Mathematics. — *"Bestimmung der Klassenzahl der Ideale aller Unterkörper des Kreiskörpers der m-ten Einheitswurzeln, wo die Zahl m durch mehr als eine Primzahl teilbar ist".* (Zweiter Teil. [1])). By Dr. N. G. W. H. BEEGER. (Communicated by Prof. W. KAPTEYN).

(Communicated in the meeting of October 25, 1919).

Beweis: Wir muszen zwei Behauptungen des Gliedes rechter Hand beweisen: 1°. dasz der Wert des darin auftretenden Symbols eine $\frac{f_1}{d'_1}$-te Einheitswurzel ist; 2°. dasz, im Producte, jede solche Einheitswurzel $\frac{e_1 d_1 d'_1}{r}$ Mal vorkommt. Denn wenn dies bewiesen ist, ergibt sich daraus dasz das Glied rechter Hand gleich

$$\left(1-\frac{1}{l_1^{\frac{f_1}{d'_1}s}}\right)^{\frac{e_1 d_1 d'_1}{r}}$$

ist, und dieser Ausdruck ist, wegen Satz 7, dem Gliede linker Hand der zu beweisenden Gleichheit, gleich. Die Zahlen e_1, f_1 u.s.w. haben hier dieselbe Bedeutung wie im Satz 7.

Der Beweis der ersten Behauptung folgt aus demjenigen welches im Satz 9 bewiesen ist.

Um den Beweis der zweiten Behauptung zu erbringen, nehmen wir an, dasz

$$\left[\frac{l_1}{b_{01}, b_{*1}, 0, b_{21} \ldots}\right]=\left[\frac{l_1}{b_{02}, b_{*2}, 0, b_{22} \ldots}\right],$$

Nach Einfuhrung der Werte der Symbole findet man, da die Differenzen der übereinstimmenden Zahlen zweier Systeme der b wiederum ein System der b bilden, dasz dieses System der b welches wir andeuten durch $b_0, b_*, 0, b_2, \ldots\ldots$, den Congruenzen:

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\varphi\left(\frac{m}{l_1^{h_1}}\right)a_0 b_0+2\varphi\left(\frac{m}{2^{h_*} l_1^{h_1}}\right)a_* b_*+\varphi\left(\frac{m}{l_2^{h_2} l_1^{h_1}}\right)a_2 b_2+\ldots\\ \equiv 0 \bmod \varphi\left(\frac{m}{l_1^{h_1}}\right)\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

[1]) Fortsetzung von "Proceedings" Vol. 22. S. 331.

genuge leistet, wo $a_0, a_*, \ldots$ die Exponente bedeuten, welche in § 4 bestimmt sind Wir muszen nun die Anzahl der Systeme der b berechnen, welche diesen Congruenzen (8) genuge leisten. Dazu bestimmen wir zunachst wieviel der gegebenen Systeme der b aus § 1, (1) eine Zahl $b_{1n} = 0$ enthalten. Alle Zahlen b_{1n} sind teilbar durch ihren groszten gemeinsamen Teiler d_1. Es gibt also $\frac{\varphi_1}{d_1}$ verschiedene Zahlen b_{1n}, und von diesen ist nur eine $= 0$. Weil es im ganzen $\frac{\varphi}{r}$ Systeme gibt, kommen darunter $\frac{\varphi}{r} : \frac{\varphi_1}{d_1}$ Systeme vor, welche $b_{1n} = 0$ haben.

Alle Systeme der Zahlen a, welche die Gruppe g bilden, leisten allen Congruenzen (3) genuge, wenn man darin $b_{1n} = 0$ setzt. Den Modulus dieser Congruenzen kann man dabei reduciren zu $\frac{\varphi}{\varphi_1}$. Nach der Bemerkung am Ende des Kapitels II § 3, ist die Anzahl der verschiedenen Systeme der a, wenn man a_1 ausser Acht lässt, also gleich

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} : \left(\frac{\varphi}{r} : \frac{\varphi_1}{d_1}\right) = \frac{r}{d_1}.$$

Weiter bemerken wir, dasz die Systeme der b welche (8) genugen, auch den $\frac{r}{d_1}$ Congruenzen genugen, welche man aus (8) ableiten kann, indem man darin $a_0, a_*, \ldots$ durch die, eben berechneten, Systeme der a ersetzt. Auszerdem genugen die gesuchten Systeme der b noch den $\frac{f_1}{d'_1}$ Congruenzen die man aus (8) erhalt indem man die darin auftretenden a nacheinander durch ihren 2-, 3-, ... $\frac{f_1}{d'_1}$-fachen Wert ersetzt. Denn wegen Kap. II § 4 gehoren diese neuen Systeme der a nicht zu den erstgefundenen, weil die $\frac{f_1}{d'_1}$ ersten Potenzen der Zahl $l_1 + n \frac{m}{l_1^{h_1}}$ nicht zu g gehoren.

Wenn man nun die Gruppe der zuerstgefundenen Systeme der a mit der Gruppe der zuletztgefundenen Systeme multipliziert, so bekommt man eine Gruppe von $\frac{rf_1}{d_1 d'_1}$ Systeme der a aus welchen sich ebensoviele Congruenzen (8) ergeben, welche die gesuchten Systeme der b genüge leisten. Wegen der Bemerkung am Ende des Kap. II § 3 gibt es also

$$\varphi\left(\frac{m}{l_1^{h_1}}\right) : \frac{rf_1}{d_1 d'_1} = \frac{e_1 d_1 d'_1}{r}$$

gesuchte Systeme der b.

Hiermit ist nun gezeigt worden dasz jede $\frac{f_1}{d'_1}$-te Einheitswurzel welche in dem Gliede rechter Hand der, im Satze genannten, Gleichheit auftritt, darin auch $\frac{e_1 d_1 d'_1}{r}$ Mal auftritt.

Nun ist aber die Anzahl der Factoren des Gliedes rechter Hand. wie schon berechnet ist, gleich $\frac{\varphi}{r} : \frac{\varphi_1}{d_1}$; und da $\frac{f_1}{d_1} \cdot \frac{e_1 d_1 d'_1}{r} = \frac{\varphi}{r} : \frac{\varphi}{d_1}$ ist, so wird auch *eine jede* $\frac{f_1}{d'_1}$-te Einheitswurzel $\frac{e_1 d_1 d'_1}{r}$ Mal im Produkte auftreten, was zu beweisen war.

Satz 11. Wenn m gerade ist, so ist

$$\prod_{\mathfrak{l}}\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l})^s}\right) = \prod_{n}\left\{1 - \left[\frac{2}{b_{1n}, b_{2n}, \ldots}\right]\frac{1}{2^s}\right\}$$

Das erste Produkt erstreckt sich uber alle Primideale $\mathfrak{l}$ welche in 2 aufgehen im Korper k. Das zweite Produkt erstreckt sich uber alle diejenigen Systeme der b in welchen $b_{0n} = b_{\ast n} = 0$ ist.

Der Beweis ist ganz in Ubereinstimmung mit den beiden Vorigen. Zuerst beweist man dasz das Symbol eine $\frac{f_\ast}{d'_\ast}$-te Einheitswurzel ist. Weiter ist es notwendig drie Falle zu unterscheiden.

