K_N \cdot q. \end{aligned}$$

Wij vinden dit doende, voor die betrekking:

$$(K_{N-2} \cdot p + K_{N-1} \cdot q)^2 - (K_{N-3} \cdot p + K_{N-2} \cdot q)(K_{N-1} \cdot p + K_N \cdot q),$$

of wel:

$$(K_{N-2}^2 - K_{N-3} \cdot K_{N-1})p^2 + (2K_{N-2} \cdot K_{N-1} - K_{N-3} \cdot K_N - K_{N-2} \cdot K_{N-1})pq + (K_{N-1}^2 - K_{N-2} \cdot K_N)q^2.$$

Men kan nu de coëfficiënt van pq vereenvoudigen tot $(K_{N-2} \cdot K_{N-1} - K_{N-3} \cdot K_N)$ en hem daarna, door invoering van $K_{N-2} = K_N - K_{N-1}$ en van $K_{N-3} = K_{N-1} - K_{N-2}$, omvormen tot: $-K_{N-1}^2 + K_{N-2} \cdot K_N$, waarna de betrekking wordt:

$$(K_{N-2}^2 - K_{N-3} \cdot K_{N-1})p^2 - (K_{N-1}^2 - K_{N-2} \cdot K_N)pq + (K_{N-1}^2 - K_{N-2} \cdot K_N)q^2.$$

Door nu de hierboven afgeleide betrekking voor drietallen van op elkaar volgende termen van de reeks (1, 1) toe te passen, vinden wij:

$$S_N^2 - S_{N-1} \cdot S_{N+1} = -1(-1)^{N-2} \cdot p^2 + (-1)^{N-1} \cdot pq - (-1)^{N-1} \cdot q^2.$$

Neemt men in aanmerking, dat (zowel voor N even als voor N oneven) geldt:

$$(-1)^{N-2} = (-1)^N \text{ en } (-1)^{N-1} = -(-1)^N,$$

dan kan men ook schrijven:

$$S_N^2 - S_{N-1} \cdot S_{N+1} = (-1)^N \{-p^2 - pq + q^2\}.$$

Voert men — ter bekorting — in ¹⁾:

$$q^2 - pq - p^2 = \mathcal{K},$$

dan kan men ook schrijven:

$$S_N^2 - S_{N-1} \cdot S_{N+1} = (-1)^N \cdot \mathcal{K}.$$

In deze betrekking liggen de beide, in de aanvang van deze paragraaf afgeleide betrekkingen opgesloten.

Stelt men namelijk $p=1$ en $q=1$, dan vindt men als betrekking voor de reeks (1, 1):

$$K_N^2 - K_{N-1} \cdot K_{N+1} = -(-1)^N.$$

Stelt men $p=1$ en $q=2$, dan vindt men de betrekking voor de reeks (1, 2):

$$F_N^2 - F_{N-1} \cdot F_{N+1} = (-1)^N.$$

Voor de reeks (1, 3) geldt:

$$L_N^2 - L_{N-1} \cdot L_{N+1} = (-1)^N \cdot 5.$$

¹⁾ De letter \mathcal{K} voor de drieterm $(q^2 - pq - p^2)$ is ingevoerd door LUCAS (1884), die echter door een geheel andere redenering tot de thans beschouwde betrekking werd geleid.

Voor de reeks $(1, z)$ wordt gevonden:

$$Z_N^2 - Z_{N-1} \cdot Z_{N+1} = (-1)^N \{z^2 - z - 1\},$$

waarin de voorafgaande reeksen liggen opgesloten.

Ten slotte geven wij hieronder drie getallenvoorbeelden voor de reeks p, q .

Voor de reeks $(2, 5)$, d.w.z. voor de reeks: 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, enz., geldt: $\mathcal{K} = q^2 - pq - p^2 = (25 - 10 - 4) = 11$.

$N = 7$ als voorbeeld kiezende, vindt men door becijfering van $S_N^2 - S_{N-1} \cdot S_{N+1}$: $50^2 - 31 \cdot 81 = 2500 - 2511 = -11$, d.i. $= -\mathcal{K}$.

Voor de reeks $(3, 7)$, d.w.z. voor de reeks: 3, 7, 10, 17, 27, 44, 71, 115, enz., geldt $\mathcal{K} = (49 - 21 - 9) = 19$, terwijl by $N = 7$ wordt becijferd: $S_N^2 - S_{N-1} \cdot S_{N+1} = 5041 - 5060 = -19$, d.i. $= -\mathcal{K}$.

Voor de reeks $(3, 10)$, d.w.z. voor de reeks: 3, 10, 23, 36, 59, 95, 154, enz., geldt $\mathcal{K} = (100 - 30 - 9) = 61$, terwijl voor $N = 6$ wordt becijferd: $S_N^2 - S_{N-1} \cdot S_{N+1} = 59^2 - 36 \cdot 95 = 3481 - 3420 = 61$, d.i. $= \mathcal{K}$.

Ik meen goed te doen door er op te wijzen, dat aan de hierboven afgeleide betrekkingen ook een iets andere vorm kan worden gegeven, die van belang is, omdat daarin slechts twee op elkaar volgende termen van de reeksen voorkomen.

Wanneer men namelijk in de formule:

$$S_N^2 - S_{N-1} \cdot S_{N+1} = (-1)^N \cdot \mathcal{K}$$

invoert:

$$S_{N-1} = S_{N+1} - S_N,$$

dan gaat ze over in:

$$S_N^2 - (S_{N+1} - S_N) S_{N+1} = (-1)^N \mathcal{K},$$

of:

$$S_N^2 + S_N \cdot S_{N+1} - S_{N+1}^2 = (-1)^N \cdot \mathcal{K}.$$

Bij de reeks 1, 1 vindt men hiervoor

$$K_N^2 + K_N \cdot K_{N+1} - K_{N+1}^2 = -(-1)^N.$$

Deze laatste formule zal men o.a. (langs geheel andere weg afgeleid) aantreffen op blz. 35 van mijn werk uit 1907. Daar is n.l. K_N als m en K_{N+1} als n aangeduid, zodat deze formule dan wordt:

$$m^2 + mn - n^2 = -(-1)^N,$$

waarvoor men ook (zoals op de geciteerde bladzijde is geschied) kan schrijven:

$$n^2 - mn + m^2 = \pm 1,$$

waarbij ± 1 betekent: $+1$, of -1 , en waarbij in het midden is gelaten, wanneer $+1$ en wanneer -1 zal gelden.

Hierbij teken ik aan, dat het beter is om de beide laatste formules te doen luiden:

$$m_1^2 + m_1 n_1 - n_1^2 = -(-1)^N,$$

resp.:

$$n_1^2 - m_1 n_1 - m_1^2 = \pm 1,$$

immers zij gelden – blijkens het voorafgaande – uitsluitend voor de reeks (1, 1) en *niet* voor enige andere summatiereeks.

§ 9. *Enkele bijzonderheden van de reeks (1, 3)*

Uit Tabel II kan men voor deze reeks als algemene betrekking aflezen:

$$L_N = K_{N-2} + K_{N-1} \cdot 3.$$

Door de laatste term uit te schrijven, kan men dit aldus uitdrukken:

$$L_N = K_{N-2} + K_{N-1} + K_{N-1} + K_{N-1}$$

en door nu eerst in te voeren: $K_{N-2} + K_{N-1} = K_N$ en daarna $K_N + K_{N-1} = K_{N+1}$, kan men dit herleiden tot:

$$L_N = K_{N+1} + K_{N-1}.$$

Deze belangrijke betrekking kan men door de volgende optelling demonstreren:

$K_{N+1} = 1,$	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34 enz.
$K_{N-1} = 0,$	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13 enz.
$L_N = 1,$	3,	4,	7,	11,	18,	29,	47 enz.

De hiermee verkregen betrekking kan men nu verder gebruiken om een andere af te leiden.

Uit de gulden reeksen op Tabel I kan men namelijk (door optellen van telkens twee, op gelijke afstand boven en beneden de term Nr. 0, gelegen, gelijkheden en vervolgens door inductie) afleiden:

$$\varphi^N + (-1)^N \cdot \varphi^{-N} = \chi^{-N} + (-1)^N \chi^N = K_{N+1} + K_{N-1},$$

hetgeen ook kan worden geschreven:

$$\varphi^N + (-1)^N \cdot \varphi^{-N} = \chi^{-N} + (-1)^N \chi^N = L_N.$$

Wij demonstreren hieronder ook deze betrekking met een tabel, die de toepassing op kleine waarden van N geeft:

TABEL III

De reeks (1, 3) uitgedrukt in de gouden getallen

$\chi^{-1} - \chi^1 = \varphi - \varphi^{-1} = 1$
$\chi^{-2} + \chi^2 = \varphi^2 + \varphi^{-2} = 3$
$\chi^{-3} - \chi^3 = \varphi^3 - \varphi^{-3} = 4$
$\chi^{-4} + \chi^4 = \varphi^4 + \varphi^{-4} = 7$
$\chi^{-5} - \chi^5 = \varphi^5 - \varphi^{-5} = 11$
$\chi^{-6} + \chi^6 = \varphi^6 + \varphi^{-6} = 18$

Het is verder nog van enig belang om op te merken, dat de reeks (1, 3) bij een beschouwing van LUCAS over bepaalde „dubbeltallen” van reeksen aan de dag trad.

LUCAS heeft namelijk betoogd, dat er bijzondere, paarsgewijze bij elkaar behorende, reeksen worden verkregen, wanneer men in de uitdrukkingen:

$$U_N = \frac{a^N - b^N}{a - b} \text{ en } V_N = a^N + b^N$$

— waarin N weer een ranggetal voorstelt — aan a en b waarden geeft, die gelijk zijn aan de wortels van de vierkantsvergelijking:

$$x^2 = Px - Q,$$

(zodat dus $P = a + b$ en $Q = ab$ is), mits men zorgdraagt, dat P en Q gehele positieve of negatieve getallen zijn.

Een eenvoudig dubbeltal van deze aard wordt verkregen door $P = 1$ en $Q = -1$ te kiezen. In dat geval wordt namelijk $a = \varphi = \chi^{-1}$ en $b = -\chi = -\varphi^{-1}$, immers de vierkantsvergelijking wordt dan: $x^2 = x + 1$, of $x^2 - x - 1 = 0$, d.w.z. een vergelijking met de wortels $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ en $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, d.z. de zoeven genoemde waarden.

Het dubbeltal der reeksen wordt in dit geval gegeven door:

$$U_N = \frac{\varphi^N - (-1)^N \chi^N}{\varphi + \chi} = \frac{\varphi^N - (-1)^N \chi^N}{\sqrt{5}} = \frac{\chi^{-N} - (-1)^N \chi^N}{\sqrt{5}}$$

en

$$V_N = \varphi^N + (-1)^N \varphi^{-N} = \chi^{-N} + (-1)^N \chi^N.$$

Vergelijkt men dit met de formule van BERNOULLI-EULER en met de hierboven afgeleide betrekking, dan blijkt nu:

$$U_N = K_N \text{ en } V_N = L_N$$

te zijn, of in woorden uitgedrukt: het eenvoudige dubbeltal, dat wij hierboven in beschouwing namen, wordt gevormd door de reeks (1, 1) en de reeks (1, 3), welke laatste wij, o.a. om deze reden, hebben aangeduid als de reeks van LUCAS.

Het is nodig hierbij op te merken, dat dit dubbeltal ook het enige der dubbeltallen is, dat uit de algemene betrekking van LUCAS volgt, hetwelk voor de leer der bladstanden van belang is.

Het is hier ook op zijn plaats er op te wijzen, dat de waarden, die wij hierboven releveerden voor K_N en voor L_N nog een opvallende betrekking opleveren, namelijk:

$$K_N \cdot L_N = \frac{(\chi^{-N} - (-1)^N \chi^N)(\chi^{-N} + (-1)^N \chi^N)}{\sqrt{5}},$$

of

$$K_N \cdot L_N = \frac{\chi^{-2N} - \chi^{2N}}{\sqrt{5}} = K_{2N},$$

zodat:

$$L_N = \frac{K_{2N}}{K_N}.$$

Wij demonstrenen deze betrekking hier door een aantal termen K_{2N} en de overeenkomstige termen K_N onder elkaar te schrijven en daaronder de quotiënten te vermelden:

$K_{2N}=1$	3	8	21	55	144	377	987	2584
$K_N=1$	1	2	3	5	8	13	21	34
$L_N=1$	3	4	7	11	18	29	47	76

Uit deze uitkomst en uit die, welke wij hierboven reeds gaven, volgt, dat men de termen van de reeks (1, 3) als sommen en als quotiënten van bepaalde termen uit de reeks (1, 1) kan opvatten.

§ 10. *Sommen en verschillen van kwadraten van termen uit de reeksen (1, 1), (1, 2), en (1, 3)*

Wij passen hieronder de formule van BERNOULLI-EULER toe op drie termen uit de reeks (1, 1), namelijk op: K_N , K_{N+1} en K_{2N+1} , en vinden dan:

$$K_N = \frac{\varphi^N - (-1)^N \cdot \varphi^{-N}}{\sqrt{5}}$$

$$K_{N+1} = \frac{\varphi^{N+1} - (-1)^{N+1} \cdot \varphi^{-(N+1)}}{\sqrt{5}}$$

$$K_{2N+1} = \frac{\varphi^{2N+1} - (-1)^{2N+1} \cdot \varphi^{-(2N+1)}}{\sqrt{5}}.$$

De eerste twee betrekkingen verheffen wij in het kwadraat en tellen ze bij elkaar op, hetgeen geeft:

$$K_N^2 + K_{N+1}^2 = 1/5[\varphi^{2N} - 2(-1)^N + \varphi^{-2N} + \varphi^{2N+2} + 2(-1)^N + \varphi^{-(2N+2)}] =$$

$$= 1/5[\varphi^{2N+1}(\varphi^{-1} + \varphi^1) + \varphi^{-(2N+1)}(\varphi^1 + \varphi^{-1})].$$

In aanmerking nemende, dat $\varphi^1 + \varphi^{-1} = \sqrt{5}$, kan men hiervoor ook schrijven:

$$K_N^2 + K_{N+1}^2 = \frac{\varphi^{2N+1} + \varphi^{-(2N+1)}}{\sqrt{5}}.$$

De betrekking, die wij hierboven voor K_{2N+1} gaven, leidt dan tot:

$$K_N^2 + K_{N+1}^2 = K_{2N+1}.$$

Uit het bewijs blijkt, dat deze betrekking geldt, zowel wanneer N even als wanneer N oneven wordt aangenomen.

Wij demonstrenen hieronder deze betrekking met een kleine tabel:

$K_N^2 = 1^2$	1 ²	2 ²	3 ²	5 ²	8 ²	13 ²	21 ²
$K_{N+1}^2 = 1^2$	2 ²	3 ²	5 ²	8 ²	13 ²	21 ²	34 ²
som = $K_{2N+1} = 2$	5	13	34	89	233	610	1597

Men kan de thans afgeleide eigenschap aldus in woorden brengen: de som van de kwadraten van twee op elkaar volgende termen van de reeks (1, 1) geeft een term van deze reeks. Daarbij valt dan nog op, dat uitsluitend de termen met *oneven* „rangnummers” uit die reeks worden verkregen (wij releveren hier nog, dat een term met een oneven rangnummer van die reeks zelf zowel even als oneven kan zijn).

Op overeenkomstige wijze kan men bewijzen:

$$K_{N-1}^2 + K_N^2 = K_{2N-1},$$

hetgeen men in onderstaande tabel kan toelichten:

$K_{N-1}^2 = 0^2$	1 ²	1 ²	2 ²	3 ²	5 ²	8 ²	13 ²
$K_N^2 = 1^2$	1 ²	2 ²	3 ²	5 ²	8 ²	13 ²	21 ²
$K_{2N-1} = 1$	2	5	13	34	89	233	610

opt.

Voor de reeks (1, 2) geldt een overeenkomstige betrekking (men kan dus in onze formule K vervangen door F). Ook nu worden als sommen van de kwadraten uitsluitend termen van de reeks (1, 2) met *oneven* rangnummers verkregen.

Wij nemen nu de reeks (1, 3) in beschouwing en kiezen twee op elkaar volgende termen, die wij — blijkens blz. 37 — als volgt kunnen schrijven:

$$L_N = \varphi^N + (-1)^N \varphi^{-N}$$

en

$$L_{N+1} = \varphi^{N+1} + (-1)^{N+1} \cdot \varphi^{-(N+1)}.$$

Door verheffen tot de kwadraten vinden wij:

$$L_N^2 = \varphi^{2N} + 2(-1)^N + \varphi^{-2N}$$

en

$$L_{N+1}^2 = \varphi^{2N+2} + 2(-1)^{N+1} + \varphi^{-2(N+1)};$$

bij optellen resulteert:

$$L_N^2 + L_{N+1}^2 = (\varphi^{-1} + \varphi^+)\varphi^{(2N+1)} + (\varphi^+ + \varphi^{-1})\varphi^{-(2N+1)},$$

of wel:

$$L_N^2 + L_{N+1}^2 = (\varphi^{-1} + \varphi^+) \{ \varphi^{2N+1} + \varphi^{-(2N+1)} \}.$$

Men bedenke nu, dat $(\varphi^{-1} + \varphi^+) = \sqrt{5}$ en vergelijkte verder hetgeen hier tussen accoladen voorkomt, met de, in de aanvang van deze paragraaf gegeven, formule voor K_{2N+1} , waarvoor $(-1)^{2N+1} = 1$, dan ziet men in, dat:

$$L_N^2 + L_{N+1}^2 = 5 \cdot K_{2N+1}.$$

Het blijkt dus, dat voor de reeks (1, 3) de sommen der kwadraten van twee op elkaar volgende termen 5 keer de waarden opleveren, die wij voor die sommen bij de reeks (1, 1) vonden.

Ook dit lichten wij hieronder met een tabel toe:

$L_N^2 = 1^2$	3^2	4^2	7^2	11^2	18^2	29^2
$L_{N+1}^2 = 3^2$	4^2	7^2	11^2	18^2	29^2	47^2
som = $5 \cdot K_{2N+1} = 5 \cdot 2$	$5 \cdot 5$	$5 \cdot 13$	$5 \cdot 34$	$5 \cdot 89$	$5 \cdot 144$	$5 \cdot 377$

Het is merkwaardig, dat een soortgelijke betrekking *niet* voor de reeks (1, z) ($z > 3$ nemende) en evenmin voor de reeks (p, q) wordt gevonden. Ook dit lichten wij met tabelletjes toe.

reeks (1, 4) {	$Z_N^2 = 1^2$	4^2	5^2	9^2	14^2	23^2
	$Z_{N+1}^2 = 4^2$	5^2	9^2	14^2	23^2	37^2
som kw.:	17	41	106	227	725	1798
reeks (2, 5) {	$S_N^2 = 2^2$	5^2	7^2	12^2	19^2	31^2
	$S_{N+1}^2 = 5^2$	7^2	12^2	19^2	31^2	50^2
som kw.:	29	74	193	505	1382	3501

Men zal nu, ook na ontbinding van de sommen der kwadraten in factoren, geen eenvoudig verband tussen die sommen en de termen van de reeks (1, 1) vaststellen.

Het zal naderhand blijken, dat ik, voor de verderop in deze publicatie ontwikkelde theorie, de hier gesignaleerde bijzonderheden van de sommen van kwadraten van belang acht.

Van theoretische betekenis is een bijzonderheid, die *verschillen* van kwadraten van termen uit de reeks (1, 1) te zien geven. Ditmaal betreft het echter geen aan elkaar grenzende termen van die reeks, maar van twee termen, die aan weerszijden van eenzelfde term worden aange troffen. Men kan twee van zulke termen aanduiden door K_{N+1} en K_{N-1} (ze zijn dan gescheiden door de term K_N). Hiervoor laat zich nu bewijzen, dat:

$$K_{N+1}^2 - K_{N-1}^2 = K_{2N}.$$

Het bewijs laat zich wederom geven met behulp van de formule van BERNOULLI-EULER. Men vindt daarmee:

$$K_{N+1} = \frac{\varphi^{N+1} - (-1)^{N+1} \cdot \varphi^{-(N+1)}}{\sqrt{5}}$$

en

$$K_{N-1} = \frac{\varphi^{N-1} - (-1)^{N-1} \cdot \varphi^{-(N-1)}}{\sqrt{5}},$$

waaruit men (door toepassing van de eigenschap $\varphi^2 - \varphi^{-2} = \sqrt{5}$) gemakke lijk afleidt:

$$K_{N+1}^2 - K_{N-1}^2 = \frac{\varphi^{2N} - \varphi^{-2N}}{\sqrt{5}},$$

waarin het tweede lid gelijk is aan K_{2N} .

Ook dit bewijs geldt zowel voor de onderstelling, dat N „even” als N „oneven” wordt genomen.

Wij lichten hieronder deze bijzonderheid met getallen toe:

$$\begin{array}{cccccccc} K_{N+1} = 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 \text{ enz.} \\ K_{N-1} = 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 \text{ enz.} \end{array}$$

waaruit volgt:

$$\begin{array}{cccccccc} K_{N+1}^2 = 1 & 4 & 9 & 25 & 64 & 169 & 441 & 1156 & 3025 \text{ enz.} \\ K_{N-1}^2 = 0 & 1 & 1 & 4 & 9 & 25 & 64 & 169 & 441 \text{ enz.} \\ \hline \text{verschil} = K_{2N} = 1 & 3 & 8 & 21 & 55 & 144 & 377 & 987 & 2584 \text{ enz.} \end{array} \text{aftr.}$$

De getallen uit de laatste rij zijn termen uit de reeks (1, 1), die men verkrijgt door om de ander een term van die reeks te laten wegvallen.

§ 11. *Kettingbreuken, waarvan de naderende breuken uit termen van de reeksen uit tabel II zijn opgebouwd. Een daarmede verband houdend quotiënt*

Zoals wij nog nader met getallen zullen laten zien, kan men oneindige kettingbreuken aanwijzen, waarvan de naderende breuken uit quotiënten bestaan, die in de tellers en noemers termen van de reeksen uit tabel II bevatten.

Wij hebben hieronder in tabel IV voor die kettingbreuken twee op elkaar volgende naderende breuken in de algemene notatie uitgedrukt, die wij in § 1 hebben ingevoerd. Tussen die twee nadernde breuken moet dan de limiet van de oneindige kettingbreuk liggen en ook de limieten zijn voor de kettingbreuken in de tabel opgenomen.

Onderaan in de eerste kolom is het belangrijke quotiënt te vinden, waarop het bovenschrijf van de tabel doelt. In dat quotiënt komt —

TABEL IV
Enige belangrijke kettingbreuken en een belangrijk quotiënt

Belangrijke kettingbreuken en een belangrijk quotiënt	Twee op elkaar volgende naderende waarden	Limietwaarden
{0; 1, enz.}	$\frac{K_{N-1}}{K_N}$ en $\frac{K_N}{K_{N+1}}$	$\chi = \frac{1}{\chi+1}$
{0; 2, 1, enz.}	$\frac{F_{N-2}}{F_N} = \frac{K_{N-1}}{K_{N+1}}$ en $\frac{F_{N-1}}{F_{N+1}} = \frac{K_N}{K_{N+2}}$	$\chi^2 = \frac{1}{\chi+2}$
{0; 3, 1, enz.}	$\frac{K_{N-1}}{L_N} = \frac{K_{N-1}}{K_{N-2} + K_{N-1} \cdot 3}$ en $\frac{K_N}{L_{N+1}} = \frac{K_N}{K_{N-1} + K_N \cdot 3}$	$\frac{1}{\chi+3}$
{0; z, 1, enz.}	$\frac{K_{N-1}}{Z_N} = \frac{K_{N-1}}{K_{N-2} + K_{N-1} \cdot z}$ en $\frac{K_N}{Z_{N+1}} = \frac{K_N}{K_{N-1} + K_N \cdot z}$	$\frac{1}{\chi+z}$
$\frac{\mu\{0; 1, \text{ enz.}\} + \nu}{p\{0; 1, \text{ enz.}\} + q}$	$\frac{K_{N-2} \cdot \mu + K_{N-1} \cdot \nu}{K_{N-2} \cdot p + K_{N-1} \cdot q}$ en $\frac{K_{N-1} \cdot \mu + K_N \cdot \nu}{K_{N-1} \cdot p + K_N \cdot q}$	$\frac{\chi \cdot \mu + \nu}{\chi \cdot p + q}$

zowel in de teller als in de noemer — de eerste kettingbreuk uit diezelfde kolom voor en verder in de noemer de grootheden p en q , die wij reeds gedefinieerd hebben. Bovendien treft men in de teller twee grootheden μ en ν aan, die ten nauwste met p en q samenhangen. Wanneer men namelijk het quotiënt p/q als een kettingbreuk uitschrijft, dan zijn μ en ν de teller en noemer van de laatste naderende breuk van die kettingbreuk, waardoor geldt: $p\nu - q\mu = +1$ of $= -1$.

In de tweede kolom vindt men op de onderste regel twee uitdrukkingen, waarin het „belangrijke quotiënt” overgaat, als men de kettingbreuken in dat quotiënt, *beide* op gelijke hoogte afbreekt. In de derde kolom staat de limiet, waartoe het „belangrijke quotiënt” nadert, wanneer men de *beide* kettingbreuken daarin oneindig ver voortzet.

Wij doen nu uitkomen, dat er een verband tussen verschillende uitdrukkingen, voorkomende in de derde kolom, bestaat. Wanneer men namelijk de grootheid z op de vierde regel respectievelijk vervangt door 3, 2 en 1, dan verkrijgt men (na enige omvormingen) respectievelijk de uitdrukkingen op de 3e, 2e en 1ste regel. Vervangt men de grootheden p en q uit de laatste regel van de 2e en de 3e kolom door 1 en z — waardoor μ en ν noodzakelijkerwijze moeten worden vervangen door 0 en 1 (immers alleen dan wordt voldaan aan de voorwaarde: $p\nu - q\mu = +1$ of -1) — dan gaan de uitdrukkingen op de onderste regel over in die van de op één na onderste regel.

Men zal wellicht verwonderd zijn, dat het „belangrijke quotiënt” door te stellen $p=1$ en $q=z$ *niet* overgaat in de kettingbreuk $\{0; z, \bar{1}, \text{enz.}\}$, maar men moet dan bedenken, dat het „belangrijke quotiënt” zelf géén kettingbreuk is, zodat ook de daarnaast vermelde breuken géén naderende breuken van een kettingbreuk zijn. De kenmerkende eigenschap van twee op elkaar volgende naderende breuken van een kettingbreuk geldt voor de hier bedoelde breuken dan ook *niet* ¹⁾.

1) Wij hebben om deze reden in het opschrift van de 2-de kolom niet gesproken van naderende breuken, maar van „naderende waarden”, al zijn wij er ons van bewust, dat wij hiermee een moeilijkheid hebben gecamoufleerd.

ENIGE HISTORISCHE BIJZONDERHEDEN

A. *De gulden snede en de goddelijke verhouding*

Belangrijke recente beschouwingen over de ontdekking van „de gulden snede” en van „de goddelijke verhouding” zijn te vinden in publicaties van K. VON FRITZ ¹⁾ uit 1945 en van S. HELLER ²⁾ uit 1958. Hierdoor is wel komen vast te staan, dat de ontdekking van het bestaan van irrationale waarden te danken is aan Hippasos in het midden van de 5e eeuw vóór Christus. Deze ontdekking leidde HIPPASOS zelf, of bracht anderen kort na hem, tot het construeren van de gulden snede en was ook aanleiding tot het zoeken naar benaderende waarden van de getallenverhouding, die daarvoor kenmerkend is.

Interessant is, dat volgens HELLER de benadering dier verhouding reeds de toenmalige mathematici moet geleid hebben tot de summatiereeks 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 enz. en tot het feit, dat de quotiënten van twee op elkaar volgende getallen uit deze reeks, bij het kiezen van steeds grotere waarden uit deze reeks, naderen tot een, nooit volkomen bereikbare, limiet. Vooral de wijze, waarop in HELLER's betoog de allereerste termen (1 en 1) van de reeks op de voorgrond treden, verdient daarbij aandacht. Daardoor wordt namelijk duidelijk, waarom het wenselijk is de bedoelde reeks aan te duiden als de reeks (1, 1) en *niet* als (1, 2).

Merkwaardig is ook, dat HELLER van oordeel is, dat reeds ten tijde van HIPPASOS, of spoedig daarna, de door mij als „bijzonder” aangeduide, eigenschap van deze reeks bekend was.

B. *Algemene opmerkingen over de geschiedenis der summatiereeksen*

Een uitstekend gedocumenteerd geschiedkundig overzicht over de ontwikkeling onzer kennis van de summatiereeksen is reeds in 1877 gegeven door É. LUCAS ³⁾. Toch moet één onvolkomenheid in dit overzicht worden aangewezen. LUCAS blijkt namelijk onbekend te zijn geweest

¹⁾ „The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum”, *Annals of Mathesis*, 2nd. Series, Vol. 46 (1945) 242–264.

²⁾ „Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer”, *Abh. der Deutschen Akademie der Wissensch. zu Berlin, Kl. f. Math., Physik und Technik*, Jahrg. 1958, Nr. 6, S. 1–28.

³⁾ *Recherches sur plusieurs ouvrages de LÉONARD DE PISE et sur diverses questions d'arithmatique supérieure. Bullettino di Bibliografia e di Storia della Scienze Matematiche et Fisiche* (publicato da B. BONCOMPAGNI), Tome X, Rome 1877, p. 126–193 en 239–293.

met het feit, dat KEPLER aan de reeks (1, 1) belangrijke beschouwingen heeft gewijd.

Wél bespreekt LUCAS uitvoerig FIBONACCI's konijntjesprobleem, dat hij zelfs in de oorspronkelijke tekst met daarnaast de reeks (1, 2) citeerde, maar LUCAS merkt in aansluiting aan die bespreking op „on retrouve cette série quatre siècles plus tard, dans la dernière des annotations d'ALBERT GIRARD (mort 1633) sur la traduction française, qu'il fit lui-même du cinquième et du sixième livre de l'Arithmétique de Diophante”. LUCAS noemt de reeks (1, 2) echter *niet* de reeks van FIBONACCI, maar duidt haar aan als de reeks van LAMÉ. Inderdaad heeft laatstgenoemde mathematicus de reeks (1, 2) in 1844¹⁾ vermeld, in verband met een vraagstuk, dat op de grootst gemene deler van twee getallen betrekking heeft.

LUCAS deelt verder mede, dat hij zelf aan de reeks van LAMÉ de termen 0 en 1 (vóóraan) heeft toegevoegd, hetgeen niet wegneemt, dat LUCAS, ook daarna, van de reeks van LAMÉ blijft spreken.

De publicatie van LUCAS is geenszins alleen van historische betekenis. Ze bracht nieuwe, belangrijke bijzonderheden van de reeks (1, 1), waarvan sommige nog weinig bekend zijn. Zo geeft, bijvoorbeeld, het werk van L. KAISER²⁾ uit 1929, zonder de naam LUCAS te noemen³⁾, dat geheel aan de „gulden snede” en aan daarmee samenhangende mathematische problemen gewijd is, vele bijzonderheden als nieuw, die in de geciteerde verhandeling en in andere publicaties van LUCAS (uit 1876 tot 1891) te vinden zijn.

Ook mij waren in 1907 sommige vondsten van LUCAS onbekend, o.a. de invoering van de grootheid \mathcal{N} (vergelijk blz. 35) en LUCAS' bespreking van de reeks (p, q) , die hij geheel anders, namelijk als „la série de LAMÉ généralisée” aanduidde, waardoor hij verwarring veroorzaakte. De wijze, waarop LUCAS verschillende zijner beschouwingen inkleedde, maakte het trouwens voor niet-mathematici moeilijk zijn bedoeling te begrijpen.

Voor een algemeen geschiedkundig overzicht, waarin de summatie-reeksen uitvoerig worden beschouwd, noem ik verder: een voortreffelijk essai van Professor R. C. ARCHIBALD⁴⁾ (toenmaals van BROWN's University).

1) Note sur la limite du nombre des divisions dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers. C. R. Acad. Sc. Paris 19 (1884) 867-870.

2) „Ueb. die Verhältniszahl des „Goldenen Schnittes”, die Reihe der mit ihr zusammenhängenden ganzen Zahlen und eine aus dieser abgeleitete Reihe”, Leipzig, Berlin, 1929 (123 bladzijden).

3) KAISER geeft trouwens vrijwel geen citaten.

4) Dit overzicht verscheen oorspronkelijk in „The American Mathem. Monthly”, April and May 1918, maar is — in aangevulde en gedeeltelijk verbeterde vorm — opgenomen in het werk van J. HAMBIDGE „Dynamic Symmetry, The Greek Vase”, (New Haven Conn. and New York City, London 1920), onder de titel „Notes on the Logarithmic Spiral, Golden Section and the Fibonacci Series”.

Deze „Appendix” beoogt geenszins een complete bijwerking van de hierboven vermelde overzichten te geven, maar wél een verwijzing te zijn naar nieuwere literatuur.

C. *De betekenis van het konijntjesprobleem van FIBONACCI*

Vóór in deze publicatie heb ik een fotografische reproductie van een marmeren buste van LEONARDO PISANO doen afbeelden. Ik trof die buste in 1949 in het „Thorvaldsen Museum” te Kopenhagen en verkreeg van de conservator toestemming tot het publiceren van de foto. De buste is vervaardigd door THORVALDSEN, maar er bleken daarover verder in het museum zeer weinig bijzonderheden bekend te zijn.

Historische gegevens over de betekenis van PISANO, bijgenaamd FIBONACCI, mathematicus uit het begin van de 13e eeuw, kan men o.a. vinden bij G. LIBRI ¹⁾ en bij S. GÜNTHER ²⁾; laatst genoemde wijdde zelfs een speciaal hoofdstuk aan hem in een werk over de geschiedenis der wiskunde.

Tegenover de zoeven bedoelde foto heb ik de tekst doen afdrucken van het „Konijntjesprobleem”, welke ik ontleende aan het beroemde werk „Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano” ³⁾. Het manuscript van het werk was gereed gekomen in 1202 en was in 1221 door de schrijver herzien. Eerst in 1857 werd het herziene manuscript op kosten van de mathematicus-maecenas B. BONCOMPAGNÒ te Rome gedrukt. Het is mogelijk, dat reeds vroeger deskundigen van het manuscript hebben kennisgenomen, maar het late verschijnen verklaart waarschijnlijk, waarom men de naam PISANO, of FIBONACCI, langen tijd niet in de wiskundige, zomin als in de botanische, literatuur aantreft. Zelfs in het bekende werk van S. SCHWENDENER ⁴⁾, waarin voor het eerst een „theorie der bladstanden” werd ontwikkeld, zal men tevergeefs naar die naam zoeken.

Het „Konijntjesprobleem” is het enige onderwerp, dat uit het werk van FIBONACCI in betrekking gebracht kan worden tot de leer der bladstanden en dan nog alleen door het feit, dat het konijntjesprobleem leidt tot de oneindige doorlopende reeks 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 enz. Daarbij zal bovendien opvallen, dat de reeks aanvangt met de getallen 1, 2 en dat ze daarmee *moet* aanvangen, immers er wordt ondersteld, dat er aanvankelijk 1 paar konijntjes aanwezig is en dat, na één maand, nog 1 paar daarbij komt, zodat er dan 2 paar aanwezig zijn.

¹⁾ Histoire des sciences mathématiques in Italie depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du XVII^e siècle, tome 2, Paris 1858.

²⁾ Geschichte der Mathematik I. Teil, Von den ältesten Zeiten bis Cartesius, Leipzig 1908; Göschensche Verlagsbuchh. (zie speciaal: Kapitel XV, S. 258–268).

³⁾ Ik ontving, door bemiddeling van de Firma Sandoz A.G. te Basel, een fotocopy van het citaat uit de Universiteitsbibliotheek te Genève. Een vertaling vindt men in de vroeger geciteerde verhandeling van LUCAS, een andere, in het Duits, treft men aan bij F. LUDWIG.

⁴⁾ Mechanische Theorie der Blattstellungen, Leipzig 1878.

In ieder geval is het historisch onjuist om te spreken van de reeks van FIBONACCI, wanneer men de sommatie (1, 1) bedoelt. Wél mag men spreken van „FIBONACCI-getallen” en daarvoor de opsomming geven: 1, 2, 3, 5, 8 enz. Ook is het geoorloofd, wanneer men — zoals bijv. ARCHIBALD (l.c.) in 1918 deed en onlangs ook N. N. VOROB'EV¹⁾ gedaan heeft, vermeldt, dat men aan de oorspronkelijke reeks van FIBONACCI als begintermen 0 en 1 *toevoegde* en dat men haar *daarna* toch als de reeks van FIBONACCI zal aanduiden. Men doet dan echter onrecht aan KEPLER, die — zoals wij zullen zien — niet de beperkte, maar de *complete* reeks als uitkomst van zijn probleemstelling nam en van die *complete* reeks de bijzondere betekenis inzag. In dit opzicht sluit ik mij dan ook aan bij L. KAISER²⁾.

Hiermee meen ik ook voldoende te hebben toegelicht, waarom ik termen van de beide reeksen als F_N en K_N heb onderscheiden.

D. KEPLER's beschouwingen over de reeks (1, 1)

ARCHIBALD (l.c., p. 155) vangt zijn bespreking van de reeks aan met een verwijzing naar het werkje van KEPLER uit 1611, getiteld „De nive sexangulare”. Het is ARCHIBALD blijkbaar ontgaan, dat KEPLER deze reeks reeds besproken had in een brief, die hij op 12 mei 1608 uit Praag tot Professor in de medicijnen J. TANCK te Leipzig richtte³⁾. Deze brief is echter juist voor het hier te behandelen onderwerp van betekenis, want daarin wordt o.m. de, door mij als „bijzondere eigenschap” aangeduide, betrekking tussen de termen van de reeks met behulp van paren van figuurtjes, opgebouwd uit kleine vierkantjes, afgeleid.

Ik heb de bedoelde afleiding — zij het enigszins omgewerkt — hiernaast voor de lagere termen weergegeven. Ook zonder nadere toelichting zal men uit deze figuurtjes onmiddellijk (door inductie) de stelling aflezen:

$$K_{N-1} \cdot K_{N+1} = K_N^2 + (-1)^N,$$

wanneer men althans aan de termen van de reeks van Kepler de juiste ranggetallen (N) geeft, die ik, om misverstand te voorkomen, hier herhaal:

ranggetallen:	1	2	3	4	5	6	7	enz.
reeks (1, 1):	1	1	2	3	5	8	13	enz.

1) „Fibonacci-numbers”, Translated from the Russian, Pergamon Press 1961 (zie p. 5).

2) „Ueber die Verhältniszahl des Goldenen Schnitts, die Reihe der mit ihr zusammenhängenden ganzen Zahlen und eine aus dieser abgeleitete Reihe”, Leipzig, Berlin Teubler-Verlag 1929 (zie speciaal S. 3).

3) Deze brief treft men aan in: JOANNIS KEPLER „Opera omnia”, edited CH. FRISCH, Frankf. a. Main, Vol. I, 1858, en wel op blz. 377–385 in het gedeelte, dat voor ondertitel draagt: „Literae Kepleri astrologicis”. Ook is die brief afgedrukt in J. KEPLER „Gesammelte Werke” Band XVI (Brieve 1607–1611), herausgegeben von W. VON DYCK und M. CASPAR, München 1954, S. 154–165. Verder treft men enige mededelingen en beschouwingen over deze brief aan bij FR. XAV. PFELFER „Der Goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen”, Augsburg 1885, S. 53.

*Kepler's bewijs van een bijzondere
eigenschap van de reeks (1,1)*

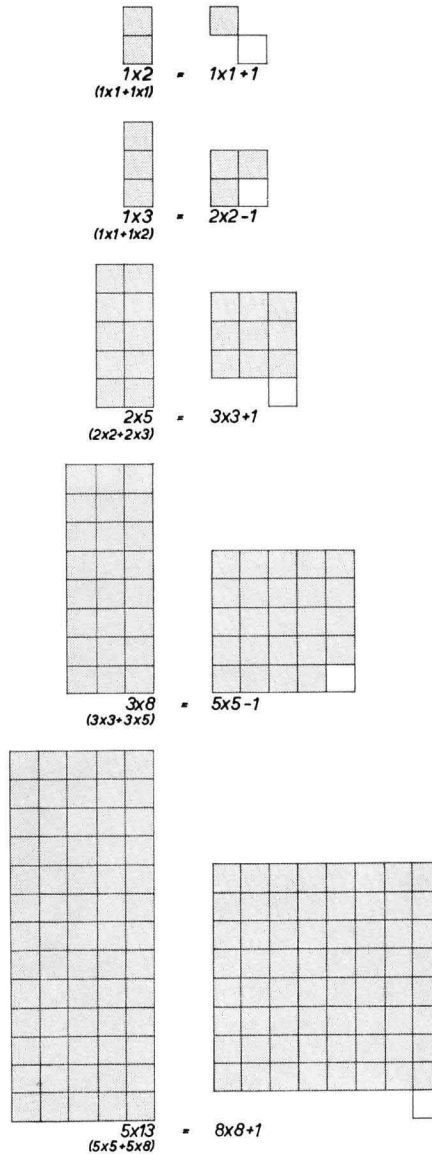


Fig. 5.

Intussen vestig ik de aandacht op de omstandigheid, dat de tweetalen der figuurtjes beginnen met het tweetal, dat voor ranggetal $N=2$ geldt. De beschouwde stelling gaat echter ook door voor ranggetal $N=1$, wanneer men vóór de ranggetallen en vóór de getallen van de reeks van KEPLER het cijfer 0 plaatst.

