Mathematics. — "*Sur les ensembles clairsemés.*" By Prof. ARNAUD DENJOY. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of March 27, 1920).

Selon une définition que j'ai proposée, (Journal de Math. pures et appliquées, 1916), je dis qu'un ensemble est *clairsemé* quand il est *non dense sur tout ensemble parfait.*

Soit E un ensemble quelconque, E_1 l'ensemble des points de E qui sont limites à E. Soit α un nombre ordinal quelconque. Si α est de première espèce, soit E_α l'ensemble des points de $E_{\alpha-1}$ qui sont limites à $E_{\alpha-1}$. Si α est de seconde espèce, soit E_α l'ensemble des points communs à tous les E_α, de rang inférieur à α. Chacun des E_α contient tous les ensembles suivants. Je dis que tous les E_α sont nuls ou coïncident à partir d'un certain rang de α.

En effet $E_{\alpha+1}$ est l'ensemble commun à E_α et à son dérivé E'_α. Donc l'ensemble E'_α contenant $E_{\alpha+1}$, contient tous les ensembles E_λ d'indices λ supérieurs à α. Comme E'_α est fermé, E'_α contient tous les ensembles E'_λ si $\lambda > \alpha$. Donc, d'après un théorème connu, il existe un rang β tel que $E'_{\beta'} > E'_\beta$, si $\beta' < \beta$, et tel que $E'_\beta = E'_{\beta+1} = \ldots$ E_λ étant situé dans E'_α pour $\lambda > \alpha$, E'_λ est situé dans le dérivé E''_α de E'_α. Donc, si E'_β n'est pas nul, E'_β est parfait, puisqu'il coïncide avec un ensemble $E'_{\beta+1}$ contenu dans son dérivé E''_β. Dans ce cas, $E_{\beta+1}$, situé sur E'_β et ayant pour dérivé E'_β lui-même, $E_{\beta+1}$ est partout dense sur E'_β. $E_{\beta+1}$, que nous désignons par F, est *dense en lui-même* et a pour dérivé l'ensemble parfait E'_β ou P.

Si E'_β est nul, E_β a un nombre limité de points, ou est nul. En tous cas, $E_{\beta+1}$ est nul.

Soit P_0 un ensemble parfait sur lequel E est partout dense, et H l'ensemble commun à P_0 et à E. H est dans E_1 et, de proche en proche, dans E_α quelque soit α, donc dans $E_{\beta+1}$, donc, le dérivé de H, soit P_0, est dans P, dérivé de $E_{\beta+1}$. Si donc $E_{\beta+1}$ est nul, E est non dense sur tout ensemble parfait. Si $E_{\beta+1}$ n'est pas nul, soit G l'ensemble des points de E qui ne font pas partie de F. L'ensemble G_α est contenu dans E_α quelque soit α. Donc, $G_{\beta+1}$ est dans $E_{\beta+1}$, donc dans F, mais $G_{\beta+1}$ est aussi dans G. Comme G est distinct de F, $G_{\beta+1}$ est nul. Donc. G est *clairsemé.*

Tout ensemble est donc la réunion d'un ensemble dense en lui-même *et d'un ensemble clairsemé*, proposition dont on trouvera une autre démonstration dans le mémoire rappelé plus haut.

Il nous sera commode, avant d'aller pour loin, de considérer la famille d'ensembles fermés K_α ainsi définie. Si α est de première espèce, K_α est identique à $E'_{\alpha-1}$. Si α est de seconde espèce, K_α est l'ensemble commun à tous les ensembles $K_{\alpha'}$ d'indice α' inférieur à α.

Nous désignons la totalité de l'espace par K_0, et E facultativement par E_0. Je dis que *E_α est l'ensemble commun à E et à K_α.*

Pour $\alpha = 1$, K_1 est le dérivé de E_0, ensemble identique à E, et E_1 est bien l'ensemble commun à E et à K_1. Supposons la proposition vraie pour $\alpha' < \alpha$, et montrons-la pour α. Si α est de première espèce, alors par définition, d'une part K_α est le dérivé de $E_{\alpha-1}$, d'autre part, E_α est l'ensemble commun à $E_{\alpha-1}$ et à son dérivé, donc à $E_{\alpha-1}$ et à $K_{\alpha-1}$. Or, par hypothèse, $E_{\alpha-1}$ est l'ensemble commun à E et à $K_{\alpha-1}$. Donc, E_α est l'ensemble commun à E, à $K_{\alpha-1}$ et à K_α. K_α étant le dérivé de $E_{\alpha-1}$, contenu par hypothèse dans l'ensemble fermé $K_{\alpha-1}$, K_α est contenu dans $K_{\alpha-1}$. Donc, E_α est l'ensemble commun à E et à K_α.