1°. $h_\ast \gtrless 3$ und $b_{0n} + b_{\ast n}$ nicht fur alle Werte von n gerade.
2°. $h_\ast \gtrless 3$ und $b_{0n} + b_{\ast n}$ wohl fur alle Werte von n gerade.
3°. $h_\ast = 2$.

IV. *Berechnung der Klassenzahl der Ideale des Unterkörpers k.*

§ 8. *Hülfssatz und Ableitung der vorlaufigen Formel.*

1. Es ist $\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{n}{}\right] = 0$[1].

Beweis: Es sei a prim zu m; dann ist $\left[\frac{a}{}\right] \neq 0$ und $\neq 1$; daher ist.

$$\left[\frac{a}{}\right]\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{n}{}\right] = \sum_{n=1}^{m}\left[\frac{n\,a}{}\right].$$

Es durchlauft $n\,a$ zugleich mit n ein vollständiges Restsystem

[1]) Zur Abkürzung lasse ich die Buchstaben b im Symbole weg.

$(mod\, m)$. Die letzte Summe ist daher gleich $\sum_{n=1}^{m}\left[\underbrace{n}\right]$. Hieraus ergibt sich leicht der Beweis.

Für die Klassenzahl H gebrauchen wir den bekannten Ausdruck[1]):

$$H = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} (s-1) \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-n(\mathfrak{p})^{-s}}$$

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Unterkorpers k durchlauft. Wenn wir nun die Satze 9, 10 und 11 benutzen und die Factoren, welche sich beziehen auf dem System $b_{0n} = b_{*n} = b_{1n} = \ldots. = 0$, von den anderen Factoren abscheiden, so findet sich:

$$H = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} (s-1) \prod_{n=2}^{\varphi/r} \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p} \left\{1 - \left[\underbrace{p}_{b_{0n},\, b_{*n},\, b_{1n} \ldots}\right] \frac{1}{p^s}\right\}^{-1}.$$

Es ist hierbei angenommen dasz $b_{01} = b_{*1} = b_{11} = b_{21} = \ldots\ldots = 0$ ist.

Wir wissen nunmehr dasz:

$$\lim_{s=1} (s-1) \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}} = 1.$$

Weiter entwickeln wir jeden Faktor des dritten Produktes auf bekannte Weise in einer DIRICHLET'schen Reihe und multiplizieren all' diese Reihen. Das Ergebnisz ist:

$$H = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} \prod_{i=2}^{\varphi/r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{n}_{b_{0i},\, b_{*i},\, b_{1i}, \ldots}\right] \frac{1}{n^s}$$

Hierin setzt man

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx$$

und

$$\sum_{t=1}^{m} \left[\underbrace{t}\right] x^t = F(x)$$

und wenn man noch Gebrauch macht von der Gleichheit

$$\left[\underbrace{n}\right] = \left[\underbrace{n'}\right] \quad \text{wenn } n \equiv n' \ (mod\, m):$$

so findet man

$$H = \frac{1}{\varkappa} \prod_{n=2}^{\varphi/r} \int_0^1 \frac{F(x)}{x(1-x^m)}\, dx$$

wenn man auszerdem den ersten Hülfssatz dieser § benutzt. Nach Zerlegung in Partialbrüchen kann man die Integration durchführen und findet dann:

1) „H". Satz 55 und § 27.

$$H = \frac{1}{\varkappa}\prod_{n=2}^{\varphi/r} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} F\left(e^{\frac{2\pi k i}{m}}\right)\left\{\log\frac{e^{\frac{k\pi i}{m}} - e^{\frac{-k\pi i}{m}}}{i} + \tfrac{1}{2}\pi i - \frac{k\pi i}{m}\right\}.$$

Nun ist noch

$$\sum_{k=1}^{m} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{n}{\sim}\right] e^{\frac{2\pi k n i}{m}} = \sum_{n=1}^{m}\left[\frac{n}{\sim}\right]\sum_{k=1}^{m} e^{\frac{2\pi n k i}{m}} = 0$$

und also

$$H = \frac{1}{\varkappa}\prod_{n=2}^{\varphi/r} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)\left\{\log\frac{e^{\frac{k\pi i}{m}} - e^{\frac{-k\pi i}{m}}}{i} - \frac{k\pi i}{m}\right\}. \quad \ldots \quad (9)$$

Um diese Form weiter zu vereinfachen, beweisen wir zuerst vier Hülfssätze.

§ 9. *Hülfssätze.* [1])

In allen folgenden Hülfssätzen ist das System $b_{0n} = b_{*n} = b_{1n} = \ldots = 0$ ausgeschlossen.

1. $$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right) = (-1)^{b_{0n}+b_{1n}+\cdots} F\left(e^{-\frac{2k\pi i}{m}}\right).$$

Der Beweis ist ganz analog mit dem des übereinstimmenden Satzes meiner Abhandlung in "Proceedings" Vol. XXI, S. 758.

2. Es sei $2^{h'_*}$ die höchste Potenz von 2 die auf b_{*n} teilbar ist. Wenn $b_{*n} = 0$ ist, so nehme man $h'_* = h_* - 2$. Ist aber auch $b_{0n} = 0$ so nehme man $h'_* = h_*$. Ist $h_* = 2$ so ist $h_*' = 0$ zu setzen wenn $b_{0n} = 1$ und $= 2$ zu setzen wenn $b_{0n} = 0$ ist.

Es sei weiter $l_1^{h'_1}$ die höchste Potenz von l_1 welche auf b_{1n} teilbar ist. Wenn $b_{1n} = 0$ ist, so nehme man $h'_1 = h_1$. u. s. w.

Es sei nun $d = 2^{h_*'} l_1^{h_1'} \ldots$ so ist: $\left[\frac{n + m/d}{\sim}\right] = \left[\frac{n}{\sim}\right]$.

Beweis:

Wir faszen zuerst die Symbole

$$\left[\frac{n + m/d}{2^2}\right]^{b_{0n}} \quad \text{und} \quad \left[\frac{n}{2^2}\right]^{b_{0n}}.$$

ins Auge. Ist $b_{0n} = 0$ so sind sie beide $= 1$, und also einander gleich. Ist $b_{0n} \neq 0$ und n gerade, so ist auch $n + \frac{m}{d}$ gerade, weil dann $\frac{m}{d}$ teilbar ist durch 4. Die Symbole sind dann beide $= 0$ und

---

[1]) Diese Hülfssätze musz schon KUMMER benutzt haben, wiewohl in anderer Form. Die Beweise findet man aber nirgends.

wiederum gleich. Ist, zum Schlusz, $b_{0n} \neq 0$ und n ungerade, so ist auch $n + \frac{m}{d}$ ungerade und

$$\left[\frac{n + m/d}{2^2}\right]^{b_{0n}} = (-1)^{\frac{\left(n+\frac{m}{d}-1\right)}{2} b_{0n}} = (-1)^{\frac{n-1}{2} b_{0n}} = \left[\frac{n}{2^2}\right]^{b_{0n}}$$

Fur die übrigen Symbole kann man die Gleichheit auf analoge Art beweisen.

3. Wenn die Zahl d dieselbe Bedeutung hat wie oben, so ist $F\left(e^{\frac{2\pi k i}{m}}\right) = 0$ wenn der groszte gemeinschaftliche Teiler von k und $m \neq d$ ist, und

$$= \left[\underset{\sim}{k/d}\right]^{-1} F\left(e^{\frac{2\pi d i}{m}}\right)$$

wenn dieser groszte gemeinschaftliche Teiler wohl $= d$ ist.