Het is zeker opvallend, dat noch PFEIFER, noch ARCHIBALD met KEPLER's afleiding bekend was; laatstgenoemde schrijft de vaststelling der bijzondere eigenschap zelfs aan R. SIMSON¹⁾ in 1753 toe.

Ook de, reeds in de brief van KEPLER aan TANCK gereleveerde, betekenis van de reeks is door onbekendheid met de brief aan TANCK bij PFEIFER en bij ARCHIBALD niet voldoende tot haar recht gekomen. Dit laatste is echter goed gemaakt, doordat het hierboven genoemde werkje van KEPLER „Strena Sue De Nive Sexangulare” bij beide auteurs volle aandacht heeft gehad²⁾. Het enthousiasme, waarmee in 1953 in het „Nachbericht”, (toegevoegd aan de uitgave van CASPAR und HAMMER) over KEPLER's geschrift „De Zeshoekige Sneeuw” wordt gesproken, was stellig ten volle verdiend. Wij zullen nog gelegenheid vinden over deze zijde van KEPLER's „Zeshoekige Sneeuw” te spreken, wanneer wij de betekenis van zijn reeks voor de botanie zullen belichten.

Hier willen wij alleen vaststellen, dat KEPLER over de verhouding, die wij (naar SCHOOLING) als φ aanduiden, opmerkte, dat de wiskundigen haar de „goddelijke” noemen en dat die verhouding wordt gevonden door een reeks van getallen te beschouwen, waarvan telkens een derde term gelijk is aan de som van de twee voorafgaande termen en door vervolgens de verhoudingen na te gaan, die twee op elkaar volgende termen te zien geven. Hoe hoger men dan in de reeks opklimt, hoe minder verschillen die verhoudingen en hoe meer naderen ze tot de bedoelde eindwaarde zonder die ooit te bereiken. Als *voorbeeld* van een reeks, waarmee men aldus kan te werk gaan, noemt KEPLER dan de reeks, die met de getallen één en één begint. Hij wist echter — zoals uit het voorafgaande blijkt — dat diezelfde verhouding ook bij willekeurig gekozen beginwaarden wordt verkregen³⁾.

E. *De geschiedenis van de reeksen (p, q)*

Uit hetgeen wij hierboven opmerkten, volgt, dat KEPLER met de reeksen, die wij als reeksen (p, q) hebben aangeduid, bekend was. Het valt echter niet te ontkennen, dat hij verder van deze reeksen weinig meer heeft vastgesteld dan wij zoeven mededeelden over de verhouding van twee op elkaar volgende termen. Dit heeft ook SCHOOLING, die in

¹⁾ An Explanation of an obscure Passage in ALBERT GIRARD's commentary upon STEVIN's Work (Vide les Oeuvres Math. de Simon Stevin, à Leyde, 1634, p. 169–170), Philos. Transact. Roy. Soc. Lond. Vol. 48, Part I, verschenen 1754 (zie p. 368–377).

²⁾ Het manuscript werd in het begin van 1611, als „nieuwjaarsgroet”, door KEPLER aan zijn protector en geestverwant: MATH. WACKHER VON WACKENFELS toegezonden. Het is opgenomen in CH. FRISCH: J. Kepleri „Opera Omnia” III, 1868, p. 715–730. Ook verscheen het in CASPAR U. HAMMER: Johannes Kepler „Gesammelte Werke”.

³⁾ Ten onrechte meende SCHOOLING in 1914, dat hij deze bijzonderheid als eerste vaststelde; ik zelf had ze trouwens reeds in 1907 in herinnering groepen.

1912 en 1914 ditzelfde (onbekend met KEPLER's beschouwingen) vaststelde, niet gedaan.

LUCAS heeft reeds in 1877, door het bewijs te geven, dat voor drie, op elkaar volgende termen uit een reeks (p, q) , (welke wij in onze notatie voorstellen door: S_{N-1} , S_N en S_{N+1}) de uitdrukking

$$(-1)^N \cdot (S_{N-1} \cdot S_{N+1} - S_N^2)$$

een constante waarde voor die reeks oplevert, namelijk $\mathcal{K} = q^2 - pq - p^2$, een nieuwe bijzonderheid voor die reeksen vastgesteld, maar veel was daarmee niet gewonnen.

Ik zelf heb in 1907 een quotiënt aangegeven, dat een zelfde kettingbreuk in teller en noemer bevat, waarvoor men de op elkaar volgende „naderende waarden” voor iedere reeks (p, q) kan vinden. Hiervoor is het mogelijk geworden de reeksen (p, q) bij berekeningen en constructies te gebruiken zoals de overige summatiereeksen.

Het is misschien goed hier op te merken, dat J. WIESNER ¹⁾ een andere weg heeft aangewezen, waarlangs men hetzelfde kan bereiken. Hij neemt daartoe aan, dat in de oneindige kettingbreuk $\{0; z, \bar{1}, \text{enz.}\}$ de grootheid z , behalve een geheel getal, ook een „unechter Bruch” kan voorstellen. WIESNER heeft daardoor echter aan de algemeen gebruikelijke definitie van „kettingbreuk” een uitbreiding gegeven, die maakt, dat niet alle afleidingen, waarbij men kettingbreuken toepast, ongewijzigd geldig blijven. Ik meen, vooral om deze reden, dat de behandelingswijze van WIESNER geen aanbeveling verdient.

¹⁾ Bemerkungen über rationale und irrationale Divergenzen, Flora 58 (1875), 113–115 u. 139–142.

HOOFDSTUK II

ENKELVOUDIGE REGELMATIGE NETTEN VAN RUITEN EN VAN KWADRATEN OP EEN CIRKELCILINDER

§ 1. *Recapitulatie van vroegere verwante studies en enige nieuwe definities*

Wij brengen hier in de eerste plaats onze, in 1907 gegeven, definitie van regelmatige puntensystemen op een cirkelcilinder in herinnering, namelijk: „puntensystemen op het oppervlak van een cirkelcilinder, waarbij het stelsel schroeflijnen (wij zullen schroeflijnen hier, in navolging van de botanici, doorgaans als *spiraalen* aanduiden), dat uit een willekeurig gekozen punt over het oppervlak (volgens de kortste wegen) naar de andere punten kan worden getrokken, congruent is met ieder overeenkomstig stelsel van schroeflijnen, dat uit een willekeurig ander punt van het stelsel kan worden getrokken.

De bedoelde puntensystemen laten zich in „enkelvoudige” en „meervoudige” indelen.

Bij de eerst genoemde ligt op een bepaalde hoogte op de cilinder (die wij steeds met de as verticaal denken te zijn opgesteld) nooit meer dan één punt. In dit geval kunnen alle punten van het stelsel in bepaalde doorlopende spiralen worden opgenomen, die door alle punten lopen. Daarvan is er één de kortste en deze wordt als „hoofdspiraal” of „grondspiraal” aangeduid. De punten liggen alle op deze spiraal op onderling gelijke afstanden. Deze afstand, in horizontale richting over het oppervlak genomen, duidt men — wanneer hij als gedeelte van de omtrek wordt uitgedrukt — als de „divergentie” van het puntensysteem aan. Wanneer men de, aldus gemeten, afstand als hoek rond de as beschouwt, spreekt men van de „divergentiehoek”, maar vaak ook van de „divergentie”. In beide gevallen geeft men daaraan de letter α . De divergentie kan dus nooit groter dan $\frac{1}{2}$, respectievelijk dan 180° , zijn.

Bij de tweede soort van puntensystemen treft men op geregelde afstanden 2 of meer punten op dezelfde hoogte op de cilinder aan en dan heeft men twee of meer *evenwijdige* schroeflijnen nodig — zelfs als men de kortste opzoekt — om alle punten op te nemen.

Wanneer wij niet uitdrukkelijk anders vermelden, zullen wij in hetgeen hier volgt, alleen enkelvoudige puntensystemen beschouwen. De eigenschappen der meervoudige laten zich gemakkelijk uit die der enkelvoudige afleiden.

Verder brengen wij hier in herinnering, dat men de punten van *alle* regelmatige puntensystemen kan beschouwen als de *hoekpunten* van *netwerken* met vierhoekige, door evenwijdige schroeflijnen gevormde, mazen,

welke mazen, bij afwikkelen van het cilinderoppervlak tot een plat vlak, in het algemeen congruente, tegen elkaar aansluitende, parallelogrammen opleveren. Men kan bij één zelfde puntensysteem een oneindig aantal van dergelijke netwerken aanwijzen, die alle door twee stelsels van evenwijdige, op onderling gelijke afstanden verlopende, schroeflijnen worden gevormd en waarvan de snijpunten *alle* tot de punten van het systeem behoren.

Het blijkt echter ook mogelijk om punten van het puntensysteem door andere paren van stelsels van evenwijdige, op onderling gelijke afstanden verlopende, schroeflijnen te verbinden, waarbij *niet alle* snijpunten tot het puntensysteem behoren.

Wij hebben in 1907 in het eerste dezer twee mogelijke gevallen gesproken van „geconjugeerde” spiralenstelsels, maar wij stellen thans voor om deze uitdrukking te vervangen door „gecoördineerde spiralenstelsels”, omdat de uitdrukking „geconjugerd” (o.a. in de theorie der conforme afbeelding) ook in andere zin wordt gebezigd als wij dit in 1907 deden, terwijl in de botanische literatuur¹⁾ de term „gecoördineerd” in de hier bedoelde betekenis is gebruikt.

Ik teken hier aan, dat het werk van G. H. HARDY and E. H. WRIGHT „An Introduction to the Theory of Numbers”²⁾ o.m. beschouwingen bevat over de indeling van *het totale platte vlak* in parallelogrammen, waarbij in enkele opzichten overeenkomst valt op te merken met de voorafgaande en hier verder nog volgende beschouwingen. Het feit, dat genoemde mathematici netwerken op het totale platte vlak beschouwden, terwijl ik uitsluitend netwerken op *een cilinderoppervlak* in studie nam, leidde echter tot principiële verschillen.

§ 2. Afspraken voor het opensnijden en ontrollen van de cirkelcilinder tot een plat vlak

Voor de te maken tekeningen van netwerken moet de cirkelcilinder volgens een beschrijvende lijn worden opengesneden en daarna tot een plat vlak worden ontrollt. Wij kiezen bij een enkelvoudig netwerk de bedoelde snijlijn steeds door het punt met het nummer *o* en houden bij het ontrollen de oorspronkelijke buitenkant van de cilinder (waarop wij de tekening denken te zijn aangebracht) steeds aan de bovenzijde.

Aldus doende, maken wij de cilinder tot een *strook*, die links en rechts door de snijlijn wordt begrensd. Als horizontale basis kiezen wij in de regel de verbindingslijn van het, na het ontrollen dubbel voorkomende, punt met het nummer *o*. Ter onderscheiding duiden wij het links gelegen punt veelal als *o* en het rechts gelegen (oorspronkelijk zelfde) punt als *o'* aan. Het spreekt van zelf, dat wij de tekening ook onder de lijn *o-o'*

¹⁾ Reeds bij A. BRAUN.

²⁾ Oxford 3rd. Ed. 1954 (de eerste druk verscheen in 1938 en een identieke herdruk van de 3rd. Ed. verscheen in 1956).

kunnen denken te worden voortgezet; de nummering geschiedt daar het beste door het nummer te laten voorafgaan door een minusteken.

Het heeft soms voordeel, dat wij het cilinderoppervlak (met de tekening) als opgebouwd uit vele identieke „bladen” (mét de „doorgedrukte” tekening) denken en deze cilinders op identieke wijze opensnijden en ontrollen tot stroken, die wij dan tegen de oorspronkelijke strook rechts en links aanschuiven. Het complete platte vlak wordt dan met een aansluitende tekening bedekt (die echter in identieke verticale stroken kan worden verdeeld). Meestal zijn voor ons doel alleen geringe „overschrijdingen van de twee, oorspronkelijk verticale grenslijnen”, die daarbij ontstaan, van belang. Door te denken, dat de tekening weder tot een cilinder met de oorspronkelijke diameter wordt opgerold, kan men zich meestal — ook al is de tekening niet volledig — een voldoende duidelijk beeld van de complete tekening op de cilinder vormen.

Van belang is het, na te gaan hoe — bij het volgen van onze afspraak — de „windingsrichting” van de grondspiraal voor onze „vlakke” tekening kan worden vastgesteld.

Wij brengen in herinnering, dat wij in 1907 een schroeflijn op een cilinder als „rechtsgewonden” hebben aangeduid, wanneer wij — bij verticale stand van de omwentelingsas van de cilinder — de schroeflijn als een wenteltrap beschouwende, bij het afdalen van de trap, de as van de cirkelcilinder aan de rechterhand vinden. De definitie van „linksgewonden” is daarmee tevens vastgesteld. Hierbij tekenen wij nog aan, dat als men deze definities aanvaardt de „windingsrichting” van een bepaalde schroeflijn niet verandert, wanneer men de cilinder omkeert — hetgeen men bijv. aan een kurketrekker kan vaststellen ¹⁾.

Gaat men nu na, hoe de „grondspiraal” voor onze tekening wordt gevonden, dan ziet men in, dat daartoe eerst het punt met het nummer 1 moet worden opgezocht en dat daarna dit punt door een rechte lijn, òf met punt o , òf met punt o' , moet worden verbonden. Blijkens onze beschouwing in de vorige paragraaf, moeten wij daarna de *kortste* dezer afstanden kiezen om daarmee het begin van de grondspiraal te verkrijgen.

Deze *afspraken* in aanmerking nemende, worden wij dan tot de volgende regel geleid:

Als op de (vlakke) tekening het punt 1 ligt op de linker verticale helft van de strook, die het ontrolde cilinderoppervlak voorstelt, dan zal de windingsrichting van de grondspiraal *rechts* zijn. Is het punt 1 op de rechter helft van die strook gelegen, dan zal de windingsrichting van de grondspiraal *links* zijn.

Ligt punt 1 *op* de verticale halveringslijn van de strook, dan is er in het puntensysteem zowel een rechts- als een linksgewonden grondspiraal aan te wijzen.

¹⁾ Zie o.m. mijn voordracht „Links en rechts in de levende natuur”. Handelingen 23ste Natuur- en Geneesk. Congres, gehouden April 1931 te Delft; 34 blz.

De wijze, waarop wij — van regelmatige puntensystemen op een cirkelcilinder uitgaande — tot regelmatige parallelogrammen netten overgaan, heeft als consequentie, dat wij doorgaans het nummer van een parallelogram bij het laagste hoekpunt daarvan plaatsen.

Wil men in overeenstemming met de, in de botanie gebruikte, wijze van nummeren van opeenvolgende zijdelingse organen op een grondspiraal handelen, dan moet men het nummer in het midden van het parallelogram plaatsen. In verschillende onzer mathematische figuren (zie bijv. Plaat I) hebben wij dit ook gedaan. Door dan — in gedachten — het nummer naar het laagste hoekpunt van het parallelogram te verschuiven, kan men weer in overeenstemming met het voorafgaande (en ook met de meeste onzer latere mathematische beschouwingen) komen.

§ 3. *Regelmatige „fundamentele” netten op een cirkelcilinder*

Bij een regelmatig puntensysteem op een cirkelcilinder zullen wij de twee gecoördineerde spiralenstelsels, die parallelogrammen vormen, waarvan de zijden de kortste zijn, welke in het systeem zijn aan te wijzen, de *fundamentele spiralenstelsels* noemen en het netwerk, dat zij vormen, zullen wij als een *fundamenteel parallelogrammenet* aanduiden.

Wanneer bij zulk een net de zijden der parallelogrammen onderling gelijk zijn, dan zullen wij het net uiteraard als een *fundamenteel ruitennet* betitelen.

Hierbij doen wij nog uitkomen, dat men in de literatuur over bladstanden vaak spreekt van de „meest opvallende stelsels van evenwijdige spiralen” en daarmee in de meeste gevallen hetzelfde bedoeld wordt, als wij met de uitdrukking „fundamentele” spiralen aanduiden. Het begrip „meest opvallend” is echter moeilijk scherp te definiëren en wordt daarom m.i. beter vermeden.

Wij zullen thans aantonen, dat bij *fundamentele ruitennetten* de hoeken van het ene paar van tegenover staande ruitenhoeken groter dan, of gelijk aan 60° moeten zijn, terwijl de hoeken van het andere paar dus kleiner dan, of gelijk aan 120° moeten zijn. Dit is een gevolg van de definitie, die wij voor het begrip „fundamenteel” net gegeven hebben. Wij lichten dit met nevenstaande fig. 6 toe, waarin wij een ruit met de hoekpunten o , m , $(m+n)$ en n (na afwikkelen van de cirkelcilinder op een plat vlak) tekenden en waarin wij de afstanden $o-m$ en $o-n$ dus gelijk aannamen en wel gelijk aan de kleinste afstanden van punten, die op spiralen in het net worden gevonden.

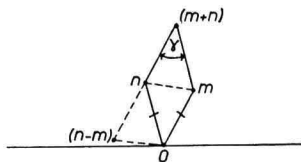


Fig. 6.

Wij hebben de scherpe hoeken van de ruiten hier kleiner dan 60° aangenomen en zullen nu aantonen, dat de ruiten dan geen *fundamenteel* net kunnen vormen.

Hiertoe bedenke men, dat ieder punt van zulk een net op overeenkomstige wijze ten opzichte van alle andere punten van het net moet zijn gelegen. Daaruit volgt, dat punt m ook als nulpunt van een gelijk en evenwijdig verschoven netwerk kan worden opgevat. Er zou dan ook een punt moeten voorkomen, dat ten opzichte van punt o op dezelfde wijze ligt als punt n ten opzichte van punt m , met andere woorden: op een afstand gelijk aan de afstand n tot m . Die afstand is echter, als de scherpe hoek γ kleiner is dan 60° , kleiner dan de gelijke afstanden o tot m en o tot n , waarvan wij juist (voor het *fundamentele* net) onderstelden, dat ze de kleinste zijn, die voorkomen. Dit leidt dus tot een onmogelijkheid.

Wij vestigen er de aandacht op, dat men met ruiten, die congruent en evenwijdig zijn aan de getekende ruit ($\gamma < 60^\circ$), wel degelijk het complete platte vlak aaneensluitend kan aanvullen. De zijden vormen dan echter géén *fundamenteel* net.

Hier releveren wij nog, dat in de gevallen, waarin de scherpe hoek der ruiten 60° is, het punt $(n-m)$ op *gelijke* afstand van punt o zal voorkomen als de punten m en n .

Men zou in dit geval aan het punt $(n-m)$ in onze tekening even goed het nummer m kunnen geven en aan de punten m en n van onze tekening de nummers n en $(m+n)$.

In gevallen als deze zullen wij van *fundamentele* ruitennetten $\{(n-m), m \text{ en } n\}$ en $\{m, n \text{ en } (m+n)\}$ spreken en algemener van *drietallige fundamentele ruitennetten*.

§ 4. *Over de topdriehoek bij enkelvoudige netten in het algemeen en die bij fundamentele ruitennetten in het bijzonder*

Bij onze beschouwingen over ruiten- en parallelogrammennetten zal meermalen de *driehoek* ter sprake komen, welke gevormd wordt door de basislijn $o-o'$ op de ontrolde cilinder en door de beide coördinatiespiralen, die van de punten o en o' naar de punten m en n uitgaan en die elkaar (na het passeren van respectievelijk n en m punten) in de top (met het nummer mn) ontmoeten. Wij zullen deze driehoek als de *topdriehoek* en de *top* als T_{mn} aanduiden.

Hierbij *kunnen* de m - en de n -tallige spiralen van *ruitennetten fundamentele* netten vormen, maar dit behoeft niet het geval te wezen.

De bedoelde spiralen kunnen verder (zowel wanneer ze alleen gecoördineerd zijn, als wanneer ze bovendien fundamenteel zijn) antidroom of homodroom verlopen. In alle gevallen zal de tophoek van de driehoek gelijk zijn aan de scherpe, of aan de stompe hoek van de ruiten of parallelogrammen, waaruit het net is opgebouwd.

Wij zullen ons in dit hoofdstuk vooral met de topdriehoek van *funda-*

mentele ruitennetten bezig houden. Daarbij zal, blijkens de beschouwingen in de vorige paragraaf, de tophoek kunnen uiteenlopen van 60° tot 120° — deze hoeken daarbij ingesloten.

De laatste omstandigheid leidt dan tot opstelling van nevenstaande fig. 7. Men treft daarin drie getrokken cirkelbogen aan, die wij als I, II en III hebben gekenmerkt en die de basislijn als gemeenschappelijke koorde hebben. Zoals steeds, hebben wij aan die basislijn de eenheid van lengte toegekend. De cirkel II heeft een straal gelijk aan 0,5. De cirkels I en III hebben beide een straal, die gelijk is aan $\sqrt{1/3}$. De koorde $o-o'$ snijdt van de onderzijde van cirkel I een boog van 120° af, van cirkel II een boog

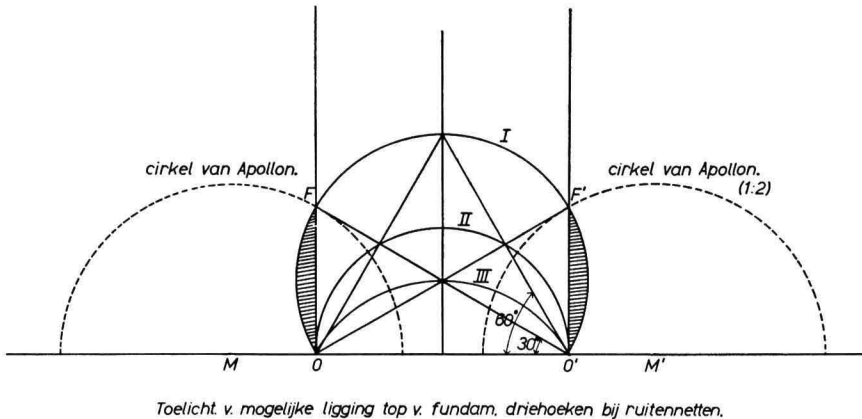


Fig. 7.

van 180° en van cirkel III een boog van 240° . Dit is bereikt door: 1e als middelpunt van cirkel I het zwaartepunt van de gelijkzijdige driehoek te kiezen, die de lijn $o-o'$ tot basis heeft, 2e door als middelpunt van cirkel II te nemen: het midden van de lijn $o-o'$ en 3e door als middelpunt van cirkel III het spiegelbeeld van het middelpunt van cirkel I ten opzichte van de lijn $o-o'$ te nemen.

Uit het voorafgaande volgt dan, dat voor *fundamentele* ruitennetten de top T_{nm} van de topdriehoek ergens moet liggen tussen de cirkelbogen I en III. Ligt die top op de boog I, dan is de tophoek gelijk aan 60° ; ligt de top op de cirkelboog III, dan is die hoek 120° . Een ligging op de boog II betekent een tophoek van 90° , waaruit blijkt, dat kwadratenetten tot de fundamentele behoren.

Toppen, die buiten boog I en zulke, die beneden boog III worden aangetroffen, kunnen dus *niet* tot fundamentele ruitennetten behoren.

Van veel belang is het aandacht te geven aan de netten, waarvan de top valt binnen één der twee cirkelsegmenten, die door de twee verticale grenslijnen van de boog I worden afgesneden (wij hebben die door een harcering gekenmerkt). Blijkens hetgeen wij zoeven opmerkten, behoren ze tot de *fundamentele* ruitennetten. Men zal inmiddels als verschil met de andere mogelijke fundamentele netten constateren, dat de m - en n -

tallige spiralen, bij toppen binnen de segmenten *homodroom* gewonden moeten zijn, terwijl toppen tussen de twee verticale grenslijnen behoren tot fundamentele netten met *antidroom* gewonden m - en n -tallige spiralen¹⁾. Ligging van de top *op* een grenslijn betekent: verticale m -tallige spiralen, zodat er dan niet van homodroom of antidroom t.o.v. de n -tallige kan worden gesproken. Valt de top dan beneden F of F' , dan is ruitennet wél fundamenteel.

§ 5. *Nadere plaatsbepaling van de top T_{mn} bij gegeven aantallen — m en n — der spiralen bij een fundamenteel ruitennet*

In onze figuur 7 hebben wij grenzen (cirkelbogen) aangegeven, waarbinnen of waarbuiten de toppen T_{mn} van topdriehoeken bij fundamentele en bij niet-fundamentele (de laatste uiteraard wél gecoördineerde) ruitennetten moeten liggen. Het is echter mogelijk, de ligging van de top T_{mn} nog op andere wijze vast te leggen, wanneer de waarden m en n voor het ruitennet gegeven zijn.

Wij wezen er namelijk reeds op, dat de lengten der opstaande zijden van de topdriehoek gelijk zijn aan mb en nb , wanneer b de lengte van de zijden van de ruiten voorstelt. De verhouding der opstaande zijden van de topdriehoek wordt dan gegeven door: m/n , of wel door: n/m .

De mogelijke ligging van de top T_{mn} kan dus omschreven worden als: de meetkundige plaats van punten, welke op afstanden van twee bepaalde punten (in dit geval van de punten o en o') zijn gelegen, waarvan de lengten zich verhouden als $m : n$, of als $n : m$. Zoals bekend, bestaat die meetkundige plaats uit twee gelijke cirkels, waarvan de middelpunten liggen op de verlengden (naar rechts en naar links) van de verbindingslijn van o en o' . Men beperkt zich in de regel tot de beschouwing van één cirkel (door het kiezen van één der waarden m/n of n/m en door vast te leggen of men mb van de top naar punt o , dan wel naar punt o' zal rekenen). Men spreekt daarom doorgaans van *de* cirkel van *Apollonius*.

Wij brengen hier in herinnering²⁾, dat de straal van de twee gelijke cirkels van APOLLONIUS wordt gegeven door:

$$\frac{\frac{m}{n}}{1 - \frac{m^2}{n^2}},$$

wanneer men de onderlinge afstand van de 2 punten (hier aangeduid als o en o') gelijk aan de eenheid neemt (zoals wij deden). De afstanden van

1) Het is misschien goed erop te wijzen, dat de ligging van een punt nabij en *buiten* de „strook” betekent: een ligging nabij de andere grenslijn, maar *binnen* die strook — hetgeen onmiddellijk duidelijk wordt, wanneer men onze vlakke figuur tot de oorspronkelijke cilinder opgerold denkt.

2) Men vindt de cirkel van APOLLONIUS in de meeste leerboeken der vlakke analytische meetkunde behandeld.

de twee middelpunten (M en M') tot de twee punten (o en o') op de verbindingslijn worden dan gegeven door:

$$\frac{1}{1 - \frac{m^2}{n^2}} \text{ en } \frac{\frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{m^2}{n^2}},$$

zodat het verschil van die afstanden dan uiteraard gelijk aan de eenheid is.

Wij hebben in figuur 8 — ter rechterzijde — drie verschillende cirkels van APOLLONIUS getekend. Daaraan kan de verticaal door het midden van $o-o'$ worden toegevoegd, die in dit geval als een cirkel van

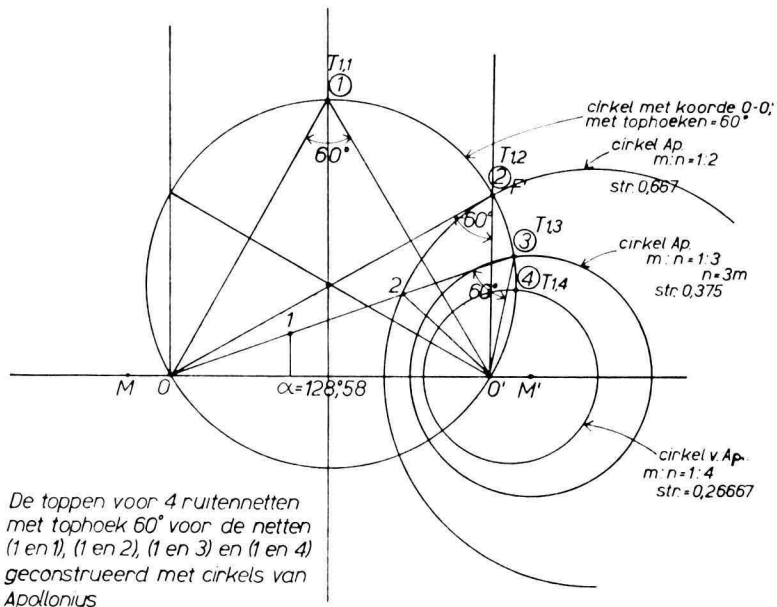


Fig. 8.

APOLLONIUS met oneindig grote straal en met het middelpunt oneindig ver op het verlengde van $o-o'$ kan worden beschouwd. De verhouding m/n is voor de vier cirkels respectievelijk $1/1$, $1/2$, $1/3$ en $1/4$.

Na het tekenen van de cirkel, die wij in de vorige paragraaf met I kenmerkten, leveren ons de snijpunten met de vier cirkels van APOLLONIUS: toppen van driehoeken (die wij dus als $T_{1,1}$, $T_{1,2}$, $T_{1,3}$ en $T_{1,4}$ moeten aanduiden) van topdriehoeken, die alle tophoeken gelijk aan 60° bezitten (voor $T_{1,4}$ hebben wij het tekenen van de opstaande zijden van de topdriehoek, ter vereenvoudiging, weggelaten).

Hierbij doen wij nog uitkomen, dat het spiegelbeeld ten opzichte van een verticaal tophoekpunten ter linkerzijde zou opleveren, waarmee duidelijk wordt, dat bij onze beschouwingen wel degelijk de twee gelijke cirkels van APOLLONIUS bij de vaststaande punten o en o' en bij één

bepaalde waarde van m/n in aanmerking moeten worden genomen, wanneer men zowel een rechts- als een linksgewonden grondspiraal in de mogelijkheden wil betrekken.

Van belang is nog op te merken, dat onze keuze van de vier waarden van m/n , die wij voor het tekenen van onze figuur deden, in zoverre willekeurig was, dat met ieder ander paar waarden van m en n (mits gehele getallen) dezelfde constructie kan worden uitgevoerd. De keuze van cirkel I uit de vorige paragraaf voerde tot tophoeken van 60° . De keuze van cirkel II zou ons tot topdriehoeken met rechte tophoeken (dus tot kwadratenetten), die van cirkel III tot tophoeken van 120° leiden. Daar-aan zouden uiteraard nog andere cirkels, die de basislijn $o-o'$ tot koorde hebben, zijn toe te voegen dan degene, die wij in de vorige paragraaf en hier kozen (ook zulke, die toppen tussen de punten $T_{1,1}$ en $T_{1,2}$ op-
everen).

Ook releveren wij nog, dat wanneer de tophoek van de topdriehoek en de waarden van m en n bekend zijn, ook de grootheid b (d.i. de lengte der zijden van de ruiten van het net) kan worden berekend. Men vindt die namelijk door de cosinusregel op de topdriehoek toe te passen, welke in dit geval aldus luidt:

$$1 = m^2b^2 + n^2b^2 - 2mnb^2 \cos \gamma.$$

Hierin stelt γ de tophoek voor.

In bepaalde gevallen (bijv. in de voorbeelden, die wij afbeeldden) is ook de berekening van de divergentie mogelijk, maar deze wordt in alle gevallen gemakkelijk gevonden langs wegen, die wij in de volgende paragrafen zullen bespreken.

Het grootste belang ontleent bovenstaande beschouwing intussen aan de conclusies, die daaruit kunnen worden getrokken aangaande de mogelijke windingsrichtingen van de m - en de n -tallige spiralen bij fundamentele ruitennetten.

Wij zagen reeds in de vorige paragraaf, dat alleen, wanneer de top van de topdriehoek valt binnen één der (daar) geharceerde segmenten, de m - en de n -tallige spiralen *homodroom* zullen verlopen. Uit het in deze paragraaf behandelde kan men nu afleiden, dat het hoogste punt van het segment beantwoordt aan de top $T_{1,2}$ en daaruit volgt, dat wanneer $m : n > 1 : 2$, of (wat hetzelfde is) $n < 2m$ is, zulk een gelijkzinnig verloop der m - en der n -tallige spiralen uitgesloten is. Bij zulk een verhouding van m en n zal de bijbehorende cirkel van APOLLONIUS namelijk groter zijn dan het drietal cirkels ter rechterzijde in onze tekening en zal ook geheel buiten het segment vallen.

Als $n = 2m$ is, dan verlopen de m -tallige spiralen verticaal en dan is er geen sprake van homo- of antidroom van de beide spiralenstelsels.

Is echter $n > 2m$, dan bestaat de *mogelijkheid*, dat de m - en de n -tallige spiralen *homodroom* zijn, immers de dáárbij behorende cirkel van APOLLONIUS *doorsnijdt* dan het (geharceerde) segment. Het zal echter

duidelijk zijn, dat de m - en de n -tallige spiralen nu ook *antidroom* kunnen verlopen, immers die cirkel doorsnijdt ook de „strook” tussen de beide begrenzende verticalen. Om bij $n > 2m$ een *antidroom fundamenteel* ruitennet op te leveren, moet – zoals wij hierboven reeds opmerkten – de top binnen de „strook”, beneden de cirkelboog I en boven de cirkelboog III worden aangetroffen.

Wij zullen later voorbeelden van ruitennetten afbeelden, waarbij verschillende, hierboven besproken, mogelijkheden zijn gerealiseerd. Hier verwijzen wij speciaal ook naar de leerzame figuur 9, waarin een ruitennet (2 en 3) met getrokken m - en n -tallige spiralen is voorgesteld, dat een tophoek van de topdriehoek bezit, die kleiner is dan 60° , welk net dan ook *niet*

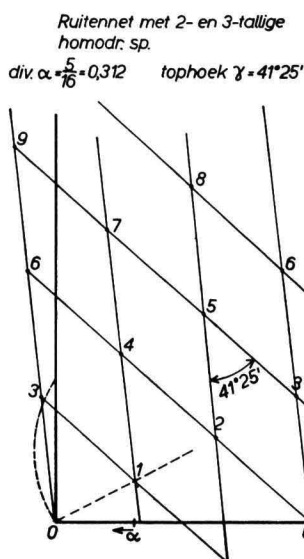


Fig. 9.

fundamenteel is. De top daarvan ligt links van de links-begrenzende verticaal en boven het linkersegment. De m - en de n -tallige spiralen zijn homodroom; beide namelijk links gewonden, terwijl de grondspiraal – zoals wij steeds deden – rechts gewonden werd gekozen.

§ 6. *De, bij een paar gehele getallen m en n behorende, encyclische waarden Δ_m en Δ_n en de meetkundige betekenis dier waarden voor het construeren van eigenschappen van regelmatige ruitennetten (m en n)*

Voor onze berekeningen van bijzonderheden van regelmatige ruitennetten zullen wij herhaaldelijk gebruik maken van de door de gebroeders BRAVAIS ingevoerde en ook door mij in 1907 veelvuldig toegepaste „encyclische waarden”.

Als definitie van de, bij twee gehele (onderling ondeelbare) getallen m en n behorende, *encyclische waarden* Δ_m en Δ_n kan men geven: de

kleinste der positieve gehele getallen, die de uitdrukking $(m\Delta_n - n\Delta_m)$ gelijk aan $+1$, of aan -1 , maken.

Men kan deze waarden voor de, in de leer der bladstanden, belangrijkste getallenparen gemakkelijk en spoedig door *uitproberen* vinden. Daarbij bedenke men, dat ook $\Delta_m = 0$ in aanmerking komt.

Het is echter ook mogelijk om die waarden door berekening te vinden. Uit de theorie der kettingbreuken volgt namelijk, dat men ze kan becijferen door de breuk m/n tot een kettingbreuk uit te schrijven en daarna teller en noemer van de laatste „naderende breuk” van die kettingbreuk te nemen. Hierbij moet men echter zorgdragen, dat men de delingen, nodig voor het uitschrijven van de kettingbreuk, niet verder voortzet, wanneer een „wijzergetal” 2, of groter dan 2 wordt bereikt. Wij verwijzen hier naar de tweede voetnoot op blz. 20 van mijn werk uit 1907 ¹⁾.

Wij hebben, in Tabel V zowel als in Tabel VI, voor de meest voorkomende getallenparen m en n , de bijbehorende waarden van Δ_m en Δ_n vermeld, waarbij wij er op attent maken, dat de gebruikte identiteitstekens betekenen, dat de tellers en noemers der breuken, waartussen zulk een teken staat, niet alleen een zelfde getallenwaarde voor de *quotiënten* opleveren, maar dat die tellers en noemers zelve ook aan elkaar *identiek* zijn.

Aan Tabel V kan men nog enige bijzonderheden ontnemen, die voor alle in die tabel beschouwde „summatiereeksen” gelden. Ze zijn het beste in de volgende formules tot uitdrukking te brengen:

$$\Delta_{m+n} = \Delta_m + \Delta_n \text{ en } \Delta_{n-m} = \Delta_n - \Delta_m,$$

$$(m+n)\Delta_n - n\Delta_{m+n} = +1, \text{ of } = -1,$$

en

$$(n-m)\Delta_m - m\Delta_{n-m} = +1, \text{ of } = -1.$$

Een bewijs hiervan is overbodig, maar men kan zich ook door uitproberen gemakkelijk van de juistheid dezer betrekkingen overtuigen.

Om de meetkundige betekenis van de encyclische getallen voor ruitennetten toe te lichten, hebben wij in fig. 10 vier topdriehoeken van ruitennetten (m en n) voorgesteld, die wij eerst nader willen beschrijven.

Voor ieder der vier figuurtjes namen wij de afstanden $(o-m)$ en $(o-n)$ gelijk aan, zodat wij inderdaad met topdriehoeken van „ruitennetten” te maken hebben.

Wij hebben voor alle (slechts zeer gedeeltelijk) afgebeelde netten een rechtsgewonden grondspiraal aangenomen en daarop het punt met het nummer 1 aangegeven (dat op een kleinere afstand boven de basislijn ligt dan punt m). Door spiegelbeelden t.o.v. een vertikaal te tekenen, zou men onze figuren door netten met linksgewonden grondspiralen kunnen completeren.

In ieder der vier figuren zullen wij nu, uitgaande van punt o , of van

¹⁾ Wij gaven toen als literatuurbron een werk van H. WEBER uit 1898 en kunnen hieraan thans als recente beschouwing hierover noemen: P. WIJDENES „Midden-Algebra II, 1944, blz. 295.

TABEL V

De „encyclische getallen”, behorende bij twee coördinatiegetallen (m en n) uit belangrijke summatiereeksen, d.z. de kleinste waarden (Δ_m en Δ_n), die $(m\Delta_n - n\Delta_m)$ gelijk +1 of -1 maken.

Rangnummer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	N
Reeks (1, 1)	Coördinatie getallen $\frac{m}{n} \equiv \left(\frac{0}{1}\right)$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{21}{34}$	$\frac{m_1}{n_1} \equiv \frac{K_N}{K_{N+1}}$
	Encyclische getallen $\frac{\Delta_m}{\Delta_n} \equiv \left(\frac{-1}{1}\right)$	$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{2m_1 - n_1}{n_1 - m_1} \equiv \frac{K_N - 2}{K_N - 1}$
Reeks (1, 2)	Coördinatie getallen $\frac{m}{n} \equiv \left(\frac{1}{1}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{21}{34}$	$\frac{34}{55}$	$\frac{n_1}{m_1 + n_1} \equiv \frac{K_{N+1}}{K_{N+2}}$
	Encyclische getallen $\frac{\Delta_m}{\Delta_n} \equiv \left(\frac{1}{0}\right)$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{n_1 - m_1}{m_1} \equiv \frac{K_{N-1}}{K_N}$
Reeks (1, 3)	Coördinatie getallen $\frac{m}{n} \equiv \left(\frac{2}{1}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{18}{29}$	$\frac{29}{47}$	$\frac{47}{76}$	$\frac{2n_1 - m_1}{n_1 + 2m_1} \equiv \frac{K_{N-2} + K_{N-1} \cdot 3}{K_{N-1} + K_N \cdot 3}$
	Encyclische getallen $\frac{\Delta_m}{\Delta_n} \equiv \left(\frac{1}{1}\right)$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{n_1 - m_1}{m_1} \equiv \frac{K_{N-1}}{K_N}$
Reeks (1, z)	Coördinatie getallen $\frac{m}{n} \equiv \left(\frac{z-1}{1}\right)$	$\frac{1}{z}$	$\frac{z}{1+z}$	$\frac{1+z}{1+2z}$	$\frac{1+2z}{2+3z}$	$\frac{2+3z}{3+5z}$	$\frac{3+5z}{5+8z}$	$\frac{5+8z}{8+13z}$	$\frac{8+13z}{13+21z}$	$\frac{(2m_1 - n_1) + (n_1 - m_1)z}{(n_1 - m_1) + m_1 z} \equiv \frac{K_{N-2} + K_{N-1} \cdot z}{K_{N-1} + K_N \cdot z}$
	Encyclische getallen $\frac{\Delta_m}{\Delta_n} \equiv \left(\frac{1}{0}\right)$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{n_1 - m_1}{m_1} \equiv \frac{K_{N-1}}{K_N}$
Reeks (p, q)	Coördinatie getallen $\frac{m}{n} \equiv \left(\frac{q-p}{p}\right)$	$\frac{p}{q}$	$\frac{q}{p+q}$	$\frac{p+q}{p+2q}$	$\frac{p+2q}{2p+3q}$	$\frac{2p+3q}{3p+5q}$	$\frac{3p+5q}{5p+8q}$	$\frac{5p+8q}{8p+13q}$	$\frac{8p+13q}{13p+21q}$	$\frac{(2m_1 - n_1)p + (n_1 - m_1)q}{(n_1 - m_1)p + m_1 q} \equiv \frac{K_{N-2} \cdot p + K_{N-1} \cdot q}{K_{N-1} \cdot p + K_N \cdot q}$
	Encyclische getallen $\frac{\Delta_m}{\Delta_n} \equiv \left(\frac{v-\mu}{\mu}\right)^1$	$\frac{\mu}{v}$	$\frac{v}{\mu+v}$	$\frac{\mu+v}{\mu+2v}$	$\frac{\mu+2v}{2\mu+3v}$	$\frac{2\mu+3v}{3\mu+5v}$	$\frac{3\mu+5v}{5\mu+8v}$	$\frac{5\mu+8v}{8\mu+13v}$	$\frac{8\mu+13v}{13\mu+21v}$	$\frac{(2m_1 - n_1)\mu + (n_1 - m_1)v}{(n_1 - m_1)\mu + m_1 v} \equiv \frac{K_{N-2} \cdot \mu + K_{N-1} \cdot v}{K_{N-1} \cdot \mu + K_N \cdot v}$

¹⁾ μ en ν zijn de kleinste gehele getallen, die $(\mu q - \nu p)$ gelijk aan +1 of -1 maken. Hier volgen enige waarden van p en q ($p > 1$ en $q > 2p$) en de bijbehorende waarden van μ en ν :

$$\frac{p}{q} \equiv \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}$$

$$\frac{\mu}{\nu} \equiv \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$$

TABEL VI

De waarden Δ_m/m en Δ_n/n voor belangrijke summatiereeksen en de limieten der kettingbreuken, waarvan Δ_m/m en Δ_n/n naderende breuken zijn.

