Citation:

L.E.J. Brouwer, Ueber eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich. Sechste Mitteilung), in:
KNAW, Proceedings, 22 II, 1920, Amsterdam, 1920, pp. 811-814

Mathematics. — "*Ueber eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich*". (Sechste Mitteilung [1])). By Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of March 27, 1920).

Die in der fünften Mitteilung über diesen Gegenstand für die Kugel ausgeführte *Aufzählung aller Transformationsklassen* wird hier für die projektive Ebene erbracht werden.

Sei t eine eindeutige stetige Transformation der projektiven Ebene π in sich, k eine einseitige einfache geschlossene Kurve von π, h die Verdoppelung von k, G das in π von h umschlossene zweiseitige Gebiet, k' das Bild von k für t. Wir werden t *erster* oder *zweiter Art* nennen, je nachdem k' einseitig oder zweiseitig ist. Eine Transformation erster und eine zweiter Art können offenbar niemals derselben Klasse angehören.

§ 1. *Die Transformationsklassen erster Art.*

Sei T eine der beiden durch t bestimmten Abbildungen von $G+h$ auf die zweiseitige Verdoppelung β von π, G' bzw. h' das Bild von G bzw. h für T, I der Inhalt von β für eine bestimmte elliptische Massbestimmung in π. Alsdann ist, wenn wir G und β mit passenden Indikatrizen versehen, der Inhalt einer willkürlichen simplizialen Approximierung von G' gleich $\frac{2n+1}{2} I$, wo n eine nicht-negative ganze Zahl ist, welche wir den *Grad* von t nennen werden. Alle Transformationen erster Art, welche derselben Klasse angehören, besitzen offenbar denselben Grad.

Um auch die umgekehrte Eigenschaft zu beweisen, werden wir zwei Methoden angeben, von denen die erste vom Resultate der fünften Mitteilung über diesen Gegenstand Gebrauch macht, die zweite dem Beweisgange dieser Mitteilung parallel läuft.

Erste Methode. Wir konstruieren in G eine einfache geschlossene Kurve r_2 und eine innerhalb r_2 gelegene einfache geschlossene Kurve r_1, und bezeichnen das Innengebiet von r_1 met G_1, das Zwischengebiet von r_1 und r_2 mit G_2, das Zwischengebiet von r_2 und h mit

[1]) Vgl. diese Proceedings XI, S. 788; XII, S. 286; XIII, S. 767; XIV, S. 300; XV, S. 352 (1909—1912).

G_3. Wir werden t eine *gegen P reduzierte Transformation n^{ten} Grades* nennen, wenn T die Kurven h und r_1 je eineindeutig und beide mit dem gleichen Umlaufssinn auf den (β in zwei der Reihe nach mit den Graden n und $n+1$ überdeckte Hälften β_1 und β_2 zerlegenden) Grosskreis m, die Kurve r_2 auf den in β_2 gelegenen Pol P von m und die Gebiete G_2 und G_3 je eineindeutig auf das von P und m begrenzte Gebiet abbildet. Nach dem Resultate der fünften Mitteilung über diesen Gegenstand können wir zwei willkürliche gegen P reduzierte Transformationen n^{ten} Grades *unter Invarianz der durch dieselben bestimmten Abbildungen von r_2 und h* stetig ineinander überführen.

Hiermit ist aber unser Ziel erreicht: eine beliebige Transformation erster Art lässt sich nämlich durch stetige Modifizierung in eine gegen P reduzierte Transformation überführen, indem wir zunächst der Kurve h' die erforderliche Gestalt erteilen und sodann unter Invarianz aller Punkte von h' den Prozess zu Ende führen.

Zweite Methode. Wir werden t eine *normalisierte Transformation n^{ten} Grades* nennen, wenn *erstens* h' eine einfache geschlossene Kurve und eineindeutiges Bild von h ist (durch welches also β in zwei der Reihe nach mit den Graden n und $n+1$ überdeckte Hälften β_1 und β_2 zerlegt wird) und *zweitens* T eine einfach verzweigte Riemannsche Abbildung ist, deren Verzweigungspunkte alle in β_2 gelegen sind. In diesem Falle können wir in β_2 nach der Lüroth-Clebschschen Methode ein solches System von Verzweigungsschnitten mit dazu gehöriger Blätteranordnung anbringen, dass h' eine ganz im ersten Blatt gelegene Kurve wird. Aus dieser Bemerkung folgt unmittelbar, dass *alle normalisierten Transformationen n^{ten} Grades zur selben Klasse gehören.*

Wir werden t eine *kanonische Transformation n^{ten} Grades* nennen, wenn *erstens* h' ein Grosskreis und eineindeutiges Bild von h ist und *zweitens* n in G gelegene einander nicht treffende einfache geschlossene Kurven von T in solcher Weise in je einen einzigen Punkt von β übergeführt werden, dass die von diesen Kurven bestimmten Teilgebiete von G alle mit dem Grade $+1$ eineindeutig und stetig abgebildet werden, und zwar die nicht an h grenzenden auf die einfach oder mehrfach punktierte Kugel β, das an h grenzende auf eine von h' umschlossene, im allgemeinen ebenfalls punktierte Halbkugel. In diesem Falle können wir t *zunächst* mittels einer beliebig kleinen, alle Punkte von h' invariant lassenden stetigen Modifizierung in solcher Weise umformen, dass T eine einfach verzweigte Riemannsche Abbildung mit lauter, nicht nur in β, sondern auch in π, verschiedenen Verzweigungspunkten wird, und sodann mittels einer weiteren stetigen Abänderung in eine normalisierte Transformation überführen. *Mithin gehören auch alle kanonischen Transformationen n^{ten} Grades zur selben Klasse.*