Beweis:

$$F = \sum_{n=1}^{m} \left[\underset{\sim}{n}\right] e^{\frac{2\pi n k i}{m}} = \sum_{n=1}^{m} \left[\underset{\sim}{n + m/d}\right] e^{\frac{2\pi n k i}{m}} =$$

$$= e^{-\frac{2k\pi i}{d}} \sum_{n=1}^{m} \left[\underset{\sim}{n + m/d}\right] e^{\frac{2\pi(n+m/d)ki}{m}}$$

Es durchlauft $n + \frac{m}{d}$ zugleich mit n alle Zahlen fur welche das Symbol $\neq 0$ ist, weil zufolge der Definition der Zahl d, die Zahl m/d prim ist zu den Zahlen welche n durchlauft. Also findet man:

$$F = e^{\frac{2k\pi i}{d}} F$$

Ist k nicht durch d teilbar, so ergibt sich hieraus $F = 0$.

Nehmen wir nunmehr an dasz k durch d teilbar ist, dasz aber $k = dtv$, $m = dtm'$ so dasz dt der groszte gemeinsame Teiler ist von k und m, $t > 1$. Man hat nun:

$$F\left(e^{\frac{2\pi k i}{m}}\right) = F\left(e^{\frac{2\pi v i}{m'}}\right) = \sum_{n=1}^{m} \left[\underset{\sim}{n}\right] e^{\frac{2\pi i n v}{m'}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{m'} e^{\frac{2\pi v n i}{m'}} \sum_{s=1}^{dt} \left[\underset{\sim}{n + sm'}\right] \text{ und wegen 2:}$$

$$= d \sum_{n=1}^{m'} e^{\frac{2\pi v n i}{m'}} \sum_{s=0}^{t-1} \left[\underset{\sim}{n + sm'}\right].$$

Wir werden zeigen dasz der Wert der letzten Summe Null ist. Es sei x eine Zahl der Form $1 + \frac{m'}{g} y$ (wo g der groszte gemeinsame Teiler von n und m' ist) welche prim zu m ist. Eine solche Zahl x besteht. denn die Form enthalt eine unendliche Anzahl Primzahlen.

Nun ist $nx = n\left(1+\frac{m'}{g}y\right) = n + \frac{n}{g}ym'$ und wenn eine Zahl $n+sm'$ mit x multipliziert wird so gibt es wiederum eine Zahl derselben Form Ware weiter

$$x\,(n+sm') \equiv x\,(n+s'm')\left(mod\,\frac{m}{d}\right); \quad s, s' < t$$

so wurde

$$x\,s\,m' \equiv x\,s'\,m'$$

sein, und

$$x\,(s-s')\,m' \equiv 0 \quad \text{also} \quad s - s' \equiv (mod\ t)$$

Dies ist unmoglich, da s und $s' < t$ sind. Es ist damit bewiesen dasz die Zahlen $n+sm'$ wo $s = 0,1,\ldots.\,t{-}1$, nach Multiplikation mit $x\left(mod\,\frac{m}{d}\right)$ wiederum dieselben Zahlen ergeben. Hieraus ergibt sich:

$$\left[\underset{\sim\sim}{x}\right]\sum_{s=0}^{t-1}\left[\underset{\sim\sim}{n+sm'}\right] = \sum_{s=0}^{t-1}\left[\underset{\sim\sim}{x\,(n+sm')}\right] = \sum_{s=0}^{t-1}\left[\underset{\sim\sim}{n+sm'}\right]$$

Also ist: $\sum_{s=0}^{t-1}\left[\underset{\sim\sim}{n+sm'}\right] = 0$

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, bemerken wir dasz

$$F = \left[\underset{\sim\sim}{k/d}\right]^{-1}\sum_{n=1}^{m}\left[\underset{\sim\sim}{n\,k/d}\right]e^{\frac{2\pi nki}{m}}$$

wenn k und m die Zahl d zum groszten gemeinsamen Teiler haben. Die Zahl $\frac{k}{d}$ kann mit m nur diejenigen Primfaktoren gemeinsam haben, deren zugehorige Zahlen $b = 0$ sind. Denn ware z.b. $b_{1n} \neq 0$, so ist d teilbar durch eine Potenz von l_1 welche $< l_1^{h_1}$ ist. Es ergibt sich also dasz $n\,k/d$ und n zugleich alle Zahlen durchlaufen fur welche $\left[\underset{\sim\sim}{n\,k/d}\right] \neq 0$ ist. Also ist:

$$F = \left[\underset{\sim\sim}{k/d}\right]^{-1}\sum_{n=1}^{m}\left[\underset{\sim\sim}{n}\right]e^{\frac{2\pi ndi}{m}} = \left[\underset{\sim\sim}{k/d}\right]^{-1}F\left(e^{\frac{2\pi di}{m}}\right)$$

4. Wenn die Zahl d dieselbe Bedeutung hat wie oben, so ist:

$$F'\left(e^{\frac{2\pi di}{m}}\right)F\left(e^{\frac{2\pi di}{m}}\right) = (-1)^{b_{0n}+b_{1n}+\cdot}\quad dm$$

F' ist dieselbe Function wie F, nachdem in letzterer die Zahlen b durch $2 - b_{0n}$, $\frac{1}{2}\varphi_* - b_{*n}$, $\varphi_1 - b_{1n}, \ldots$ ersetzt sind.

Beweis: Wir faszen zuerst den Fall ins Auge wo keine der Zahlen b den Wert Null hat.

$$F = \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{nk}{\sim}\right] e^{\frac{2\pi nkdi}{m}}$$

wenn k prim zu m ist, denn in diesem Falle durchlauft nk zugleich mit n ein vollstandiges Restsystem $(mod\, m)$. Man folgert hieraus:

$$\left[\frac{k}{\sim}\right]^{-1} F = \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{n}{\sim}\right] e^{\frac{2\pi nkdi}{m}}$$

Wir multiplizieren nun mit $e^{\frac{2\pi kdi}{m}}$ und nehmen die Summe uber alle Werte von k welche $< m$ und prim zu m sind. Weil keine der Zahlen $b = 0$ ist, findet man:

$$F\,F' = \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{n}{\sim}\right] \sum_{k} e^{\frac{2\pi(n+1)kdi}{m}} = d \sum_{n=1}^{m/d} \left[\frac{n}{\sim}\right] \sum_{k} e^{\frac{2\pi(n+1)kdi}{m}}$$

Es sei t der groszte gemeinschaftliche Teiler von $n+1$ und m. Man kann alle Zahlen k, welche $< m$ und prim zu m sind, $(mod\, m/d)$ verteilen in $\frac{\varphi(m)}{\varphi\left(\frac{m}{dt}\right)}$ Mal die Gruppe der Zahlen welche $< \frac{m}{dt}$ und prim zu $\frac{m}{dt}$ sind. So findet man:

$$F.F' = d \sum_{n=1}^{m/d} \left[\frac{n}{\sim}\right] \frac{\varphi(m)}{\varphi\left(\frac{m}{dt}\right)} \sum_{k} e^{\frac{2\pi(n+1)ki}{m/d}}$$

in welchem Ausdruck k nun alle Zahlen durchläuft, welche $< \frac{m}{dt}$ und prim zu $\frac{m}{dt}$ sind. Die letzte Summe ist daher die Summe der primitiven $\frac{m}{dt}$-te Einheitswurzeln; infolge dessen erhalten wir:

$$F\,F' = d\,\varphi(m) \sum_{n} \left[\frac{n}{\sim}\right] \frac{\mu\left(\frac{m}{dt}\right)}{\varphi\left(\frac{m}{dt}\right)}.$$