											Kettingbr. met vorenst. naderende breuken	Limietwaarde der kettingbr. 1)
Reeks	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta_m}{m} \equiv \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}; \\ \frac{\Delta_n}{n} \equiv \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{21}{55}; \end{array} \right.$									$\frac{2m_1 - n_1}{m_1} \equiv \frac{K_{N-2}}{K_N}$ $\frac{n_1 - m_1}{n_1} \equiv \frac{K_{N-1}}{K_{N+1}}$	$\left. \begin{array}{l} \{0; 2, \bar{1}, \text{enz.}\}; \\ \chi^2 \equiv \frac{1}{\chi+2}. \end{array} \right\}$	
Reeks	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta_m}{m} \equiv \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{21}{55}; \\ \frac{\Delta_n}{n} \equiv \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{21}{55}, \frac{34}{89}; \end{array} \right.$									$\frac{n_1 - m_1}{n_1} \equiv \frac{K_{N-1}}{K_{N+1}}$ $\frac{m_1}{m_1 + n_1} \equiv \frac{K_N}{K_{N+2}}$	$\left. \begin{array}{l} \{0; 2, \bar{1}, \text{enz.}\}; \\ \chi^2 \equiv \frac{1}{\chi+2}. \end{array} \right\}$	
Reeks	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta_m}{m} \equiv \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{11}, \frac{5}{18}, \frac{8}{29}, \frac{13}{47}, \frac{21}{76}; \\ \frac{\Delta_n}{n} \equiv \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{11}, \frac{5}{18}, \frac{8}{29}, \frac{13}{47}, \frac{21}{76}, \frac{34}{123}; \end{array} \right.$									$\frac{n_1 - m_1}{2n_1 - m_1} \equiv \frac{K_{N-1}}{K_{N-2} + K_{N-1} \cdot 3}$ $\frac{m_1}{2m_1 + n_1} \equiv \frac{K_N}{K_{N-1} + K_N \cdot 3}$	$\left. \begin{array}{l} \{0; 3, \bar{1}, \text{enz.}\}; \\ \frac{1}{\chi+3}. \end{array} \right\}$	
Reeks	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta_m}{m} \equiv \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1+z}, \frac{2}{1+2z}, \frac{3}{2+3z}, \frac{5}{3+5z}, \frac{8}{5+8z}, \frac{13}{8+13z}, \frac{21}{13+21z}; \\ \frac{\Delta_n}{n} \equiv \frac{1}{2}, \frac{1}{1+z}, \frac{2}{1+2z}, \frac{3}{2+3z}, \frac{5}{3+5z}, \frac{8}{5+8z}, \frac{13}{8+13z}, \frac{21}{13+21z}, \frac{34}{21+34z}; \end{array} \right.$									$\frac{n_1 - m_1}{(2m_1 - n_1) + (n_1 - m_1)z} \equiv \frac{K_{N-1}}{K_{N-2} + K_{N-1} \cdot z}$ $\frac{m_1}{(n_1 - m_1) + m_1 z} \equiv \frac{K_N}{K_{N-1} + K_N \cdot z}$	$\left. \begin{array}{l} \{0; z, \bar{1}, \text{enz.}\}; \\ \frac{1}{\chi+z}. \end{array} \right\}$	
Reeks	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta_m}{m} \equiv \frac{\mu}{p}, \frac{\nu}{q}, \frac{\mu+\nu}{p+q}, \frac{\mu+2\nu}{p+2q}, \frac{2\mu+3\nu}{2p+3q}, \frac{3\mu+5\nu}{3p+5q}, \frac{5\mu+8\nu}{5p+8q}, \frac{8\mu+13\nu}{8p+13q}, \frac{13\mu+21\nu}{13p+21q}, \\ \frac{\Delta_n}{n} \equiv \frac{\nu}{q}, \frac{\mu+\nu}{p+q}, \frac{\mu+2\nu}{p+2q}, \frac{2\mu+3\nu}{2p+3q}, \frac{3\mu+5\nu}{3p+5q}, \frac{5\mu+8\nu}{5p+8q}, \frac{8\mu+13\nu}{8p+13q}, \frac{13\mu+21\nu}{13p+21q}, \frac{21\mu+34\nu}{21p+34q}; \end{array} \right.$									$\frac{(2m_1 - n_1)\mu + (n_1 - m_1)\nu}{(2m_1 - n_1)p + (n_1 - m_1)q} \equiv \frac{K_{N-1} \cdot \mu + K_{N-1} \cdot \nu}{K_{N-2} \cdot p + K_{N-1} \cdot q}$ $\frac{(n_1 - m_1)\mu + m_1 \nu}{(n_1 - m_1)p + m_1 q} \equiv \frac{K_{N-1} \cdot \mu + K_N \cdot \nu}{K_{N-1} \cdot p + K_N \cdot q}$	$\left. \begin{array}{l} \{0; \bar{1}\} \cdot \mu + \nu; \\ \{0; \bar{1}\} \cdot p + q; \\ \frac{\chi \cdot \mu + \nu}{\chi \cdot p + q}. \end{array} \right\}$	

Zie: het onderschrift van tabel V voor waarden van μ en ν bij bepaalde waarden van p en q , waaruit volgt:

Reeks (2, 5), (3, 8), (4, 11), (2, 7), (3, 7), (3, 10)

Limietwaarde bijbehorende kettingbreuk $\frac{\chi+2}{2\chi+5}, \frac{\chi+3}{3\chi+8}, \frac{\chi+3}{4\chi+11}, \frac{\chi+3}{2\chi+7}, \frac{\chi+2}{3\chi+7}, \frac{\chi+3}{2\chi+10}$.

1) Men vergelijkte deze limietwaarden met die van Tabel IV op blz. 42.

Ruitennetten

In alle figuren: de 1-tallige rechtsgewonden

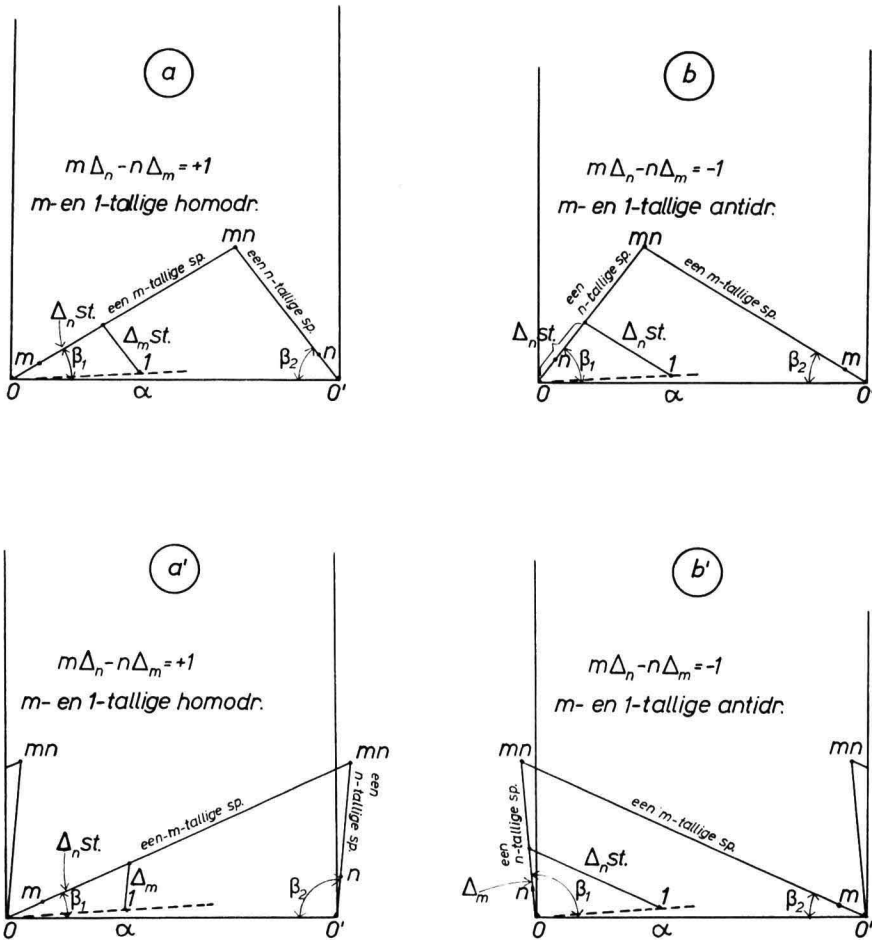


Fig. 10.

punt o' , langs de kortst-mogelijke weg, twee coördinatiespiralen volgende, naar punt 1 gaan met *stappen* gelijk aan de constante lengte van de zijden der ruiten (b), daarbij de nummers nagaande van de punten, die wij daarbij passeren. Naar boven gaande, nemen die nummers toe, naar beneden gaande, nemen ze af en dit geldt, onverschillig de mate, of de richting der helling.

Wanneer men nu het *aantal stappen*, langs een der m -tallige spiralen gaande, als Δ_n aanduidt, en het aantal langs een der n -tallige spiralen met Δ_m , dan moet voor de figuurtjes **a** en **a'** de betrekking gelden:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = +1$$

en voor de figuurtjes **b** en **b'** de betrekking:

$$n\Delta_m - m\Delta_n = +1,$$

welke laatste betrekking ook kan worden geschreven:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = -1.$$

Het blijkt nu, dat de waarden Δ_m en Δ_n niets anders kunnen zijn als de encyclische waarden, die bij de getallen m en n behoren — welke waarden wij immers met deze zelfde *formules* definieerden.

Denkt men nu ook de bovenbedoelde spiegelbeelden getekend en houdt men rekening met het feit, dat voor *ruitennetten* (m en n) geldt, dat de m -tallige spiralen zwakker hellen dan de n -tallige, dan kan men voor ruitennetten deze regel opstellen:

Wanneer de grondspiraal *homodroom* is aan de m -tallige spiraal, dan geldt de formule:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = +1$$

en wanneer de grondspiraal *antidroom* is aan de m -tallige spiraal, dan geldt de formule:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = -1.$$

Wij stellen hier ten slotte vast, dat deze regel hier voor (*gecoördineerde*) ruitennetten in het algemeen is afgeleid en dat ze dan ook even goed voor *fundamentele* als voor *niet-fundamentele* ruitennetten geldt.

§ 7. *Het verband tussen de divergentie en de lengte der zijden van de ruiten bij een regelmatig (fundamenteel, of niet-fundamenteel) ruitennet (m en n) op een cilinderoppervlak*

Wij zullen de basishoeken van de topdriehoek bij een ruitennet, onverschillig of de m - en n -tallige coördinatiespiralen antidroom of homodroom verlopen en onverschillig ook, of de grondspiraal rechts of links gewonden is, aanduiden met β_1 (ter linkerzijde) en β_2 (ter rechterzijde).

De lengte van de zijden van de ruiten zullen wij met de letter b aangeven — waarmee wij beogen om zoveel mogelijk in overeenstemming met onze notatie uit 1907 te blijven.

De grootheden $b \cos \beta_1$ en $b \cos \beta_2$ zullen wij, ter vereenvoudiging, met de letters u en v voorstellen, van welke grootheden wij aannemen, dat ze positief zowel als negatief kunnen zijn ¹⁾.

Wij zullen eerst de figuren α en α' bij onze afleiding gebruiken.

Voor beide figuren gold:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = +1 \quad (I)$$

Wij projecteren nu de opstaande zijden van de topdriehoek op de

¹⁾ Wij tekenen hier aan, dat de grootheden u en v (met andere lettertekens aangeduid) door de gebr. BRAVAIS „secundaire divergenties” zijn genoemd, waarbij de tekens $+$ en $-$ aan de lettertekens werden toegevoegd (hier verwijs ik ook naar mijn werk uit 1907).

basislijn en vinden daardoor voor beide figuren (de afstand tot o' , zoals steeds, gelijk aan de eenheid nemende):

$$nu + mv = +1 \quad \text{(II)}$$

Daarna projecteren wij op dezelfde basislijn de kortste wandeling, die wij moeten maken om langs coördinatie-spiralen (m en n) van punt o naar punt 1 te komen, hetgeen voor beide figuren oplevert:

$$\Delta_n \cdot u + \Delta_m \cdot v = \alpha, \quad \text{(III)}$$

waarin α de „divergentie” voorstelt, wanneer men die als gedeelte van de eenheid van lengte uitdrukt.

Ten slotte leiden wij met de cosinusformule uit de topdriehoek de betrekking af:

$$m^2 b^2 = n^2 b^2 + 1 - 2nb \cos \beta_1,$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven:

$$m^2 b^2 = n^2 b^2 + 1 - 2nu \quad \text{(IV)}$$

Door elimineren van de grootheden u en v vinden wij uit de hier afgeleide betrekkingen de formule:

$$2n m \alpha = (n^2 - m^2) b^2 + 1 + 2n \Delta_m,$$

Hiermee hebben wij dezelfde vergelijking verkregen, die ook (enigszins anders geschreven) voorkomt op blz. 27 van mijn werk uit 1907. Ze werd daar afgeleid voor regelmatige systemen van rakende cirkels op een cirkelcilinder en heeft daar het nummer (4a) gekregen.

Beschouwen wij nu in de tweede plaats de figuren b en b' .

Voor beide geldt:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = -1 \quad \text{(I*)}$$

Een overeenkomstige redenering, als wij hierboven toepasten, leidt ons thans tot de formules:

$$mu + nv = 1 \quad \text{(II*)}$$

$$\Delta_m \cdot u + \Delta \cdot v = \alpha \quad \text{(III*)}$$

en

$$m^2 b^2 = n^2 b^2 + 1 - 2nv \quad \text{(IV*)}$$

Door elimineren van de grootheden u en v vinden wij dan:

$$2mn\alpha = -(n^2 - m^2)b^2 + 1 + 2m\Delta_n.$$

Ook deze formule (in ietwat andere vorm geschreven) komt voor op blz. 27 van mijn werk uit 1907, waar ze toen is afgeleid voor systemen van rakende cirkels en werd aangeduid als formule 4b.

Het zal wel duidelijk zijn, dat de vier situaties, die wij door spiegeling van onze vier figuren ten opzichte van een verticaal kunnen afleiden (ze gelden voor gevallen met links gewonden grondspiraal) tot dezelfde twee formules leiden. Daarbij is er uiteraard mee rekening te houden, dat de

divergentie in deze gevallen moet gerekend worden: van het punt o' af naar links.

Samenvattende, kunnen wij algemeen de volgende stelling voor *ruitennetten* formuleren:

a. Wanneer de m -tallige spiralen *homodroom* zijn met de grondspiraal, dan geldt (onverschillig, of de n -tallige spiralen daaraan homodroom of antidroom zijn) de formule:

$$2mn\alpha = (n^2 - m^2)b^2 + 1 + 2n\Delta_m,$$

b. Wanneer echter de m -tallige spiralen *antidroom* zijn aan de grondspiraal, dan geldt (ook weer onverschillig, of de n -tallige daaraan homodroom of antidroom zijn) de formule:

$$2mn\alpha = -(n^2 - m^2)b^2 + 1 + 2m\Delta_n.$$

Ook deze stelling hebben wij hier afgeleid voor ruitennetten in het algemeen; ze geldt uiteraard ook voor *fundamentele* ruitennetten.

§ 8. *De waarden van α en b voor de drietallige ruitennetten $\{(n-m), m$ en $n\}$ en $\{m, n$ en $(m+n)\}$*

Wij hebben hierboven gezien, dat in alle enkelvoudige *fundamentele* ruitennetten twee punten zijn aan te wijzen, die op dezelfde afstand van het punt o zijn gelegen (wij nemen punt o als het laagste punt aan en rekenen alleen met de *daarboven* geplaatste punten), terwijl er in die netten geen ander punt *dichter* bij punt o voorkomt. Wij onderstelden daarbij, dat deze punten, die uiteraard op de grondspiraal liggen, daarop de nummers m en n dragen, waarbij wij $m < n$ aannamen.

Bij *bepaalde* fundamentele ruitennetten komt echter nog een derde punt, dus komen totaal drie punten op *gelijke* afstand van punt o voor.

Bedenkt men nu, dat bij die netten de hoeken tussen gecoördineerde, fundamentele spiralenstelsels nooit kleiner mogen zijn dan 60° , maar deze laatste hoek zelf wél gerealiseerd kan zijn, dan zal men inzien, dat deze laatste mogelijkheid betekent: een indeling van het oppervlak van de cilinder volgens een netwerk van gelijkzijdige driehoeken. Daarbij zullen de drie punten, welke daarbij op gelijke afstanden van punt o zijn gelegen, of de nummers $\{(n-m), m$ en $n\}$, of de nummers $\{m, n$ en $(m+n)\}$ moeten dragen. De punten $(n-m)$, m , n en $(m+n)$ zullen in deze volgorde hoger boven punt o liggen en de drie fundamentele coördinatie-spiralen, die van o naar die punten lopen, zullen in deze volgorde steiler verlopen.

Maar ook, wanneer men het voorafgaande in aanmerking neemt, kan de ligging van de drie punten, die het dichtst (en alle op gelijke afstand) nabij punt o liggen, nog verschillend zijn. Wij hebben dit in bijgaande fig. 11 toegelicht, die wij zouden kunnen completeren door de drie spiegelbeelden t.o.v. een verticaal in punt o toe te voegen.

Mogelijke standen der spiralen
door punten $\{m, n$ en $(n-m)\}$ en $\{(n-m), m$ en $n\}$

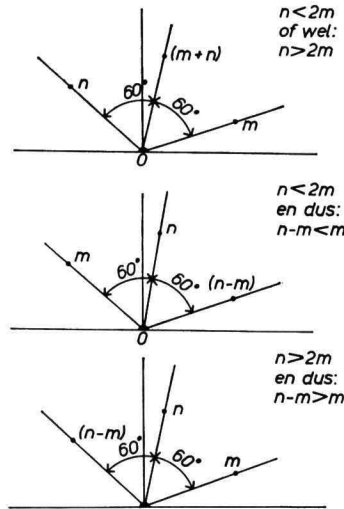


Fig. 11.

Er zouden zich uit de, aldus verkregen, zes mogelijkheden verschillende conclusies laten trekken, maar wij laten ze hier achterwege, omdat ze op dezelfde neerkomen als die, welke wij voor drietallige systemen van rakende cirkels in 1907 hebben geformuleerd.

Wij beperken ons hier tot het geven van de formules, die voor α en b bij de fundamentele ruitennetten gelden, welke wij thans in beschouwing hebben.

Voor de fundamentele netten $\{(n-m), m$ en $n\}$, waarvan de m -tallige spiralen *homodroom* zijn aan de grondspiraal, geldt:

$$b^2 = \frac{1}{m^2 + n^2 - mn} \quad \text{en} \quad 2m\alpha = \frac{2m-n}{m^2 + n^2 - mn} + 2\Delta_m,$$

en voor diezelfde netten, waarvan de m -tallige spiralen *antidroom* zijn aan de grondspiraal, geldt:

$$b^2 = \frac{1}{m^2 + n^2 - mn} \quad \text{en} \quad 2n\alpha = \frac{2m-n}{m^2 + n^2 - mn} + 2\Delta_n.$$

Voor ruitennetten $\{m, n$ en $(m+n)\}$, waarvan de m -tallige spiralen *homodroom* zijn aan de grondspiraal, geldt:

$$b^2 = \frac{1}{m^2 + n^2 + mn} \quad \text{en} \quad 2m\alpha = \frac{2n+m}{m^2 + n^2 + mn} + 2\Delta_m,$$

en voor diezelfde netten, waarvan de m -tallige spiraal *antidroom* is aan de grondspiraal geldt:

$$b^2 = \frac{1}{m^2 + n^2 + mn} \quad \text{en} \quad 2n\alpha = \frac{2m+n}{m^2 + n^2 + mn} + 2\Delta_n.$$

Wanneer m en n zeer grote, op elkaar volgende, getallen uit een summatie-reeks zijn, dan gaan de formules voor de divergenties over in: $\alpha = \Delta_m/m$ en $\alpha = \Delta_m/n$, die in het limietgeval aan elkaar gelijk zijn.

§ 9. *Fundamentele ruitennetten met verticale n -tallige spiralen*

Wij hebben in § 5 van dit hoofdstuk aangetoond, dat bij fundamentele ruitennetten (m en n), waarvoor $n > 2m$ is, zowel een homodroom als een antidroom verloop van de m - en de n -tallige spiralen mogelijk is. Bij $n > 2m$ moet dus ook een verticaal verloop van de n -tallige spiralen mogelijk zijn.

In de nevenstaande fig. 12 hebben wij de twee mogelijkheden, die zich daarbij kunnen voordoen, aangegeven. Het punt mn kan dan namelijk

*Topdriehoeken bij ruitennetten (m en n) met
vertikale n -tallige spiralen*

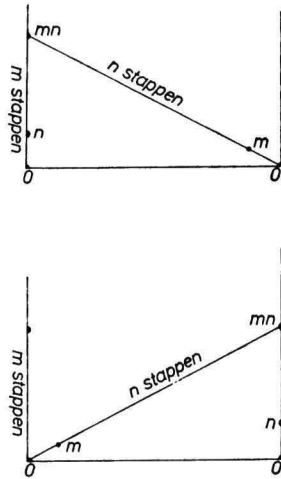


Fig. 12.

boven het punt o zowel als boven het punt o' voorkomen. In beide gevallen zal de betrekking gelden:

$$b^2 = \frac{1}{n^2 - m^2}.$$

Uiteraard blijven de, in de vorige paragraaf afgeleide betrekkingen gelden. Voor het geval, waarin de m -tallige spiralen homodroom aan de grondspiraal verlopen, geldt dus:

$$2mn\alpha = (n^2 - m^2)b^2 + 1 + 2n\Delta_m$$

en voor het geval, waarin de m -tallige spiraal antidroom aan de grondspiraal verlopen, geldt:

$$2mn\alpha = -(n^2 - m^2)b^2 + 1 + 2m\Delta_n.$$

Wanneer men de grootheid b voor deze mogelijkheden elimineert en in aanmerking neemt, dat $m\Delta_n - n\Delta_m = +1$, of $= -1$, resulteert in beide gevallen:

$$\alpha = \frac{\Delta_n}{n}.$$

Misschien zal de vraag rijzen, of deze waarde niet uitsluitend van de grootheid n afhangt, maar dit is geenszins het geval, immers de grootheid Δ_n is slechts te berekenen, wanneer, behalve n , ook m gegeven is.

Ter toelichting vermelden wij, dat in ruitennetten (2 en 3) geen verticale spiralen mogelijk zijn (immers dáárvoor is $n < 2m$), maar dat dit wél het geval is voor ruitennetten (1 en 3) en evenzo voor ruitennetten (2 en 5). Voor de laatste twee soorten van ruitennetten zullen de divergenties bij verticale n -tallige spiralen resp. bedragen: $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{5}$.

Wij komen naderhand – bij de bespreking van de grafiek voor het verband tussen α en b bij fundamentele ruitennetten – op de in deze § besproken, bijzondere gevallen terug.

§ 10. *Regelmatische kwadratenetten op het oppervlak van een cirkelcilinder*

Wanneer men bedenkt, dat de topdriehoek bij fundamentele kwadratenetten een driehoek met rechte tophoek en met opstaande zijden, gelijk aan mb en nb moet zijn, dan ziet men in, dat voor zulke netten algemeen moet gelden:

$$b^2 = \frac{1}{m^2 + n^2}.$$

Wanneer men dit invoert in de vergelijkingen, die het verband tussen α en b voor ruitennetten uitdrukken, dan blijkt, dat voor *kwadratenetten* deze regels kunnen worden opgesteld:

Wanneer de m -tallige spiralen *homodroom* aan de grondspiraal verlopen, dan geldt:

$$m\alpha = \frac{n}{m^2 + n^2} + \Delta_m,$$

maar wanneer de m -tallige spiralen *antidroom* aan de grondspiraal verlopen, dan geldt:

$$n\alpha = \frac{m}{m^2 + n^2} + \Delta_n.$$

Men kan deze formules (als 10a en 10b) terugvinden voor constructies van, in twee onderling loodrechte richtingen, rakende cirkels op een cirkelcilinder en wel op blz. 32 van mijn werk uit 1907.

Het is mij sedert gebleken, dat het mogelijk is om deze twee formules door één formule te vervangen. Daartoe redeneert men als volgt:

De eerste der formules geldt voor de gevallen, waarin:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = +1,$$

welke betrekking men ook kan schrijven:

$$1 + n\Delta_m = m\Delta_n$$

en ook — door beide met n te vermenigvuldigen en door daarna bij beide leden $m^2\Delta_m$ op te tellen — aldus:

$$n + m^2\Delta_m + n^2\Delta_m = m^2\Delta_m + mn\Delta_n.$$

Deelt men nu beide leden door $(m^2 + n^2)$, dan vindt men:

$$\frac{n}{m^2 + n^2} + \Delta_m = \frac{m(m\Delta_m + n\Delta_n)}{m^2 + n^2}.$$

Dit invoerende in de vergelijking, die wij hierboven voor $m\alpha$ hebben afgeleid, levert:

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + n\Delta_n}{m^2 + n^2}.$$

De tweede der formules geldt voor de gevallen, waarin:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = -1,$$

die wij op overeenkomstige wijze, als wij hierboven voor de formule met $+1$ deden, kunnen omvormen en daarna in de hierboven voor $n\alpha$ afgeleide vergelijking invoeren. Wij verkrijgen, dit doende, dezelfde betrekking voor α als wij zoëven gaven.

Wanneer wij voor m en n twee op elkaar volgende waarden van de sommatiereeks (1, 1) nemen, dan kunnen wij de thans gevonden betrekking in een nog eenvoudiger vorm brengen.

Uit onze tabel V kan men namelijk aflezen, dat men dan mag schrijven:

$$m = m_1, \quad n = n_1$$

en

$$\Delta_m = 2m_1 - n_1, \quad \Delta_n = n_1 - m_1,$$

waarin m_1 en n_1 twee op elkaar volgende termen van de reeks (1, 1) zijn, zodat men de formule dan ook deze vorm kan geven:

$$\alpha = \frac{(n_1 - m_1)^2 + m_1^2}{m_1^2 + n_1^2}.$$

Neemt men dan bovendien de betrekking in aanmerking, die wij in Hoofdstuk I voor sommen van kwadraten van de op elkaar volgende termen van de reeks (1, 1) hebben afgeleid, dan kan men onze laatste betrekking ook aldus schrijven:

$$\alpha = \frac{K_{2N-1}}{K_{2N+1}}.$$

Het is wellicht goed hier nogeens vast te stellen, dat de beide laatste vereenvoudigingen *niet* mogelijk zijn voor kwadratennetten met funda-

mentele coördinatiespiralen uit de reeksen $(1, z)$, wanneer $z = 3$, of groter dan 3, wordt aangenomen en evenmin voor netten, waarvoor de aantallen van die spiralen zijn op te vatten als, op elkaar volgende termen van de reeksen (p, q) . Voor deze kwadratennetten moet men terugvallen op de, hierboven afgeleide, algemene formule

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + n\Delta_n}{m^2 + n^2},$$

die intussen voor berekeningen ook nog eenvoudig is.

De bijzondere betekenis, die wij aan de kwadratennetten met spiralen uit de reeks $(1, 1)$, vooral vroeger, ook nog in 1960, hebben toegekend, rechtvaardigt een opsomming van de divergenties, die wij met de hierboven afgeleide, sterk vereenvoudigde, formule voor de lagere coördinatieparen berekenden. Ze luidt als volgt.

Waarden van

m_1 en n_1 : (1 en 1), (1 en 2), (2 en 3), (3 en 5), (5 en 8), (8 en 13), enz.

beantwoorden bij kwadratennetten aan de divergenties

$$\alpha: \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{5}{13}, \quad \frac{13}{34}, \quad \frac{34}{89}, \quad \frac{89}{233}, \quad \text{enz.}$$

Hierbij wijs ik er op, dat de waarden van α bij opklimmen in de reeks steeds dichter naderen tot de grootheid χ^2 , die ook bij onze voorafgaande beschouwingen zulk een belangrijke rol heeft gespeeld.

Het voorafgaande heeft intussen nog een bijzonder belang voor het vaststellen der divergenties van een kwadratennet, een opgave, die in de meeste gevallen moeilijk rechtstreeks kan, en meestal indirect, n.l. door berekening, moet worden opgelost.

Doorgaans kiest men voor de berekening: het delen van het aantal omwentelingen, dat de grondspiraal in één cyclus maakt, door het totaal aantal zijdelingse aanhangsels, dat men daarbij op die spiraal passeert.

Uit bovenstaande beschouwingen blijkt nu, dat wanneer m en n op elkaar volgende termen van de reeks $(1, 1)$ zijn — welke aantallen o.a. bij lage bladstanden moeilijk zijn vast te stellen — zowel het aantal omwentelingen per cyclus als het totale aantal bladeren per cyclus — twee termen (namelijk K_{2N-1} en K_{2N+1}) uit die reeks moeten zijn. Hierdoor wordt vaak de keuze in gevallen van onzekerheid vergemakkelijkt. Wij zagen, dat deze regel *niet* voor termen van andere summatiereeksen geldt, maar het optreden van zulke reeksen is veel zeldzamer.

Een voordeel van deze wijze van berekenen der divergentie is dan nog, dat beide vast te stellen grootheden bij verticale rek, of krimp, van cilindrische stengels *niet* veranderen.

In het botanisch gedeelte van deze publicatie zullen wij hierop nog nader moeten terugkomen.

§ 11. *Getallenvoorbeelden en tekeningen van belangrijke regelmatige fundamentele ruiten- en kwadratennetten op een cirkelcilinder*

Na hetgeen wij in de voorafgaande paragrafen hebben behandeld, kunnen wij voor getallenvoorbeelden van regelmatige fundamentele ruitennetten — de kwadratennetten inbegrepen — verwijzen naar onze berekeningen uit 1907 voor regelmatige systemen van rakende cirkels op een cirkelcilinder.

Deze zijn te vinden in de toen gegeven: *Tabelle I* (S. 37), *Tabelle II* (S. 38), *Tabelle III* (S. 52) en *Tabelle IV* (S. 54).

Wij hebben hieraan sedert nog een groot aantal nieuwe waarden toegevoegd, maar geven die niet in de vorm van tabellen. Met verschillende der reeds vroeger becijferde waarden zijn ze voor een deel te vinden door raadplegen van de „figurenverklaring”, die hier volgt.

Op *Plaat I* hebben wij namelijk een aantal tekeningen van ruiten- en van kwadratennetten gegeven. De keuze werd vooral bepaald door het feit, dat ze, bij een bestudering van de grafiek voor het verband tussen α en b , naar voren komen.

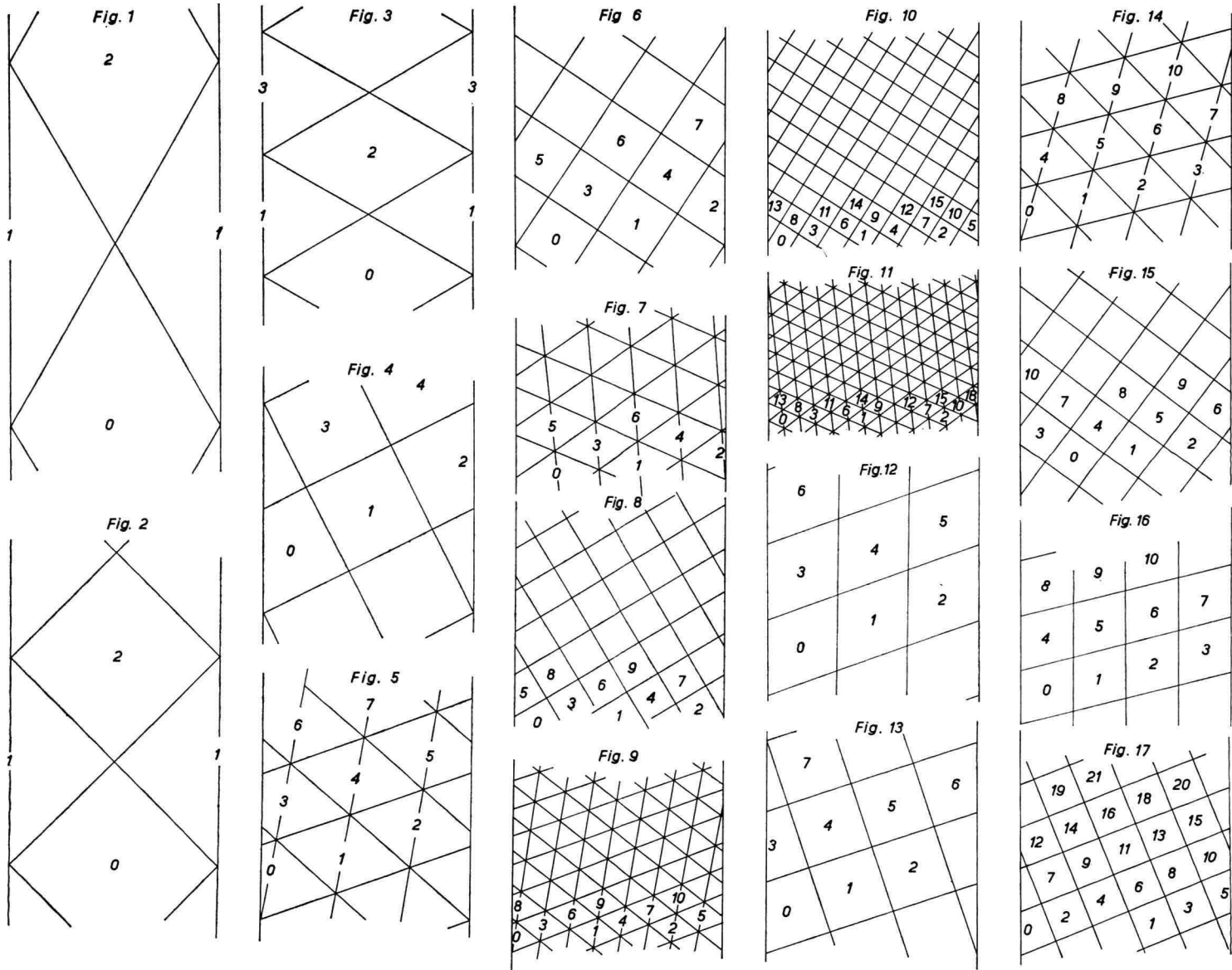
De meeste tekeningen stellen tweetallige fundamentele ruiten- en kwadratennetten (m en n) voor, waarin m en n twee op elkaar volgende termen van de summatiereeksen zijn, die wij uitvoerig hebben besproken.

De kwadratennetten heb ik reeds gezamenlijk als *Fig. 2* op blz. 138 van mijn voorlopige mededeling uit 1960 gepubliceerd. Ik heb ze ook hier opgenomen, omdat ze dan beter, in verband met andere ruitennetten tot hun recht komen. Er zal in een volgend hoofdstuk nog gelegenheid zijn om op deze kwadratennetten terug te komen.

Naast tweetallige komen dan drietallige ruitennetten, die als overgangen van drie tweetallige in elkaar kunnen worden opgevat.

Alle figuren zijn getekend op — tot platte stroken ontrolde — cirkelcilinders met dezelfde omtrek. Ze demonstreren met voorbeelden het verband tussen de divergentie der ruiten (α) en de lengte der zijden daarvan (b) bij twee of drie stelsels van spiralen. Die stelsels bestaan uit m en n , of uit m , n en $(m+n)$, evenwijdige, fundamentele spiralen. Hierin zijn m en n , en dus ook m , n en $(m+n)$, op elkaar volgende termen van summatiereeksen. Voor de meeste figuren zijn termen gekozen uit de reeks (1, 1), voor andere uit de reeksen (1, z) en voor weer enkele andere uit de reeksen (p , q).

Voor alle netten is ook de hoek (γ) van de ruiten vermeld. Die hoek is voor alle figuren 90° of kleiner dan 90° .



Plaat I. Voorbeelden van fundamentele ruiten- en kwadratennetten op een ontrolde cirkelcilinder.

No. Fig.
op Pl. I

1	$m=1, n=1$	$\alpha=180^\circ$	$b=1$	$\gamma=60^\circ$
2	$m=1, n=1$	$\alpha=180^\circ$	$b=0,7071$	$\gamma=90^\circ$
3	$m=1, n=1, m+n=2$	$\alpha=180^\circ$	$b=0,5774$	$\gamma=60^\circ$
4	$m=1, n=2$	$\alpha=144^\circ$	$b=0,447$	$\gamma=90^\circ$
5	$m=1, n=2, m+n=3$	$\alpha=128^\circ,577$	$b=0,378$	$\gamma=60^\circ$
6	$m=2, n=3$	$\alpha=138^\circ28'$	$b=0,277$	$\gamma=90^\circ$
7	$m=2, n=3, m+n=5$	$\alpha=142^\circ,10$	$b=0,229$	$\gamma=60^\circ$
8	$m=3, n=5$	$\alpha=137^\circ39'$	$b=0,171^5$	$\gamma=90^\circ$
9	$m=3, n=5, m+n=8$	$\alpha=135^\circ,92$	$b=0,143$	$\gamma=60^\circ$
10	$m=5, n=8$	$\alpha=137^\circ31'$	$b=0,106$	$\gamma=90^\circ$
11	$m=5, n=8, m+n=13$	$\alpha=138^\circ,14$	$b=0,088$	$\gamma=60^\circ$
12	$m=1, n=3$	$\alpha=120^\circ$	$b=0,354$	$\gamma=70^\circ30',5$
13	$m=1, n=3$	$\alpha=108^\circ$	$b=0,316$	$\gamma=90^\circ$
14	$m=1, n=3, m+n=4$	$\alpha=96^\circ55'$	$b=0,277$	$\gamma=60^\circ$
15	$m=3, n=4$	$\alpha=100^\circ48'$	$b=0,200$	$\gamma=90^\circ$
16	$m=1, n=4$	$\alpha=90^\circ$	$b=0,258$	$\gamma=75^\circ42'$
17	$m=2, n=5$	$\alpha=148^\circ,96^5$	$b=0,186$	$\gamma=90^\circ$

De figuren 12 en 16 geven twee voorbeelden van fundamentele ruitennetten (m en n), waarbij de n -tallige spiralen verticaal staan. Blijkens § 9 van dit hoofdstuk moeten de divergenties van dergelijke netten gelijk aan Δ_n/n zijn. Dergelijke netten zouden gemakkelijk met andere netten zijn te vermeerderen, want op ieder paraboolstuk van de „grafiek” op blz. 77, dat twee zigzagfiguren met elkaar verbindt, komt één punt voor, dat op een fundamenteel ruitennet met verticale spiralen betrekking heeft.

Interessanter zijn de *tweettallige* fundamentele ruitennetten (waarvan géén voorbeeld op Plaat I werd opgenomen), waarbij de m - en de n -tallige spiralen *homodroom* ten opzichte van elkaar verlopen. Wij geven daarvan hieronder, als fig. 13, twee voorbeelden:

- 1e. het fundamentele ruitennet (1 en 3), waarvan de divergentie is: $\alpha=124^\circ$ (een berekening leert, dat dan $b=0,365$ is),
- 2e. het fundamentele ruitennet (2 en 5), waarvan de divergentie is: $\alpha=143^\circ$ (waarvoor men berekent: $b=0,2242$).

Ruitennetten met homodrome fundamentele spiralensels.

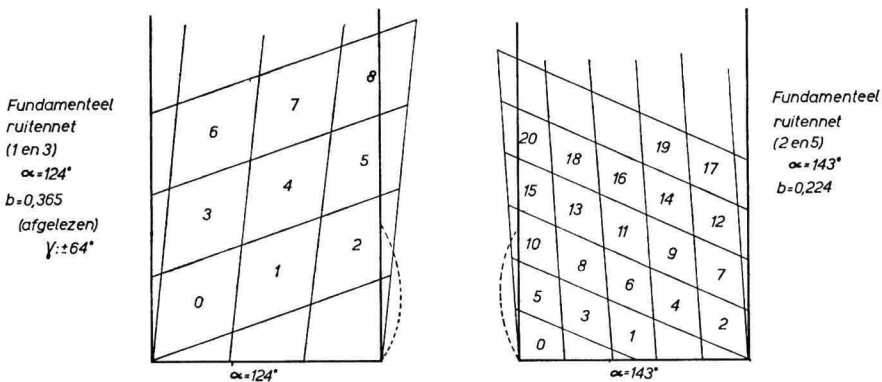


Fig. 13.