Eine beliebige Transformation erster Art lässt sich aber durch stetige Modifizierung in die kanonische Form bringen: um dies zu bewerkstelligen, formen wir sie zunächst so um, dass h' ein Grosskreis und eineindeutiges Bild von h wird und wenden sodann unter Invarianz aller Punkte von h' die in der fünften Mitteilung über diesen Gegenstand erörterte Abänderungsmethode an, welche hier nur dahin zu ergänzen ist, dass a. a. O. S. 355 oben unter den Gebieten g_ν auch ein durch h begrenztes Gebiet g_{ν_h} auftritt, das für $a^{(\nu)}$ nicht nirgends dicht abgebildet wird, während wir mittels einer beliebig kleinen stetigen Modifizierung von $a^{(\nu)}$ erreichen können, dass kein weiterer Teil der Grenze von g_{ν_h} mit h zusammenhängt und dass das Bild von g_{ν_h} keine auf h' gelegenen Verzweigungspunkte aufweist; weiter tritt nebst den a.a.O. S. 359 und 360 unterschiedenen Gebieten erster, zweiter und dritter Art noch *ein einziges Gebiet vierter Art* auf, das eine der von h' umschlossenen Halbkugeln eineindeutig und stetig, entweder positiv oder negativ, überdeckt, während das a. a. O. im vierten Absatz von S. 359 angegebene Verfahren eventuell auch zu verwenden ist, um ein Gebiet zweiter bzw. dritter Art mit einem angrenzenden negativen bzw. positiven Gebiete vierter Art zu einem positiven bzw. negativen Gebiete vierter Art zu vereinigen. *Mithin gehören alle Transformationen erster Art n^{ten} Grades zur selben Klasse.*

§ 2. *Die Transformationsklassen zweiter Art.*

Sei wieder T eine der beiden durch t bestimmten Abbildungen von $G + h$ auf die zweiseitige Verdoppelung β von π und G' bzw. h' das Bild von G bzw. h für T, so wird β von einer willkürlichen simplizialen Approximierung von G' entweder überall mit einem geraden oder überall mit einem ungeraden Grade überdeckt. Im ersteren Falle werden wir t eine *gerade*, im letzteren Falle eine *ungerade Transformation zweiter Art* nennen. Die Transformationen einer Transformationsklasse zweiter Art sind offenbar entweder alle gerade, oder alle ungerade.

Sei θ die Fläche vom Zusammenhange der Kugel, welche aus π durch Identifizierung aller Punkte von k erhalten wird. Wir werden t eine *in k kontrahierte Transformation* nennen, wenn k' sich auf einen einzigen Punkt reduziert und zwar insbesondere eine *einfache in k kontrahierte Transformation,* wenn β für T von θ entweder mit dem Grade 0 oder mit dem Grade 1 überdeckt wird. Alsdann folgt aus dem Resultate der fünften Mitteilung über diesen Gegenstand unmittelbar, dass *alle einfachen in k kontrahierten Transformationen derselben Parität zur selben Klasse gehören.*

Eine beliebige Transformation t zweiter Art lässt sich aber durch stetige Modifizierung in die Form einer einfachen in k kontrahierten Transformation bringen: um dies zu bewerkstelligen, formen wir sie zunächst in eine in k kontrahierte Transformation um, wobei also h' sich auf einen einzigen Punkt P reduziert und β für T' von θ mit einem gewissen Grade m überdeckt wird, und modifizieren sodann t in solcher Weise weiter, dass h' der Reihe nach alle Lagen von zweimal durchlaufenen, durch P und den Gegenpunkt Q von P als Pole bestimmten Breitekreisen erhält, und sich schliesslich in Q zusammenzieht. In diesem Augenblicke wird β für T von θ entweder mit dem Grade $m+2$ oder mit dem Grade $m-2$ überdeckt: durch geeignete Einrichtung des Verfahrens können wir dafür sorgen, dass ein beliebig gewählter dieser beiden Werte erreicht wird. Hieraus folgt, dass wir durch passende Wiederholung desselben Prozesses t in eine einfache in k kontrahierte Transformation überführen können. *Mithin gehören alle Transformationen zweiter Art derselben Parität zur selben Klasse.*

§ 3. *Die Minimalzahlen der Fixpunkte.*

Weil einer eindeutigen stetigen Transformation von π in sich zwei eindeutige stetige Transformationen von β in sich entsprechen, welche nicht beide den Grad -1 besitzen, mithin nicht beide fixpunktfrei sein können[1]), so *besitzt eine eindeutige stetige Transformation der projektiven Ebene π in sich wenigstens einen Fixpunkt.*

Dass andrerseits *für keine Transformationsklasse von π die Minimalzahl der Fixpunkte mehr als 1 beträgt*[2]), erhellt aus der folgenden Transformation erster Art n^{ten} Grades:

$$\left\{\begin{aligned} tg\,\psi' &= tg\,\psi + cos\,\varphi \\ \varphi' &= (2n+1)\,\varphi, \end{aligned}\right.$$

wo mit φ und ψ Länge und Breite auf β bezeichnet werden, und aus der folgenden geraden bzw. ungeraden Transformation zweiter Art:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi' &= \varphi \\ \omega' &= 0 \text{ bzw. } \omega' = 2\omega, \end{aligned}\right.$$

wo mit φ und ω Länge und Polabstand auf β bezeichnet werden.

1) Vgl. Math. Annalen 71, S. 114.

2) Wegen der Beantwortung der analogen Frage für die Kugel und die beiden Ringflächen vgl. meine demnächst im Anschluss an einen Aufsatz von J. Nielsen in Math. Annalen 81 erscheinende Notiz: „*Ueber die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringflächen*".