Nun ist $\mu\left(\frac{m}{dt}\right)$ nur dann nicht $= 0$, wenn $\frac{m}{dt}$ nicht teilbar ist durch eine Quadratzahl. Wir brauchen in obenstehender Summe also für n nur diejenigen Werte zu nehmen, für welche $\frac{m}{dt}$ ein Teiler ist des Produktes $2\, l_1\, l_2 \ldots.$ Diese Zahlen n haben die Form $-1 + st$ insoweit diese prim zu m sind, und wo s alle Werte annimmt welche $< \frac{m}{dt}$ und prim zu $\frac{m}{dt}$ sind. Setzen wir daher

$$\frac{m}{dt} = 2^a\, l_1^{a_1} \ldots ; \quad a, a_1, \ldots = 0 \text{ oder } 1$$

so ist

$$t = 2^{h_* - h_*' - a}\, l_1^{h_1 - h_1' - a_1} \ldots$$

Zunachst nehmen wir an, die Zahl t sei durch alle Primfaktoren von m teilbar und auch durch 8. Die Exponenten, welche in obenstehender Form von t vorkommen, sind dann groszer als Null.

Alle Zahlen $-1 + st$, wo s die oben genannten Werte annimmt, sind nun prim zu m. In obenstehender Summe kommen also $\varphi\left(\frac{m}{dt}\right)$ Glieder vor, welche $\neq 0$ sind Diese Summe setzen wir in der folgenden Form:

$$F\,F' = (-1)^{b_{0n} + b_{1n} + \cdots}\, d\varphi(m) \sum_t \frac{\mu\left(\frac{m}{dt}\right)}{\varphi\left(\frac{m}{dt}\right)} \sum_s \left[\frac{1-st}{}\right].$$

Nun ist $\left[\frac{1-st}{2^2}\right] = 1$ weil t durch 8 teilbar ist.

$$\left[\frac{1-st}{2^h}\right]^{b_{*n}} = e^{\frac{2\pi\, b_*' v_{*1}}{2^a}} \quad \text{denn} \quad 1 - st \equiv \pm 5^{s'} \,(mod\; 2^{h_*})$$

also $$1 \equiv \pm 5^{s'} \,(mod\; 2^{h_* - h_*' - a})$$

Da die Potenz von 2, welche in den Modul auftritt, $> 2^2$ ist, so folgt: $s' = 2^{h_* - h'_* - a - 2}\, v_*$. Die Zahl v_* ist ungerade, denn anderenfalls wäre s teilbar durch 2 und dies ist unmöglich weil t der gröszte gemeinsame Teiler von $n + 1$ und m ist, und m gerade ist. Weiter hat man:

$$\left[\frac{1-st}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}} = e^{\frac{2\pi b'_{1n} v_1}{l_1^{a_1}}}$$

u.s.w. Aus all' diesem ersieht man dasz $\left[\frac{1-st}{}\right] =$ eine primitive $\frac{m}{dt}$-te Einheitswurzel ist. Infolge dessen besteht die Gleichheit:

$$\Sigma \left[\frac{1-st}{}\right] = \mu\left(\frac{m}{dt}\right).$$

Folglich ist $F F' = (-1)^{b_{0n}+b_{1n}+\cdots} d\varphi(m) \sum_t \frac{1}{\varphi\left(\frac{m}{dt}\right)}$

wo t alle Teiler von $2l_1l_2 \ldots .$ durchlauft. Es ist leicht ersichtlich dasz φ-Mal die letzte Summe den Wert m hat, womit in unsrem besonderen Falle der Beweis erbracht ist.

Um anzugeben wie der Beweis sich gestaltet wenn nicht alle fruhergemachten Annahmen erfullt sind, fassen wir noch den Fall ins Auge wobei $h_1 - h'_1 - a_1 = 0$ und $a_1 = 1$, wahrend alle übrigen Annahmen erfüllt sind.

In der Summe $\Sigma \left[\frac{1-st}{}\right]$ nimmt die Zahl s nun nicht mehr alle Werte an, welche $< \frac{m}{dt}$ und prim zu $\frac{m}{dt}$ sind, denn da t nicht durch l_1 teilbar ist, so kann $1-st$, fur einige Werte von s, durch l_1 teilbar sein. Die Zahlen $z, z+l_1, \ldots, z+\left(\frac{m}{dtl_1}-1\right)l_1$ genugen der Congruenz $1-zt \equiv 0 \,(mod\, l_1)$. Es sind $\varphi\left(\frac{m}{dtl_1}\right)$ dieser Zahlen prim zu $\frac{m}{dt}$. In der Summe bleiben also

$$\varphi\left(\frac{m}{dt}\right) - \varphi\left(\frac{m}{dtl_1}\right) = (l_1-2)\,\varphi\left(\frac{m}{dtl_1}\right)$$

Zahlen der Form $1-st$ ubrig, fur welche das Symbol einen von Null verschiedenen Wert erhalt. Fur diese Werte von s ist ebenso wie fruher:

$$\left[\frac{1-st}{2^{\nu}}\right]^{b_{0n}} = 1\,;\; \left[\frac{1-st}{2^{h_*}}\right]^{b_{*n}} = e^{\frac{2\pi b'_{*n} v_*}{2^{a}}}\,;\; \left[\frac{1-st}{l_2^{h_2}}\right] = e^{\frac{2\pi b'_{2n} v_2}{l_2^{a_2}}} \ldots .$$

Weiter ist aber $\left[\frac{1-st}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}} = \left[\frac{1-st+l_1}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}$

Die Zahlen $1-st$, welche in der Summe auftreten, können wir $(mod\, l_1)$ verteilen in $\varphi\left(\frac{m}{dtl}\right)$ Mal eine Gruppe von Zahlen, welche $< l_1$ sind. Die letzte Gruppe enthält l_1-2 Glieder, unter welchen die Null und die Zahl 1 nicht vorkommen; denn keine Zahl $1-st$ ist teilbar durch l_1 und t und s sind nicht teilbar durch l_1, weil s

prim zu $\frac{m}{dt}$ ist und diese letzte Zahl teilbar ist durch l_1. Wir fugen nun die Glieder, in welchen das Symbol $\left[\frac{1-st}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}$ denselben Wert hat, zusammen.

Es wird dieser Wert dann multiplizirt mit der Summe der primitiven $\frac{m}{dt\,l_1}$-ten Einheitswurzeln. Wir sind also zu der folgenden Gleichheit gelangt:

$$\Sigma\left[\frac{1-st}{\sim\sim}\right]=\mu\left(\frac{m}{dt\,l_1}\right)\times\sum_{n=2}^{l_1}\left[\frac{n}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}.$$

Die letzte Summe hat den Wert -1, wie sich aus dem ersten Hulfssatz dieses Kap. ergibt, denn es ist:

$$0=\sum_{u=1}^{l_1^{h_1}}\left[\frac{n}{\sim\sim}\right]=(l_1^{h_1-1}-1)\sum_{n=1}^{l_1}\left[\frac{n}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}$$

da, weil b_{1n} durch $l_1^{h_1-1}$ teilbar ist:

$$\left[\frac{n}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}=\left[\frac{n'}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}\quad\text{wenn } n\equiv n'\ (mod\ l_1)$$

Schliesslich: $\Sigma\left[\frac{1-st}{\sim\sim}\right]=-1\,.\,\mu\left(\frac{m}{dt\,l_1}\right)=\mu\left(\frac{m}{dt}\right).$

Der Beweis gestaltet sich weiter wie im vorigen Falle. Wir haben nun hinreichend angegeben wie der Beweis erbracht wird wenn man noch andere der fruher gemachten Einschrankungen aufhebt; nur den Fall $b_{1n}=0$ werden wir noch weiter untersuchen.