Men zal zien, dat de n -tallige spiralen in deze gevallen steil verlopen, hetgeen niet zal verwonderen, als men bedenkt, dat de top van de fundamentele driehoek bij dergelijke ruitennetten moet vallen binnen één der (geharceerde) segmenten, die wij in fig. 7 hebben aangegeven.

Wij wijzen er nog op, dat onze twee afzonderlijke constructies respectievelijk grote overeenkomst vertonen met de drietallige fundamentele netten (1, 2 en 3) en (2, 3 en 5), die in fig. 5 en fig. 7 van Plaat I zijn afgebeeld. De korte diagonalen der ruiten in onze afzonderlijke netten zijn echter korter dan de zijden van die netten.

In alle figuren, die wij als voorbeeld gaven — ook de hierboven afzonderlijk toegevoegde — had de hoek γ een waarde, gelegen tussen 60° en 120° (deze hoeken inbegrepen). Dit was ook te verwachten, want wij hebben nadrukkelijk vermeld, dat wij *fundamentele* ruitennetten zouden afbeelden.

Om dit feit nog eens te accentueren, verwijzen wij hier naar het voorbeeld van een ruitennet (fig. 9), waarvoor γ kleiner dan 60° werd gekozen. Dit net is dus *niet* fundamenteel.

Wij kozen een ruitennet (2 en 3), waarvoor $\gamma = 41^\circ 25'$ werd aangenomen. De waarde van b van het net werd gelijk 0,5 ondersteld. De divergentie laat zich dan berekenen op: $\alpha = 111^\circ, 6$.

Men zal uit de figuur zien, dat de 1-tallige spiraal (die wij stippelden) geen ruiten vormt, maar wel met andere spiralen (bijv. met de 2- en ook met de 3-tallige spiralen) parallelogrammen oplevert. Eén paar overstaande zijden van zulke parallelogrammen is zelfs de kortste afstand in het puntensysteem.

In ons voorbeeld zijn de 2- en de 3-tallige spiralen van het ruitennet *homodroom* gewonden, maar het zou ook mogelijk zijn geweest voorbeelden te geven van *niet*-fundamentele ruitennetten met *antidroom* gewonden spiralen. Hoe men tot de keuze van niet-fundamentele ruitennetten komt, zal in de volgende paragraaf blijken.

§ 12. De grafische voorstelling van het verband tussen de divergentie en de lengte der zijden voor regelmatige fundamentele ruitennetten op een cirkelcilinder

De grafische voorstelling van de in § 7 van dit hoofdstuk voor fundamentele ruitennetten afgeleide formules:

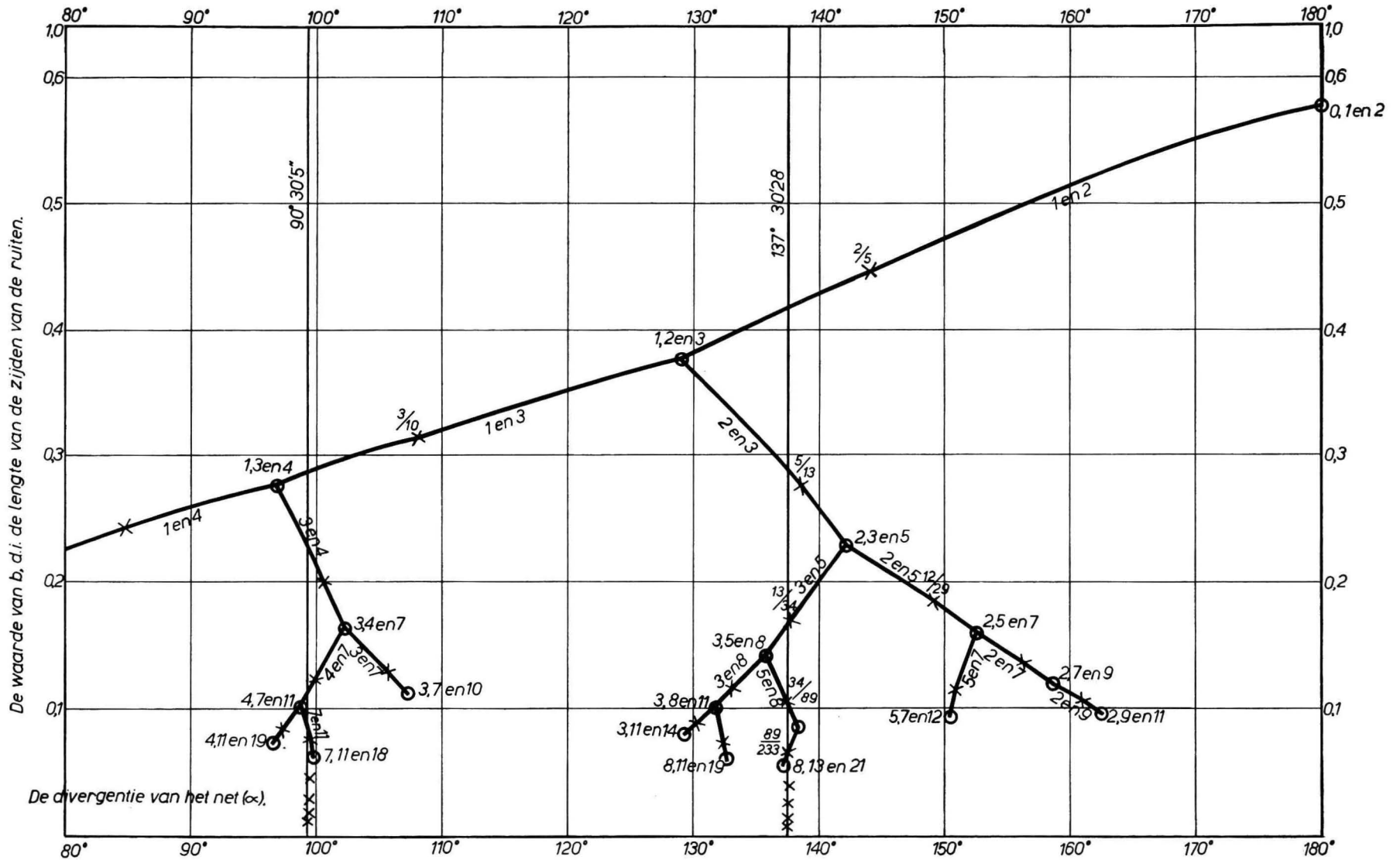
$$2mn\alpha = (n^2 - m^2)b^2 + 1 + 2n\Delta_m$$

en

$$2mn\alpha = -(n^2 - m^2)b^2 + 1 + 2m\Delta_n,$$

leidt tot dezelfde figuur, die ik in 1907 (als „Tafel” II) voor regelmatige systemen van rakende cirkels op een cirkelcilinder, als het verband tussen de divergentie en de diameter van de cirkels publiceerde.

Wij kunnen dan ook naar de daarvoor toen gegeven beschouwingen verwijzen, maar doen uitkomen, dat er thans van fundamentele ruitennetten (m en n) sprake is en niet van cirkelcontacten (m en n).



Plaat II. Het verband tussen de lengte der zijden en de divergentie bij belangrijke ruitennetten

Het paraboolstuk, dat betrekking heeft op een fundamenteel ruitennet (m en n), hebben wij laten beginnen en eindigen met een punt, waar nog twee paraboolstukken (dus totaal drie) samenkomen. Wij zullen daarom dergelijke punten als „drietallige punten” voor de grafiek aanduiden en het ruitennet, dat aan een dergelijk punt beantwoordt, als een „drietallig ruitennet” aanduiden.

De beperking tot de grafische voorstelling van de bovenvermelde paraboolstukken — ook al completeren wij de grafiek met alle denkbare combinaties van m en n — heeft tot consequentie, dat ze uitsluitend betrekking heeft op *fundamentele ruitennetten*. Dit zal bij nadere overweging van de afleidingen in de vorige paragrafen onmiddellijk duidelijk worden.

Het zal — vooral als men de grafiek met nog meer stukken van krommen gecompleteerd denkt — opvallen, dat er daarin reeksen van zulke stukken voorkomen, die *zigzagfiguren* vormen, welke naar beneden toe steeds smaller worden. De (drietallige) hoekpunten van die zigzagfiguren liggen beurtelings links en rechts van een (iets zwaarder getekende) verticaal, die zij bij het omlaag gaan, steeds dichter naderen. Op de basislijn der grafiek vallen hoekpunten met het voetpunt van de verticaal samen.

Wanneer men de getallen nagaat, waarop de paraboolstukken van een zigzagfiguur betrekking hebben, dan blijken die getallenparen twee op elkaar volgende termen van een zelfde sommatiereeks te zijn. Wij kozen in onze grafiek dezelfde reeksen, die wij in onze tabellen opnamen. De verticale lijn, die door alle deelstukken van een zigzagfiguur heenloopt, blijkt dan als voetpunt te hebben: de „limietwaarde”, die wij in Tabel VI voor de uitdrukkingen Δ_m/m en Δ_n/n voor de bedoelde reeks vermeldden (deze twee uitdrukkingen leveren bij de limiet dezelfde waarde op).

De deelstukken van de zigzagfiguren hebben — zoals bij de afleiding der figuur uit de formules blijkt — uitsluitend betrekking op fundamentele ruitennetten, waarvoor de coördinatiespiralen *antidroom* zijn gewonden.

De paraboolstukken, die rechts en links van uit de drietallige hoekpunten van de zigzagfiguren naar buiten lopen, hebben *aanvankelijk* ¹⁾ betrekking op ruitennetten, waarvan de coördinatiespiralen der twee stelsels *homodroom* zijn gewonden. Als men zich verder van het drietallige punt van uitgang verwijderd, gaan echter de spiralen van één der twee stelsels van het net steeds steiler verlopen; deze spiralen plaatsen zich daarna verticaal en verlopen vervolgens *antidroom* aan het andere stelsel van coördinatiespiralen. De afgebogen kromme vormt van nu af de eerste tak van een naburige zigzagfiguur, waarvan de deelstukken — zoals bij de eerst beschouwde figuur — uitsluitend aan stelsels van antidroom gewonden spiralen beantwoorden.

Met het hier geschetste verloop der paraboolstukken hangt samen, dat

1) Bedoeld is hier: nabij het drietallige beginpunt.

het aantal zigzagfiguren, bij completering, naar beneden toe in de grafiek sterk toeneemt en ten slotte oneindig groot wordt. De lengten der deelstukken nemen, als men naar beneden gaat, voortdurend af.

Een consequentie van de geschetste opbouw der grafiek is, dat er velden ontstaan, waarbinnen zich geen paraboolstukken bevinden. Ze worden aan de bovenzijde begrensd door twee paraboolstukken, maar aan de onderzijde door twee reeksen van zulke stukken, die bij deze reeksen min of meer in elkaars verlengde liggen, zodat de velden, ruwweg, als vierhoekige figuren kunnen worden omschreven, waarvan het laagste hoekpunt op de basislijn is gelegen.

Het meest opvallend van de velden is wel, dat voor een bepaald veld de getallen, die naast de grenslijnen staan, en ook die, welke bij de daarop gelegen drietallige punten worden aangetroffen, alle één bepaald getal gemeen hebben. Zo vindt men (na completering van de grafiek) het getal 3 overal op de omtrek van het veld, waarvan het laagste punt ligt op de basislijn, en wel daar, waar als divergentie vermeld staat: 120° .

Er zijn intussen verschillende velden aan te wijzen, waarvan de grenslijnen en hun hoekpunten een nummer gemeen hebben. Men kan bijvoorbeeld in de door mij in 1907 afgebeelde grafiek velden aanwijzen, die door het gemeenschappelijk nummer 5 zijn gekenmerkt.

Een uitzonderlijke vorm nemen de velden aan, waarvoor naast het hoogste punt de getallen (0, 1 en 1) en (1, 1 en 2) voorkomen. Dit hangt samen met het feit, dat wij hier de grafiek naderen voor ruitennetten, waarvan de grondspiraal tegengesteld gewonden is als bij onze grafiek het geval is.

Wij vestigen er tenslotte nog de aandacht, dat op de Plaat II drietallige punten door cirkeltjes zijn gekenmerkt en de kwadratenetten (dus de fundamentele ruitennetten met rechte hoeken) door kruisjes. Behalve de waarden van m en n hebben wij voor de kwadratenetten meestal ook de divergenties (als breuken) aangegeven. Om onduidelijkheid te voorkomen, lieten wij deze vermeldingen echter ook wel achterwege.

Er zouden op de grafiek nog wel andere merkwaardige punten zijn aan te wijzen. Bij de bespreking der „getallenvoorbeelden” zullen wij enkele daarvan releveren.

Reeds in het begin van deze paragraaf hebben wij opgemerkt, dat wij ons hier tot fundamentele ruitennetten beperkten. Wanneer men echter de paraboolstukken, uitgaande van de drietallige punten, naar boven en naar beneden toe zouden voortzetten, dan zouden de punten, die op de verlengden voorkomen, beantwoorden aan ruitennetten met top hoeken kleiner dan 60° of groter dan 120° . Wij kunnen dus zodoende, bij bepaalde waarden van m en n , waarden van α en b vinden voor *niet*-fundamentele ruitennetten. Als voorbeeld verwijzen wij naar figuur 9, blz. 60, waarin men zulk een net vindt afgebeeld. Het punt, dat op onze grafiek daaraan beantwoordt, kan men aantreffen door het in de grafiek getekende paraboolstuk met kantschrift (2 en 3) naar boven te verlengen en het punt te

zoeken, waar dit verlengde de ordinaat boven de waarde $112^{\circ},5$ snijdt.

Men zal inzien, dat alle, naar boven of beneden verlengde parabolstukken waarden voor dergelijke niet-fundamentele ruitennetten opleveren.

§ 13. *Enkele aanvullende beschouwingen over cycli bij regelmatige kwadratennetten op een cirkelcilinder*

Wanneer men één der punten van een enkelvoudig regelmatig puntensysteem op een cirkelcilinder als nulpunt aanneemt, dan zal men langs de grondspiraal omhoog gaande, na een kleiner of groter aantal keren de cilinder te zijn rondgegaan, op een punt komen, dat zich verticaal boven het nulpunt bevindt. Boven dit nieuwe punt, zal het systeem te beschouwen zijn als verkregen door het gepasseerde gedeelte van het puntensysteem verticaal over het cylinderoppervlak omhoog te schuiven. Boven het daarbij verkregen gedeelte van het net bevindt zich dan een nieuw, op overeenkomstige wijze te verkrijgen, identiek volgend gedeelte. Men spreekt dan van een *cyclische* herhaling en wij zullen ons nu de vraag voorleggen, hoe een *cyclus* bij een enkelvoudig *kwadratennet* (waarbij de kwadraten in het algemeen schuin verlopende zijden bezitten) is opgebouwd.

In de eerste plaats zullen wij nagaan, hoeveel punten er per cyclus op het cylinderoppervlak voorkomen.

Wij beschouwen daarvoor de (rechthoekige) topdriehoek.

Wanneer wij de hoogte van het punt met het nummer 1 boven de basis met h_1 aanduiden, dan zal de hoogte van de topdriehoek gelijk zijn aan: $mn \cdot h_1$. Wij kunnen nu de inhoud van de driehoek door twee uitdrukkingen aangeven, die wij aan elkaar gelijk stellen, waardoor wij vinden:

$$\frac{1}{2} mn h_1 \cdot 1 = \frac{1}{2} mb \cdot nb,$$

waarin b de lengte van de zijde van de kwadraten is. Wij zien dan, dat:

$$h_1 = b^2.$$

Nu hebben wij, geheel algemeen voor een regelmatig kwadratennet (m en n) afgeleid:

$$b^2 = \frac{1}{m^2 + n^2},$$

zodat wij vinden:

$$h_1 = \frac{1}{m^2 + n^2}.$$

Wanneer wij dus, van punt 0 uitgaande, over punt 1, langs de grondspiraal omhoog gaande, in het punt met nummer $(m^2 + n^2)$ zijn aangekomen, zullen wij op een hoogte gelijk aan de eenheid boven punt 0 zijn. Blijkens onze definitie van cyclus zullen wij dan één cyclus hebben doorlopen.

Hiermee hebben wij aangetoond, dat de cycli bij een kwadratennet (m en n) kunnen worden beschouwd als te zijn opgebouwd uit grote, boven elkaar opgestapelde, kwadraten (met horizontale en verticale zijden gelijk aan de omtrek van de cilinder) en wij hebben tevens bewezen, dat die kwadraten ieder $(m^2 + n^2)$ punten bevatten. Dit geldt onafhankelijk, welke gehele waarden wij aan m en n ook toekennen. Als wij „enkelvoudige” systemen beschouwen, mogen m en n echter niet onderling deelbaar zijn.

Wij zullen nu verder (met fig. 14) laten zien, hoe men langs zeer eenvoudige weg een cyclus voor een „enkelvoudig kwadratennet (m en n)”,

Begin van de constructie van kwadratennetten [5 en 7]

Links met linksgewonden grondspiraal. Rechts met rechtsgewonden.

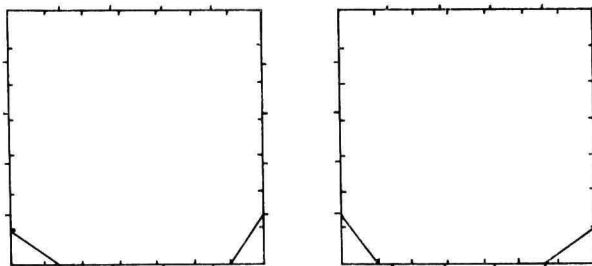


Fig. 14.

met de twee stelsels van elkaar loodrecht snijdende coördinatiespiralen kan construeren.

Men tekent daartoe eerst het kwadraat, waarbinnen een en ander moet worden ontworpen, waartoe — zoals wij zagen — een kwadraat met zijden gelijk aan de eenheid van lengte, die horizontaal en verticaal zijn geplaatst, kan dienen.

Daarna deelt men ieder der vier zijden, zowel in m als in n gelijke delen in. De deelpunten worden, op een bepaalde, thans nader aan te geven, wijze door rechte lijnen verbonden. Vooreerst kiest men twee verbindingslijnen zó, dat er door de twee rechte hoeken aan de basis van het kwadraat en door de opstaande zijden en die basis zelve twee kleine rechthoekige driehoeken worden gevormd. De lengten der rechthoekszijden daarvan kiest men daarbij zó, dat ze voor de ene kleine driehoek gelijk zijn aan $1/m$ en $1/n$ en voor de andere driehoek gelijk aan $1/n$ en $1/m$. Door de indeling der zijden van het kwadraat is de keuze der daarvoor nodige deelpunten op de zijden aangewezen.

De hypotenusa's der kleine rechthoekige driehoeken staan dan loodrecht op elkaar en zij geven de richtingen van de coördinatiespiralen binnen het kwadraat aan. Men moet dan ook de andere deelpunten der zijden zodanig paarsgewijze door rechte lijnen verbinden, dat deze evenwijdig met de hypotenusa's lopen. Men ziet gemakkelijk in, dat

het grote kwadraat dan door die schuine lijnen in kleine kwadraten, of gedeelten van zulke kwadraten, wordt ingedeeld. Bij opwickelen van het grote kwadraat tot een cilinder zullen de langs de verticale zijden geplaatste deelstukken van kwadraten, dank zij de gekozen constructie, zich, twee aan twee, tot complete, kleine kwadraten op het cilinderoppervlak verenigen. Door toevoegen, onder en boven, van identieke en identiek-ingedeelde, grote kwadraten, geldt hetzelfde voor de, langs de onder- en de bovenzijde van het grote kwadraat geplaatste, deelstukken van kleine kwadraten.

Wij kunnen als volgt aantonen, dat, bij deze constructiemethode, de lengte der zijden der kleine kwadraten degene is, die bij een kwadraten-net (m en n) vereist wordt.

Wanneer men de scherpe hoek van de twee congruente rechthoekjes, waarmee wij onze constructie begonnen, aanduiden met β , dan kan men de lengte (b) der zijden van de kleine kwadraten, welke door de schuine lijnen worden gevormd, voorstellen door:

$$b = \frac{1}{n} \cos \beta = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}}.$$

Uit onze figuur volgt dan verder: $\sin \beta = 1/n$ en $\cos \beta = 1/m$, zodat:

$$b = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1/n}{1/m}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

hetgeen juist voor de lengte van de zijden der kwadraten bij een kwadraten-net (m en n) verlangd wordt.

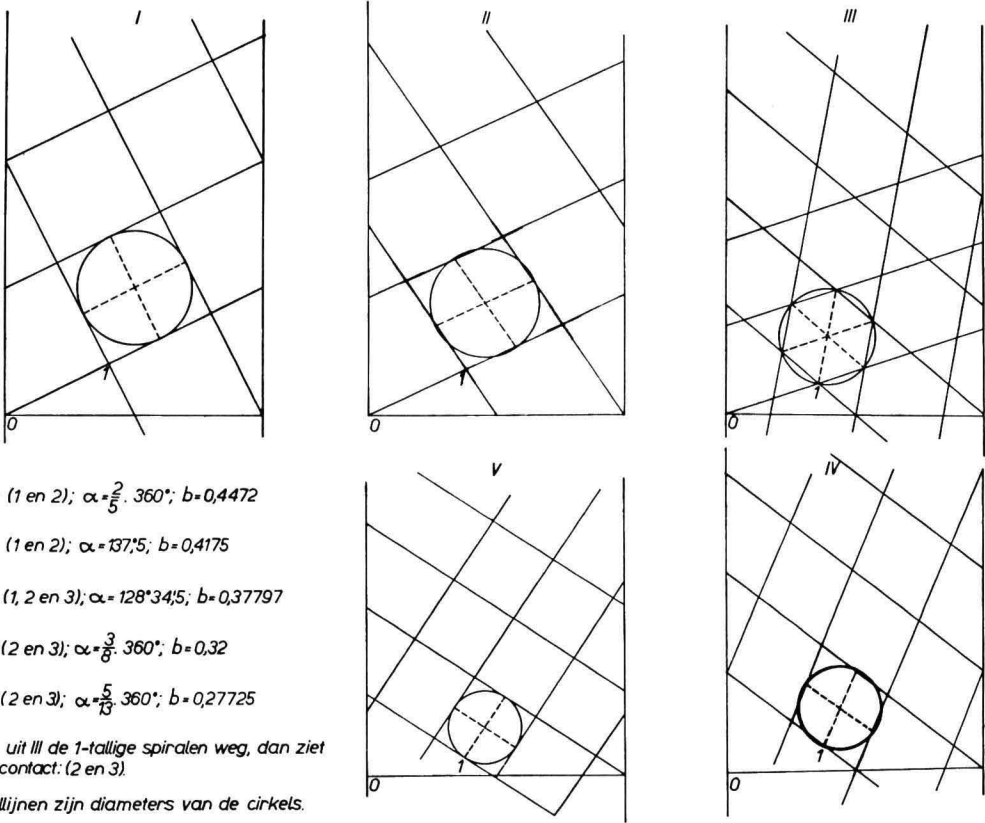
Bij de wijze van plaatsing der twee kleine rechthoekige driehoekjes aan de basis van het grote kwadraat blijft in de hierboven beschreven constructie willekeur bestaan, wat betreft de keuze van het driehoekje, dat men rechts of links aan het einde van de basis wil plaatsen.

Het zal wel geen betoog behoeven, dat er daardoor twee mogelijke kwadratennetten zijn te construeren, en dat deze spiegelbeelden tenopzichte van een verticaal zijn. Het ene net zal een links-, het andere een rechtsgewonden grondspiraal bezitten.

§ 14. *Toelichting van de identiteit van de formules voor het verband tussen α en b , geldende bij fundamentele ruitennetten en bij regelmatige systemen van rakende cirkels op een cirkelcilinder*

Ter toelichting van de identiteit van de formules voor fundamentele ruitennetten en die voor de, in 1907 besproken, systemen van rakende cirkels zullen wij laten zien, dat men door onderlinge raakpunten van de toen beschouwde cirkels rechte lijnen kan trekken, die een regelmatig ruitennet vormen, waarvan de zijden der ruiten gelijk zijn aan de diameter der cirkels.

Toelichting van de stelling, dat het verband tussen de *divergenties* der middelpunten der ruitennetten en de lengten der zijden der *ruiten* hetzelfde is als het verband tussen α en b voor systemen van rakende cirkels



I. Contact (1 en 2); $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 360^\circ$; $b = 0,4472$

II. „ (1 en 2); $\alpha = 137,5$; $b = 0,4175$

III. „ (1, 2 en 3); $\alpha = 128^\circ 34' 5$; $b = 0,37797$

IV. „ (2 en 3); $\alpha = \frac{3}{8} \cdot 360^\circ$; $b = 0,32$

V. „ (2 en 3); $\alpha = \frac{5}{13} \cdot 360^\circ$; $b = 0,27725$

Laat men uit III de 1-tallige spiralen weg, dan ziet men het contact: (2 en 3).

De stippelijnen zijn diameters van de cirkels.

De middelpunten van de cirkels hebben dezelfde divergenties $1/6$ van elkaar als de punten 1 $1/6$ van punten 0

Fig. 15.

Wij hebben hiertoe in fig. 15 voor enige regelmatige cirkelsystemen een cirkel getekend (de omtrek van de cirkelcilinder, waarop de systemen voorkomen, in alle figuren weer gelijk aan de eenheid nemende). De bijzonderheden van de cirkelsystemen zijn in de kantschriften omschreven. Bovendien hebben wij ook de overeenkomstige ruitennetten (waarop vrijwel dezelfde kantschriften betrekking hebben) afgebeeld. Vervolgens hebben wij het net evenwijdig verschoven en wel zó, dat het hoekpunt van één der ruiten samenvalt met het middelpunt van een cirkel.

De zijden van de gestippelde ruiten gaan voor *alle* figuren door de onderlinge raakpunten van cirkels.

In de gevallen, waarin als ruiten kwadraten zijn gekozen, *raken* de zijden van die kwadraten aan de cirkels en wel *alle* in de onderlinge raakpunten van de cirkels.

In gevallen, waarin de ruiten scherpe hoeken van 60° (dus stompe van

120°) bezitten, gaan de zijden der ruiten wél *alle* door de onderlinge raakpunten der cirkels heen, maar ze *raken* daar *niet* aan de cirkels.

In gevallen, waarin de ruiten andere hoeken dan 60°, 90° en 120° bezitten, gaan de zijden der ruiten wel door onderlinge raakpunten van cirkels heen, maar ze raken daar niet aan de cirkels en bovendien gaan die zijden *ook nog* (de cirkel snijdend) door andere punten als onderlinge raakpunten van cirkels.

Van de beide eerste gevallen zijn de voorbeelden gemakkelijk uit de figuren te kiezen. Van de laatst genoemde gevallen leveren die, welke wij als in figuur 15 als II en IV aanduiden, twee voorbeelden ¹⁾.

Welke systemen cirkels en ruiten men echter ook kiest, in *alle* gevallen gaan de zijden der ruiten door raakpunten der cirkels heen en wordt het platte vlak door rakende cirkels zowel als door, tegen elkaar aansluitende, ruiten (met zijden, die gelijk zijn aan de diameters der cirkels) op de regelmatige wijze, die aan de cirkelsystemen en aan de ruitennetten *beide* eigen zijn, opgevuld.

Wij voegen hieraan nog toe, dat er, wanneer het ruitennet *niet*-fundamenteel is, géén regelmatig systeem van elkaar rakende cirkels (in de, in 1907 aangegeven, zin) kan worden getekend. Dit is bijvoorbeeld gemakkelijk te constateren aan het niet-fundamentele ruitennet (2 en 3), dat wij in figuur 9 hebben afgebeeld. Tekent men in die figuur cirkels met verschillende (onderling gelijke) stralen rond de hoekpunten der ruiten, dan blijkt het niet mogelijk om een straal te kiezen, waarbij de cirkels elkaar op meer dan twee (tegenover elkaar op de omtrek van een cirkel gelegen) punten raken, zonder dat die cirkels elkaar elders snijden. Dit nu is een eis, die aan regelmatige systemen van rakende cirkels gesteld moet worden.

§ 15. *Evenredig verticaal uitrekken of krimpen van een regelmatig puntenstelsel op een uitgerold cilinderoppervlak*

In figuur 16 hebben wij boven elkaar twee uitgeslagen cycli van regelmatige *puntensystemen* getekend, waarvoor wij er twee kozen, waarbij de coördinatie-spiralen (die *niet* getekend zijn) kwadraten zouden vormen. In de bovenhelft van de figuur zijn dit de 5- en de 8-tallige spiralen en in de onderhelft de 3- en de 5-tallige spiralen.

Wij plaatsten de begin- en dus ook de eindpunten van de cycli verticaal boven elkaar, zodat men gemakkelijk kan aflezen, dat in de bovenste cyclus 89 punten en in de onderste cyclus 34 punten voorkomen. Verder kan men vaststellen, dat bij het volgen van de grondspiraal van punt 0 tot het eindpunt, voor de bovenste en voor de onderste cyclus respectieve-

¹⁾ Een nog algemener voorbeeld zou het systeem (1 en 3) met $\alpha = \frac{2}{7} \cdot 360^\circ$ te zien geven.

Overgangen van paren van kwadratische puntensystemen in elkaar,
door ietwat scheef verticaal omlaag rekken.

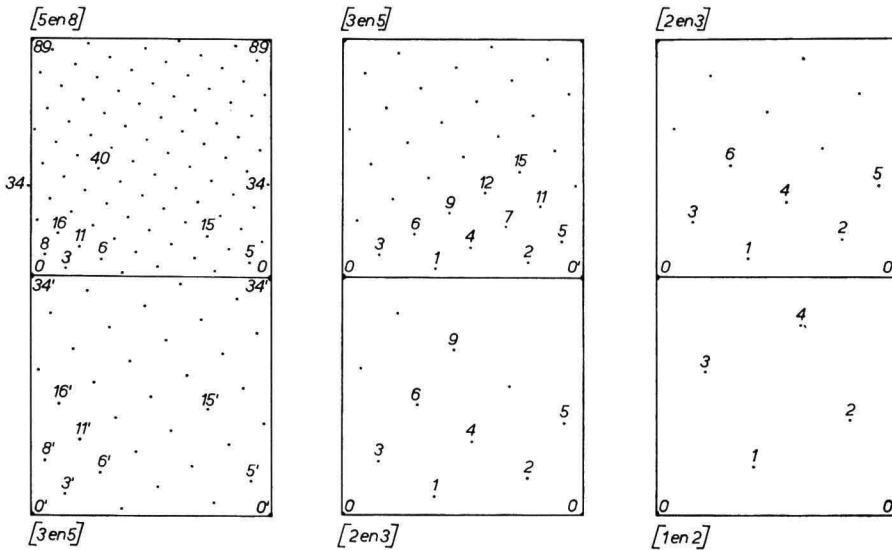


Fig. 16.

lijk 34 en 13 keer de cilinder moet worden rond gelopen. Hieruit volgt, dat de divergenties van de twee puntensystemen zijn:

$$\frac{34}{89} = 0,3820 \text{ en } \frac{13}{34} = 0,3823.$$

De verhouding van de zoëven genoemde divergenties bedraagt:

$$\frac{34 \times 34}{13 \times 89} = \frac{1156}{1157};$$

de verhouding is dus niet precies 1, maar verschilt daarvan slechts weinig. Dit laatste kan men ook uit de figuur aflezen, waaraan men bijvoorbeeld zal waarnemen, dat de punten met de nummers 34 in de onderste en de bovenste helft niet nauwkeurig boven elkaar liggen, maar toch vrijwel verticaal boven elkaar zijn te vinden.

Men kan dus concluderen, dat punten met hetzelfde nummer „praktisch gesproken” verticaal boven elkaar liggen. Ze liggen uiteraard voor beide systemen op hun grondspiraal, die in het onderste systeem sterker helt dan in het bovenste. Het punt met nummer 1 ligt immers voor het bovenste systeem op $1/89$, en het punt 1' van het onderste systeem op $1/34$ van de totale hoogte van de cyclus boven de basislijn.

Deze situatie kan men ook aldus uitdrukken: men kan „praktisch gesproken” het onderste *puntensysteem*, d.w.z. het systeem (3 en 5), uit het bovenste, d.w.z. het systeem (5 en 8), verkrijgen door de ordinaten ¹⁾

1) De ordinaten moet men voor beide cycli rekenen van *hun* basislijn af.

van de punten van het bovenste alle in dezelfde verhouding te vergroten, n.l. in de verhouding $89/34$. Wij zullen, in gevallen als dit, van *evenredige verticale rek* spreken.

Het zal intussen duidelijk zijn, dat onze figuur onmogelijk een overgang door *nauwkeurig*-verticale rek kan voorstellen. Immers dáárbij zou een nieuwe cyclus met hetzelfde totaal aantal punten moeten optreden en in dat geval zou het punt met het nummer 34 van de onderste helft onmogelijk nauwkeurig verticaal onder het punt met het nummer 89 van de bovenste helft kunnen vallen.

Men moet dus vaststellen, dat de onderste cyclus slechts *bij benadering* kan worden beschouwd als ontstaan te zijn door verticale rek naar omlaag van de bovenste cyclus. Het feit, dat deze benadering opvallend groot is, wordt veroorzaakt door de omstandigheid, dat de divergenties van de twee kwadraten zeer dicht tot elkaar naderen.

Het is wellicht goed, er de aandacht op te vestigen, dat de vijftallige spiralen zowel behoren tot *opvallende* ¹⁾ spiralen van het bovenste als van het onderste systeem, maar dat die van het bovenste systeem de minder hellende van de opvallende zijn en de vijftallige spiralen van het onderste systeem de sterker hellende van de opvallende spiralen dáárvan zijn.

Ook is het goed, hier te releveren, dat in het onderste systeem de 8-tallige spiralen *niet* behoren tot de opvallende, maar dat er in dat systeem wel degelijk acht evenwijdige spiralen zijn aan te wijzen, waarop alle punten van het systeem zijn te vinden. Zo zijn er in het bovenste systeem ook drie evenwijdige spiralen aan te wijzen, waarop alle punten van dat systeem zijn te vinden, welke spiralen echter *niet* tot de opvallende behoren.

Verder zullen de kleine *kwadraten*, waaruit men de bovenste cyclus kan denken te zijn opgebouwd, terug te vinden zijn als *parallelogrammen*, die de onderste cyclus opbouwen (het parallelogram 3', 8', 16', 11' in het onderste systeem correspondeert bijvoorbeeld met het kwadraat 3, 8, 16, 11 van het bovenste). Daarbij moet men echter weer bedenken, dat ook de parallelogrammen slechts *bij benadering* door verticale rek uit de kwadraten van de bovenste cyclus kunnen ontstaan zijn.

Wij zijn op deze bijzonderheden nader ingegaan om te doen uitkomen, dat men *niet* mag zeggen: door verticale evenredige rek gaat het bovenste systeem van kwadraten over in het onderste systeem van grotere kwadraten.

De benaderende overgang door de bedoelde rek geldt uitsluitend voor de beide *puntensystemen*.

Het ligt voor de hand, ons hierboven gegeven voorbeeld uit te breiden tot andere paren van puntensystemen met opvallende kwadratische coördinatiesystemen, in de eerste plaats tot zulke uit paren, die behoren tot dezelfde summatiereksen. Wij hebben dan ook in onderstaande tabel

¹⁾ Wij gebruiken hier dit woord in afwijking van onze voorkeur.

zulke paren opgenomen en in de laatste kolom de *verhoudingen* der divergenties vermeld.

Het blijkt, dat die verhouding bij opstijgen in de reeks (1, 1) snel tot de eenheid nadert, bij de reeks (1, 3) langzamer en bij de reeks (2, 5) nog langzamer.

De meest opvallende loodrechte coördinatiespiralen van paren van cycli voor puntensystemen voor drie summatiereeksen.

De verhouding der divergenties van de puntensystemen bij de paren der cycli.

Reeks (1, 1)

[1 en 1] en [1 en 2]	$\frac{1}{2} : \frac{2}{5} = \frac{5}{4}$
[1 en 2] en [2 en 3]	$\frac{2}{5} : \frac{5}{13} = \frac{26}{25}$
[2 en 3] en [3 en 5]	$\frac{5}{13} : \frac{13}{34} = \frac{170}{169}$
[3 en 5] en [5 en 8]	$\frac{13}{34} : \frac{34}{89} = \frac{1157}{1156}$
[5 en 8] en [8 en 13]	$\frac{34}{89} : \frac{89}{233} = \frac{7922}{7921}$

Reeks (1, 3)

[1 en 3] en [3 en 4]	$\frac{3}{10} : \frac{7}{25} = \frac{75}{70} = \frac{15 \times 5}{14 \times 5}$
[3 en 4] en [4 en 7]	$\frac{7}{25} : \frac{18}{65} = \frac{455}{450} = \frac{91 \times 5}{90 \times 5}$
[4 en 7] en [7 en 11]	$\frac{18}{65} : \frac{47}{170} = \frac{3060}{3055} = \frac{612 \times 5}{613 \times 5}$

Reeks (2, 5)

[2 en 5] en [5 en 7]	$\frac{12}{29} : \frac{31}{74} = \frac{888}{899}$
[5 en 7] en [7 en 12]	$\frac{31}{74} : \frac{81}{193} = \frac{5983}{5994}$

Voor de drie reeksen is de afwijking — met uitzondering van de overgang van systeem [1 en 2] en systeem [1 en 1] — niet zó groot, dat men de bijzonderheden van de, als voorbeeld gegeven overgang, niet kan terugvinden. Dit geldt ook voor overgangen van twee op elkaar volgende systemen binnen andere summatiereeksen. Overgangen van kwadratenetten uit *verschillende* summatiereeksen zullen, in het algemeen, belangrijke afwijkingen van de eenheid voor de verhouding der divergenties te zien geven, vooral bij reeksen, die ver uiteenliggen en bij kleine coördinatiegetallen.

Het zal duidelijk zijn, dat bij „voortgezet” uitrekken meer overgangen dan één kunnen optreden. Wanneer men bijvoorbeeld een kwadratennet

met twee grote, op elkaar volgende coördinatiegetallen uit de reeks (1, 1), zoals [89 en 144], als uitgangspunt neemt, zal men, bij evenredig verticaal uitrekken, achtereenvolgens overgangen tot de systemen [34 en 55], [13 en 21], [8 en 5], [3 en 2], [1 en 1] *benaderen*, al wijken dan ook de divergenties van de juiste waarden der divergenties van deze kwadraten-netten ($\frac{34}{89}$, $\frac{13}{34}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$) steeds sterker van elkaar af.

Wij geven aan dit resultaat nog een andere vorm, al zijn wij er ons van bewust, dat wij hiermee op het terrein van de „bladstandentheorieën” komen, dat wij tot nu toe hebben vermeden.

Men kan zich namelijk voorstellen, dat er in de levende plant een mechanisme werkzaam is, waardoor kwadratennetten, die bij benadering zijn gerealiseerd, worden recht getrokken en daardoor met groter nauwkeurigheid worden verwezenlijkt. In dit geval zullen, bij verticaal evenredig uitrekken van een hoog systeem uit een bepaalde additiereeks, ook lagere systemen optreden, die zelve niet werden aangelegd. Vooral voor de verklaring van *overgangen* van bladstanden aan een zelfde orgaan in elkaar verdient dit gezichtspunt in aanmerking te worden genomen.

§ 16. *Niet-evenredig, maar toch wetmatig verticaal rekken of krimpen van regelmatige puntensystemen op een cilinderoppervlak*

Ter toelichting van hetgeen wij hier onder een „wetmatige” rek verstaan, verwijzen wij naar hetgeen op pp. 1026–1097 van Chapter XVII van het werk van D'ARCY WENTWORTH THOMPSON „On Growth and Form” (A New Edition, Cambridge 1942) voorkomt onder de titel „On the Theory of Transformations, or the Comparison of Related Forms”. Hij behandelt daarin een aantal voorbeelden van organismen, en van structuren bij organismen, die, na afbeelding op een kwadratisch netwerk¹⁾, door *eenvoudige vervormingen* van dit netwerk (met zijn ondergrond en met de daarop voorkomende tekening) veranderen in tekeningen, gelijkende op die van verwante organismen of van structuren bij zulke organismen.

In de eerste plaats bespreekt THOMPSON gevallen, waarbij dit geschiedt bij een vervorming van het kwadratische net door uitrekken van de kwadraten in de richting van één der paren van de zijanten der kwadraatjes, waarbij de *kwadraten* veranderen in onderlinge gelijk geproportioneerde *rechthoeken* en waarbij dus bijvoorbeeld een cirkel verandert in een ellips. Het zal duidelijk zijn, dat tot deze wijze van veranderen de vervorming behoort, die wij in de voorafgaande paragraaf hebben besproken en daar hebben aangeduid als evenredige rek, of krimp, in verticale richting.