Si α est de seconde espèce, E_α est par définition l'ensemble commun à tous les $E_{\alpha'}$ d'indices inférieurs à α, donc d'après notre hypothèse, E_α est l'ensemble commun à E et à tous les $K_{\alpha'}$; donc, à E et à K_α, si K_α est l'ensemble commun aux $K_{\alpha'}$. La propriété est donc démontrée dans tous les cas.

Dans le cas où $E'_{\beta'}$ existe, pour $\beta' < \beta$, avec $E'_\beta = 0$, alors $K_{\beta'+1}$ existe et $K_{\beta+1}$ est nul. Si β est de première espèce, faisons $\beta' = \beta - 1$. K_β existe. Si β est de seconde espèce, comme tous les $K_{\beta'}$ existent, il en est de même de K_β. Donc si E est clairsemé, il existe un nombre β tel que K_β existe, E possédant sur K_β un nombre fini ou nul de points.

Nous allons donner une propriété caractéristique des ensembles clairsemés, propriété qui montrera le parti qu'ils offrent dans les applications à la théorie des fonctions.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit possible d'affecter à chaque point M d'un ensemble E, un ensemble propre $I(M)$ auquel M soit intérieur, de manière qu'aucun point de l'espace ne soit intérieur à une infinité d'ensembles $I(M)$, est que l'ensemble E soit clairsemé.*

1° La condition est nécessaire. En effet, si E n'est pas clairsemé, il contient un ensemble dense en lui-même F. Soit P le dérivé de F. P est parfait. Tout point M_0 de F est intérieur à un ensemble $I(M_0)$. On sait alors qu'il existe un ensemble R partout dense sur

P et dont chaque point est intérieur à une infinité de $I(M_0)$ (voir le mémoire cité plus haut). Le complémentaire de R relativement à P est formé par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P. R est ce que j'ai proposé d'appeler un *résiduel* de P. La condition énoncée est donc nécessaire.

2°. La condition est suffisante. Supposons que E soit clairsemé. E est donc dénombrable. Car, l'ensemble Q des points au voisinage desquels un ensemble D est non dénombrable, est parfait, et D est partout dense sur Q. Cela posé, nous envisageons pour un point quelconque M de E, deux sortes de rangs. D'abord, E étant dénombrable, nous pouvons attribuer à M un rang entier propre n. D'autre part, dans la suite des ensembles E_α, formée comme il a été expliqué, considérons ceux de ces ensembles qui ne contiennent pas M. L'un d'eux a un rang inférieur à tous les autres, soit γ ce rang. γ ne peut pas être un nombre de seconde espèce. Car M, étant situé dans $E_{\gamma'}$, quelque soit $\gamma' < \gamma$, serait dans E_γ, si γ était de seconde espèce. On peut donc poser $\gamma = \delta + 1$. M est dans E_δ, mais non pas dans $E_{\delta+1}$. Donc, M est dans E_δ mais n'en est pas point limite. M est un point isolé de E_δ. Cela étant, $\varphi(n)$ étant une fonction quelconque de n tendant vers 0 quand n croît, nous prenons pour $I(M)$ un intervalle ou cercle ou sphère,... ayant pour centre M et un rayon $r(M)$ inférieur d'une part à $\varphi(n)$, d'autre part à la distance de M à $E'_\delta = K_{\delta+1}$.

Je dis qu'un point quelconque N de l'espace n'est intérieur qu'à un nombre limité d'ensembles $I(M)$. En effet, si N était intérieur à une infinité de tels ensembles $I(M)$, soient $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(p)}, \ldots$ les centres de ces ensembles, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p, \ldots$ les ordres analogues à δ correspondant à ces divers points, $n_1, n_2, \ldots n_p, \ldots$ leurs rangs dans le premier classement des M en série unilinéaire, et enfin r_p le rayon de $I[M^{(p)}]$. Puisque les n_p sont distincts, n_p croît indéfiniment avec p, donc $r_p < \varphi(n_p)$ tend vers 0, donc N est point limite des $M^{(p)}$.

Parmi les nombres transfinis δ_p, il y en a au moins un, soit δ, auquel nul autre n'est inférieur. On a $\delta_p \geqslant \delta$ pour toute valeur de p, l'égalité étant réalisée pour au moins une valeur de p. Donc, au moins un point M_δ de E_δ est dans la suite $M^{(p)}$. D'ailleurs E_δ contient E_{δ_p}, donc $M^{(p)}$, quelque soit p. Donc, N est un point limite de E_δ. Mais ceci est impossible, puisque $I(M_\delta)$ contiendrait N et que, par hypothèse $I(M_\delta)$ ne contient aucun point de E'_δ. La condition est donc suffisante.