In der Summe F haben in diesem Falle alle Glieder, fur welche n prim zu $\frac{m}{l_1^{h_1}}$ ist, einen von Null verschiedenen Wert. Und weiter ist

$$\left[\frac{n}{\sim}\right]=\left[\frac{n'}{\sim}\right]\quad\text{wenn } n\equiv n'\left(mod\,\frac{m}{l_1^{h_1}}\right).$$

Auszerdem kann man alle Zahlen, welche $<m$ und prim zu m sind, $\left(mod\,\frac{m}{l_1^{h_1}}\right)$ verteilen in $l_1^{h_1}$ Mal die Gruppe der Zahlen welche $<\frac{m}{l_1^{h_1}}$ und prim zu $\frac{m}{l_1^{h_1}}$ sind. Also:

$$F=\sum_n\left[\frac{n}{\sim\sim}\right]\left(e^{\frac{2\pi\,n\,di}{m}}+e^{\frac{2\pi\left(n+\frac{m}{l_1^{h_1}}\right)di}{m}}+\dots\right)$$

Da d teilbar ist durch $l_1^{h_1}$, ergibt sich hieraus

$$F = l_1^{h_1} \sum_n \left[\frac{n}{\sim}\right] e^{\frac{2\pi n d i}{m}} = l_1^{h_1} F_1\left(e^{\frac{2\pi n d i}{m}}\right)$$

Die Function F_1' leitet man aus F ab, indem man $\frac{m}{l_1^{h_1}}$ anstatt m nimmt. Für die Function F_1 haben wir schon bewiesen:

$$F F' = l_1^{h_1} F_1 \,.\, l_1^{h_1} F_1' = l_1^{2h_1} F_1 F_1 =$$

$$= (-1)^{b_{0n} + b_{1n} + \cdots} l_1^{2h_1} \frac{d}{l_1^{h_1}} \cdot \frac{m}{l_1^{h_1}} = (-1)^{b_{0n} + b_{1n} + \cdots} dm.$$

Damit ist der Beweis in unserem Falle wiederum erbracht.

§ 10. *Sätze über die Realität des Unterkörpers k und Bestimmung der Zahl $\varkappa$.*

1. Wenn die Summe $b_{0n} + b_{1n} + \ldots$, für alle Werte von n, gerade ist, so ist der Unterkörper k reell und andernfalls imaginär.

Beweis: Die den Körper k bestimmende Zahl ist

$$\eta = Z^{A^{(1)}} + Z^{A^{(2)}} + \ldots + Z^{A^{(r)}} \text{ [1]}$$

wo $A^{(i)}$ jede Zahl der Untergruppe g bedeutet.

Nun ist

$$A^{(i)} \equiv A_0^{a_{0i}} A_*^{a_{*i}} A_1^{a_{1i}} \ldots (mod\, m)$$

wo die Exponenten den Congruenzen (3) genügen. Aus der Annahme dasz alle Summen $b_{0n} + b_{1n} + \ldots$ gerade sind, folgt dasz das Wertsystem $a_0 = 1$; $a_* = 0$; $a_1 = \frac{1}{2}\varphi_1$; ... den Congruenzen (3) genügt. Dann genügt aber auch das System

$$a_{0i} + 1,\ a_{*i}\ ,\ a_{1i} + \tfrac{1}{2}\varphi_1, \ldots.$$

Nun ist noch

$$A_0^{a_{0i}+1} A_*^{a_{*i}} A_1^{a_{1i}+\frac{1}{2}\varphi_1} \ldots \equiv -A^{(i)}\ (mod\, m)$$

Die Zahlen $A^{(i)}$ en $-A^{(i)}$ sind $(mod\, m)$ verschieden, denn wäre

$$A^{(i)} \equiv -A^{(i)}\ (mod\, m)$$

so würde

$$2\, A^{(i)} \equiv 0\ (mod\, m)$$

sein, und dies ist unmöglich, weil die $A^{(i)}$ prim zu m sind. Wir haben also bewiesen dasz die Zahlen $A^{(i)}$ von g in Paaren verteilt werden können. Für jedes Paar hat $Z^{A^{(i)}} + Z^{-A^{(i)}}$ einen reellen Wert. Man folgert hieraus leicht dasz η reell ist.

Nun musz noch der Beweis des zweiten Teils des Satzes erbracht werden.

Alle reellen Zahlen des Kreiskörpers K bleiben unverändert für

[1]) „W.", S. 85.

die Substitution $s = (Z : Z^{-1})$. Denn es sei Ω eine reelle ganze Zahl, so ist

$$\Omega = a_0 + a_1 Z + \ldots .$$
$$a_1 \sin \frac{2\pi}{m} + a_2 \frac{\sin 4\pi}{m} + \ldots . = 0$$

und

$$s\,\Omega = a_0 + a_1 Z^{-1} + \ldots . \quad = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{m} + \ldots .$$

Also:

$$\Omega - s\,\Omega = 0.$$

Ebensoleicht beweist man, umgekehrt, dasz eine jede Zahl, welche durch die Substitution s nicht geändert wird, eine reelle Zahl ist. Man ersieht hieraus dasz jeder reelle Unterkörper von K ein Unterkörper ist des zu der Gruppe s, s^2 gehörenden Unterkörpers und dasz ein Unterkörper, der zu einer Untergruppe gehört, welche die Substitution s nicht enthält, imaginär ist. Wenn nun nicht alle Summen $b_{0n} + b_{1n} + \ldots .$ gerade sind, so genügt das System $a_0 = 1$; $a_* = 0$; $a_1 = \frac{1}{2} \varphi_1 \ldots .$ den Congruenzen (3) nicht; die Untergruppe g kann daher in diesem Falle die Substitution s nicht enthalten. Der Körper k ist imaginär.

2. Wenn die Summe $b_{0n} + b_{1n} + \ldots .$ nicht für alle Werte von n einen geraden Wert hat, so ist die Anzahl der Systeme der b, für welche dieser Wert ungerade ist, gleich $\frac{\varphi}{2r}$.

Beweis: Alle Systeme der b für welche die Summe gerade ist, bilden eine Gruppe, da $2, \varphi_1, \varphi_2, \ldots .$ gerade sind. Um aus dieser Gruppe, die Gruppe aller Systeme der b zu bekommen, musz man die erstgenannte Gruppe multiplizieren mit einer Gruppe in welcher jedes System der b (ausgenommen die identische Substitution $b_{01} = 0$, $b_{*1} = 0, \ldots .$) eine ungerade Summe besitzt. Wenn, in dieser letzten Gruppe, sich zwei Systeme der b vorfänden mit ungerader Summe, so würde das System, dasz man durch Aufzählung der übereinstimmenden Zahlen dieser beiden Systemen erhielt, eine gerade Summe $b_{0n} + b_{1n} + \ldots .$ haben. Ein solches System kann aber in dieser Gruppe nicht auftreten. In der Gruppe können also nicht zwei Systeme vorkommen (ausser $b_{01} = b_{*1} = \ldots . = 0$). Die Gruppe hat daher den Grad 2.