In de tweede plaats beschouwt THOMPSON de wijze van uitrekking, waarbij de vervorming der kwadraatjes wél in één richting, parallel aan

¹⁾ De kwadraatjes worden daarbij met de zijden horizontaal en verticaal opgesteld.

een paar evenwijdige zijden der kwadraatjes, geschiedt, maar waarbij dit niet meer „uniform” plaats vindt, doch in toenemende of in afnemende mate, met de afstand tot een lijn, zoals het geval zou zijn, wanneer het net van kwadraten, waarbinnen de tekening voorkomt, oorspronkelijk was aangebracht op een caoutchouc band, die in de richting van de rek met regelmaat in dikte toeneemt of afneemt en dus in die richting minder of meer „uitrekbaar” is dan in andere richtingen. Als voorbeeld van dergelijke wijzen van vervormen noemt hij het geval, waarbij de rek der kwadraatjes in de bedoelde richting exponentieel toeneemt en waarbij een coördinaat y in de richting van de rek verandert in e^y . Wij zullen in deze paragraaf de hier bedoelde vervorming nader in beschouwing nemen, maar wijzen er op, dat THOMPSON ook andere eenvoudige vervormingswijzen bespreekt, die voor onze latere beschouwingen bijzondere betekenis hebben.

Wij hebben in figuur 17 een, tot een strook afgewikkeld, cilinderoppervlak afgebeeld, waarop de op elkaar volgende deelstukken van een kromme voorkomen, welke men door de formule:

$$e^y - 1 = \sqrt{\frac{\chi}{2}} \cdot x$$

kan voorstellen. De coördinaten hebben betrekking op assen, die van het linker basispunt uitgaan. Hierin kozen wij, om redenen, die weldra duidelijk zullen worden, als constante: de grootheid $\sqrt{\chi/2}$.

Deze kromme kan beschouwd worden als ontstaan door „transformatie” (verticale rek of krimp) van een rechte lijn op de strook, welke lijn tot formule heeft:

$$y = \sqrt{\frac{\chi}{2}} \cdot x.$$

Dit betekent, dat de rechte in de oorsprong van het assenstelsel begint, daar aan de kromme raakt en naar rechts met constante helling schuin omhoog loopt. De transformatie bestaat dus uit vervangen van de ordinaten y van de rechte door de ordinaten ($e^y - 1$) voor de kromme en ze kan als „wetmatige inkorting” van de ordinaten van de rechte lijn (die wij *niet* tekenden) worden beschouwd.

Wij hebben nu op de kromme, met een constante divergentie (die gelijk is aan χ^2), 69 punten afzet en genummerd. De kromme beschouwen wij nu als de „grondspiraal” van een puntensysteem op een uitgeslagen cirkelcilinder.

De hoogten der ordinaten van de punten, welke de nummers 0, 1, 2, 3 enz. dragen, worden dan gevonden door in de formule:

$$y = \frac{\log \left\{ \sqrt{\frac{\chi}{2}} \cdot N \cdot \chi^2 + 1 \right\}}{\log e}$$

voor N achtereenvolgens deze nummers in te voeren.

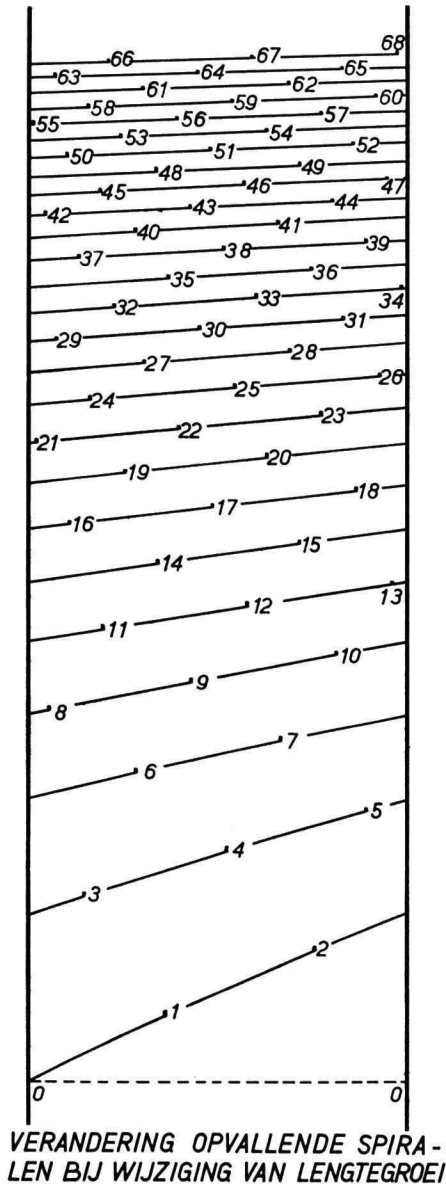


Fig. 17.

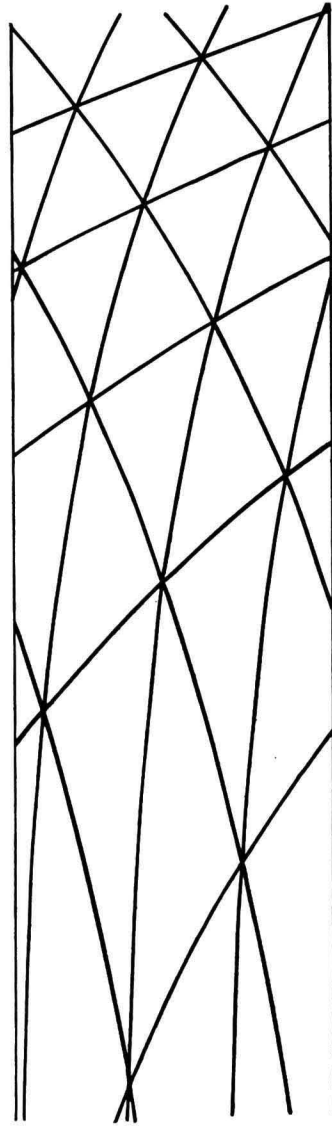


Fig. 18.

Men kan verder gemakkelijk afleiden, dat alle punten van ons puntensysteem op twee onderling evenwijdige krommen, maar ook op drie, vijf, acht enz. (andere) evenwijdige krommen kunnen worden aangetroffen. Die stelsels van krommen kan men als 2-, 3-, 5-, 8- enz. tallige gebogen coördinatiekrommen aanduiden. Het geheel is dan ook op te vatten als een, in toenemende mate in verticale richting in elkaar gedrukt, of gerekt, regelmatig puntensysteem uit de reeks (1, 2).

Reeds bij een oppervlakkige beschouwing van de plaatsing der punten

op de „strook” (waarbij men zich het beste de kromme zelve weg denkt), zal opvallen, dat enige malen, op verschillende hoogten van de strook, viertallen van nabij elkaar gelegen punten bij benadering kwadraten vormen, waarbij zich, verder naar boven, of naar beneden, parallelogrammen aansluiten, die eerst door nieuwe parallelogrammen, maar daarna door vierhoeken, (die naderen tot nieuwe kwadraten) worden gevolgd. Die nieuwe kwadraten worden echter door andere en anders hellende coördinatie-spiralen gevormd als die welke de voorafgaande kwadraten begrensd.

De „overgangen” door rek in elkaar van verschillende kwadratische systemen uit een zelfde summatiereeks ziet men hier in kort bestek boven elkaar optreden en de conclusies voor zulke overgangen uit de vorige paragraaf zijn hierop van toepassing.

Het zal wel geen betoog behoeven, dat onze speciale keuze van grondspiraal door een andere kan worden vervangen, maar dat essentieel is, dat de oorspronkelijke divergentie nadert tot de limietdivergentie van een summatiereeks.

Hoofddoel van ons betoog is: te laten zien, dat wanneer aanvankelijk een regelmatig kwadratisch puntensysteem met een dergelijke limietdivergentie wordt aangelegd, door een verticale rek (die niet evenredig hoeft te zijn) lagere kwadratische puntensystemen — tot de laagste toe, zij het ook slechts bij benadering, — kunnen optreden.

In feite is hier een zelfde betoog geleverd als voorkomt op S. 222–223 van ons werk uit 1907. De daar beschouwde „grondspiraal” was echter opgebouwd uit een serie van 14 deelstukken, die uit rechte lijnen met, naar beneden toenemende, hellingen bestonden. Die rechte deelstukken zijn in het thans geleverde betoog tot deelstukken van één kromme geworden.

§ 17. *De beschouwingen van H. GRAF over vlechtsels uit congruente krommen*

Onze beschouwingen uit de vorige paragraaf tonen punten van overeenkomst met afleidingen, die voorkomen in de „Habilitationsschrift”, die HEINRICH GRAF in 1928 aanbood aan de Technische Hochschule te Karlsruhe en die door Prof. S. FINSTERWALDER op 10 November van dat jaar voor de „Sitzungsberichte der Math.-naturwiss. Abteilung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften” te München werd overreikt. Dit geschrift komt voor in Jahrgang 1928 op S. 205–245 en draagt voor titel „Ueber Geflechte kongruenter oder ähnlicher Kurven”.

GRAF¹⁾ heeft o.m. de vraag beantwoord: welke typen van vlechtsels, samengesteld uit verschillende „systemen van krommen”, zijn op een plat vlak mogelijk, wanneer „wir fordern, dass in einem Geflecht die Kurven nicht nur systemweise unter sich kongruent sind und durch

¹⁾ De hier geciteerde publicatie is van zuiver mathematischen aard; van een mogelijk verband met de theorie der bladstanden wordt daarin niet gesproken.

Parallelschiebung in die x -Richtung auseinander hervorgehen, sondern, dass auch die Kurven der verschiedenen Systeme kongruent und parallel gestellt sind”.

Hij komt tot de slotsom, dat er 5 verschillende typen van vlechtsels zijn aan te wijzen, die aan deze eis voldoen. Voor mijn beschouwingen is speciaal het 5e type van belang, dat GRAF als volgt nader omschrijft.

Het vlechtsel bezit twee soorten van krommen, beantwoordende aan vergelijkingen van de volgende aard: $x + e^y = \text{constant}$ en $x - e^y = \text{constant}$, terwijl daarin bovendien nog twee systemen van rechte lijnen voorkomen, namelijk $x = \text{constant}$ en $y = \text{constant}$.

Uit de zoëven vermelde formules blijkt reeds, dat dit type van vlechtsel nauw verwant is aan de vlechtsels, die wij als voorbeeld in de vorige paragraaf bespraken. Die verwantschap kan wellicht het beste worden gedemonstreerd door reproductie van de figuur, die GRAF als voorbeeld van het bedoelde type als „Geflecht 2b” op blz. 235 van zijn publicatie gaf (zie fig. 18).

In de figuur zijn drie „systemen van krommen” getekend, die (zoals hierboven als algemene eis voor de vlechtsels uit congruente krommen werd gesteld) uitsluitend uit onderling congruente krommen bestaan, welke, door ze over een zekere afstand in horizontale richting te verschuiven, tot samenvallen kunnen worden gebracht. In ieder snijpunt in de figuur treft men van elk der drie systemen één kromme aan. Beschouwt men daarvan uitsluitend de beide zwakker hellende krommen dan wordt het platte vlak in vierhoekige mazen ingedeeld. De krommen van het derde systeem kunnen als „diagonaalkrommen” worden aangeduid.

Men zal verder waarnemen, dat de „hoekpunten der mazen” op horizontale lijnen zijn gelegen, die op onderling gelijke afstanden zijn geplaatst, en dat die lijnen niet op gelijke verticale afstanden voorkomen, maar op steeds kleiner wordende.

Een gevolg van deze plaatsingswijze der krommen is, dat men de gehele figuur in congruente verticale stroken kan verdelen, die de zoëven bedoelde horizontale afstand der hoekpunten als breedte hebben. Waar men deze indeling met verticale lijnen wil laten beginnen, is onverschillig.

Beziet men nu zulk een strook met de drie stelsels van krommen, dan levert die bij oprollen tot een cilinder doorlopende kromme en daarmee wordt de overeenkomst met de figuren uit de vorige paragraaf wel zeer treffend.

Inderdaad verkrijgt GRAF dit stelsel van krommen door verlengen, of verkorten in verticale zin van de ordinaten der punten van stelsels van onderling evenwijdige rechte lijnen, die op gelijke afstanden op een oneindig uitgestrekt plat vlak worden aangebracht, waarbij hij die rek of krimp laat geschieden volgens de hierboven, in algemene vorm gegeven formules: $x + e^y = \text{constant}$ en $x - e^y = \text{constant}$ (waartoe zich ook onze wijze van rek of krimp laat herleiden).

Het is nog van belang op te merken, dat GRAF zijn beschouwingen ook tot vlechtsels uit systemen van *gelijkvormige* krommen heeft uitgebreid en het zal niet verwonderen, dat deze krommen te vergelijken zijn met zulke, waartoe wij in 1907 bij „conforme logaritmische afbeelding” van uitgerekte vlechtsels op een onbepaald uitgestrekt plat vlak zijn gekomen en waarover wij ook naderhand beschouwingen zullen geven.

HOOFDSTUK III

ENKELVOUDIGE REGELMATIGE PARALLELOGRAMMEN- EN RECHTHOEKENNETTEN OP EEN CIRKELCILINDER

§ 1. *Inleidende opmerkingen*

In het voorafgaande hoofdstuk hebben wij enkelvoudige, regelmatige, „fundamentele” en „niet-fundamentele”, *ruitennetten* behandeld, die daardoor gekenmerkt zijn, dat daarbij congruente, als een net, tegen elkaar aansluitende, ruiten rondom de punten van een enkelvoudig, regelmatig puntensysteem op een cirkelcilinder voorkomen. Daarbij bezat het puntensysteem de eigenschap, dat bij ieder — willekeurig gekozen — punt van het puntensysteem steeds twee andere punten op gelijke afstanden daarvan worden aangetroffen; bij de „fundamentele” ruitennetten zijn die afstanden de kortste, die tussen punten van het puntensysteem voorkomen.

Thans zullen wij gevallen behandelen, waarbij, rond een enkelvoudig, regelmatig puntensysteem, congruente, als een net tegen elkaar aansluitende, *parallelogrammen* aanwezig zijn. Voor ieder willekeurig gekozen punt van het systeem zijn in dit geval geen twee hoger gelegen punten van het puntensysteem op gelijke afstand aan te wijzen.

Als bijzondere gevallen zullen wij die parallelogrammennetten beschouwen, waarin de parallelogrammen overgegaan zijn in „rechthoeken”.

Men treft voorbeelden van parallelogrammennetten aan in Fig. 452 van het werk van D'ARCY WENTWORTH THOMPSON: „On Growth and Form”, A new edition (1942) p. 928¹⁾. Vrijwel identieke netten had reeds KOTURNICKIJ afgebeeld in een verderop hier geciteerde, moeilijk toegankelijke, publikatie uit 1893.

Wij beginnen hier met enkele algemene beschouwingen over parallelogrammennetten.

Bij enkelvoudige regelmatige parallelogrammennetten laten zich overeenkomstige punten der parallelogrammen (bijv. hoekpunten of middelpunten), evenals bij de enkelvoudige ruitennetten, op één doorlopende „grondspiraal” opnemen en daarop zal punt n weer hoger liggen dan punt m . De twee systemen van evenwijdige spiralen, die de zijden van het parallelogrammenet vormen, zullen wij ook hier algemeen als m -tallige en n -tallige spiralen onderscheiden (naar het aantal der evenwijdige) en

¹⁾ Tegen de door THOMPSON gebruikte aanduidingswijze van zulke netten (n.l. als breuken) heb ik bezwaar.

de lengten der zijden der parallelogrammen zullen wij als l_m en l_n aanduiden, waarbij l_m voor de zijden op de m -tallige spiralen en l_n voor die op de n -tallige spiralen geldt.

De hoeken der parallelogrammen van het net (die elkaars supplement zijn) zullen wij als γ en γ' onderscheiden, maar wanneer het niet nodig is om dit verschil te accentueren, zullen wij kortweg van een hoek γ spreken. Bij de rechthoekennetten is uiteraard $\gamma = 90^\circ$.

De ongelijkheid tussen l_m en l_n maakt, dat de parallelogrammennetten een belangrijk verschil met de ruitennetten (met fundamentele zowel als met niet-fundamentele) *kunnen* vertonen. Terwijl namelijk bij ruitennetten de n -tallige spiralen *steeds* sterker zullen hellen dan de m -tallige *kunnen* bij parallelogrammennetten de m -tallige de steilere zijn. Dit geldt zowel voor een homodroom als voor een antidroom verloop van beide stelsels spiralen.

Wij lichten dit met nevenstaande figuur 19 toe, waarbij wij twee parallelogrammennetten tegenover elkaar hebben gesteld. Beide hebben een rechtsgewonden grondspiraal en beide hebben rechtsgewonden 5-tallige

*Twee parallelogramnetten (5en7) met rechtsgewonden grondspiraal.
Links: de 7-tallige steiler dan de 5-tallige. Rechts: het omgekeerde.*

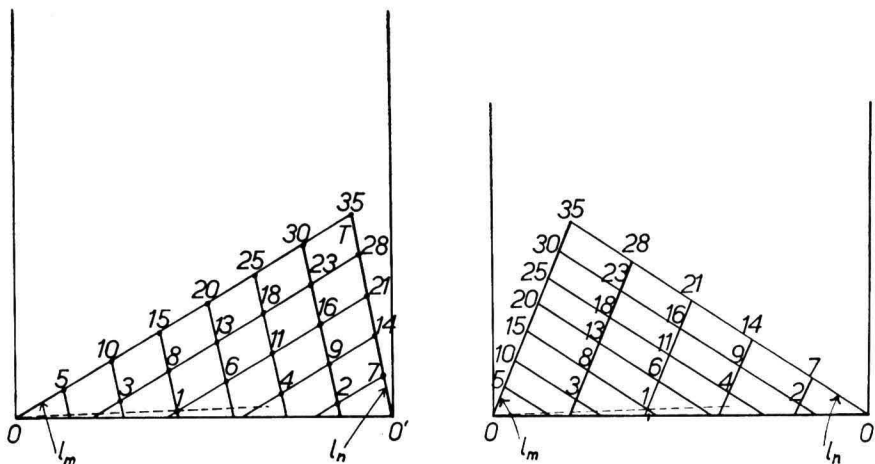


Fig. 19.

en linksgewonden 7-tallige spiralen (in beide figuren zijn ze coördinatie-spiralen). De divergenties zijn in de twee netten verschillend, maar het verschil is slechts gering ($0,0197 \cdot 360^\circ$). In de linker figuur zijn de 7-tallige spiralen steiler dan de 5-tallige; in de rechter figuur geldt het omgekeerde. De laatste situatie zou voor een ruitennet zelfs onmogelijk zijn.

De omstandigheid, dat l_m en l_n bij een parallelogrammenet ongelijk zijn, maakt verder, dat er daarvoor geen sprake kan zijn van een „fundamenteelnet”, immers dáárvoor is nodig, dat l_m en l_n wél aan elkaar gelijk

zijn en *bovendien* moet l_m en dus ook l_n daarvoor de kleinste afstand zijn, die in het puntensysteem tussen twee punten wordt aangetroffen. Die laatste voorwaarde stellen wij niet voor een parallelogrammenet (evenmin als wij dit deden voor een *niet-fundamenteel* ruitennet).

Evenals wij bij de ruitennetten van een *topdriehoek* met de top (die het nummer mn draagt) hebben gesproken, kunnen wij ook bij parallelogrammenetten zulk een driehoek in beschouwing nemen.

De uiteenzetting, die wij voor *fundamentele* ruitennetten over de mogelijkheden voor de ligging van de top (in § 4 van het vorig hoofdstuk) hebben gegeven, komt voor parallelogrammenetten te vervallen (dit was trouwens ook voor de niet-fundamentele ruitennetten het geval). De ligging van de top voor de parallelogrammenetten wordt bepaald door de tophoek en door de verhouding $n l_m : m l_n$ (bij de niet-fundamentele ruitennetten gaat die uiteraard over in de verhouding $n : m$).

De tophoek kan bij parallelogrammenetten zelfs uiteenlopen van 0° tot 180° . Geeft men een *bepaalde* waarde aan, die de tophoek van het net moet bezitten, dan kan men als meetkundige plaats van de top geven: een cirkelboog met als koorde de basis van de topdriehoek en met als booglengte het dubbele aantal graden van de, als gewenst aangegeven, hoek. Is de verhouding $ml_n : nl_m$ bekend, dan kan men de eindpunten (o en o') van de basis als vaststaande punten beschouwen, waarbij men een cirkelboog van APOLLONIUS kan construeren, waarvan de punten een constante verhouding ($ml_n : nl_m$) der afstanden tot o en o' bezitten. Het snijpunt van de twee cirkelbogen zal dan de gezochte top opleveren.

Bij rechthoekennetten, die een tophoek van 90° bezitten, zal de top liggen op een halve cirkel, die de basis o tot o' als middellijn heeft.

§ 2. *Beperking der verdere beschouwingen over parallelogrammenetten tot die, waarbij de m - en de n -tallige spiralen antidroom zijn*

In het voorafgaande is gebleken, dat er een grote verscheidenheid bestaat voor het verloop der m - en der n -tallige spiralen bij parallelogrammenetten. Wij zullen ons echter verder zoveel mogelijk beperken tot die netten, waarbij de m - en de n -tallige spiralen antidroom gewonden zijn. Deze zijn namelijk voor de theorie der bladstanden de belangrijkste.

Ter toelichting van deze situatie hebben wij in nevenstaande fig. 20 een voorbeeld ¹⁾ van een homodroom en een van antidroom verloop dezer spiralen gegeven. De windingsrichting van de grondspiraal is hierbij (in tegenstelling met hetgeen voor de ruitennetten geldt) onverschillig en wij lieten de grondspiralen daarom weg.

De spiegelbeelden onzer figuren ten opzichte van een verticaal (welke wij niet afbeeldden) vertonen dezelfde tegenstelling als onze figuren doen.

¹⁾ Wij kozen gevallen, waarin de m -tallige spiralen de steilere zijn, maar de opmerking verandert niet, wanneer zij zwakker hellen dan de n -tallige.

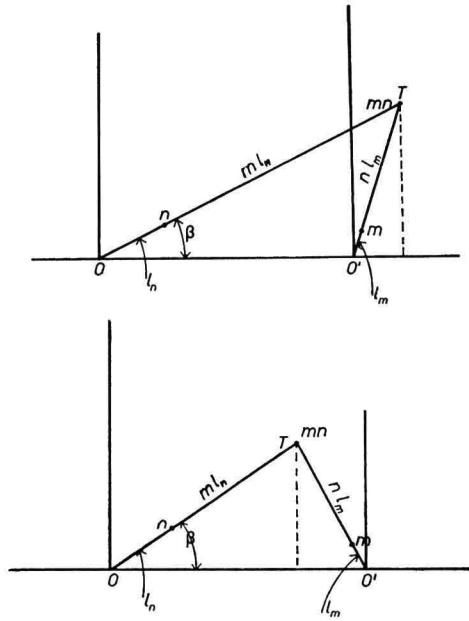


Fig. 20.

§ 3. De keuze tussen $+1$ en -1 bij de formule $m\Delta_n - n\Delta_m = +1$ of -1

De definitie van de encyclische getallen Δ_m en Δ_n , behorende bij een getallenpaar m en n , die wij in Hoofdstuk II voor ruitennetten gaven, was onafhankelijk van de onderstelling, dat de mazen van het net gevormd worden door ruiten dan wel door parallelogrammen en behoudt dan ook in dit hoofdstuk hare volle geldigheid. Dit laatste geldt ook voor de meetkundige betekenis, die wij in Hoofdstuk II voor ruitennetten aan de formule:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = +1, \text{ of } = -1$$

gaven. Dit zal weinig toelichting nodig hebben, immers die betekenis is afgeleid uit een beschouwing, waarin alleen sprake was van *aantallen* stappen (respectievelijk langs m - en n -tallige coördinatiespiralen) en daarbij speelden de lengten dier stappen geen rol.

Wij verwijzen hier naar fig. 21, waarin de situatie is geschetst en herhalen onze regel, maar *nu voor parallelogrammennetten*: Wanneer de grondspiraal *homodroom* is aan de m -tallige spiraal, dan geldt de formule:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = +1,$$

en wanneer de grondspiraal *antidroom* is aan de m -tallige spiraal, dan geldt de formule:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = -1.$$

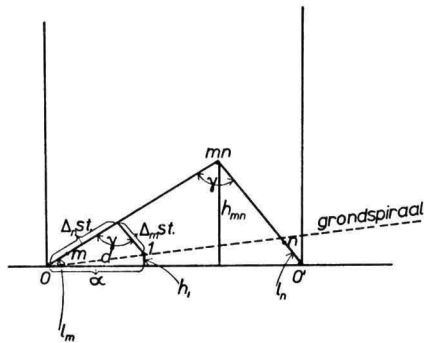


Fig. 21.

§ 4. *De gegevens, nodig voor het vastleggen (tekenen en berekenen) van parallelogrammen (m en n)*

Voor het vastleggen van parallelogrammen (m en n) is het voldoende om de topdriehoek van het net te geven. Als men daarin de opstaande zijden in m en n deelstukken indeelt (welker lengten wij — evenals wij reeds vroeger deden — als l_m en l_n aanduiden) en als men vervolgens door de deelpunten de coördinatie-spiralen tekent, is daarmee alles bepaald, wat men van het net wenst te weten (de divergentie, het verloop van de grondspiraal, de onderlinge afstand van de punten op die spiraal, de hoeken van de parallelogrammen, het aantal punten in een cyclus en het aantal omwentelingen, nodig om, langs de grondspiraal gaande, de cyclus te doorlopen). Men kan immers al deze bijzonderheden — al is het dan ook slechts benaderend — uit de tekening vinden en in cijfers vastleggen.

Wanneer de lengten der opstaande zijden van de topdriehoek, of wanneer de lengten l_m en l_n , in cijfers gegeven zijn, dan kan men de opgesomde bijzonderheden daaruit ook door *berekening* vinden.

Wij lichten dit toe voor de divergentie (die bij de becijfering het meeste werk bezorgt) aan bijgaande fig. 22.

In de eerste plaats zal men dan de waarde van de hoek γ van de topdriehoek met de cosinusregel berekenen. Men vindt die hoek terug in de kleine driehoek die punt o tot hoekpunt en $\Delta_n \cdot l_m$ en $\Delta_m \cdot l$ tot zijden heeft (Δ_m en Δ_n zijn, op de in Hoofdstuk II aangegeven wijze, uit m en n te berekenen).

Dit maakt het mogelijk om — weer met de cosinusregel — de waarde van d (d.i. de constante afstand der punten op de grondspiraal) te becijferen. De hoogte van het punt met het nummer 1 boven de basis van de topdriehoek, welke hoogte wij met h_1 aanduiden, kan men vinden door de hoogte h_{mn} van de topdriehoek te berekenen en haar daarna door mn te delen. Hiermee is het dan mogelijk geworden de divergentie α (uitgedrukt als gedeelte van de basis van de topdriehoek) te berekenen.

Hier releveren wij nog, dat het *niet* mogelijk is om, als de waarde van

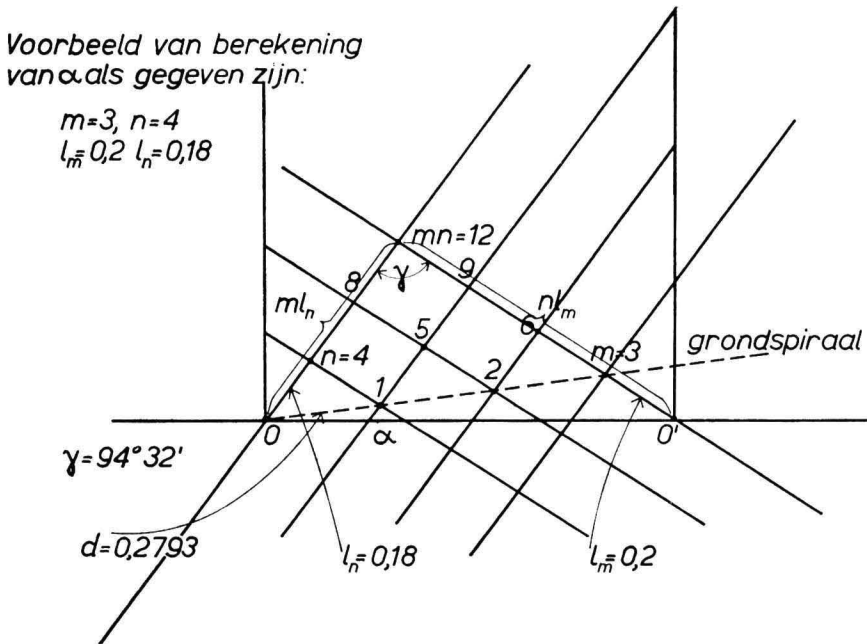


Fig. 22.

α gegeven is, de lengten l_m en l_n te vinden. Dit wordt onmiddellijk duidelijk, wanneer men bedenkt, dat bij verticale rek van een parallelogrammenet de divergentie dezelfde blijft, maar de topdriehoek zich wijzigt.

§ 5. *Het vaststellen van de divergentie bij parallelogrammenetten op natuurlijke cilindrische objecten*

Het is zelden mogelijk om aan natuurlijke objecten, waarop een parallelogrammenet (of een rangschikking van zijdelingse organen, die daartoe nadert) voorkomt, te meten en daarom beperkt men zich doorgaans tot het tellen van de aantallen opvallende spiralen (m en n) en het vaststellen van de divergentie (α) langs andere weg als wij in de vorige paragraaf aangaven.

Voor de laatst bedoelde opgave beschikt men dan over de *klassieke methode*, die daarop neerkomt, dat men — uitgaande van een willekeurig punt (bijvoorbeeld het middelpunt van de inplantingsplaats van een der zijdelingse organen), langs de grondspiraal omhoog klimmende — telt hoeveel dergelijke punten men passeert, wanneer men tot het eerste punt aangekomen is, dat zich verticaal boven het punt van uitgang bevindt. Daarna moet men dan nog vaststellen: hoeveel keren men bij een dergelijke stijging het cilindrische object is rond gelopen. Noemt men het totaal aantal punten, dat men op de grondspiraal passeert \mathfrak{N} en het aantal omwentelingen, dat men daarbij maakt, \mathfrak{M} , dan is de divergentie $\alpha = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$.

Deze methode heeft grote voordelen. Ze is zowel voor ruiten- en parallelogrammenetten als voor rangschikkingen, die daaruit door rek of krimp ontstaan, toe te passen. Ze levert bovendien een gemiddelde waarde, ook als er onregelmatigheden voorkomen.

Intussen is de uitvoering dezer bepalingwijze bij een opeengedrongen rangschikking der zijdelingse organen (zoals bijvoorbeeld bij koniferenkegels en bloemhoofdjes) soms moeilijk, doordat men daarbij de grondspiraal vaak bezwaarlijk kan vinden.

Het is dan ook van belang, dat door TAIT een andere waarnemingsmethode is aangegeven, waarmee men de divergentie kan vinden, die in zulke gevallen wél is toe te passen. De berekening is wel wat gecompliceerder, maar de waarnemingen zijn van eenvoudige aard, namelijk, behalve het tellen van m en n , het bepalen van twee aantallen (r en s) van, op bepaalde wijze te maken, stappen.

Bovendien zijn deze waarnemingen bruikbaar om nog andere bijzonderheden van het parallelogrammenet te berekenen. Door KOTURNICKIJ is namelijk een formule opgesteld, waardoor het mogelijk is, als m , n , r en s bekend zijn, een verband te leggen tussen de tophoek γ van de topdriehoek en de verhouding k der lengten der zijden van de parallelogrammen. Als één dezer twee grootheden γ en k bekend is, kan men de andere en ook alle verdere bijzonderheden van het net berekenen.

In de volgende paragrafen zullen wij dit nader toelichten. Wij gaan daarbij uiteraard van de mathematische netten uit.

§ 6. *Invoering (naar TAIT) van de grootheden r en s , respectievelijk r' en s' .*

In de „Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. VIII (1869–1872) komt op p. 391–393 een korte mededeling voor van Prof. TAIT¹⁾ onder de titel „Laboratory Notes, 2. On Phyllotaxis”, waaraan, op p. 394, een aantekening werd toegevoegd met het hoofd: „Added March 20th, 1871 in consequence of some remarks made by Professor Dickson at the Meeting of that date”.

Hoewel eigenlijk alleen die „Addition” de aandacht heeft getrokken (wij komen daarop in een Appendix terug), bevat de mededeling zelf een belangrijke formule, die TAIT opstelde, ten einde — naar hij zeide — langs eenvoudige weg de „divergentie” van de zijdelingse aanhangsels van een gecompliceerd botanisch object (zoals een denneappel) te kunnen afleiden.

Reeds hier vermelden wij, dat deze formule zowel voor ruitennetten als voor parallelogrammenetten kan worden toegepast, maar dat voor

¹⁾ Prof. PETER GUTHRIE TAIT (1831–1901) was van 1860–1901 professor in Edinburgh, „he collaborated with Lord Kelvin in writing the well-known Treatise on Natural Philosophy. It is familiarly called ‘Thomson and Tait’ ” (citaat uit Encycl. Brit. 21, p. 757).

de ruitennetten de formules uit Hoofdstuk II de voorkeur verdienen ¹⁾).

Als belangrijkste nieuwe element in TAIT'S afleiding is m.i. de invoering te beschouwen van de grootheden r en s (waaraan ik de grootheden r' en s' toevoeg). Hij ging daarbij uit van de topdriehoek mn van een parallelogrammenet, waarbij hij uitsluitend gevallen behandelde, waarin de m - en de n -tallige spiralen antidroom zijn gewonden.

Wij zullen ons bij deze onderstelling van TAIT aansluiten, hetgeen in overeenstemming is met hetgeen wij hierboven als onze voorkeur bij de behandeling van parallelogrammenetten vermeldden.

In de vier tekeningen, gemerkt a , b , c en d van fig. 23, hebben wij nu de mogelijkheden voor de topdriehoek OTO' weergegeven voor de gevallen, waarin de (in onze figuur gestippelde) grondspiraal rechts gewonden is. Die windingsrichting is te concluderen uit de ligging van het punt met het nummer 1, namelijk op de linkerhelft van de verticale strook — het is uiteraard het dichtste boven de basislijn $o-o'$ aan te treffen punt. De top T van de topdriehoek is in de figuren a en c op de rechterhelft, in de figuren b en d op de linkerhelft van de strook gelegen. Verder verschillen de vier figuren door de ligging van de punten met de nummers m en n , waarvan n steeds hoger ligt dan m en waarvoor de afstanden l_m en l_n ongelijk zijn (hierbij kan $l_m < l_n$, maar ook $l_m > l_n$ zijn).

Er moet hier op gewezen worden, dat men de vier mogelijkheden met links gewonden grondspiraal weer kan verkrijgen door spiegelbeelden ten opzichte van verticalen te ontwerpen.

Voor alle figuren zal op de vertikale grenslijn van de „strook”, ergens boven het links geplaatste basispunt O , een punt A (snijpunt van het netwerk der spiralen) worden aangetroffen. De ervaring heeft geleerd, dat bij vele natuurlijke objecten dit punt niet hoog op de verticaal ligt, maar theoretisch kan dit wel het geval zijn.

In ieder geval zal, wanneer zulk een punt in een regelmatige parallelogrammenet is gevonden, daarboven op dezelfde afstand, als waarop A boven punt O ligt, een volgend snijpunt van het net worden aangetroffen. Dit zal zich onbepaald vele keren herhalen. De letter A wordt aan het

1) TAIT deelt mede, dat hij tot de opstelling van zijn „Note” is gekomen door de demonstratie van geconserveerde botanische preparaten door Prof. A. DICKSON en merkt daarbij op: „He referred me to two terribly elaborate papers by Bravais (1839), and I have met since with another of similar character by Naumann (1842)”. Daarbij uit TAIT de onderstelling, dat zijn resultaten ook wel te vinden zullen zijn in de genoemde publikaties en zegt verder „but I have not sought for them, my sole object having been to put what seems to me the elements of the matter as simply and intelligibly as I could”. TAIT zou tevergeefs naar zijn mathematische betrekking hebben gezocht, al zal blijken, dat zijn beschouwingen ten nauwste met die der gebr. BRAVAIS verband houden. Ook wil ik niet verzwijgen, dat de publikatie van de gebroeders BRAVAIS voor de bladstandenleer tot nu toe van groter betekenis is geweest dan TAIT'S „Note” en dat dit m.i. voor een groot deel juist aan de beknoptheid van TAIT'S beschouwingen is te wijten.

Afleiding formules van *Tait* voor divergentie parallelogrammenetten met rechtsgewonden grondspiraal maar met verschillende ligging topfundam. drieh. en van de punten *m* en *n*.

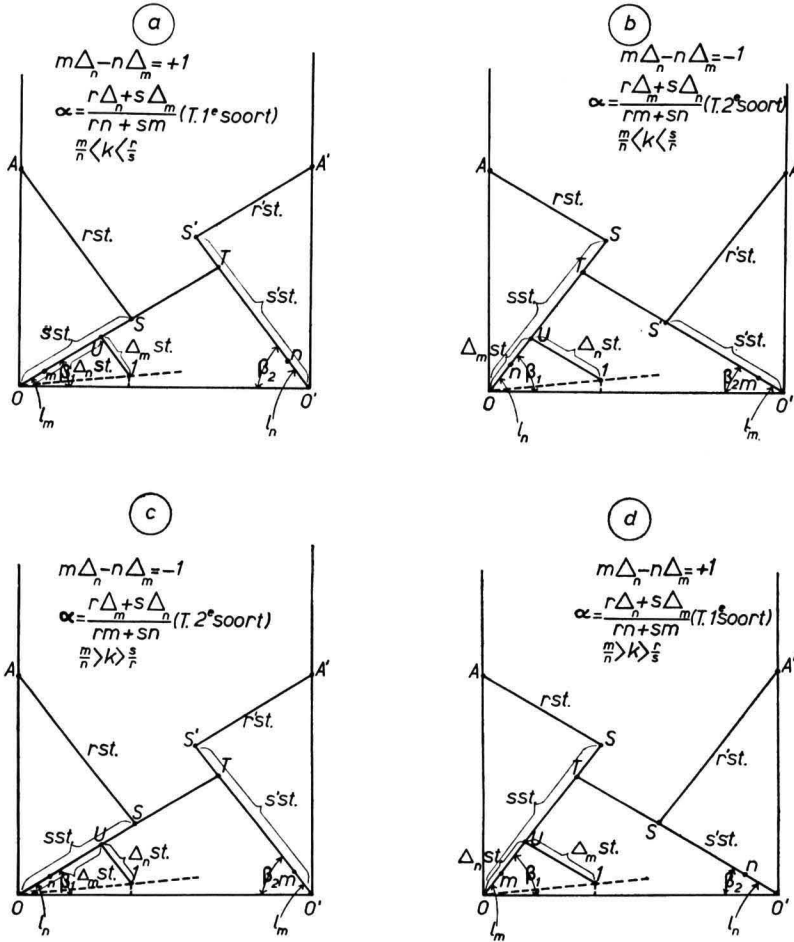


Fig. 23.

laagste punt dezer puntenreeks gegeven; het ligt op de bovengrens van de eerste cyclus van het net.

Het spreekt van zelf, dat op de rechtergrenslijn van de strook, ter zelfder hoogte als op de linkergrenslijn, punten voorkomen, waarvan wij het punt, dat even hoog ligt als *A*, zullen aanduiden als *A'*.

Wij zullen nu, uitgaande van punt *A*, langs de coördinatiespiraal, die door dat punt loopt, naar omlaag gaan en doen dit met „stappen”, die gelijk zijn aan de afstanden der punten, die op die coördinatiespiraal voorkomen. Na een zeker aantal van die stappen te hebben gemaakt, zullen wij uitkomen in een snijpunt, gelegen op de linker opstaande zijde van de topdriehoek, of op haar verlengde naar boven. Wij hebben dit punt aangeduid met de letter *S*. Wanneer wij dit punt bereikt hebben,

dalen wij verder langs de zijde van de driehoek af, totdat wij het basispunt O bereiken en daarbij tellen wij wederom het aantal stappen van de lengte gelijk aan de afstand der, op die zijde gelegen, punten van het net.

Het voorbeeld van TAIT volgende, zullen wij het *aantal* stappen, dat wij moeten maken, om van punt A naar punt S te komen, aangeven met de letter r en dat, hetwelk wij moeten nemen om daarna van S naar O te gaan, aangeven met de letter s .

Wanneer wij van A' uitgaan en langs punt S' naar O' stappen, zullen wij aantallen stappen moeten maken, die wij als r' en s' zullen aanduiden (deze laatste notatie is *niet* door TAIT gebruikt).

§ 7. *De divergentie van een parallelogrammenet (m en n), uitgedrukt in r en s (de formules van TAIT)*

Voor het afleiden van de formules, zullen wij als hulpgrootheden u en v invoeren, waarbij

$$u = l_m \cos \beta_1 \text{ en } v = l_n \cos \beta_2,$$

waarin l_m en l_n de reeds bekende betekenis bezitten en waarin β_1 en β_2 de linker- en rechterbasishoeken van de topdriehoek betekenen.

Wij beschouwen nu eerst figuur **a** van fig. 23 en zullen, van punt O uitgaande, drie wegen in onze figuur afstappen, namelijk $oT'o'$, $oU1$ en oSA . Hier volgen nu drie betrekkingen, die voor de *horizontale projecties* dezer wegen gelden:

$$\begin{aligned} 1e. & \quad nu + mv = 1, \\ 2e. & \quad \Delta_n \cdot u + \Delta_m \cdot v = \alpha, \text{ en} \\ 3e. & \quad su - rv = 0. \end{aligned}$$

Hierbij releveren wij nogeens, dat de lengte van de basis als eenheid van lengte is aangenomen en dat de divergentie α uitgedrukt is als de breuk, die aangeeft, welk deel de divergentie van die basis uitmaakt.

Door elimineren van de hulpgrootheden u en v uit de drie betrekkingen vindt men dan:

$$\alpha = \frac{r\Delta_n + s\Delta_m}{rn + sm}.$$

Wij zullen deze uitdrukking als de formule van TAIT *van de 1e soort* aanduiden.

Thans zullen wij figuur **b** nader in beschouwing nemen.

De drie wegen, die wij hierbij zullen afstappen, vangen weer aan in punt O ; ze zijn respectievelijk: OTO , $OU1$ en OSA . Hun projecties op de basis leiden tot het opstellen van de drie volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} 1e. & \quad mu + nv = 1, \\ 2e. & \quad \Delta_m u + \Delta_n v = \alpha \text{ en} \\ 3e. & \quad su - rv = 0. \end{aligned}$$

Door elimineren van u en v wordt thans de volgende betrekking verkregen:

$$\alpha = \frac{r\Delta_m + s\Delta_n}{rm + sn},$$

welke wij als de formule van TAIT *van de tweede soort* zullen aanduiden.

Met behulp van een overeenkomstige afleiding voert fig. **c** tot de formule van de tweede soort, terwijl fig. **d** op haar beurt de formule van de eerste soort oplevert.

Wij maken er nu verder opmerkzaam op, dat wij door de vier figuren van fig. 23 te spiegelen ten opzichte van een verticaal op de basislijn vier situaties krijgen met linksgewonden grondspiraal. Daarbij zullen voor de afleidingen de grootheden r en s met accenten moeten worden gebruikt en bovendien zal men er mee moeten rekenen, dat de „divergentie” nu wordt gevonden als de afstand van de projectie van punt 1 tot het punt O' .

Het is mij gebleken, dat om misverstand te voorkomen, de eenvoudigste weg is: eerst een net, dat de gewenste eigenschappen heeft, maar met rechtsgewonden grondspiraal te beschouwen en, na de constructie daarvan, de spiegelbeeldfiguur te tekenen.

Ofschoon wij ons niet zullen bezighouden met parallelogrammennetten met homodroom gewonden m - en n -tallige coördinatiespiralen, tekenen wij hier nog aan, dat daarvoor wél andere formules gelden dan de hierboven afgeleide. Daarin komen namelijk *minustekens* voor.

Wanneer wij ons nu verder tot parallelogrammennetten met anti-droom gewonden m - en n -tallige spiralen beperken en verder uitsluitend netten met rechtsgewonden grondspiraal tekenen, dan laat zich uit onze fig. 23 de volgende conclusie trekken:

Wanneer geldt:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = +1,$$

dan wordt de divergentie van het net gevonden met de formule:

$$\alpha = \frac{r\Delta_n + s\Delta_m}{rn + sm},$$

terwijl in de gevallen, waarin geldt:

$$m\Delta_n - n\Delta_m = -1,$$

de formule wordt:

$$\alpha = \frac{r\Delta_m + s\Delta_n}{rm + sn}.$$

§ 8. *Het verband tussen de grootheden r en s en de — door de gebr. BRAVAIS ingevoerde — grootheden δ_m en δ_n*

Men kan de, aan het slot van de vorige paragraaf gereleveerde formules van TAIT in de volgende vorm schrijven:

$$\alpha = \frac{\frac{r}{s} \Delta_n + \Delta_m}{\frac{r}{s} n + m} \text{ en } \alpha = \frac{\frac{r}{s} \Delta_m + \Delta_n}{\frac{r}{s} m + n}$$

en daaruit een betrekking voor het quotiënt r/s afleiden. De twee formules leveren dan respectievelijk voor die betrekking op:

$$\frac{r}{s} = \frac{\Delta_m - m\alpha}{n\alpha - \Delta_n} \text{ en } \frac{r}{s} = \frac{\Delta_n - n\alpha}{m\alpha - \Delta_m}.$$

Hierbij vestigen wij er de aandacht op, dat de hier gegeven waarden van r/s elkanders *reciproken* zijn.

Nu zijn de waarden $(\Delta_m - m\alpha)$ en $(\Delta_n - n\alpha)$ gelijk aan de grootheden, die, in de beroemde verhandeling uit 1839 van de Gebr. BRAVAIS, zijn voorgesteld door de tekens δ_m en δ_n en die door hen als „secundaire divergenties van de punten m en n ” zijn aangeduid. De betekenis van die grootheden, welke ook in onze publikatie uit 1907 een rol speelden, hebben wij toen (zie aldaar blz. 16 onderaan) als volgt toegelicht:

„Zieht man die „kürzeste Schraubenlinie”, die den Punkt o mit einem Punkt m verbindet, dann macht man eine bestimmte Drehbewegung um die Achse. Dieser Winkel wird *sekundäre Divergenz*” des Punktes m genannt und soll mit δ_m bezeichnet werden. Diese Divergenz wird als positiv betrachtet, wenn die (kürzeste) Schraubenlinie, die o mit m verbindet, in derselben Richtung wie die Hauptspirale läuft”.

Hieruit blijkt, dat δ_m en δ_n zowel positief als negatief kunnen zijn, zodat wij de twee hierboven vermelde betrekkingen kunnen schrijven:

$$\frac{r}{s} = \pm \frac{\delta_m}{\delta_n} \text{ en } \frac{r}{s} = \pm \frac{\delta_n}{\delta_m},$$

waarin men het teken \pm moet lezen: positief *of* negatief.

Hierbij maken wij er attent op, dat in de door ons in deze publikatie beschouwde gevallen (voorgesteld in Fig. 23 en door het spiegelbeeld daarvan) één van de beide waarden δ_m en δ_n positief en de andere negatief moet zijn.

Hiermee hebben wij ook toegelicht, waarom het o.i. te betreuren is, dat TAIT zich niet in de verhandeling van de Gebr. BRAVAIS heeft verdiept. Hij zou daarin wel is waar niet de eigen formules hebben teruggevonden, maar wél een belangrijk verband tussen zijn formules en de betrekkingen van de gebr. BRAVAIS hebben kunnen leggen.

Het is verder nog wenselijk erop te wijzen, dat de, in de aanvang van deze paragraaf vermelde, formules, in staat stellen om de waarde van

r/s af te leiden uit die van α . Heeft men dus de divergentie — bijvoorbeeld volgens de klassieke methode — *bepaald*, of heeft men voor haar een waarde *aangenomen*, dan kan men met die formules de waarde r/s berekenen. Daarbij bedenke men, dat r en s onderling ondeelbare, gehele getallen zijn en dat het, voor een beschrijving van een parallelogrammenet, veelal voldoende is om die zó aan te nemen, dat een benaderde waarde voor de divergentie wordt verkregen.

§ 9. *Een betrekking tussen de tophoek (γ) van de topdriehoek en de verhouding (k) van de lengten der zijden van de parallelogrammen (de formules van Koturnickij).*

Het is ongetwijfeld merkwaardig te noemen, dat een interessante, zeer uitgebreide, verhandeling over de theorie der bladstanden, die reeds in 1893 is verschenen, in de West-Europese literatuur tot heden onbekend is gebleven. Mij is het bestaan daarvan eerst in 1956 bekend geworden ¹⁾.

Het hier bedoelde geschrift is van de hand van P. V. KOTURNICKIJ en verscheen in „Irvěstija sankt, petersburgskags praktičeskago Technologičeskago Instituta 1893 god” (hetgeen vertaald betekent: „Berichten uit het Sintpetersburgs Technologische Instituut over het jaar 1893). Ze neemt daarin de blz. 46–240 in beslag en daaraan zijn 4 uitslaande platen met 38 figuren toegevoegd. De (vertaalde) titel luidt: „De quincunx en de toepassing daarvan in natuurwetenschap en weverij”.

Het blijkt uit de inleiding, dat de schrijver bekend was met de publikatie van C. F. NAUMANN ²⁾ uit 1842 en verder met de „Note” van TAIT uit 1871, met de geschriften van DECANDOLLE en met het werk van S. SCHWENDERER uit 1878. Het nauwste sloten zijn beschouwingen aan bij die van TAIT, maar hij zegt daarvan (m.i. terecht), dat de aanwijzingen van TAIT niet voldoende zijn om diens theoretische uiteenzettingen in de praktijk te kunnen toepassen. In feite heeft KOTURNICKIJ de studie van TAIT uitgebreid, maar hij volgde daarbij geen eenvoudige weg, zodat de studie van zijn geschrift veel inspanning vereist.

Ik zal het uitvoerig betoeg van KOTURNICKIJ niet overnemen en mij in hoofdzaak beperken tot een eenvoudige afleiding van een formule voor parallelogrammenetten, die hij heeft gegeven, en die m.i. als het belangrijkste resultaat van zijn publikatie is te beschouwen.

Wij zullen voor onze afleiding wederom de topdriehoek van een parallelogrammenet tot uitgangspunt nemen en de tophoek daarvan wederom met de letter γ aanduiden. Die tophoek is uiteraard gelijk aan een der beide hoeken van de parallelogrammen, waaruit het „net” is opgebouwd.

¹⁾ Ik vond haar geciteerd in botanische Russische literatuur, die mij ter lezing door Prof. LAM in het hierboven genoemde jaar werd toegezonden. Ik heb haar — dank zij de bemiddeling van de bibliothecaris van de T.H. te Delft — uit de Universiteitsbibliotheek te Uppsala ter lezing ontvangen.

²⁾ Op deze laatste publikatie kom ik naderhand terug.

Afleiding van de formules van Koturnickij voor de hoeken van parallelogrammen-netten met rechtsgewonden grondspiraal met verschillende ligging v.d. top van de fundament driehoek en van de punten m . en n .

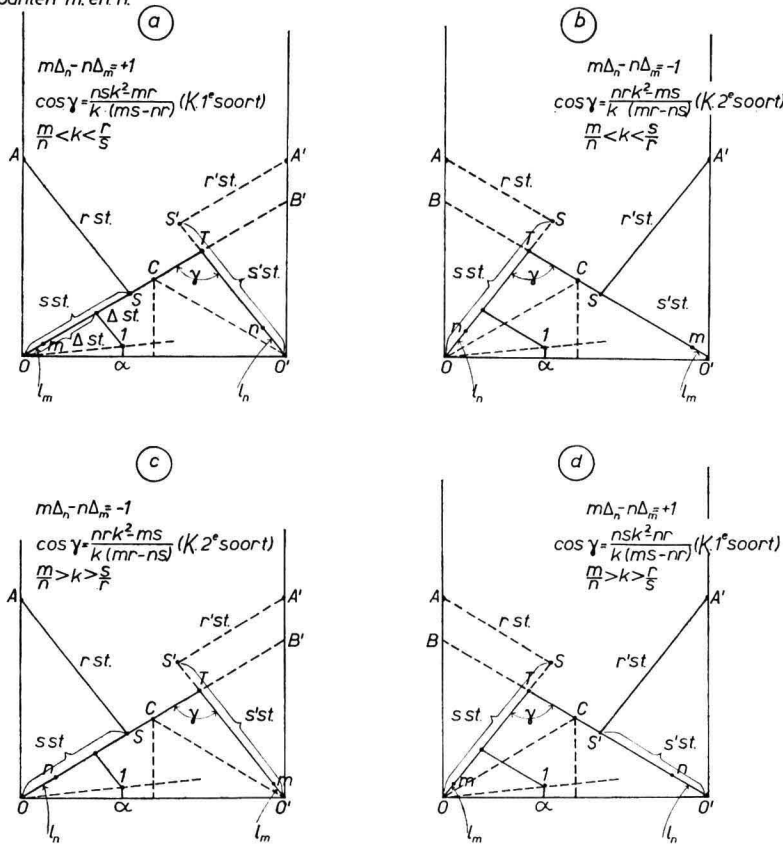


Fig. 24.

Hierbij zullen wij ons verder beperken tot netten met rechtsgewonden grondspiraal en met antidroom gewonden m - en n -tallige spiralen, zodat de top van de topdriehoek valt binnen de strook, die de afgerolde cilinder voorstelt.

Met de tekeningen, gemerkt **a**, **b**, **c** en **d** van fig. 24, zijn wederom de vier situaties voorgesteld, die overblijven; ze stemmen volkomen overeen met de vier gevallen, waarvan wij voor het afleiden van de formules van TAIT zijn uitgegaan. Wij zullen na onze afleiding nog toelichten, dat inderdaad hiermee alle mogelijkheden (althans die, waarbij de m - en de n -tallige spiralen antidroom zijn) als uitgeput mogen worden beschouwd.

Wij vangen aan met een beschouwing van fig. **a**, waarin het geval is voorgesteld, waarin de m -tallige spiraal minder steil is dan de n -tallige spiraal en waarin de top T van de fundamentele driehoek op de rechterhelft van de verticale strook ligt, terwijl de tophoek van de driehoek „stomp” is ondersteld.

Als hulplijnen tekenen wij (gestippeld): de vertikaal in het midden van

de strook, die de m -tallige opstaande zijde in punt C snijdt, en de verbindingslijn van O' met C . Ook verlengden wij de zijde OT tot zij de rechtergrensverticaal in B' snijdt. Wij stellen verder vast, dat de punten C en B' , in het algemeen, géén punten van het puntensysteem zullen zijn, dat door de parallelogrammen wordt gevormd. A , resp. A' , S en S' zijn dit wél.

Wij doen verder nog uitkomen, dat, bij de hier aangegeven keuze van de hulplijnen, de afstanden CO , CO' en CB' aan elkaar gelijk zullen zijn en wij zullen nu laten zien, dat de zijden van de driehoek $O'CT$ in bekende grootheden zijn uit te drukken. Daartoe leiden wij eerst een uitdrukking voor de lijn TB' af, die als een lijn, evenwijdig aan de basis van driehoek $O'A'S'$ kan worden opgevat. Voor laatstgenoemde driehoek geldt:

$$TB' : S'A' = O'T : O'S',$$

of:

$$TB' : sl_m = ml_n : rl_n,$$

zodat:

$$TB' = m \frac{s}{r} l_m.$$

Hiermee is nu ook OB' bekend, immers:

$$OB' = OT + TB' = nl_m + m \frac{s}{r} l_m = \frac{l_m}{r} (nr + ms).$$

Thans zijn de zijden van de hierboven genoemde driehoek als volgt aan te geven:

$$O'T = ml_n$$

$$O'C = 1/2 OB' = 1/2 \frac{l_m}{r} (nr + ms)$$

$$CT = 1/2 \frac{l_m}{r} (nr + ms) - TB' = 1/2 \frac{l_m}{r} (nr - ms).$$

Wij zullen nu de cosinusregel op deze driehoek toepassen, waarmee wij vinden:

$$\overline{O'C}^2 = \overline{O'T}^2 + \overline{CT}^2 - 2O'T \cdot CT \cdot \cos \gamma,$$

welke betrekking wij in deze vorm kunnen schrijven:

$$(O'C - CT)(O'C + CT) = \overline{O'T}^2 - 2O'T \cdot CT \cdot \cos \gamma.$$

Vult men de hierboven gevonden waarden voor de drie zijden in, dan voert dit tot de betrekking:

$$\frac{l_m^2 \cdot mns}{r} = m^2 l_n^2 - mn \frac{l_m l_n}{r} (nr - ms) \cdot \cos \gamma.$$

Wij zullen nu — in overeenstemming met hetgeen wij reeds vroeger deden — de verhouding l_m/l_n , d.i. de verhouding der zijden van de congruente parallelogrammen van het net, met de letter k aanduiden. Men kan dan schrijven:

$$k^2ns = mr - k(nr - ms) \cdot \cos \gamma,$$

waaruit volgt:

$$\cos \gamma = \frac{nsk^2 - mr}{k(ms - nr)},$$

welke betrekking wij de vergelijking van KOTURNICKIJ *van de eerste soort* zullen noemen.

Thans zullen wij de situatie in beschouwing nemen, die in figuur **b** van Fig. 24 schematisch is weergegeven, waarbij de top van de fundamentele driehoek op de linkerhelft van de verticale strook valt, maar waarbij de m -tallige spiraal wederom de minst steile is. In dit geval zullen wij, behalve de verticale middenlijn in de strook, de rechte, die O met C verbindt, als hulplijn invoeren. Het is dan mogelijk de zijden van de driehoek OCT in bekende grootheden uit te drukken en daardoor kan men dit ook voor de cosinus van de tophoek γ doen. Voert men ook nu voor de verhouding l_m/l_n de letter k in, dan zal men voor de cosinus vinden:

$$\cos \gamma = \frac{nrk^2 - ms}{k(mr - ns)},$$

welke betrekking wij als de formule van KOTURNICKIJ *van de tweede soort* zullen aanduiden.

Een volkomen overeenkomstige beschouwing van de situatie, die in tekening **c** is weergegeven (waarbij de top ook op de rechterhelft ligt, maar waarvoor de m -tallige de steilste spiraal is) leidt tot dezelfde formule van KOTURNICKIJ, dus van *de tweede soort*, terwijl voor de situatie van tekening **d** (waarbij de top op de linkerhelft valt, maar de m -tallige spiraal de steilste is) de formule van KOTURNICKIJ *van de eerste soort* wordt gevonden.

Wij moeten nu onder de ogen zien, of hiermee de mogelijke situaties (bij antidrome m - en n -tallige spiralen) zijn uitgeput.

Daartoe doen wij vooreerst uitkomen, dat bij onze afleidingen de windingsrichting van de grondspiraal géén rol speelt. Die afleidingen gelden dan ook bij beide mogelijke windingsrichtingen.

In de tweede plaats willen wij de aandacht vestigen op het feit, dat in onze vier figuren de situatie zó is gekozen, dat de hoek γ „stomp” is. Neemt men aan, dat de top van de fundamentele driehoek hoger boven de basis ligt dan de lengte van de halve basis, dan wordt hoek γ „scherp”. Maar ook nu kan men OC , dan wel $O'C$, als hulplijn aannemen en de driehoek OCT , dan wel $O'CT$, als basis voor de berekening van de hoek γ nemen, hetgeen tot dezelfde formules leidt.

§ 10. *Grenzen voor de mogelijke waarden der verhouding $k=l_m : l_n$ bij parallelogrammenetten (m en n) met antidrome m - en n -tallige spiralen*

Bij toepassen van de hierboven afgeleide formules van KOTURNICKIJ kan niet iedere waarde van k worden gebruikt voor het vinden van een daarbij behorende waarde van γ .

Dit willen wij met de tekening **a** als voorbeeld toelichten. Het feit, dat daarin de top T op de rechterhelft van de strook is aangenomen, heeft tengevolge, dat voor de daar aangenomen situatie $OT > OT'$, of $nl_m > ml_n$, waaruit volgt, dat daarbij geldt: $k > m/n$. Dezelfde omstandigheid brengt mede, dat $AS > OS$ moet zijn, of $rl_n > sl_m$, waaruit volgt, dat $k < r/s$ moet zijn. Een en ander laat zich schrijven: $m/n < k < r/s$.

Overeenkomstige grenzen voor k zijn naast de tekeningen **b**, **c** en **d** meegedeeld.

Bij toepassing van de formules van KOTURNICKIJ zal men met deze kantschriften rekening moeten houden.

Men zal bovendien moeten bedenken, dat men bij berekenen van γ voor k grenzen moeten in acht worden genomen tengevolge van het feit, dat de formule een cosinus oplevert en dat dus de waarde $(nsk^2 - nr)$ kleiner dan $+1$, of groter dan -1 moet zijn.

Dit alles verhindert intussen niet, dat de formules van KOTURNICKIJ van nut kunnen zijn, omdat — zoals wij hier boven zagen — de formules van TAIT wél de divergentie opleveren, maar de kennis van deze grootheid niet voldoende is om het net vast te leggen.

Wil men dit laatste wél doen, als aanvulling en gebruik makende van de reeds waargenomen grootheden r en s , dan moet men óf de hoek γ , óf de verhouding k aannemen en de waarde van k , dan wel die van γ , met de formules van KOTURNICKIJ berekenen. Hiertoe is vaak aanleiding, omdat er redenen kunnen zijn om bepaalde waarden van γ , of van k , te kiezen. Men denke hier, als voorbeeld, aan de wens om parallelogrammenetten met aangenomen hoeken of verhoudingen te tekenen.

Een belangrijk voorbeeld van het nut is: het ontwerpen van „recht-hoekennetten”. Trouwens in de „getallenvoorbeelden”, waarbij gebruik wordt gemaakt van aangenomen waarden voor r en s , zal dit nog nader worden toegelicht.

§ 11. *Afleiding van de reeds bekende formule voor de divergentie van een kwadratennet uit de formules van KOTURNICKIJ en van TAIT*

Het spreekt van zelf, dat de parallelogrammenetten als bijzondere gevallen de kwadratennetten insluiten. Aangezien bij deze laatste netten de m - en de n -tallige spiralen noodzakelijkerwijze antidroom verlopen, zullen ook de formules van TAIT en die van KOTURNICKIJ, welke wij afleidden in de onderstelling van een dergelijk verloop der m - en n -tallige

spiralen, de formule voor kwadratennetten moeten omvatten. Dit laat zich dan ook als volgt aantonen.

Wij gaan hiertoe uit van de formule van KOTURNICKIJ van de eerste soort, die wij voor de tekeningen **a** en **d** afleidden en welke aldus luidt:

$$\cos \gamma = \frac{nsk^2 - mr}{k(ms - nr)}.$$

Voor $k=1$ gaat deze over in:

$$\cos \gamma = \frac{ns - mr}{ms - nr}.$$

Voor $\gamma = 90^\circ$ moet dan gelden:

$$ns = mr, \text{ of: } \frac{r}{s} = \frac{n}{m}.$$

De formule van TAIT, die wij voor dezelfde situatie der m - en n -tallige spiralen in de tekeningen **a** en **d** hebben afgeleid, luidt nu:

$$\alpha = \frac{r\Delta_n + s\Delta_m}{rn + sm},$$

of wel:

$$\alpha = \frac{\frac{r}{s}\Delta_n + \Delta_m}{\frac{r}{s}n + m}.$$

Door invoeren van de zoëven afgeleide betrekking verandert ze in:

$$\alpha = \frac{\frac{n}{m}\Delta_n + \Delta_m}{\frac{n}{m}n + m},$$

of

$$\alpha = \frac{n\Delta_n + m\Delta_m}{n^2 + m^2}.$$

Dit is de algemene formule voor de divergentie van een *kwadratennet*, die wij in Hoofdstuk II hebben gegeven.

In de tweede plaats nemen wij nu de formule van KOTURNICKIJ van de tweede soort in beschouwing, die in de tekeningen **b** en **c** is weergegeven. De formule daarvoor hebben wij aldus geschreven:

$$\cos \gamma = \frac{nrk^2 - ms}{k(mr - ns)}.$$

Ze geeft door $k=1$ te stellen:

$$\cos \gamma = \frac{nr - ms}{mr - ns}.$$

Voor $\gamma = 90^\circ$ geldt dan:

$$nr - ms = 0, \text{ of: } \frac{r}{s} = \frac{m}{n}.$$

Deze betrekking voeren wij nu in de formule van TAIT van de tweede soort in, welke op dezelfde situatie der spiralen betrekking heeft als zoeven is beschouwd (ze werd in de tekeningen **b** en **c** weergegeven), n.l.:

$$\alpha = \frac{r\Delta_m + s\Delta_n}{rm + sn},$$

Door de invoering gaat deze over in:

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + n\Delta_n}{m^2 + n^2},$$

d.i. dezelfde formule voor de divergentie van een kwadratennet, die wij hierboven verkregen.

§ 12. *De algemene vergelijking voor de divergentie van rechthoekennetten [m en n] met de verhouding der rechthoekszijden = k.*

Op overeenkomstige wijze, als wij in de vorige paragraaf de divergentie voor kwadratennetten uit de formules van KOTURNICKIJ en van TAIT afleidden, kunnen wij ook de divergentie voor rechthoekennetten vinden. Wij mogen nu echter de grootheid k niet gelijk 1 aannemen.

Uitgaande van de formule van KOTURNICKIJ van de eerste soort, vinden wij door $\gamma = 90^\circ$ te stellen, dat nu moet voldaan worden aan:

$$nsk^2 - mr = 0, \text{ dus: } \frac{r}{s} = \frac{k^2n}{m}.$$

Dit invoerende in de formule van TAIT van de eerste soort levert:

$$\alpha = \frac{nk^2\Delta_n + m\Delta_m}{n^2k^2 + m^2}.$$

Gaat men uit van de formule van KOTURNICKIJ van de tweede soort, dan vindt men, dat voor $\gamma = 90^\circ$ voldaan moet worden aan:

$$nrk^2 - ms = 0,$$

dus aan:

$$\frac{s}{r} = \frac{k^2n}{m}.$$

Voert men dit in de formule van TAIT van de tweede soort in, dan vindt men:

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + k^2n\Delta_n}{m^2 + k^2n^2},$$

hetgeen dezelfde formule is, die wij hierboven hebben afgeleid.

De gevonden betrekking kan als een *algemene* voor rechthoekennetten worden aangeduid. „Algemeen” betekent hier, dat ze geldt voor: $m\Delta_n - n\Delta_m = +1$, zowel als voor: $m\Delta_n - n\Delta_m = -1$. Daar bovendien bij een tophoek van 90° voor de topdriehoek de m - en de n -tallige spiralen noodzakelijkerwijze antidroom verlopen, behoeft een dergelijk verloop niet als voorwaarde voor de geldigheid der formule te worden gesteld.

Van belang is verder nog, dat de formule *niet* de grootheden r en s bevat (al werd ze afgeleid met toepassing van een formule, die dit wél deed). Men kan dan ook met deze formule een rechthoekennet berekenen en het daarna tekenen, wanneer (behalve m en n) de waarde k gegeven is, en men kan — omgekeerd — k vinden, als (behalve m en n) de waarde α voor het net wordt gegeven. Voor het oplossen van deze laatste opgave kan men de formule schrijven in de vorm:

$$k^2 = \frac{m}{n} \frac{\alpha m - \Delta_m}{\Delta_n - \alpha n}.$$

Ook deze vergelijking is algemeen.

Toch kan men de grootheden r en s berekenen, wanneer van het rechthoekennet de waarde k wordt gegeven. Men kan daartoe gebruik maken van een der formules:

$$\frac{s}{r} = \frac{k^2 n}{m} \quad \text{en} \quad \frac{r}{s} = \frac{k^2 n}{m}.$$

Wij zullen nu in de volgende paragrafen verschillende vormen beschouwen, welke de algemene formule:

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + k^2 n\Delta_n}{m^2 + k^2 n^2}$$

kan aannemen en deze met bepaalde getallenwaarden nader toelichten.

§ 13. *Rechthoekennetten* [m en n], waarvoor $m=1$ en $n=1$ is

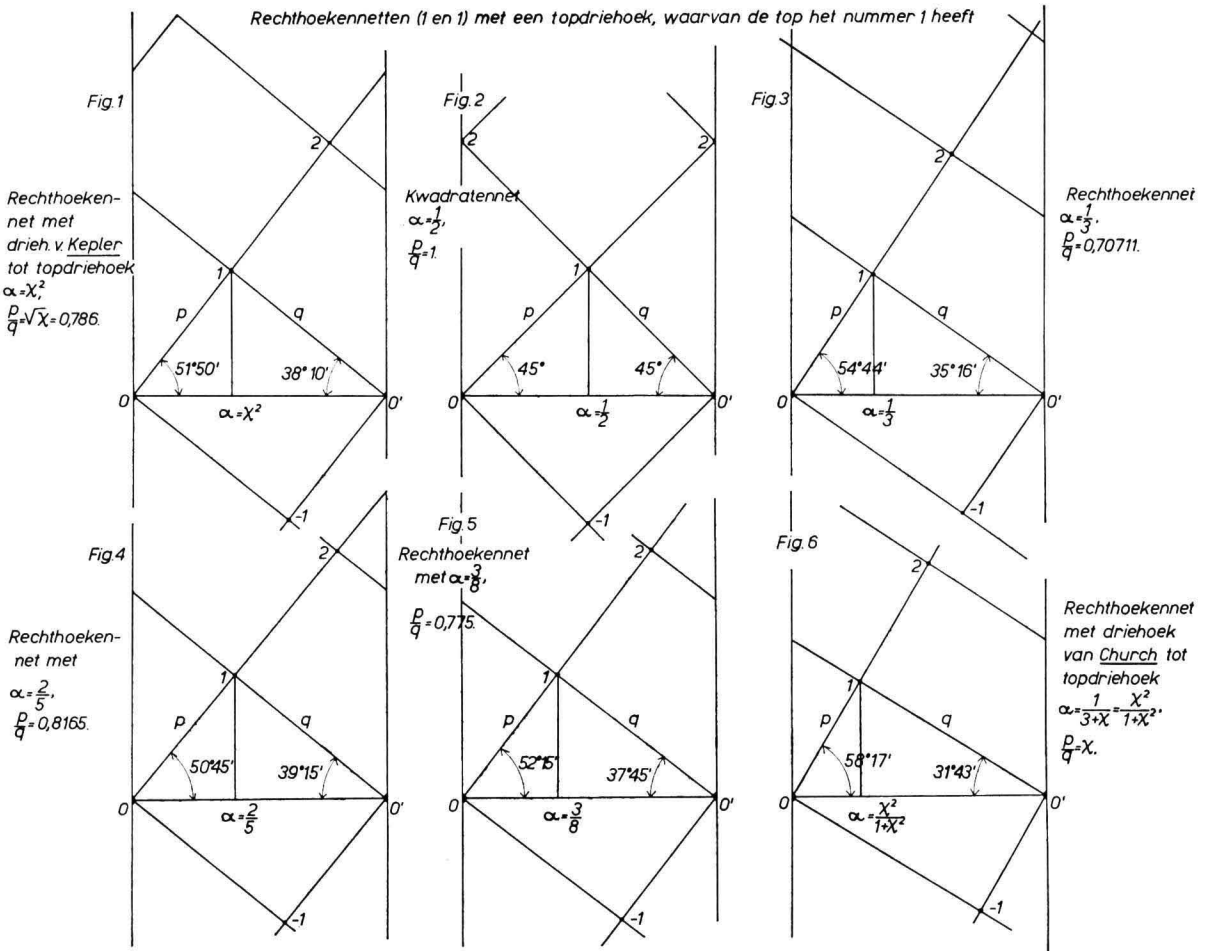
De algemene formule gaat in dit geval over in deze eenvoudige:

$$\alpha = \frac{k^2}{1 + k^2}.$$

Het zal duidelijk zijn, dat de topdriehoek nu bestaat uit een rechthoekige driehoek, waarvan de opstaande zijden beide ééntallige spiralen zijn en waarvan de top het nummer 1 draagt. In alle figuren van Plaat III, die dergelijke netten weergeeft, is de verhouding der zijden gelijk aan p/q en dit quotiënt stelt in dit geval de waarde k voor. Men vindt ook gemakkelijk *rechtstreeks* uit deze figuren de betrekking:

$$\alpha = \frac{k^2}{1 + k^2},$$

die wij hierboven uit de algemene formule afleidden.



Plaat III.

In bijgaand tabeltje hebben wij aan k verschillende *gekozen* getallenwaarden toegekend en de daarbij behorende waarden van α vermeld, die onze formule oplevert.

TABEL VII

De divergenties van rechthoekennetten [1 en 1] voor verschillende speciaal uitgekozen waarden van k .

Waarden van k :

$$\sqrt{\frac{1}{1}}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \sqrt{\frac{5}{8}}, \quad \sqrt{\frac{8}{13}}, \quad \sqrt{\frac{13}{21}}, \dots, \sqrt{\chi}$$

Waarden der divergenties α :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{5}{13}, \quad \frac{8}{21}, \quad \frac{13}{34}, \dots, \chi^2$$

Men ziet, dat onze *keuze* leidt tot de reeks, die in de bladstandentheorie reeds lang de naam heeft: „*de hoofdreëks der natuurlijke divergenties*”.

Als eerste voorbeeld is in het tabelletje het geval gekozen, waarin behalve $m=1$ en $n=1$, ook $k=1$ is; het net (dat op Plaat III als fig. 2 is afgebeeld) wordt dan gevormd door twee ééntallige spiralen en bestaat uit grote kwadraten. Op Plaat III (niet in het tabelletje) zal men verder als voorbeelden zowel het net met de driehoek van KEPLER als het net met de driehoek van CHURCH als „topdriehoek” terugvinden, maar overigens was de keuze (van k) willekeurig en er is ook (zonder nieuwe voorwaarden te stellen) geen aanleiding om een „voorkeur” aan een bepaald net te geven.

§ 14. *Rechthoekennetten* [m en n], waarvoor de verhouding der rechthoekszijden is: $k=\sqrt{m/n}$ en waarin m en n alleen als grensgeval beide gelijk aan 1 zijn

Voor de rechthoekennetten, die onder bovenstaand hoofd zijn te brengen, gaat de algemene formule, welke wij in § 12 hebben afgeleid, over in:

$$\alpha = \frac{\Delta_m + \Delta_n}{m + n},$$

welke formule wij ook kunnen schrijven;

$$\alpha = \frac{\Delta_{m+n}}{m+n}.$$

Wanneer men nu hierin $m=1$ en $n=1$ stelt, dan wordt $\alpha=1/2$ en dan stelt dus de formule het kwadratennet voor, dat wij reeds als Fig. 2 van Plaat III hebben leren kennen. Wij hebben deze figuur daarom (dit maal als „grensfiguur”) ook in deze paragraaf opgenomen.

Voordat wij de zoeven afgeleide formule met verschillende andere getallenwaarden van m en n toelichten, willen wij eerst een algemeen geldende bijzonderheid voor de rechthoekennetten doen uitkomen.

Wij beschouwen daartoe de topdriehoek, waarvan de opstaande zijden (die wij als l en l' aanduiden), gegeven worden door:

$$l = ml_n \text{ en } l' = nl_m,$$

zodat:

$$\frac{l}{l'} = \frac{ml_n}{nl_m}.$$

Aangezien (volgens definitie) geldt: $l_m/l_n = k$, wordt in de onderstelling waarvan wij voor deze paragraaf uitgaan (n.l. $m/n = k^2$):

$$\frac{l}{l'} = k.$$

Dit betekent, dat de lengten der opstaande zijden van de topdriehoek dezelfde verhouding bezitten als de lengten der zijden van de congruente rechthoekjes, waaruit het rechthoekennet is opgebouwd. Men kan dit ook nog anders uitdrukken, hetgeen het gemakkelijkste te zien is, als

men de grote rechthoek beschouwt, die door de topdriehoek en zijn „tegenligger” (d.i. de driehoek met de hoekpunten: o , $-mn$ en o' wordt gevormd. Uit onze afleiding blijkt dan, dat die grote rechthoek *gelijkvormig* is met de kleine rechthoeken, waardoor die rechthoek en ook het net wordt opgevuld.

Daarbij doet zich — zoals uit de afleiding volgt en uit verschillende voorbeelden hieronder zichtbaar wordt — de bijzonderheid voor, dat als de lange zijde van de grote rechthoek rechts gewonden is, de lange zijde van de kleine rechthoeken links gewonden is.

Voordat wij deze bijzonderheid nog nader beschouwen, willen wij eerst getallenvoorbeelden geven, die wij in twee groepen (A en B) zullen indelen.

A. *GevalLEN, waarin m en n op elkaar volgende termen uit de reeks (1, 1) zijn.*

In onderstaand tabelletje hebben wij onder de paren, bestaande uit de opeenvolgende termen van de reeks (1, 1), de (daarvoor geldende) waarden van k , d.i.: $\sqrt{m/n}$, vermeld en daaronder hebben wij de, met onze formule berekende, waarden van α gegeven.

TABEL VIII

De divergenties van rechthoekennetten berekend voor de reeks (1, 1), wanneer $k = \sqrt{m/n}$.

Waarden van m en n :

(1 en 1), (1 en 2), (2 en 3), (3 en 5), (5 en 8), (8 en 13), (13 en 21) . . . limiet

Waarden van k :

$$\sqrt{\frac{1}{1}}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \sqrt{\frac{5}{8}}, \quad \sqrt{\frac{8}{13}}, \quad \sqrt{\frac{13}{21}} \dots \dots \sqrt{x}$$

Waarden van α :

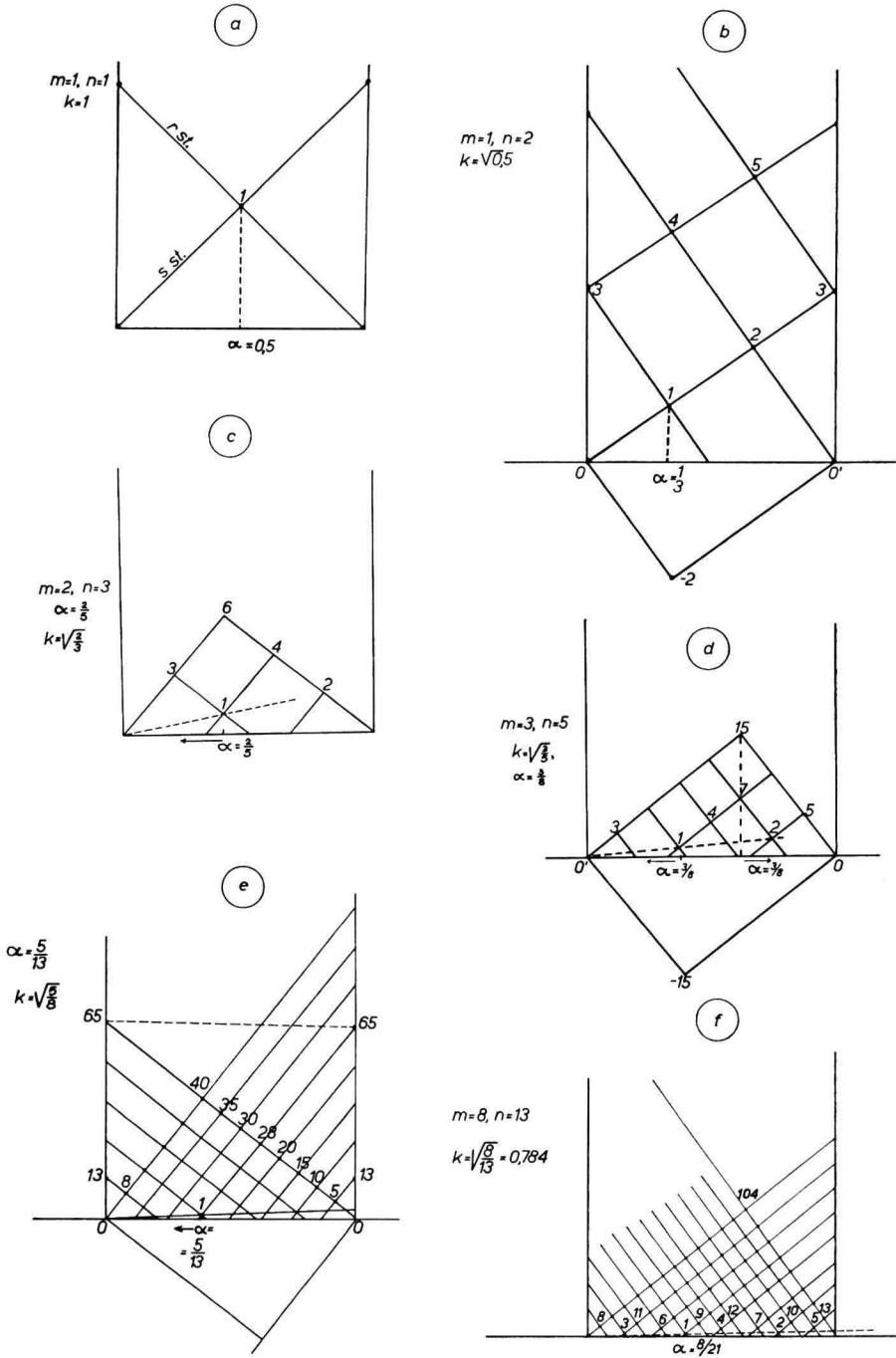
$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{5}{13}, \quad \frac{8}{21}, \quad \frac{13}{34} \dots \dots x^2$$

Onmiddellijk zal men getroffen worden door de grote overeenkomst, die dit tabelletje vertoont met het tabelletje, dat in de vorige paragraaf voorkomt, immers de laatste regels van de beide tabelletjes zijn volkomen gelijk. In ons nieuwe tabelletje is echter een regel aanwezig, die in het vorige ontbreekt en die daarin zelfs niet *kon* voorkomen, immers de waarden m en n zijn voor alle netten uit de vorige paragraaf gelijk aan 1 ondersteld, terwijl bij de nieuwe voorbeelden andere waarden aan m en n zijn gegeven.

Een uitzondering op dit laatste vormen alleen de getallen uit de eerste kolom van ons nieuwe tabelletje, waarbij wél aangenomen is: $m=1$ en $n=1$. Deze kolom voegden wij dan ook alleen ter completering toe om zodoende (ook) op de laatste regel van ons nieuwe tabelletje de *volledige* „hoofdreeks van natuurlijke divergenties” te verkrijgen.

Op Plaat IV zijn in de figuren **a**, **b**, **c**, **d**, **e** en **f** rechthoekennetten afgebeeld, waarvoor de gegevens aan Tabel VIII zijn ontleend. Ze hebben

Rechthoekennetten, waarvoor $k = \sqrt{\frac{m}{n}}$, als m en n op elkaar volgende termen uit de reeks (1,1)



Plaat IV.

dus alle betrekking op eenvoudige waarden van m en n uit reeks (1, 1). Voor alle is een rechtsgewonden grondspiraal aangenomen.