Es gibt also $\frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi}{r}$ Systeme der b, welche eine gerade Summe haben und natürlich gleichviel mit ungerader Summe.

Bestimmung der Zahl $\varkappa$ [1]).

[1]) „H.", S. 229.

1°. Wenn der Körper k reell ist, so ist $w = 2$ denn ± 1 sind die einzigen reellen Einheitswurzeln.

Es ist weiter $r_2 = 0$ und $r_1 = \frac{\varphi}{r}$ weil der Körper ein GALOIS'scher ist.

2°. Wenn der Körper k imaginär ist, so ist $r_1 = 0$ und $r_2 = \frac{\varphi}{2r}$. Nun musz noch die Zahl w bestimmt werden.

Es sei $w_0 = 1$ wenn alle Zahlen $a_0 = 0$ sind; andernfalls $w_0 = 0$.

Es sei 2^{w_*} die höchste Potenz von 2 welche auf alle Zahlen a_* teilbar ist und $w_* = h_* - 2$ wenn alle Zahlen $a_* = 0$. $u_* = 0$ wenn nicht alle Zahlen a_* durch 2 teilbar sind und auch $= 0$ wenn nicht alle $a_0 = 0$ sind; $u_* = 1$ wenn alle $a_0 = 0$ und alle a_* durch 2 teilbar sind.

Es sei $l_1^{w_1}$ die höchste Potenz von l_1 welche auf alle Zahlen a_1 teilbar ist, und $w_1 = h_1 - 1$ wenn alle $a_1 = 0$ sind. $u_1 = 0$ wenn nicht alle Zahlen a_1 durch $l_1 - 1$ teilbar sind und $u_1 = 1$ wenn dies wohl so ist. U. s. w.

Dann ist:

$$\text{wenn } h_* \geqq 3 \text{ ist: } w = 2^{w_0 + w_* u_* + 1} l_1^{u_1(w_1+1)} \ldots$$

$$\text{wenn } h_* = 2 \text{ ist: } w = 2^{w_0+1} l_1^{u_1(w_1+1)} \ldots$$

$$\text{wenn } h_* = 0 \text{ ist: } w = 2 l_1^{u_1(w_1+1)} \ldots$$

Beweis: Der Körper k kann nur diejenigen Einheitswurzeln enthalten, welche Potenzen von Z sind, da der Kreiskörper K nur solche enthält. Nur wenn m ungerade ist, enthält K auch die Potenzen von Z mit negativem Vorzeichen. Nehmen wir nun an dasz Z^a in k liegt, dann bleibt diese Zahl ungeändert für die Substitutionen von g. Wenn wir also alle Zahlen von g durch $A^{(i)}$ darstellen, so ist

$$Z^{aA^{(i)}} = Z^a$$

woraus sich ergibt:

$$a\,(A^{(i)} - 1) \equiv (mod\, m) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Wenn, umgekehrt, die Zahl a dieser Congruenz genügt, für alle Zahlen $A^{(i)}$ von g, so enthält der Körper k die Einheitswurzel Z^a.

Sind alle Zahlen $a_0 = 0$ so enthält der Körper die Einheitswurzeln $\pm i$.

Beweis: Es gilt für jede Zahl $A^{(i)}$:

$$A^{(i)} \equiv 5^{a_*} (mod\; 2^h) \quad \text{also} \quad A^{(i)} \equiv 1\; (mod\; 4).$$

Aus (10) ergibt sich daher $a = \frac{m}{4}$, d. h. die Einheitswurzel $Z^{\frac{m}{4}} = i$ liegt im Körper k. Daher auch $-i$.

Sind alle Zahlen $a_* = 0$ und alle Zahlen $a_0 = 0$ so enthält k die Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{2^{h_*}}}$. Man beweist dies auf dieselbe Weise.

Sind alle Zahlen $a_0 = 0$ und alle Zahlen a_* höchstens teilbar durch 2^{w_*} so enthält k die Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{2^{w_*+2}}}$. U.s.w.

Alle Beweise werden mit Hülfe der Congruenz (10) erbracht.

Man findet nun leicht die im Satze genannte Formel wenn man beachtet dasz, wenn der Körper die Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{l_1^{w_1+1}}}$ enthält, auch die $l_1^{w_1+1}$ ersten Potenzen dieser Zahl im Körper liegen.

§ 11. *Ableitung des entgültigen Ausdrucks für die Klassenzahl.*

Satz: Wenn, für jedes System der b, die Summe $b_{0n} + b_{1n} + \ldots.$ gerade ist, wenn also der Körper k reell ist, so stellt sich die Klassenanzahl H dieses Körpers, wie folgt, dar:

$$H = \frac{\prod\limits_{n=2}^{\varphi/r} \sum\limits_{s=1}^{<\frac{m}{2}} \left[\overbrace{b_{0n}, b_{*n}, b_{1n} \ldots}^{s}\right] \log A_s}{R}$$

Hierin ist $A_s = \sqrt{(1-Z^s)(1-Z^{-s})}$ und R der Regulator. Auszerdem ist angenommen: $b_{01} = b_{*1} = b_{11} = \ldots. = 0$.

Ist $h_* = 2$ so musz b_{*n} weggelassen werden und ist $h_* = 0$ so musz auch b_{0n} weggelassen werden.

Wenn die Summe $b_{0n} + b_{1n} + \ldots$ nicht für jedes System der b gerade ist, wenn also der Körper k imaginär ist, so stellt sich die Klassenanzahl dieses Körpers k, wie folgt, dar:

$$H = \frac{w \prod\limits_{n} \sum\limits_{s=1}^{m} \left[\overbrace{b_{0n}, b_{*n}, b_{1n}, \ldots}^{s}\right] s}{(2m)^{\varphi/2r}} \cdot \frac{\prod\limits_{n} \sum\limits_{s=1}^{<\frac{m}{2}} \left[\overbrace{b_{0n}, b_{*n}, b_{1n}, \ldots}^{s}\right] \log A_s}{R'}$$

Hierin ist w die in § 10 bestimmte Zahl. Das erste Produkt ist über alle Werte von n, für welche die Summe $b_{0n} + b_{1n} + \ldots$ ungerade ist, zu erstrecken; das zweite Produkt über alle Werte von n für welche diese Summe gerade ist.

Weiter ist $A_s = \sqrt{(1-Z^s)(1-Z^{-s})}$ und R' die Determinante der Logarithmen der absoluten Werte eines Systems von Grundeinheiten. Ist $h_* = 2$ so ist b_{*n} wegzulassen, und ist $h_* = 0$ so ist auch b_{0n} wegzulassen.