Het net van fig. *a* is hetzelfde als wij op Plaat III als fig. 2 afbeeldden. Bij het opstijgen in de reeks gaat de topdriehoek al spoedig naderen tot een bepaalde rechthoekige driehoek, namelijk de driehoek van KEPLER. Daarbij wordt de rechthoek, die gevormd wordt door de topdriehoek en zijn tegenligger in een steeds groter wordend aantal, onderling congruente rechthoekjes ingedeeld.

De divergenties van de netten (die men vindt door opzoeken van het punt met het nummer 1 en projecteren van dat punt op de basislijn) doorlopen de hoofdreeks der divergenties van de natuurlijke bladstanden. De limietdivergentie is: χ^2 (de „ideale grenshoek”).

Er vallen nog twee bijzonderheden op te merken: 1e. dat (in al deze gevallen) de kleine rechthoekjes 90° gedraaid staan ten opzichte van de grote rechthoek, en 2e. dat de rechthoekennetten zich in twee groepen laten indelen, namelijk

1e. [1 en 1], [2 en 3], [5 en 8], enz.,

2e. [1 en 2], [3 en 5], [8 en 13], enz.

Bij de eerste groep vallen de loodlijnen uit de punten 1 en mn samen. Bij de tweede groep doen zij dit niet, maar daarbij valt de loodlijn uit punt mn samen met het spiegelbeeld van de loodlijn uit punt 1.

B. *Gevallen, waarin m en n twee op elkaar volgende termen zijn uit één der reeksen (1, z), of uit één der reeksen (p , q).*

In onderstaand tabelletje IX hebben wij onder de paren van op elkaar volgende termen uit de reeks (1, 3) de waarden van $k \sqrt{m/n}$ vermeld en daaronder de voor die waarden, met onze formule berekende, waarden van α vermeld. De hierbij verkregen reeks staat in de leer der bladstanden bekend onder de naam van de *eerste nevenreeks van natuurlijke divergenties*.

TABEL IX

De divergenties van rechthoekennetten [m en n], waarvoor $k = \sqrt{m/n}$ als m en n twee op elkaar volgende termen uit de reeks (1, 3).

Waarden van m en n :

(1 en 3), (3 en 4), (4 en 7), (7 en 11), (11 en 18), (18 en 29), ... limiet

Waarden van k :

$$\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad \sqrt{\frac{4}{7}}, \quad \sqrt{\frac{7}{11}}, \quad \sqrt{\frac{11}{18}}, \quad \sqrt{\frac{18}{29}}, \dots, \sqrt{\chi}$$

Waarden van α

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{2}{7}, \quad \frac{3}{11}, \quad \frac{5}{18}, \quad \frac{8}{29}, \quad \frac{13}{47}, \dots, \frac{1}{3+\chi}$$

In onderstaand tabelletje hebben wij voor op elkaar volgende paren van termen uit de reeks (1, 4) een soortgelijke opstelling gegeven; de daaruit resulterende reeks van divergenties wordt aangeduid als de *tweede nevenreeks van natuurlijke divergenties*.

TABEL X

De divergenties van rechthoekennetten (m en n) met k-waarden gelijk aan $\sqrt{m/n}$, waarin m en n twee op elkaar volgende termen uit de reeks (1, 4).

Waarden van m en n:

(1 en 4), (4 en 5), (5 en 9), (9 en 14), (14 en 23), (23 en 37), . . . limiet

Waarden van k:

$$\sqrt{\frac{1}{4}}, \quad \sqrt{\frac{4}{5}}, \quad \sqrt{\frac{5}{9}}, \quad \sqrt{\frac{9}{14}}, \quad \sqrt{\frac{14}{23}}, \quad \sqrt{\frac{23}{37}}, \dots \sqrt{\chi}$$

Waarden van α :

$$\frac{1}{5}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{3}{14}, \quad \frac{5}{23}, \quad \frac{8}{37}, \quad \frac{13}{60}, \dots \frac{1}{4+\chi}$$

De reeksen van divergenties, die resulteren, wanneer wij uitgaan van op elkaar volgende termen uit een der reeksen (1, z), waarin $z > 4$ is, hebben geen speciale namen ontvangen; wij lieten het opstellen van tabelletjes daarvoor achterwege.

In onderstaand tabelletje hebben wij waarden van m en n uit de reeks (2, 5) in beschouwing genomen.

TABEL XI

De divergenties van rechthoekennetten [m en n], waarvoor $k = \sqrt{m/n}$ ($nu = \sqrt{p/q}$), als m en n twee op elkaar volgende termen uit de reeks (2, 5).

Waarden van m en n:

(2 en 5), (5 en 7), (7 en 12), (12 en 19), (19 en 31), (31 en 50), . . . limiet

Waarden van k:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}, \quad \sqrt{\frac{5}{7}}, \quad \sqrt{\frac{7}{12}}, \quad \sqrt{\frac{12}{19}}, \quad \sqrt{\frac{19}{31}}, \quad \sqrt{\frac{31}{50}}, \dots \sqrt{\chi}$$

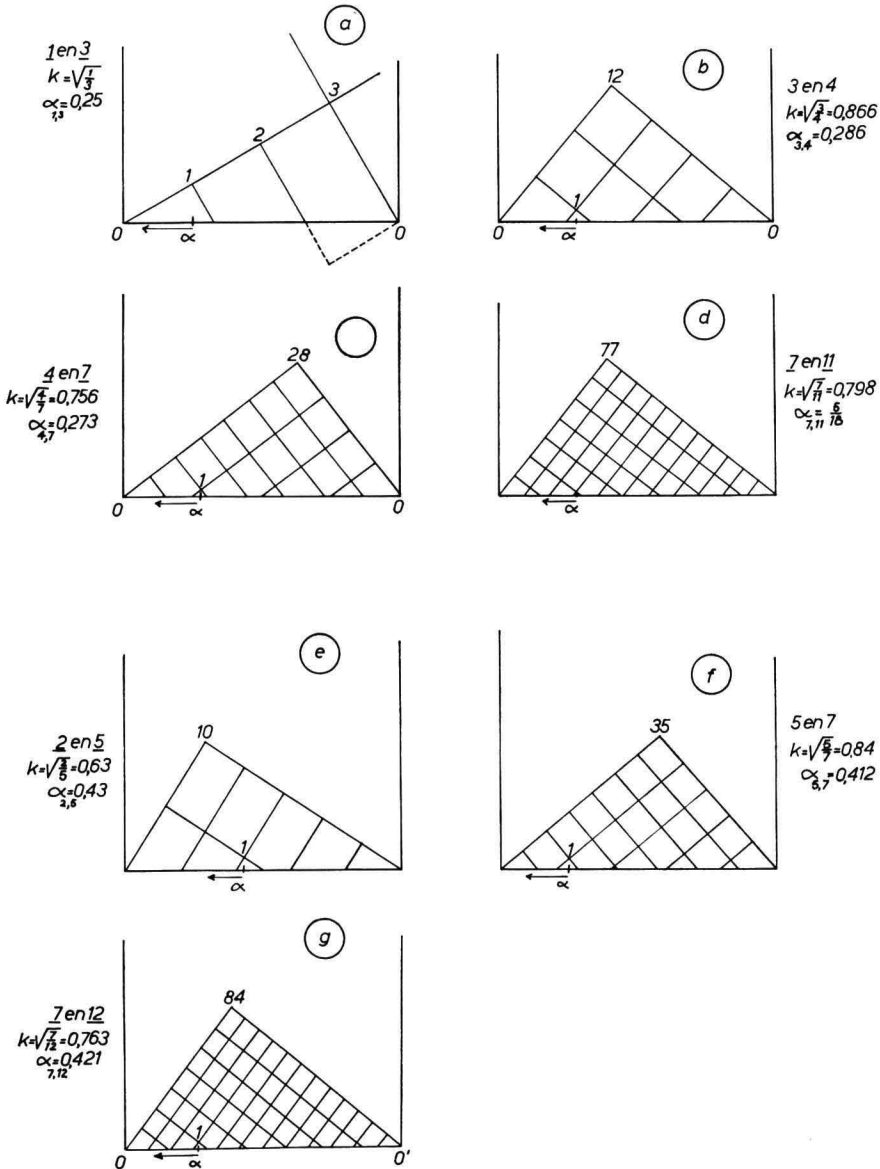
Waarden van α :

$$\frac{3}{7}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{8}{19}, \quad \frac{13}{31}, \quad \frac{21}{50}, \quad \frac{34}{81}, \dots \frac{\chi+2}{2\chi+5}$$

Op Plaat V hebben wij rechthoekennetten uit onze tabelletjes IX en XI in tekening gebracht.

Interessant is, dat als limiet (bij grote waarden van m en n) van k ook de waarde: $\sqrt{\chi}$ wordt bereikt. Dit wil zeggen, dat de limiet-topdriehoek wederom de driehoek van KEPLER is. De divergentie nadert echter bij grote waarden van m en n wederom tot een andere waarde dan bij de vorige tabelletjes.

Rechthoekennetten, waarvoor $k = \sqrt{\frac{m}{n}}$, als m en n op elkaar volgende termen zijn uit de reeksen (1,3) en (2,5)



Plaat V.

Hadden wij een tabelletje opgenomen, waarbij voor p en q andere waarden dan 2 en 5 uit de reeks (p, q) , dan zouden wij ook tot dezelfde limietwaarde voor k (n.l.: $\sqrt{\frac{1}{2}}$) zijn gekomen, maar opnieuw een andere limietwaarde voor α hebben gevonden.

Wij zullen in een volgend hoofdstuk een theorie ontwikkelen, waaruit zou volgen, dat op het oppervlak van de groeppunten van de hogere

planten (deze groeipunten aanvankelijk als cirkelelynders aannemende) rechthoekennetten [m en n] worden gevormd en dat daarbij de voorkeur wordt gegeven aan rechthoekennetten, waarvoor geldt: $\sqrt{m/n}$.¹⁾

Aanvaardt men deze theorie, dan zijn de rechthoekennetten, die in deze en in de volgende paragraaf zijn besproken, van bijzondere betekenis.

Bedenkt men echter, dat wanneer de cylinder aan een vertikaal groei-proces wordt onderworpen, in het algemeen de meest opvallende spiralen en ook de waarden van k worden gewijzigd, dan wordt het duidelijk, dat ook netten, waarvoor k niet gelijk is aan $\sqrt{m/n}$ voor de bladstandentheorie van belang zijn. Wij hebben er ons toe bepaald om in § 16 enkele voorbeelden van *rechthoekennetten* te geven, waarvoor k een andere waarde als $\sqrt{m/n}$ bezit.

Intussen meenden wij goed te doen door eerst (in § 15) de rechthoekennetten, waarvoor k wél gelijk is aan $\sqrt{m/n}$, te stellen tegenover kwadraten-netten met dezelfde waarden van m en n , omdat daardoor het verschil tussen deze twee soorten van netten wordt geaccentueerd. Daarbij verdienen in het bijzonder de divergenties, welke bij grote en bij limietwaarden van m en n bij beide soorten van netten optreden, nadere aandacht. Vooral zal sterk opvallen, dat als limiet-topdriehoeken voor de kwadraten-netten de driehoek van CHURCH en voor de rechthoekennetten de driehoek van KEPLER optreedt.

§ 15. *Vergelijking van kwadraten-netten en rechthoekennetten ($k = \sqrt{m/n}$) met dezelfde waarden van m en n .*

Wij hebben in onderstaande tabel, telkens voor een bepaald getallen-paar (m en n), drie verschillende grootheden, namelijk k , α en $\mathfrak{N}_{m,n}$, ter vergelijking tegenover elkaar geplaatst. Die voor de rechthoekennetten hebben wij met een accent gekenmerkt. Hierbij hebben wij paren uit de 5 verschillende summatiereeksen (waarvoor wij uiteraard de eenvoudigste uitkozen) tot groepen verenigd.

De divergenties konden alle berekend worden met de algemene formule:

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + k^2n\Delta_n}{m^2 + k^2n^2},$$

welke zich voor kwadraten-netten laat herleiden tot:

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + n\Delta_n}{m^2 + n^2},$$

en voor de rechthoekennetten met $k = \sqrt{m/n}$ tot:

$$\alpha = \frac{\Delta_m + \Delta_n}{m + n}.$$

1) De waarschijnlijkheid is groot, dat ik het hierbedoelde hoofdstuk niet meer kan bewerken en ik heb daarom in de „Inleiding” enkele onderdelen van de daarin op te nemen theorie meegedeeld en verder in een „Naschrift” bij Hoofdstuk III de belangrijkste overwegingen aangegeven, die tot de zoëven bedoelde voorkeur ($k = \sqrt{m/n}$) leiden.

Met uitzondering van hetgeen geldt voor het geval, waarvoor $m=1$ en $n=1$ is (waarvoor bij beide soorten van netten de divergentie $\frac{1}{2}$ is), zijn de divergenties bij een zelfde paar (m en n) voor de twee soorten van netten verschillend. Het verschil is echter niet groot en men kan zelfs dezelfde divergentie bij twee verschillende paren (m en n) voor beide soorten van netten terugvinden.

Het is dus mogelijk, dat een rechthoekennet zonder verandering van divergentie, maar door verandering van m en n (bijv. door verticale rek) in een kwadratennet overgaat.

In de tabel is ook voor beide soorten van netten een grootheid opgenomen, die in dit hoofdstuk *niet* thuis behoort, maar die in een later hoofdstuk nader besproken wordt, namelijk de grootheid:

$$[\mathfrak{N}_{m,n}] \text{ (resp. } [\mathfrak{N}'_{mn}]).$$

Deze grootheid stelt het *trillingsgetal* voor, dat voor het grote kwadraat, respectievelijk voor de grote rechthoek (opgebouwd uit twee topdriehoeken, waarvan een door 180° draaien uit de ander te verkrijgen), welk trillingsgetal zou intreden, wanneer die figuur (die in dit geval als een volkomen elastisch membraan wordt beschouwd) op zodanige wijze tot trilling werd gebracht, dat daarin (evenwijdig aan de zijden van de rechthoek) *knooplijnen* zouden ontstaan, die de figuur in mn , onderling congruente, kleine rechthoeken zouden indelen.

De waarden voor $[\mathfrak{N}_{m,n}]$ resp. $[\mathfrak{N}'_{mn}]$, in de tabel bevatten een factor c , welke afhangt van de massa per eenheid van oppervlak en van de spanning in het membraan, welke grootheid c in alle gevallen als constant werd aangenomen.

TABEL XII

*Waarden van k, van divergenties en van trillingsgetallen;
links voor kwadratennetten en rechts voor rechthoekennetten.*

I. SUMMATIEREEKS (1,1).

$$\frac{m=1 \text{ en } n=1}{\Delta_m=0 \text{ en } \Delta_n=1}$$

$k = 1$ $\alpha = 1/2$ $[\mathfrak{N}_{1,1}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \sqrt{2}$	$k' = \sqrt{1/1} = 1$ $\alpha' = 1/2$ $[\mathfrak{N}'_{1,1}] = \frac{c}{2} \cdot 2$
---	---

$$\frac{m=1 \text{ en } n=2}{\Delta_m=0 \text{ en } \Delta_n=1}$$

$k = 1$ $\alpha = 2/5$ $[\mathfrak{N}_{1,2}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$	$k' = \sqrt{1/2}$ $\alpha' = 1/3$ $[\mathfrak{N}'_{1,2}] = \frac{c}{2} \cdot 3$
---	---

$$\frac{m=2 \text{ en } n=3}{\Delta_m=1 \text{ en } \Delta_n=1}$$

$k = 1$ $\alpha = 5/13$ $[\mathfrak{N}_{2,3}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{13}$	$k' = \sqrt{2/3}$ $\alpha' = 2/5$ $[\mathfrak{N}'_{2,3}] = \frac{c}{2} \cdot 5$
---	---

$$\frac{m=3 \text{ en } n=5}{\Delta_m=1 \text{ en } \Delta_n=2}$$

$k = 1$ $\alpha = 13/34$ $[\mathfrak{N}_{3,5}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{34}$	$k' = \sqrt{3/5}$ $\alpha' = 3/8$ $[\mathfrak{N}'_{3,5}] = \frac{c}{2} \cdot 8$
--	---

$$\frac{m=5 \text{ en } n=8}{\Delta_m=2 \text{ en } \Delta_n=3}$$

$k = 1$ $\alpha = 34/89$ $[\mathfrak{N}_{5,8}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{89}$	$k' = \sqrt{5/8}$ $\alpha' = 5/13$ $[\mathfrak{N}'_{5,8}] = \frac{c}{2} \cdot 13$
--	---

$$\frac{m=8 \text{ en } n=13}{\Delta_m=3 \text{ en } \Delta_n=5}$$

$k = 1$ $\alpha = 89/233$ $[\mathfrak{N}_{8,13}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{233}$	$k' = \sqrt{8/13}$ $\alpha' = 8/21$ $[\mathfrak{N}'_{8,13}] = \frac{c}{2} \cdot 21$
---	---

$$\frac{m=13 \text{ en } n=21}{\Delta_m=5 \text{ en } \Delta_n=8}$$

$k = 1$ $\alpha = 233/610$ $[\mathfrak{N}_{13,21}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{610}$	$k' = \sqrt{13/21}$ $\alpha' = 13/34$ $[\mathfrak{N}'_{13,21}] = \frac{c}{2} \cdot 34$
---	--

TABEL XII (vervolg)

II. SUMMATIEREËKS (1,3).

$\frac{m=1 \text{ en } n=3}{\Delta_m=1 \text{ en } \Delta_n=2}$	
$k = 1$ $\alpha = 7/10 = 3/10$ $[\mathfrak{R}_{1,3}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$	$k' = \sqrt{1/3}$ $\alpha' = 3/4 = 1/4$ $[\mathfrak{R}'_{1,3}] = \frac{c}{2} \cdot 4$
$\frac{m=3 \text{ en } n=4}{\Delta_m=1 \text{ en } n=1}$	
$k = 1$ $\alpha = 7/25$ $[\mathfrak{R}_{3,4}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$	$k' = \sqrt{3/4}$ $\alpha' = 2/7$ $[\mathfrak{R}'_{3,4}] = \frac{c}{2} \cdot 7$
$\frac{m=4 \text{ en } n=7}{\Delta_m=1 \text{ en } \Delta_n=2}$	
$k = 1$ $\alpha = 18/65$ $[\mathfrak{R}_{4,7}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{65} = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{13}$	$k' = \sqrt{4/7}$ $\alpha' = 3/11$ $[\mathfrak{R}'_{4,7}] = \frac{c}{2} \cdot 11$
$\frac{m=7 \text{ en } n=11}{\Delta_m=2 \text{ en } \Delta_n=3}$	
$k = 1$ $\alpha = 47/170$ $[\mathfrak{R}_{7,11}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{170} = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{34}$	$k' = \sqrt{7/11}$ $\alpha' = 5/18$ $[\mathfrak{R}'_{7,11}] = \frac{c}{2} \cdot 18$

III. SUMMATIEREËKS (2,5).

$\frac{m=2 \text{ en } n=5}{\Delta_m=1 \text{ en } \Delta_n=2}$	
$k = 1$ $\alpha = 12/29$ $[\mathfrak{R}_{2,5}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{29}$	$k' = \sqrt{2/5}$ $\alpha' = 3/7$ $[\mathfrak{R}'_{2,5}] = \frac{c}{2} \cdot 7$
$\frac{m=5 \text{ en } n=7}{\Delta_m=2 \text{ en } \Delta_n=3}$	
$k = 1$ $\alpha = 31/74$ $[\mathfrak{R}_{5,7}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{74}$	$k' = \sqrt{5/7}$ $\alpha' = 5/12$ $[\mathfrak{R}'_{5,7}] = \frac{c}{2} \cdot 12$
$\frac{m=7 \text{ en } n=12}{\Delta_m=3 \text{ en } \Delta_n=5}$	
$k = 1$ $\alpha = 81/193$ $[\mathfrak{R}_{7,12}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{193}$	$k' = \sqrt{7/12}$ $\alpha' = 8/19$ $[\mathfrak{R}'_{7,12}] = \frac{c}{2} \cdot 19$

TABEL XII (vervolg)

IV. SUMMATIEREËKS (1,4).

	$\frac{m=1 \text{ en } n=4}{\Delta_m=1 \text{ en } \Delta_n=3}$	
$k = 1$ $\alpha = 13/16 = 3/16$ $[\mathfrak{R}_{1,4}] = \frac{c}{2} \sqrt{17}$		$k' = \sqrt[4]{4}$ $\alpha' = 4/5 = 1/5$ $[\mathfrak{R}'_{1,4}] = \frac{c}{2} \cdot 5$
	$\frac{m=4 \text{ en } n=5}{\Delta_m=1 \text{ en } \Delta_n=1}$	
$k = 1$ $\alpha = 9/41$ $[\mathfrak{R}_{4,5}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{41}$		$k' = \sqrt[4]{5}$ $\alpha' = 2/9$ $[\mathfrak{R}'_{4,5}] = \frac{c}{2} \cdot 9$
	$\frac{m=5 \text{ en } n=9}{\Delta_m=1 \text{ en } \Delta_n=2}$	
$k = 1$ $\alpha = 23/106$ $[\mathfrak{R}_{5,9}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{106}$		$k' = \sqrt[5]{9}$ $\alpha' = 3/14$ $[\mathfrak{R}'_{5,9}] = \frac{c}{2} \cdot 14$

V. SUMMATIEREËKS (3,8).

	$\frac{m=3 \text{ en } n=8}{\Delta_m=1 \text{ en } \Delta_n=3}$	
$k = 1$ $\alpha = 28/73$ $[\mathfrak{R}_{3,8}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{73}$		$k' = \sqrt[3]{8}$ $\alpha' = 4/11$ $[\mathfrak{R}'_{3,8}] = \frac{c}{2} \cdot 11$
	$\frac{m=8 \text{ en } n=11}{\Delta_m=3 \text{ en } \Delta_n=4}$	
$k = 1$ $\alpha = 68/185$ $[\mathfrak{R}_{8,11}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{185}$		$k' = \sqrt[8]{11}$ $\alpha' = 7/19$ $[\mathfrak{R}'_{8,11}] = \frac{c}{2} \cdot 19$
	$\frac{m=11 \text{ en } n=19}{\Delta_m=4 \text{ en } \Delta_n=7}$	
$k = 1$ $\alpha = 177/482$ $[\mathfrak{R}_{11,19}] = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{482}$		$k' = \sqrt[11]{19}$ $\alpha' = 11/30$ $[\mathfrak{R}'_{11,19}] = \frac{c}{2} \cdot 30$

§ 16. *Enkele voorbeelden van rechthoekennetten* [m en n], waarvoor de verhouding (k) der zijden der kleine rechthoeken niet gelijk is aan 1 en ook niet gelijk is aan $\sqrt{m/n}$

Bij het berekenen en tekenen van rechthoekennetten van de aard, als in het hoofd van deze paragraaf is omschreven, moeten wij terugvallen op de algemene formule ¹⁾:

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + k^2n\Delta_n}{m^2 + k^2n^2}.$$

Als eerste voorbeeld beschouwen wij het rechthoekennet, waarvoor geldt: $m=1$, $n=2$ en $\alpha=3/8$.

Met behulp van de algemene formule kunnen wij nu k berekenen. Immers nu zal gelden:

$$\frac{3}{8} = \frac{2k^2}{1 + 4k^2},$$

hetgeen leidt tot

$$k^2 = 0,75 \text{ en } k = 0,866.$$

Hieruit blijkt, dat k niet gelijk aan 1 en ook niet gelijk aan $\sqrt{m/n}$ (d.i. 0,707) is.

Aangezien $l_1 = kl_2$ moet zijn, kunnen wij voor de topdriehoek de vergelijking opschrijven:

$$4k^2l_2 + l_2^2 = 1, \text{ of } 4l_2 = 1,$$

zodat $l_2 = 0,5$ is en $l_1 = kl_2 = 0,433$.

Hierdoor wordt het mogelijk om de topdriehoek te tekenen. Dit leidt tot een figuur, waaraan men onmiddellijk kan waarnemen, dat ze een rechthoekennet voorstelt.

Als tweede voorbeeld beschouwen wij het rechthoekennet, waarvoor

$$m = 2, n = 3 \text{ en } \alpha = \frac{3}{8}$$

is gegeven.

De algemene formule leidt nu tot de formule:

$$\frac{3}{8} = \frac{2 + 3k^2}{4 + 9k^2},$$

waaruit volgt: $k^2 = 4/3$, dus $k = 1,1545$.

Men ziet, dat ook hier k niet gelijk is aan 1 en ook niet gelijk is aan $\sqrt{m/n}$ (d.i. 0,8165).

Voor de topdriehoek kunnen wij de betrekking opstellen:

$$(2l_3)^2 + (3l_2)^2 = 1,$$

¹⁾ Daarbij zij aangetekend, dat men ook langs andere weg het doel kan bereiken, wij kozen bovenstaande om aan te tonen, dat de algemene formule ook hier bruikbaar is.

die ook aldus kan worden geschreven:

$$(4 + 9 \times 1,1545^2)l_3^2 = 1$$

waaruit volgt: $l_3 = 0,25$ en $l_2 = kl_3 = 0,288$.

De opstaande zijden van de topdriehoek worden dan: $3l_2 = 0,8649$ en $2l_3 = 2 \times 0,25 = 0,5$, waarmee men nu de driehoek kan construeren.

Wij hebben in onderstaande fig. 25 het aldus berekende rechthoekennet afgebeeld, omdat het wegens twee bijzonderheden interessant is: voor- eerst vanwege het feit, dat k in dit geval groter dan 1 is, en in de tweede plaats, omdat het leert, dat de combinatie $m = 2$, $n = 3$ en $\alpha = 3/8$ niet leidt

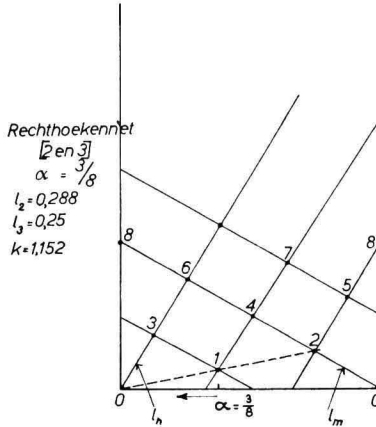


Fig. 25.

tot een *kwadratennet*. Het laatste volgt ook uit onze beschouwingen in Hoofdstuk II, waar wij zagen, dat in de reeks van *kwadratennetten* wél voorkomen: netten met divergenties $2/3$, $5/13$, $13/34$, $34/89$ enz., maar *niet* de *kwadratennetten* met de divergenties $3/8$, $8/21$, $21/55$, $55/144$ enz.

Thans zien wij, dat de ontbrekende divergenties, met dezelfde waarden voor m en n , wél bij „*rechthoekennetten*” worden aangetroffen.

Wij voegen hieraan als *derde voorbeeld* toe:

het net: $m = 3$, $n = 5$ en $\alpha = 8/21$, waarvoor de algemene formule leidt tot:

$$\frac{8}{21} = \frac{3 + 10k^2}{9 + 25k^2},$$

waaruit volgt, dat in dit geval:

$$k^2 = 0,9 \text{ en } k = 0,9487.$$

Ook hier is dus k niet gelijk aan 1 en evenmin gelijk aan $\sqrt{m/n}$ (d.w.z.: $\sqrt{0,6} = 0,7746$), zodat ook dit rechthoekennet in deze paragraaf thuis behoort.

De topdriehoek leidt tot de betrekking:

$$(3 \times l_5)^2 + (5 \times kl_5)^2 = 1,$$

of:

$$gl_5^2 + 25 \times 0,9 l_5^2 = 1,$$

waaruit volgt:

$$l_5^2 = \frac{1}{31,5},$$

zodat $l_5 = 0,178$ en $l_3 = 0,1687$, waarmee het net kan worden getekend. Wij hebben geen tekening toegevoegd, omdat de rechthoeken aan kwadraten nabijkomen.

§ 17. *Enkele opmerkingen, betreffende BEIJERINCK'S publikatie over bladstanden uit 1927*

BEIJERINCK ¹⁾ blijkt, in navolging van CHURCH, van mening te zijn, dat de plant, bij het uitgroeien van de cilindrische stengel met daarop ingeplante zijdelingse organen, tot een plat vlak, voorkeur te zien geeft voor een plaatsingswijze dier organen, welke men kan nabootsen met behulp van *logaritmische folia*.

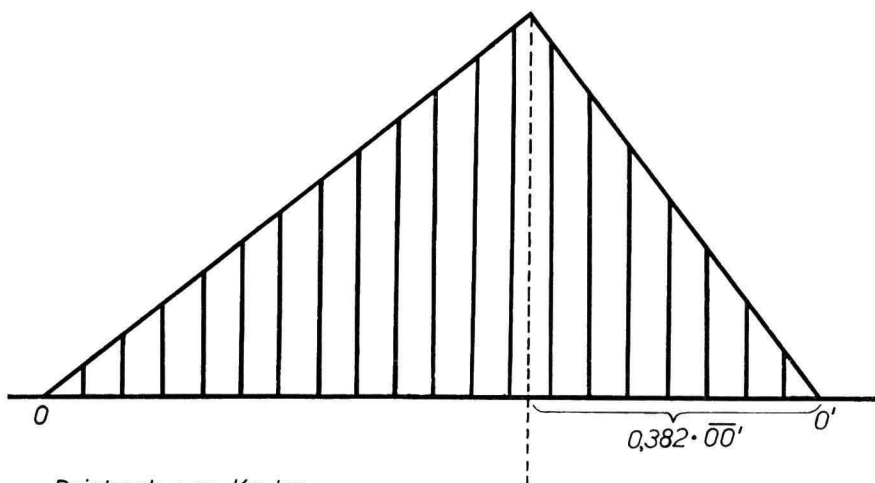
Daarbij zou die voorkeur — en dit is BEIJERINCK'S ²⁾ eigen opvatting — meer speciaal uitgaan naar één bepaald *folium*, dat verkregen kan worden door conforme afbeelding (met behulp van de logaritmische functie) van een bepaalde, op een, tot een „strook” afgewikkelde cirkelcilinder voorkomende, rechthoekige driehoek (met als hypotenusa een horizontale lijn ter breedte van de strook). Het is de driehoek waaraan ik (op historische gronden ³⁾) de naam heb gegeven van de „driehoek van KEPLER”.

Het verband tussen het folium en deze driehoek was door BEIJERINCK niet belicht en hij gaf, gedeeltelijk daardoor, over dit folium beschouwingen,

¹⁾ BEIJERINCK zond mij het concept van zijn publikatie (waarover hij nimmer vóórdien met mij had gesproken) in het voorjaar van 1927 ter advisering toe. Ik stond toen op het punt om naar Ned.-Indië te vertrekken, waar ik voor twee jaren een betrekking had aanvaard, die mij geen tijd liet voor eigen wetenschappelijk werk. Na oppervlakkig lezen van het concept moest ik hem teleurstellen. Ik kon de inhoud aanvankelijk niet begrijpen en ook na mijn terugkeer — de publikatie was inmiddels verschenen — is mij dit gedurende een lange reeks van jaren niet mogelijk geweest. Nu mij dit — na meermalen de studie daarvan te hebben hervat — eindelijk voor een groot deel gelukt is, wil ik trachten BEIJERINCK'S denkbeelden ook voor anderen te verduidelijken. Daarbij zal blijken, dat ik die denkbeelden slechts voor een deel kan aanvaarden.

²⁾ BEIJERINCK'S publikatie verscheen (uitsluitend in het Nederlands) in: „Verslagen v. d. Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam”, Band 36 (1927), blz. 585–604, onder de titel „Verband tusschen de bladstellingen van de hoofdreeks en de natuurlijke logaritmen”. Op blz. 929 worden in diezelfde band „Errata” hiervoor gegeven. Men zie verder: de herdruk van de bedoelde publikatie op blz. 25–40 in het 6e deel van „BEIJERINCK'S Verzamelde Geschriften” uit 1940, waarbij ik speciaal de aandacht vestig op de daaraan, door de uitgevers dier geschriften, toegevoegde „voetnoot”.

³⁾ Zie: Hoofdstuk I van deze „Nieuwe Studiën”.



*Driehoek van Kepler
met 19 getrokken verticale lijnen.*

Fig. 26.

die ik — van mathematisch en van botanisch standpunt bezien — niet alle deel. Dit verhindert niet, dat ik zijn voorkeur voor dit speciale folium wél deel, een voorkeur, die hij tot uitdrukking bracht, door daaraan de naam te geven van het *folium logarithmicum aureum*.

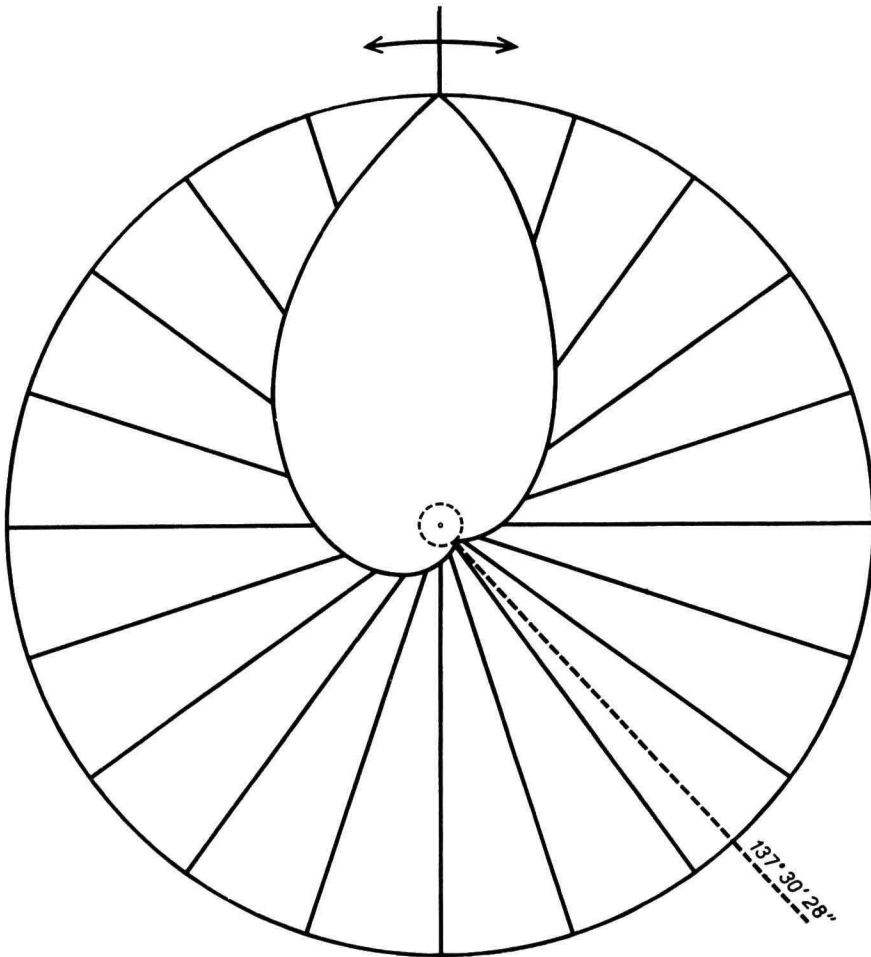
Ik heb gemeend goed te doen door de samenhang met de driehoek van KEPLER met bijgaande tekeningen (fig. 26 en 27) nader toe te lichten.

De bedoelde driehoek, die ik hierboven heb afgebeeld, heb ik voorzien van 19 verticale lijnen, op onderling gelijke afstanden, loodrecht op de basis staande. In de figuur op blz. 130 heb ik de logarithmische afbeelding van de complete driehoek van KEPLER gegeven, waaruit men zien kan, dat de basis daarbij tot een cirkel is geworden en dat de 19 verticale lijnen nu als stralen zijn waar te nemen, die uit het centrum vertrekken en loodrecht op de cirkel uitkomen.

De opstaande zijden van de driehoek zijn in de logarithmische spiralen veranderd, die het „folium” vormen. Dit verklaart onze vroegere aanduiding daarvan als een „gedeeltelijke” afbeelding van de rechte driehoek.

Van belang is het nog, na te gaan, waar de basishoeken uit de driehoek in het folium zijn terug te vinden, omdat BEIJERINCK aan die hoeken een bijzondere betekenis heeft toegekend. Bij de „conforme” afbeelding zullen die hoeken niet veranderd zijn.

CHURCH voert (zoals bekend) de constructie met *zijn* folium op zodanige wijze uit, dat hij eerst de ene begrenzende spiraal daarvan (de zwakker hellende, d.i. de latere m -tallige spiraal) m keren over een hoek van $360^\circ/m$ laat draaien en daarna de sterker hellende, d.i. de later n -tallige spiraal, n keren over een hoek van $360^\circ/n$ in tegengestelde zin laat draaien. Wanneer hij voor m en n twee grote op elkaar volgende getallen uit een



Ontstaanswijze van het folium logarithmicum aureum uit de driehoek van Kepler

Fig. 27.

summatiereeks koos, verkreeg CHURCH met zijn folium een indeling van het platte vlak in gelijkvormige pseudokwadraten.

BEIJERINCK meende nu, dat er, met het *folium logarithmicum aureum* op volkomen dezelfde wijze te werk gaande, evenzo een indeling in pseudokwadraten zou optreden en hij heeft dit in zijn publikatie enige keren, zonder bewijs, verkondigd. Hiermee heeft BEIJERINCK echter een essentiële vergissing gemaakt. De indeling leidt namelijk in dit geval tot pseudorechthoekjes, die bij grote waarden van m en n voor alle summatiereeksen in gelijke mate gerekt zijn en wel — merkwaardigerwijze — in een richting, die 90° verschilt van die, waarin de rechthoek, opgebouwd uit de driehoek van KEPLER en uit zijn tegenligger, gerekt is.

Intussen brengen CHURCH' constructies geen verklaring voor de voor-

keur voor bepaalde waarden m en n , die de plant te zien geeft, en dus evenmin van het daarbij optreden van bepaalde divergenties. Ditzelfde geldt als men de constructies met het *folium logarithmicum aureum* uitvoert. Een uitzondering op deze laatste uitspraak vormt alleen het geval, waarin dit folium wordt geconstrueerd met de waarden $m=1$ en $n=1$. In *dit* geval wordt namelijk, uitgaande van KEPLERS driehoek, als divergentie gevonden: $\alpha = \chi^2$, d.i. een divergentie, waarvan soms botanici menen, dat ze als ideaal door de plant wordt nagestreefd. BELJERINCK meent dan ook, dat deze constructie als uitgangsfiguur voor andere bladstanden kan optreden en hij ziet hierin dan ook opnieuw aanleiding om de keuze van zijn folium als de ware te beschouwen. Hij oppert zelfs, dat dit folium als aantrekkelijkheid heeft, dat voor de kleinere der basishoeken van de driehoek de mathematische bijzonderheid geldt, dat $\cos x = \operatorname{tg} x$ (zie Hoofdstuk I van deze publikatie).

Het spreekt van zelf, dat ik deze bijzonderheid voor de plant niet aantrekkelijk acht, wanneer daarvoor geen biologische, fysische of teleologische grond bestaat.

Ik laat hier veel van hetgeen in BELJERINCK'S publikatie ter sprake komt, buiten beschouwing en stel alleen nog vast, dat naar mijn oordeel: 1e. het invoeren van hyperbolische functies daarin geen enkel voordeel heeft opgeleverd, 2e. het geen zin heeft gehad om verband te leggen tussen bladstanden en logaritmen en de enigszins mystieke titel van BELJERINCK'S publikatie beter ware vermeden, 3e. dat BELJERINCK niet geslaagd is in het vinden van een verklaring voor de (zwakke) voorkeur, die de plant voor bepaalde nevenreeksen blijkt te bezitten.

In de volgende hoofdstukken hoop ik aan te tonen, dat een verklaring voor bepaalde voorkeuren kan worden gegeven, waartoe het echter nodig zal blijken nieuwe onderstellingen in te voeren.

OPMERKINGEN OVER DE QUINCUNX

Als voorbeeld van de meest volkomen rangschikking van punten, of kleine voorwerpen, op een plat vlak volgens een *quincunx* kan men de plaatsingswijze beschouwen van de vijf punten, die op de zijde met vijf ogen van een dobbelsteen wordt aangetroffen.

In „Index General and Glossarial” bij de eerste druk van het, terecht, nog na drie eeuwen bewonderde werk van THOMAS BROWNE ¹⁾ (de naam werd door hem zelf ook wel geschreven als BROWN) „The Garden of Cyrus” uit 1658, wordt dan ook de volgende omschrijving van „Quincunx” gegeven: „an arrangement or disposition of things by fives in a square, one being placed in the middle of a square”.

In de tekst van dit werkje wordt deze definitie echter belangrijk uitgebreid. Op blz. 95 van de eerste druk daarvan heet het namelijk:

„Now though, in some ancient and modern practice, the area, or decussated plot might be a perfect square, answerable to a Tuscan pedestal, and the *quinquernio* or cinque point of a die, wherein by diagonal lines the intersection was rectangular; accommodable unto plantations of large growing trees, and we must not deny ourselves the advantage of this order; yet shall we chiefly insist upon that of Curtius and Porta, in their brief description hereof. Wherein the *decussis* is made within a longilateral square, with opposite angles, acute and obtuse at the intersection, and so upon progression making a *rhombus* or lozenge figuration, which seemeth very agreeable unto the original figure”.

Als typerend geeft BROWNE, vóór het titelblad, de hierbijgaande tekening met het onderschrift „Quid [illo] Quincunce speciosius, qui, in quacunque partem spectaveris, rectus est”.