Beweis:

Zur Ableitung des ersten Ausdrucks benutzen wir (9) und ersetzen, in der darin auftretenden Summe, die Grösze k durch $m-k$. Wenn

27*

wir dann den ersten Hülfssatz von § 9 benutzen, so finden wir $\Sigma F . \frac{k\pi i}{m} = 0$. Die Gleichheit (9) läszt sich daher umformen zu:

$$H = \frac{1}{\varkappa} \sum_{n=2}^{\varphi/r} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} F\left(e^{\frac{2\pi ki}{m}}\right) \log A_k$$

wenn:

$$A_k = \frac{e^{\frac{k\pi i}{m}} - e^{-\frac{k\pi i}{m}}}{i} = ie^{-\frac{k\pi i}{m}}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right) =$$

$$= -ie^{\frac{k\pi i}{m}}\left(1 - e^{-\frac{2k\pi i}{m}}\right) = \sqrt{\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)\left(1 - e^{-\frac{2k\pi i}{m}}\right)}$$

Dieses Resultat fur H läszt sich noch veränderen mittels Hülfssatz 3 und 4 von § 9. Aus Hulfssatz (3) ergibt sich, dasz in der Summe nur diejenigen Glieder übrig bleiben für welche die Zahl k mit m den grószten gemeinsamen Teiler d hat. Diese Zahl d deuten wir weiter an durch d_n. Die Summe wird zu

$$F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right) \sum_k \left[\frac{k/d}{\sim}\right]^{-1} \log A_k$$

Es sei nun $k = k'd_n$, so ist, wie man leicht findet:

$$A_k = A_{k'} . A_{k' + \frac{m}{d_n}} \dots . A_{k' + (d_n - 1)\frac{m}{d_n}}$$

Die Summe wird daher zu:

$$F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right) \sum_k \left[\frac{k/d_n}{\sim}\right]^{-1} \left(\log A_{k'} + \log A_{k' + \frac{m}{d_n}} + \dots\right) \quad . \quad (11a)$$

und durch Hülfssatz 2 § 9 zu:

$$F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right) \sum_{s=1}^{m} \left[\frac{s}{\sim}\right]^{-1} \log A_s \quad \dots \dots \quad (11)$$

denn, weil k' prim zu m/d_n ist und in $(11a)$ die Zahl k alle Werte annimmt die mit m die Zahl d_n zum grószten gemeinsamen Teiler haben, bekommt man eine Summe, in welcher s alle Zahlen $< m$ durchlauft, welche prim zu m sind oder nur noch teilbar durch diejenigen in m aufgehenden Primzahlen, deren betreffende $b = 0$ sind. s durchläuft also alle Zahlen für welche $\left[\frac{s}{\sim}\right] \neq 0$ ist.

In der Formel für H kommt nun das Produkt

$$\prod_{n=2}^{\varphi/r} F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right) \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

zum Vorschein. Um dessen Wert zu berechnen benutzen wir Hülfssatz (4) von § 9. Da zu jeder Substitution einer Gruppe auch die reciproke Substitution vorkommt, so wird ins Besondere hier zu jedem System $b_{0n}, b_{*n}, \ldots$ auch das System $2—b_{0n}, \frac{1}{2}\varphi_*—b_{*n}, \varphi_1— b_{1n} \ldots$ auftreten. Wenn diese Systeme von einander verschieden sind, so ist, nach dem ebengenannten Hülfssatz, das Produkt der zugehörigen Functionen F und F' gleich $d_n m$. Sind sie aber einander gleich so hat das Produkt den Wert $\pm \sqrt{d_n m}$.

Das Produkt (12) hat daher den Wert

$$m^{\frac{\varphi}{2r}-1} \prod_{n=2}^{m} \sqrt{d_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wenn man das Vorzeichen ausser Acht laszt.

Bevor wir nun den Wert dieses Produktes entgultig bestimmen, formen wir die Summe aus (11) um. Zuerst können wir darin den Exponent —1 weglassen, weil, wie schon bemerkt worden ist, zu jedem System der Zahlen b, auch das System $2—b_{0n}, \ldots$. vorkommt.

Weiter ist

$$\sum_{s=1}^{m} \left[\frac{s}{\sim\!\sim}\right] \log A_s = \sum_{s=1}^{<\frac{m}{2}} + \sum_{s=1}^{<\frac{m}{2}} \left[\frac{m-s}{\sim\!\sim}\right] \log A_{m-s}$$

Denn, fur den Fall dasz m ungerade ist, folgt diese Gleichheit aus der bloszen Bemerkung dasz $\left[\frac{m}{\sim\!\sim}\right] = 0$ ist. Ist, im Gegensatz, m gerade, so ist offenbar $\left[\frac{m/2}{\sim\!\sim}\right] = 0$ da m durch 4 teilbar ist.

Zur weiteren Umformung benutzen wir die leicht zu erhaltende Beziehung:

$$\left[\frac{-s}{\sim\!\sim}\right] = (-1)^{b_{0n}+b_{1n}+\ldots} \left[\frac{s}{\sim\!\sim}\right]$$

und auch die Gleichheit $A_{m-s} = A_s$, und erhalten so für die Summe:

$$2 \sum_{s=1}^{<m\,2} \left[\frac{s}{\sim\!\sim}\right] \log A_s$$

Nach Einführung in die Formel (9) und nach Einsetzung des Wertes von $\varkappa$ und der in § 6 berechneten Discriminante d, erhält man den im Satze angegebenen Endausdruck für die Klassenzahl, nachdem das Produkt aller Zahlen d_n welches in (13) auftritt berechnet ist. Weil die Berechnung dieses Produktes dieselbe ist beim zweiten Teil des Satzes, so werden wir diese Berechnung bis zum Ende des Beweises aufschieben.

Beweis des zweiten Teils des Satzes.

Das Produkt aus (9) zerlegen wir in zwei Produkten: das erste ist zu erstrecken uber alle Werte von n fur welche $b_{0n}+b_{1n}+\ldots\ldots$ ungerade ist, wahrend das zweite zu erstrecken ist über alle Werte von n fur welche diese Summe gerade ist. Das letzte Produkt läszt sich auf dieselbe Weise umformen wie beim Beweise des ersten Teils des Satzes. Beim ersten Produkt erhalten wir, durch Benutzung des ersten Hulfssatzes § 9, nachdem in (9) $m-k$ statt k eingeführt ist:

$$\sum_{k=1}^{m} F\left(e^{\frac{2\pi ki}{m}}\right) \log A_k = 0.$$

Es bleibt von der Summe aus (9) also nur übrig

$$-\frac{\pi i}{m}\sum_{k=1}^{m} k\, F\left(e^{\frac{2\pi ki}{m}}\right).$$

Wegen Hulfssatz 3 (§ 9) wird dies zu

$$-\frac{\pi i}{m} F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right)\sum_k k\left[\frac{k/d}{\smile}\right]^{-1} = -\frac{\pi\, di}{m}F\,.\sum_k \frac{k}{d}\left[\frac{k/d}{\smile}\right]^{-1}$$

wo k uber alle Zahlen zu erstrecken ist, die mit m die Zahl d_n zum grószten gemeinsamen Teiler haben.