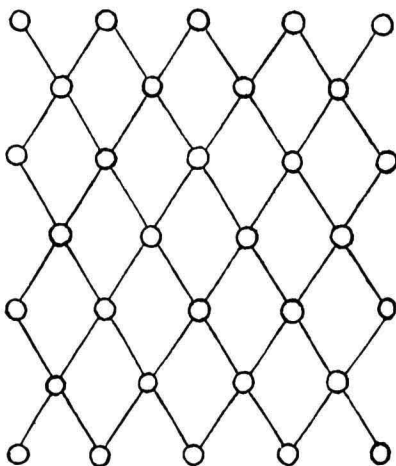
Waarschijnlijk heeft ook niemand zich meer in de verschijningsvormen van de „quincunx” verdiept dan BROWNE ²⁾, en een verdere uitbreiding der definitie kan men niet eerder in de literatuur aantreffen dan in CARL FRIEDRICH NAUMANN'S publikaties uit 1842 en volgende jaren. Drie daarvan verschenen in 1842 en 1843 in Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie ³⁾, terwijl een samenvatting, met verbeteringen, als afzonder-

¹⁾ De Leidse Universiteit, waaraan BROWNE promoveerde, bezit in het Snouck-Hurgronjehuis talrijke gegevens over BROWNE.

²⁾ Aan de uitvoerige beschouwing, die LESLIE STEPHEN and SIDNEY LEE over BROWNE, in de „Dictionary of National Biography”, Vol. III, London 1908, gaven, ontleen wij de volgende uitspraak van COLERIDGE over het geciteerde werkje: „He finds quincunxes in heaven above, quincunxes in earth below, in optic nerves, in roots of trees, in leaves, in everything”.

³⁾ Bd. 56 (1842), S. 1-37, Bd. 58 (1843) en Bd. 60 (1843), S. 550-556.

THE
G A R D E N
OF
C Y R U S.
OR,
The Quincunciall, Lozenge,
or Net-work Plantations
of the Ancients, Artificially
Naturally, Mystically
Considered.



Quid [illo] Quincunce speciosus, qui, in
quancunque partem spectaveris,
rectus est.—QUINTILIAN [8. 3. 9].

BY
Thomas Brown D. of Physick

Printed in the Year, 1658.

lijk werkje van 80 bladzijden in 1845 in Dresden und Leipzig, bij de „Arnoldische Buchhandlung”, het licht zag onder de titel: „Ueber den Quincunx als Grundgesetz der Blattstellung vieler Pflanzen”.

In dit werkje wordt NAUMANN'S doelstelling bij het schrijven aldus geformuleerd (S. 3):

„Das Studium der Sigillarien und Lepidodendra der Steinkohlenformation veranlasste mich zur Untersuchung ob nicht die Gesetze der Blattstellung auch aus dem Begriffe des *Quincunx* abzuleiten sein dürften, sobald man diesen Begriff in seiner ganzen Allgemeinheit auffasst und nicht bloss den römischen Quincunx, diese einfachste Form aller quincuncialen Anordnungen, im Auge behält. Die Antwort auf diese Frage schien mir bejahend auszufallen, indem die versuchte Quincuncial-Methode für die Erscheinungen der Blattstellung eine sehr einfache Erklärung in die Hand gab”.

Een nadere omschrijving van de uitbreiding, die NAUMANN aan het begrip „quincunx” heeft gegeven, volgt dan op S. 5:

„Eine quincunciale Anordnung der Blätter findet allemal da statt, wo *parallele* (oder auch *radiale*, unter *gleichen* Winkeln convergirende)

Reihen von aequidistanten Blättern in der Weise gegeben sind, dass die Blätter der *Nebenreihe*¹⁾ um einen bestimmten Theil der Blattstanz verschoben oder höher aufwärts gestellt sind. Wir wollen diese Reihen, weil solche am Pflanzenstamme vertical aufwärts steigen, jedenfalls aber als *gerade* Linien vorgestellt werden müssen, mit SCHIMPER und BRAUN *Orthostichen* nennen."

Het blijkt, o.a. uit het „Vorwort”, dat NAUMANN het voorkomen van „Orthostichen” als „das eigentliche *Wesen*, die Schraubenlinien oder Spiralen aber als ein bloßes *Phänomen* der Blattstellung” aanneemt. Toch doet hij in dit opzicht water in de wijn (zie S. 28): „lehrt übrigens eine aufmerksame Betrachtung, dass eigentlich ein jedes Strophensystem *in sich selbst* abermals einen Quincunx bildet, dessen Grundreihen jedoch nicht vertikal, sonder schräg gestellt sind, und daher auch nicht mehr Orthostichen genannt werden können. Doch scheint dieses Verhältniss ohne weitere Bedeutung für die Erklärung des Zusammenhanges verschiedener quincunxialen Anordnungen zu sein”²⁾.

Bij de hieronder volgende korte opmerkingen zal ik mij tot gevallen met enkelvoudige quincunxsystemen beperken; bij de samengestelde zou de — door NAUMANN als „Romeinse quincunx” — aangeduide rangschikking de plaatsing van de punten bepalen. Ook zal ik alleen de „parallelreihigen Quincunx”, zoals die op een cilinder wordt aangetroffen, in beschouwing nemen en „den concentrischen oder kreisförmigen Quincunx”, zoals men die o.a. op centrisc gebouwde plantaardige organen (zoals bloemhoofdjes) aantreft, ter zijde laten.

Ik zal dan in de eerste plaats voor twee eenvoudige gevallen aantonen, dat men de ordening van de hoekpunten bij „regelmatige parallelogrammenetten op een (uitgeslagen) cilinderoppervlak” kan opvatten als een ordening van punten in (evenwijdig en regelmatig geplaatste) quincunxen,

1) Hier wordt uitsluitend aan een verticale rij van inplantingen van gelijke objecten, of delen van objecten gedacht, welke rij zich geregeld herhaalt (v. I.).

2) Er bestond (en bestaat nog) bij de botanici veel verschil van mening over hetgeen in de leer der bladstanden moet verstaan worden onder de uitdrukking „quincunx” en onder termen, die daarvan zijn afgeleid. BONNET in zijn grondleggende publikatie uit 1754, noemt de bladstand $\frac{2}{5}$: de rangschikking volgens „quinconces” en de Gebr. BRAVAIS zeggen dan ook in hun publikatie uit 1839 op blz. 66: „Depuis Charles Bonnet, on appelle feuilles quinconciales celles dont le sixième recouvre exactement la première, après que leur spirale a parcouru deux fois la circonférence de la tige”. Daarentegen had niemand minder dan A. BRAUN zich (in een voetnoot op blz. 288 van zijn „Vergl. Unters.” uit 1830) reeds verzet tegen de term *Aestivalis quincunxialis*, omdat beide helften dezer uitdrukking „gleich unpassend sind” en hij maakte speciaal bezwaar tegen de tweede helft met de woorden: „Die $\frac{2}{5}$ St. stimmt auf keine Weise betrachtet mit der Figur der Quincunx überein, an wenigsten im Grundriss, . . .”.

Zelfs nog in 1882 heerste (ook in de Franse en Duitse mathematische literatuur) onzekerheid over hetgeen men onder de uitdrukking „quinconces” moet verstaan (men zie: S. GÜNTHER, „Operative Arithm. u. Geometr. der Gittersysteme” in Ztf. J. math. u. naturwiss. Unters. 13 (1882), speciaal op S. 93).

wanneer men aan het begrip „quincunx” de uitbreiding geeft, die NAUMANN heeft voorgesteld.

Wij hebben in de tekening **a** van fig. 28, deels met dunne, deels met zeer dunne en deels ook met dikke lijnen een kwadratennet [1 en 2] voorgesteld. Daarbij zijn de hoekpunten der kwadraten in hun volgorde langs de grondspiraal genummerd. Vervolgens is met dikke lijnen, een parallelogram getekend, dat twee verticale zijden bezit en daarbinnen is een centraal gelegen punt aangegeven. De vijf punten 4, 1, 2, 7 en 6 vormen dus een quincunx. De hoekpunten zijn, ieder op hun beurt, te beschouwen als middelpunten van parallelogrammen, die congruent zijn met dat rond punt 4. Deze vier parallelogrammen „overlappen” het eerste parallelogram.

Hetgeen wij voor punt 4 toelichtten, kunnen wij voor *alle* hoekpunten van het oorspronkelijke systeem van kwadraten [1 en 2] herhalen, waarmee aan de opgave voldaan is.

De in verticale richting lang gerekte vorm van deze quincunx is een gevolg van de keuze van het *kwadratensysteem*, dat aan de figuur ten grondslag ligt.

Het is nodig te doen uitkomen, dat in onze figuur de snijpunten van de daarin getekende lijnen niet *alle* tot de hoekpunten van het oorspronkelijke kwadratensysteem behoren. De lijnen zijn namelijk géén „gecoördineerde” spiralen en in dit opzicht bestaat er een belangrijk verschil met de figuren, waarin wij in de beide voorafgaande hoofdstukken (II en III) kwadraten-, ruiten- en parallelogrammennetten hebben getekend, waarbij de rechten wél uit gecoördineerde spiralen bestonden.

Men kan uit het gevonden systeem van quincunxen vele andere afleiden met dezelfde divergentie. Daartoe verkort, of verlengt, men de ordinaten van alle punten in dezelfde verhouding. Wij hebben dit in de tekening **b** gedaan, waarvoor wij alle ordinaten tot de halve hoogte inkortten en in die figuur hebben wij ook het *parallelogrammennet* getekend, waarvan men het aldus gevormde quincunxsysteem kan denken te zijn afgeleid.

Als *tweede voorbeeld* kozen wij het quincunxsysteem, dat zich laat afleiden uit een ruitennet [5 en 8] (waarvan de divergentie $\frac{5}{13}$ is), waarvoor wij op overeenkomstige wijze als in het eerste voorbeeld te werk gingen.

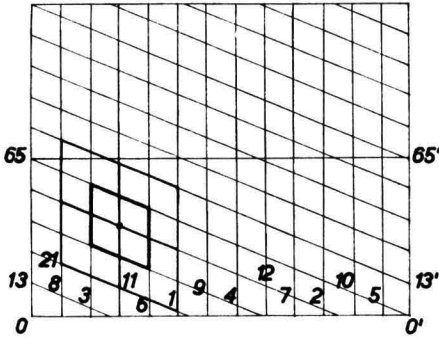
Het voorafgaande zal wel voldoende zijn om duidelijk te maken, dat *alle* regelmatige systemen van parallelogrammen op een omwentelingscilinder kunnen worden opgevat als systemen van quincunxen. Die quincunxen kan men zich ontstaan denken door afschuiving in verticale zin van gecentreerde rechthoeken (waarbij de verticaal door het centrum op dezelfde plaats blijft) en in bijzondere gevallen van kwadraten of ruiten.

NAUMANN heeft er zeer terecht op gewezen, dat het vaststellen van de „quincunx” als „*Grundgesetz* der Blattstellung” niets anders is als constateren van „den formellen Bestand der Erscheinungen”. Zelfs erkent hij, dat het bevoorkeuren van de quincunx-constructies (waarvan hij als

Een systeem van ruitenvormige quincunxen

(c)

$$\alpha = \frac{5}{13}$$



Het systeem van kwadraten (1 en 2)
 $\alpha = \frac{2}{5}$, als quincunx aangewezen

Hetzelfde systeem als hiernaast
 maar dan tot de helft ingekort

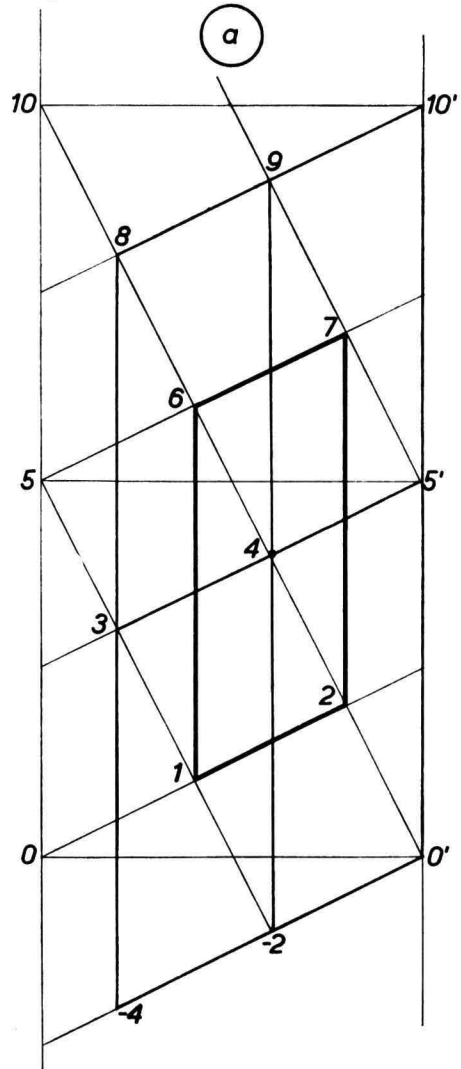
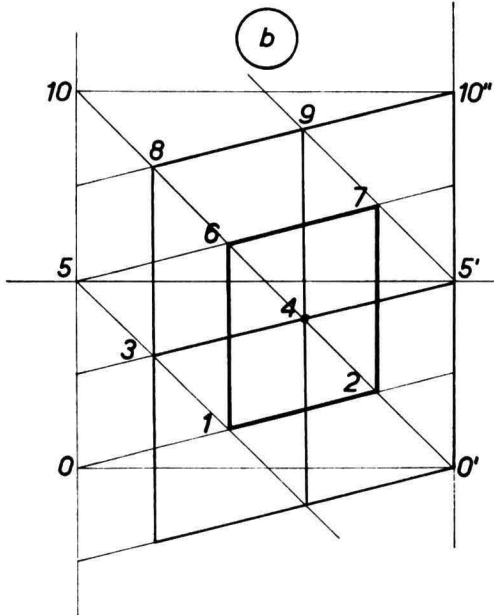


Fig. 28.

„hoofdkenmer” beschouwt: het aannemen van „orthostichen”) in plaats van spiralen en daarmee ook het aannemen van de quincunxen als „*Realität*”, hem alleen gewettigd schijnt, wanneer de planten-anatomie in de stengel „Gefässbündel oder andere Organe von analogem Verlaufe” kunnen aanwijzen. Dergelijke structuren zouden dan uiteraard — volgens NAUMANN — het ontstaan van quincunxen tengevolge moeten hebben.

Ofschoon ik — zoals zal blijken — de opvatting van NAUMANN, omtrent de waarschijnlijkheid van inwendige structuren als *algemene*, of *voornaamste*, oorzaak van optreden van bladstanden *niet* deel, zo acht ik *beïnvloeding* van bladstanden door zulke structuren in *uitzonderingsgevallen* wél waarschijnlijk.

Bovendien kan een nadere studie van quincunxiale rangschikkingen — waarvan het veelvuldig voorkomen in de levende en in de levenloze natuur en vaak de bevoorkeuring in de menselijke samenleving niet kan ontkend worden — ook voor de bladstandenleer van waarde zijn. Het is immers mogelijk, dat de oorzaken, die tot deze rangschikking leiden, ook bij de plaatsing van de bladeren aan de stengel een rol spelen. Ik denk hierbij o.m. aan de „aanplantingsverbanden”, waarbij de mens er naar streeft alle „individuen” — zover mogelijk — op „overeenkomstige” wijze van de beschikbare bodem en van het licht, zowel als van de regen, te doen profiteren. Juist wegens de hier bedoelde voordelen werd de „quincunx” reeds in de oudheid en wordt zij nog tot op de huidige dag zeer algemeen toegepast¹⁾. Hierbij mag echter niet verzwegen worden, dat het de „Romeinse quincunx” is, waarnaar de voorkeur uitgaat en niet de „afgeschoven quincunx”, die de basis van NAUMANN'S beschouwingen vormde.

Ten slotte merk ik nog op, dat het mij niet duidelijk is geworden, waarom P. V. KOTURNICKIJ (zie: de bijzonderheden over zijn uitvoerige verhandeling uit 1893 op blz. 106 van deze publikatie) de titel van zijn studie heeft gekozen, die in het Nederlands vertaald, luidt: „De quincunx en de toepassing daarvan in natuurwetenschap en bij de weverij”, al ben ik dan ook zelf, door een citaat, dat ik vond (in literatuur over een ander botanisch onderwerp), waarin mij het woord „quincunx” trof, tot raadplegen van de genoemde verhandeling gekomen. Ik heb echter in de publikatie van KOTURNICKIJ geen verklaring voor het gebruik van het woord „quincunx” gevonden.

¹⁾ Ik verwijs hier naar CHARLES DAUBENY „Lectures on Roman Husbandry”, Oxford 1857, die vooral de plantverbanden in de Oudheid behandelde — daarbij gebruik makende van het oude werk van COLUMELLA. Ook noem ik in dit verband: H. KETTNER „Ein Beitrag zur Frage der optimalen Bestandsdichte im Obstbau” in Die Gartenbauwissenschaft 2 (20) 1955, S. 505–516, waarin men vele recente literatuuropgaven over dit onderwerp aantreft.

NASCHRIFT

Teneinde de lezer niet geheel in het duister te laten over de gedachten-gang, die aan het later te volgen Hoofdstuk IV ten grondslag ligt, laat ik hier enkele aantekeningen volgen, die handelen over trillingen van een volkomen elastisch membraan, dat de vorm van een ontrolde cirkel-cilinder bezit.

Aan G. LAMÉ¹⁾ ontleen ik de formule, die het trillingsgetal weergeeft voor een vlak, volkomen elastisch, rechthoekig membraan, dat op zo-danige wijze tot trilling wordt gebracht, dat daarin, evenwijdig aan de zijkantten (die zelf onbeweeglijk zijn) knooplijnen optreden, waardoor het membraan in $(i \times i')$ rechthoekjes wordt ingedeeld. Die formule luidt als volgt²⁾:

$$\mathfrak{N}_{i,i'} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{i^2}{l^2} + \frac{i'^2}{l'^2}}.$$

Hierin stellen l en l' de lengte en de breedte van het rechthoekig membraan voor en stelt c een constante voor, die afhankelijk is van de spanning in het membraan en van de dichtheid der materie, waaruit het membraan is opgebouwd.

Wij zullen nu het membraan beschouwen als een onderdeel van een groot, ontrolde, cilindrisch membraan, dat geheel uit identieke en identiek geplaatste rechthoeken is opgebouwd en waarop de rechthoeken zó geplaatst zijn, dat één van de diagonalen horizontaal verloopt. Verder nemen wij aan, dat die rechthoeken zijn opgebouwd uit de topdriehoek met zijn tegenligger van een regelmatig, door knooplijnen in rechthoekjes ingedeeld rechthoekennet.

Voeren wij dan de notatie in van ons Hoofdstuk III, dan kunnen wij $i = m$ en $i' = n$ aannemen en geldt verder $l = ml_n$ en $l' = nl_m$ (waarin l_n en l_m de zijden van de onderling congruente „mazen” van het net voorstellen, zodat het trillingsgetal van het ontrolde membraan bedraagt:

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{l_m^2} + \frac{1}{l_n^2}}.$$

Bij invoeren van de grootheid k kunnen wij (aangezien $1/l_m^2 = m^2 + n^2(l_m^2/l_n^2) = m^2 + n^2 k^2$) hiervoor schrijven:

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{c}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 k^2) \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}.$$

¹⁾ Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, 2-ième Ed., Paris 1866, p. 107-131.

²⁾ Zie ook mijn voorlopige mededeling uit 1960.

Passen wij deze betrekking toe op het geval, waarin $m=1$ en $n=1$ is (k is dan gelijk 1), dan blijkt, dat $c = \mathfrak{N}_{1,1}$ is, zodat onze formule ook als volgt kan worden geschreven:

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 k^2) \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}.$$

Wanneer men nu hierin k zodanig kiest, dat $k = \sqrt{m/n}$, dan gaat deze formule over in:

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} (m+n).$$

Wanneer men (omgekeerd) aanneemt, dat voor het zoëven beschouwde trillende rechthoekennet déze formule geldig is, dan zal men tot de betrekking $k = \sqrt{m/n}$ kunnen besluiten, immers in dat geval zal gelden:

$$\frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} (m+n) = \frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 k^2) \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)},$$

waaruit, bij uitwerken, de zoëven aangegeven waarde van k volgt.

Het zal nu wel duidelijk zijn, waarom wij in onze Tabel XII voor alle netten ook de waarden van $\mathfrak{N}_{m,n}$ (die wij met de formule van LAMÉ berekenden) hebben opgenomen en ook waarom, uit de, ter rechterzijde geplaatste, kolommen, de geldigheid van de formule

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} (m+n)$$

onmiddellijk valt af te lezen, terwijl ze voor de, ter linkerzijde geplaatste, kolommen, *niet* geldig blijkt te zijn.

De vraag zal nu echter onmiddellijk gesteld worden, of er een fysische oorzaak is aan te wijzen, die aan de formule

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} (m+n)$$

ten grondslag ligt.

Wij doen dan uitkomen, dat deze formule kan worden opgevat als de mathematische uitdrukking voor (objectieve) additie van trillingen. Men kan haar dan ook als een analogon van de (subjectieve) „akustischen Erfahrungssätze” van G. S. OHM¹⁾ beschouwen, welke regel ook door H. v. HELMHOLTZ²⁾ in zijn beroemde werk op de voorgrond is gesteld,

¹⁾ Ueb. die Definition des Tones, u.s.w.”, Ann. Physik u. Chem. 59 (1843), 513-566, en 62 (1844), 1-18.

²⁾ Die Lehre von den Tonempfindungen, 3, Aufl. 1870.

en die door F. POCKELS ¹⁾ aldus is geformuleerd: „dass jeder von irgend einem schwingenden Körper erzeugte Klang eine Ueberlagerung einfacher Töen ist, und dass ein einfacher Ton stets von einer harmonischer Schwingung hervorgebracht wird.”

De regel wordt in vele gevallen onopvallend toegepast. Ik wijs er intussen op, dat een *experimentele* bevestiging van de regel door het fraaie onderzoek van A. KUNDT ²⁾ is gebracht. Dit geldt echter in feite alleen voor *kwadratische* elastische membranen, al wordt de regel ook voor rechthoekige elastische membranen (bij afleiden van de formule van LAMÉ) algemeen aanvaard. Hierboven is de regel (door gebruik te maken van de formule van LAMÉ) op een net van congruente rechthoekige membranen op een ontrold cilinderoppervlak toegepast.

KUNDT'S theoretisch en experimenteel onderzoek zal intussen ook voor onze verdere beschouwingen van betekenis blijken te zijn.

¹⁾ Ueb. die partielle Differentialgleichung $\Delta u - k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der Mathematischen Physik, Leipzig 1891; waarbij ik speciaal verwijs naar de bladzijden 4, 63 en 76. (De grootheid k in deze formule heeft een andere betekenis dan k in onze beschouwingen).

Voor recente literatuur raadplege men F. TRENDELENBURG, Einf. i.d. Akustik, 3. Aufl. 1961, S. 443.

²⁾ „Ueb. die Schwingungen der rechteckigen, insbesondere der quadratischen Luftplatten”, Ann. Physik u. Chemie, 150 (1873) 177-197 en 337-356.

INTRODUCTION

(*Translation*)

The following "Studies" are to be considered as a recast and improved version of part of the preliminary communication on phyllotaxis which I published in 1960 in the Proceedings of the Kon. Akademie van Wetenschappen at Amsterdam, Series C, Vol. LXIII, p. 137. However, they merely form a preamble to the "theoretical explanation" to be given later. The idea expressed in 1960, *viz.* that vibrations play a predominant role in this, has been retained.

It appeared advisable to me not to delay their publication until the uncertain completion of the further part of those studies. In this connection my chief consideration was that the part now appearing consists almost exclusively of discussions which are of an algebraic and a geometrical nature ¹⁾, so that to this extent it contains no hypotheses. These discussions may therefore also be of interest for the framing of other theories concerning the origin of the natural arrangements of leaves on the stems of plants besides the theory which I am inclined to advocate.

In the following pages I have included in the investigation more particularly "regular networks" of *congruent* figures on the surface of a circular cylinder.

No doubt the reader who is acquainted with my work of 1907 meanwhile will not expect that I have done so because I regard a study of networks of *similar* figures built up centrally on an infinite plane surface by logarithmic spirals as less important for the framing of phyllotaxis theories.

However, when I got access (many years after 1907) to the publications of E. J. ROUTH (from 1881 and later years) on "conjugate functions" and "conformal mapping" obtained therewith, I found that it is possible — by means of a simple and plausible hypothesis — to apply the conclusions for regular networks on the surface of a circular cylinder without fundamental modifications to the similar constructions on an infinite plane surface referred to above.

This does not, however, mean that the latter constructions are superfluous. On the contrary, they are of interest because they yield figures which on the whole approximate more closely to what is observed on vegetative apices. On the other hand, however, it may also be of advantage to convert the last-mentioned figures into figures on the (unrolled) surface of a cylinder. In this connection I am thinking especially of transitions from arrangements of leaves to others such as they are observed especially on many seedlings. Meanwhile I have had to refrain from using the

¹⁾ I kept them elementary; they are intended in particular for biologists.

numerous microscopic preparations which I represented in drawings for this purpose.

The chief point of the following studies in my opinion consists in the framing of the formula for the divergence angle of regular networks, composed of congruent rectangles on a circular cylinder, for which the ratio between the sides of the rectangle is given.

In fact, it appears that the assumption of a given — simple — ratio between those sides leads to divergence angles of the networks which are among those most frequently occurring in nature. Moreover they can be divided naturally into groups which can also be indicated for natural objects (see Table XII).

Before long I hope to discuss in subsequent “Studies” the possible causes of the choice of the “ratio” referred to above.

Although I am thus anticipating this latter promise and actually suggesting a “hypothesis”, I here refer to the values of the magnitude indicated as $\mathcal{N}'_{m,n}$ in the table cited above.

In fact, these values stand for the frequencies which would occur if the surface of a hollow cylinder were to be formed by a homogeneous, uniformly thick, and uniformly stretched elastic membrane, which is set vibrating in such a way that the “nodal lines” thus produced coincide with the straight lines of the network under consideration.

When studying the table referred to above, one will at once be struck by the fact that the frequencies of consecutive networks of *rectangles* form summation series. If vibrations with different frequencies from the same summation series occur simultaneously in the membrane, these would therefore form “summation chords” (in the figurative sense), vibrations of which would strengthen each other.

The foregoing then leads to the hypothesis (to be elaborated in a later “Study”) that the apical cones of higher plants (when forming their leaf primordia) behave like small *resonators*, which select from a “rustle” (this expression being used in the figurative sense) of vibrations (which may arise, for instance, upon shockwise growth of cell walls) *those* vibrations which conform to one of the *geometrically possible* regular divisions.

It is then further obvious to suppose that the places where “antinodes” or where “double nodes” are present, fix those places where the leaves arise.

This would account for the preference for many of the arrangements of the leaves occurring in nature.

By the addition of some appendices to the three chapters now published I have given my opinion on a number of problems which are connected with the points discussed in those chapters. Indeed, it is natural that one who, as in my case, has been fascinated by a subject for more than fifty years should desire to record at least a part of the insight gained by him in this connection.

In particular I considered it necessary to give my opinion on the last publication of my highly esteemed teacher, Professor M. W. BEIJERINCK, *viz.* that of 1927. To elucidate this opinion, I first made some historical statements on this publication and then I discussed its contents critically – for the first time. From all this it will be seen that after many vain attempts I at last consider I have succeeded in largely grasping the meaning of his publication. I have come to the conclusion that BEIJERINCK viewed the matter rightly in an important respect, intuitively rather than by means of demonstration, but that I reject several others of his statements.

I hope that my former pupils will try to ascertain the correctness of my expositions as diligently as I did with respect to the publication of my teacher.

August 1964.

COMMENT

*on the contents of the chapters included in
Part I of these "New Studies"*

(Translation)

CHAPTER I, which bears the title "Some algebraic and geometrical relations", mainly deals with particulars of numbers frequently occurring in the theory of phyllotaxis and with simple geometrical figures on a plane surface, in which those numbers (as ratios of lengths, or as measures of angles) play a part.

All this, therefore, is independent of any supposition about the origin of the figures, which may have been obtained, for instance, by unrolling a surface of revolution.

A good deal of the subject matter of this chapter is known, but it has been combined in another way than the usual one and elucidated differently. Thus, important data for this chapter are to be found in my work of 1907, but in the latter they are widely scattered.

The writing of this chapter was also desirable in order to explain the notation employed in these new studies, in particular for *series* of numbers, among which the "summation series" will be found the most important.

I have also tried to do justice in this chapter, and in the appendices thereto, to others, who in my opinion have not received sufficient attention in the literature. In this respect I have by no means aimed at exhaustiveness.

Viewed in this light, it may be useful to recall, also in this comment, the general summation series (p, q) for which in 1907 I derived certain properties, unaware as I was of the fact that É. LUCAS had given (other) particulars about this series as far back as 1884.

In my view full attention should be paid particularly to the four special right-angled triangles included in § 4 of this Chapter, because they are also very prominent in the later discussions. This applies particularly to the two triangles which I have referred to by the names of CHURCH and KEPLER.

CHAPTER II, which bears the title "Simple regular networks of rhombs and of squares on a circular cylinder", like several of the later chapters, discusses certain mathematical properties of networks on an unrolled circular cylinder. The meshes of the networks in Chapter II have been assumed to be congruent rhombs—with meshes of congruent squares as special cases. In this connection it has been assumed that the meshes (here and in later chapters) are contiguous to each other, without any interspaces.

It will be obvious that corresponding points of the networks—such as vertices or centres of the meshes—form a “regular system of points” on the unrolled surface, this expression being used in the sense I gave to it in 1907.

In the networks here discussed in more detail the points in question practically always form *simple* systems. However, an extension to multiple networks involves few difficulties.

As was to be expected, the networks of rhombs considered in this chapter resemble the “regular systems of equal circles” on an unrolled circular cylinder, which touch each other in four or in six points, but which do not intersect anywhere; these latter systems were exclusively considered by me in 1907. However, comparatively important differences are also to be found between the two systems.

In order to eliminate those differences as much as possible, I have confined myself to the discussion of those networks of rhombs whose meshes have the shortest sides of all the networks which are able to accommodate all the points of the system. I have given such networks the name of *fundamental networks of rhombs*.

It then appears that the formulae which I derived in 1907 for the regular systems of touching circles on the unrolled surface of a circular cylinder can also be applied to fundamental networks of rhombs.

This holds in the first place for the two related formulae which express the “divergence angle” of the system of points. For the networks of squares they reduce to one formula, which can be written in the form:

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + n\Delta_n}{m^2 + n^2},$$

in which m and n stand for the numbers of oppositely wound parallel helices perpendicular to each other which form the network, and in which Δ_m and Δ_n represent the so-called “encyclic numbers” associated with m and n , which can be calculated in a simple way, but which can also be inferred from a table included in § 6 of this chapter.

Secondly, also the two related formulae which I derived in 1907 for the relation between the divergence angle and the diameter of the equal circles can be applied to the fundamental networks of rhombs, if instead of the length of the diameters of the circles the length of the sides of the rhombs is taken.

The latter was by no means obvious, since the circles cannot be regarded as circles passing through the four vertices of quadrilateral figures, or as circles internally touching the four sides of rhombs.

Despite the fact that the above-mentioned similarity of the formulae really made it superfluous, for the networks of rhombs I have also represented the relation between the divergence angle and the length of the sides of the rhombs, for different values of m and n , in a graph, which

I have discussed in detail. I did so because I was desirous to make myself independent of constructions of circles.

In Plate I (§ 11 of this chapter) I have shown the most important networks of rhombs, the networks of squares naturally being brought into prominence. I have done this especially in order to bring out the contrast between these networks and those of the next chapter.

In this Chapter II, I have further discussed the stretching and shrinking of networks of rhombs in the vertical direction, which constructions are also important with a view to the later discussion of similar deformations of other networks.

CHAPTER III, entitled: "Simple regular networks of parallelograms on a circular cylinder", concerns the extension of the discussions from the preceding chapter to those of regular networks of parallelograms on such a surface. Regular networks of rectangles are of course special cases of the networks just referred to, and since they will be found the most important, with respect to the networks of parallelograms I have confined myself to those in which the two sets of parallel helices composing these networks are wound in opposite directions—in fact, the latter is also the case for the networks of rectangles.

As far back as 1871 the mathematician G. P. TAIT already made a short statement—though in terms different from those employed by me—on such networks of parallelograms, and he even framed a formula expressing the divergence of the networks in the values of m and n (and the "encyclic numbers" to be calculated from them) as well as in two newly introduced magnitudes, which he indicated by the letters r and s , which fix the position of the network, a fixation which is impossible with m and n alone. These new magnitudes can easily be inferred especially from vegetable objects with closely packed lateral organs, and it was such objects which attracted the attention of plant morphologists in those days.

Owing to the fact that the author explained it insufficiently, the formula of TAIT here referred to (which I have replaced in Chapter III by two mutually related formulae) has not been applied by botanists.

Yet another formula holding for networks of parallelograms—it was framed in 1893 by P. V. KOTURNICKIJ—has remained unnoticed, in this case because the publication was included in Russian in a journal with a small circulation in Western Europe.

The formula of KOTURNICKIJ expresses the value of the acute angle (γ) of the parallelograms in the magnitudes m and n (and the associated encyclic numbers) as well as in the magnitudes r and s introduced by TAIT, and moreover in the ratio (k) of the lengths of the sides of the parallelograms. Also the formula of KOTURNICKIJ has been replaced by me in Chapter III by two related formulae, which I derived by a simpler method than that followed by him.

It stands to reason that the relations of TAIT and of KOTURNICKIJ both hold for networks of rectangles as well, and if they are applied to the same network of this type, r and s can be eliminated from them. A strikingly simple formula for the divergence of a network of rectangles is thus obtained, *viz.*:

$$\alpha = \frac{m\Delta_m + k^2n\Delta_n}{m^2 + k^2n^2}.$$

As was to be expected, if in this formula we take $k=1$, it reduces to the formula for networks of squares, mentioned above in the comment on Chapter II.

The new formula has now been applied in Chapter III for the study of important networks of rectangles.

Obvious examples of regular networks of rectangles include those for which $m=1$ and $n=1$, while k may have a variety of values. Plate III illustrates several of these networks. In all of them the point referred to by the numeral 1 forms the vertex of a right-angled triangle having the circumference of the cylinder for its hypotenuse. For $k=\chi$ this triangle reduces to the triangle of CHURCH and for $k=\sqrt{\chi}$ to the triangle of KEPLER. Judging exclusively by geometrical data, there is no reason to assign a special importance for the theory of phyllotaxis to one, or more, of the possible networks of rectangles for which $m=1$ and $n=1$.

Further interesting networks are those which are obtained with the aid of the new formula if k is taken equal to $\sqrt{m/n}$. The small tables included in § 14 of Chapter III list divergences for such networks, which for low values of m and n have been taken from simple summation series. Moreover, one can infer from those tables the limiting divergences which will occur for the network as one ascends in these series.

One of the particulars becoming apparent from the calculations is that at the chosen values of m and n divergences occur which are found in natural objects, the more frequently so according as m and n are taken smaller.

When carrying out similar calculations, one will even gain the impression that all divergences of "simple" leaf arrangements can be included in tables belonging in the same section.

Another particularity especially apt to strike the reader when he studies the drawings of the networks (for this, see Plate IV and Plate V) is the fact that, when increasing values for m and n from the same summation series (no matter which) are chosen, the right-angled triangles whose apex is the point mn and whose base is the circumference of the cylinder *all* approximate to *the same* limiting triangle, *viz.* to the triangle of KEPLER. This is all the more striking because it can be inferred from the tables that the limiting *divergence angles* actually are different and their magnitudes depend upon the choice of the summation series.

I would call attention to the fact that there are important differences

between the networks of rectangles here discussed and the networks of squares with the same values for m and n . To facilitate comparison of the two types of network, in a large table (*viz.* Table XII) I have placed corresponding magnitudes of the two types side by side.

Meanwhile I must not omit to say that there are also networks of rectangles which fill up the surface of the cylinder completely and which cannot be classed in the two categories ($k=1$ and $k=\sqrt{m/n}$). For these I have also given a few examples in Chapter III. It thus remains necessary to ascertain a cause of the preference of plants for *particular* networks of rectangles. This problem is to form the subject matter of a later chapter. The above-mentioned large table, however, also offered an opportunity to suggest—anticipating this discussion—in what direction the solution in my opinion is to be found. In fact, the inclusion in that table of the values for the magnitude $\mathfrak{N}_{m,n}$ or $\mathfrak{N}'_{m,n}$ reveals particulars about the networks there considered, which are characteristic of them.

I here confine myself to my statement on those particulars in the “Introduction” and to the possibilities thus opened up in my opinion for the framing of an allround “phyllotaxis theory”.

At the end of Chapter III, I have included a discussion of the last publication of Professor M. W. BEIJERINCK. From the preceding pages it will have become clear that, like the latter, I am convinced of the importance of the triangle of KEPLER for the theory of phyllotaxis, though I reject the explanation given by BEIJERINCK of a preference for that triangle among higher plants.

In an Appendix to Chapter III I have finally subjected the term “quincunx” to a critical examination.

EPILOGUE

In order not to leave the reader entirely in the dark as to the train of thought underlying Chapter IV, which is to follow later, I here add a few notes which deal with vibrations of a perfectly flexible membrane having the form of an unrolled surface of a circular cylinder.

From G. LAMÉ ¹⁾ I take the formula which represents the frequency of a flat, perfectly flexible, rectangular membrane, which is set vibrating in such a way that, parallel to the edges (which themselves are immobile), nodal lines will appear, by which the membrane is divided into $(i \times i')$ small rectangles. The said formula is as follows ²⁾:

$$\mathfrak{N}_{i,i'} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{i^2}{l^2} + \frac{i'^2}{l'^2}}.$$

Here l and l' stand for the length and the width of the rectangular membrane, and c represents a constant which depends upon the tension in the membrane and upon the density of the material of which the membrane is made.

We will now consider the membrane as part of a large unrolled cylindrical membrane, which is built up completely of identical and identically placed rectangles and on which the rectangles are arranged in such a way that one of the diagonals is horizontal. We further assume that those rectangles are composed of the apical triangle, with its antipode, of a regular network of rectangles divided by nodal lines into small rectangles.

If we then introduce the notation of our Chapter III, we may assume $i = m$ and $i' = n$, while further $l = ml_n$ and $l' = nl_m$ (in which l_n and l_m are the sides of the congruent "meshes" of the network), so that the frequency of the unrolled membrane is:

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{l_m^2} + \frac{1}{l_n^2}}.$$

If we introduce the magnitude k , we can write for this, since $1/l_n^2 = m^2 + n^2(l_m^2/l_n^2) = m^2 + n^2 k^2$:

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{c}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 k^2) \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}.$$

¹⁾ *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2-ième Ed., Paris 1866, pp. 107–131.

²⁾ See also my preliminary communication of 1960.

If we apply this relation to the case where $m=1$ and $n=1$ (k is then equal to 1), it appears that $c = \mathfrak{N}_{1,1}$, so that our formula can also be written as follows:

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 k^2) \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}.$$

If in the latter formula k is so chosen that $k = \sqrt{m/n}$, it passes into:

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} (m+n).$$

If it is assumed (conversely) that for the vibrating network of rectangles discussed above the latter formula holds good, it will be possible to conclude that $k = \sqrt{m/n}$, for in that case we have:

$$\frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} (m+n) = \frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 k^2) \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)},$$

from which, after reduction, the above-mentioned value $k = \sqrt{m/n}$ will follow.

It will now be clear why in our Table XII we included for all the networks also the values of $\mathfrak{N}_{m,n}$ (which we calculated by means of the formula of *Lamé*), and also why from the righthand columns the validity of the formula

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} (m+n)$$

can at once be inferred, whereas it is found *not* to be valid for the lefthand columns.

However, it will now at once be asked whether there is a physical cause underlying the formula

$$\mathfrak{N}_{m,n} = \frac{\mathfrak{N}_{1,1}}{2} (m+n).$$

We would point out that this formula can be regarded as the mathematical expression for the (objective) addition of vibrations. It can therefore be looked upon as an analogy of the (subjective) “*akustischen Erfahrungssätze*” of G. S. OHM ¹⁾, a rule which has been formulated as follows by F. PÖCKELS ²⁾: “*dass jeder von irgend einem schwingenden Körper erzeugte Klang eine Ueberlagerung einfacher Töne ist, und dass ein einfacher Ton stets von einer harmonischen Schwingung hervorgebracht wird*”.

¹⁾ “*Ueb. die Definition des Tones, u.s.w.*”, Ann. Physik u. Chem. **59** (1843), 513–566, and **62** (1844), 1–18.

²⁾ *Ueb. die partielle Differentialgleichung $\Delta u - k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik*, Leipzig 1891; I refer in particular to pages 4, 63, and 76. (The character k has here another signification as in our formulae). For recent literature *F. Trendelenburg, Einf. i. d. Akustik*, 3. Aufl. 1961, p. 443, should be consulted.

In many cases the rule is applied unobtrusively. However, I would point out that an (objective) *experimental* confirmation of the rule has been furnished by the elegant investigation of A. KUNDT¹⁾. In actual fact, however, this applies only to *square* flexible membranes, although the rule is also generally accepted for rectangular flexible membranes (in the derivation of the formula of LAMÉ). Above, the rule has been applied (by making use of the formula of LAMÉ) to a network of congruent rectangular membranes on the unrolled surface of a cylinder.

KUNDT'S theoretical and experimental investigation, moreover, will be found of importance for our further work.

¹⁾ “*Ueb. die Schwingungen der rechteckigen, insbesondere der quadratischen Luftplatten*”, Ann. Physik u. Chemie, 150 (1873), 177–197 and 337–356.