Weiter ist, wenn $k = k'd_n$; $d = d_n$;

$$d_n \sum_k \frac{k}{d}\left[\frac{k/d}{\smile}\right]^{-1} = \sum_{k'} k'\left[\frac{k'}{\smile}\right]^{-1} + \sum_{k'}(k'+m/d)\left[\frac{k'+m/d}{\smile}\right]^{-1} +$$

$$\ldots\ldots \sum_{k'}(k'+(d-1)\,m/d)\left[\frac{k'+(d-1)\,m/d}{\smile}\right]^{-1}$$

da

$$\sum\left[\frac{k'}{\smile}\right]^{-1} + \sum\left[\frac{k'+m/d}{\smile}\right]^{-1} + \ldots = \sum_s\left[\frac{s}{\smile}\right] = 0$$

ist wegen Hülfssatz 1 von § 8. Wir erhalten also das Resultat:

$$-\frac{\pi i}{m} F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right)\sum_{s=1}^{m}\left[\frac{s}{\smile}\right]^{-1} s$$

in welchem der Exponent -1 darf weggelassen werden da, wenn die Summe $b_{0n}+b_{1n}+\ldots\ldots$ ungerade ist, auch die Summe der Werte $2-b_{0n}$, $\frac{1}{2}\varphi_* - b_{*n}$, $\ldots\ldots$ ungerade ist.

Es ist ersichtlich dasz in (9) wiederum das Produkt $\sqrt{\prod_{n=2} d_n}$ zum Vorschein kommt, wenn wir die Faktoren zu zweien nehmen und jedes Produkt mittels Hülfssatz 4 (§ 9) umformen. Dabei erscheinen dann Potenzen von i, und ebensolche treten auch bei der weiteren Umformung noch auf. Man kann sie jedoch auszer Acht lassen weil die Zahl H natürlich eine positive ganze Zahl ist.

§ 12. *Berechnung des Wertes des Produktes* $\prod_{n=2}^{\varphi/r} d_n$.

Wir bestimmen die Potenz von 2 und die von l_1, welche in dem Produkte vorkommen.

Es gibt $\frac{1}{2}\varphi_*$ voneinander verschiedene Zahlen b_{*n} da die Untergruppe g primar ist. Jeder dieser Werte kommt also in allen Systeme der b genau $\frac{\varphi}{r} : \frac{1}{2}\varphi_*$ Mal vor. Nun gibt es unter den voneinander verschiedenen Werten der b_{*n} genau.

2^{h_*-4}	Zahlen	welche	genau	durch	2	teilbar	sind.
2^{h_*-5}	,,	,,	,,	,,	2^2	,,	,,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
2^0	,,	,,	,,	,,	2^{h_*-3}	,,	,,
1	,,	,,	,,	,,	2^{h_*-2}	,,	,,

Alles zusammen genommen gibt dies die folgende Potenz von 2:

$$2^{(2^{h_*-2}-1)\frac{2\varphi}{\varphi_* r}-(h_*-2)}$$

wenn man bedenkt dasz das System $b_{0n} = b_{*n} \ldots = 0$ nicht mitgezahlt werden musz. Man musz nun noch Rucksicht nehmen auf den Fallen worein b_{0n} und b_{*n} beide zugleich den Wert Null annehmen. Für einen jeden solchen Fall musz obenstehende Potenz von 2 noch mit 2^2 multipliziert werden. Nun gibt es $\frac{\varphi}{2r}$ Systeme in welchen $b_{0n} = 0$ ist. Die Systeme in welchen $b_{0n} = b_{*n} = 0$ ist, stellen eine Untergruppe der Gruppe aller Systeme b dar. Die Systeme, in welchen $b_* = 0$ ist, stellen auch eine Untergruppe dar, welche die erstgenannte Untergruppe enthalt. Diese erstgenannte Untergruppe. musz, wie leicht ersichtlich, multipliziert werden mit der Gruppe des Grades 2:

$$b_{0n} = 0; \quad b_{*n} = 0; \quad b_{1n} = 0, \ldots .$$
$$b_{0n} = 1; \quad b_{*n} = 0; \quad b_{1n} = 0, \ldots .$$

um die Gruppe der Systeme, in welchen $b_{*n} = 0$ ist, zu erhalten. Man erkennt also dasz die Halfte der Anzahl der Systeme in welchen $b_{*n} = 0$ ist, die Anzahl der Systeme ist, in welchen $b_{0n} = b_{*n} = 0$ ist. Dies ist also der Fall wenn nicht fur jeden Wert von n $b_{0n} = b_{*n} = 0$ ist. Ist jedoch $b_{0n} + b_{*n}$ fur alle Werte von n gerade, so ist immer $b_{0n} = b_{*n} = 0$.

Es ist nun leicht ersichtlich dasz obenstehende Potenz von 2 noch multipliziert werden musz mit

$$2^{2\left(\frac{(t+1)\varphi}{\varphi_* r}-1\right)}$$

wo t dieselbe Bedeutung hat wie in § 6 Satz 8.

Um die Potenz von l_1 zu bestimmen fuhren wir das Folgende an: Weil d_1 [1]) der gröszte gemeinsame Teiler aller Zahlen b_{1n} ist, so gibt es $\frac{\varphi_1}{d_1}$ voneinander verschiedene Zahlen b_{1n}. Ein jeder solchen Wert kommt daher $\frac{\varphi}{r} : \frac{\varphi_1}{d_1}$ Mal vor. Weil g primar ist, ist d_1 nicht durch l_1 teilbar, und, wenn $h_1 = 1$ nicht durch $l_1 - 1$. Die durch l_1 teilbaren Zahlen b_{1n} sind daher

$$d_1 l_1\,,\ 2\, d_1 l_1\,, \ldots . \frac{l_1 - 1}{d_1} . d_1 l_1^{h_1 - 1}$$

Von diesen sind

$\frac{(l_1-1)^2}{d_1} l_1^{h_1-3}$ Zahlen genau durch l_1 teilbar.

$\frac{(l_1-1)^2}{d_1} l_1^{h_1-4}$ „ „ „ l_1^2 „

. . . .

$\frac{l_1-1}{d_1} - 1$ Zahlen genau durch $l_1^{h_1-1}$ teilbar.

Wenn man noch Rucksicht nimmt auf den Fall wo alle $b = 0$ sind, so erhalt man fur die Potenz von l_1 welche im Produkte aller d_n vorkommt:

$$l_1^{\left(\frac{l^{h_1-1}-1}{d_1}\right)\frac{\varphi d_1}{\varphi_1 r} - h_1'}$$

Wenn nun D die in § 6 bestimmte Discriminante des Korpers k darstellt, so gibt eine leichte Rechnung allgemein die Formel

$$\sqrt{D} . \prod_{n=2}^{\varphi/r} d_n = m^{\frac{\varphi}{2r} - \frac{1}{2}} .$$

Im Nenner des Ausdrucks fur H findet sich nun noch der Regulator R. Nehmen wir ein System Grundeinheiten η_i, so gilt:

$$\log |\eta_i^{(k)}| = \tfrac{1}{2}\, l_k (\eta_i) \text{ [2])}$$

weil die conjugirten Körper reell sind. Nach Einfuhrung in R kann man die Faktoren 2 aus dem Determinante herausheben, wonach die Richtigheit der im Satz § 11 angegebene zweite Formel bewiesen ist.

---

[1]) Diese Zahl d_1 hat also dieselbe Bedeutung wie in § 4.2. Eine Verwirrung mit den in § 9 2 bestimmten Zahl d, welche im Anfang des Beweises von § 11 d_n genannt ist ist wohl nicht zu befürchten.

[2]) „H" S 215. Im Ausdruck auf S. 376 (oben) nennt Herr Hilbert die Zahl R den Regulator. Dies ist nicht in Ubereinstimmung mit seiner Definition auf Seite 221.