Soit H un ensemble fermé. Supposons d'abord que H n'ait pas de point commun avec $K_1 = E'$. Alors, il n'y a évidemment qu'un nombre fini d'ensembles $I(M)$ contenant à leur intérieur au moins un point de H. On voit en effet comme ci-dessus, que si ces points étaient en infinité, chacun de leurs points limites serait sur H, puisqu'il n'y a qu'un nombre limité d'ensembles $I(M)$ dont le rayon surpasse un nombre positif donné. Si donc H est distinct de E' dérivé de E, nous aboutissons à une contradiction.

Plus généralement, *si l'ensemble fermé H est situé sur K_α et s'il n'a pas de point commun avec $K_{\alpha+1}$, il n'existe qu'un nombre limité d'ensembles $I(M)$ contenant à leur intérieur au moins un point de H.* En effet, si $\beta < \alpha$, à tout point M de E_β correspond un ensemble $I(M)$ sans points communs avec H, puisque $I(M)$ n'a pas de point commun avec $E'_\beta = K_{\beta+1}$, qui contient K_α et par suite H. Donc, les seuls points M dont les ensembles $I(M)$ peuvent contenir au moins un point de H sont les points M de E_α. Comme H est sans point commun avec $K_{\alpha+1}$ dérivé de E_α, nous sommes ramenés au premier cas. L'extension du théorème est démontrée.

Voici une application de la proposition ci-dessus à la théorie des fonctions. Désignons par $f(M)$ une fonction des coordonnées $x, y, \ldots u$ d'un point M de l'espace, et par $f(M-M_0)$ la fonction $f(x-x_0, y-y_0, \ldots, u-u_0)$. Soit $f_n(M)$ *une fonction bornée à l'extérieur de toute sphère ayant pour centre l'origine* 0 *des coordonnées, et telle que* $|f_n(M)|$ *croît indéfiniment quand M tend indifféremment vers* 0 (sans coïncider avec 0). Alors:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des coefficients α_n indépendants de M et tels que la série $\alpha_n f_n(M-M_n)$ soit partout convergente, est que l'ensemble M_n soit clairsemé.

La condition est nécessaire. En effet, si l'ensemble E des points H_n n'est pas clairsemé, supposons donnée une suite quelconque de coefficients α_n. D'après $lim\,|f_n(M)| = \infty$ quand M tend indifféremment vers 0, n restant invariable, il existe une sphère ayant son centre à l'origine et en tout point de laquelle $|f_n(M)| > \dfrac{1}{|\alpha_n|}$. Soit r'_n le rayon de cette sphère. Entourons M_n d'une sphère I'_n de rayon r'_n. L'ensemble M_n n'étant pas clairsemé, il y a des points de l'espace intérieurs à une infinité de sphères I'_n. Pour chacun de ces points N, la série $\alpha_n f_n(N-M_n)$ est divergente comme ayant une infinité de termes supérieurs à 1 en valeur absolue.

La condition est suffisante. En effet, si E est clairsemé, nous pouvons autour de M_n décrire une sphère I_n de centre M_n et de rayon r_n telle que tout point de l'espace ne soit intérieur qu'à un nombre fini de sphères I_n. Soit, hors de la sphère de centre 0 et de rayon r_n, μ_n le maximum de $|f_n(M)|$. μ_n existe, puisque par hypothèse $|f_n(M)|$ est borné à l'extérieur de toute sphère ayant son centre à l'origine. Soit a_n un nombre quelconque inférieur en module à $\frac{1}{n^2 \mu_n}$. La série $a_n f_n(M-M_n)$ converge en tout point M, comme n'ayant qu'un nombre limité de termes supérieurs en module aux termes de même rangs de la série $\frac{1}{n^2}$.

On montre aisément que *la série* $a_n f_n(M-M_n)$ *converge uniformément sur tout ensemble fermé* H *sans points communs avec* E' *ou plus généralement* sur tout ensemble fermé *contenu dans* K_α *et n'ayant aucun point commun avec* $K_{\alpha+1}$. En effet, il n'y a qu'un nombre limité d'ensembles I_n contenant des points d'un tel ensemble H. Donc, à partir d'un certain rang N, le n^e terme de la série est inférieur à $\frac{1}{n^2}$ en tous les points de H, quelque soit $n > N$.

Supposons que $f_n(M)$ *soit la somme d'une série*

$$u_{n\,1}(M) + u_{n\,2}(M) + \dots + u_{n\,p}(M) + \dots$$

uniformément convergente et à termes bornés (*chacun séparément*) *à l'extérieur de toute sphère ayant son centre à l'origine.* Alors, à l'extérieur d'une telle sphère ayant le rayon r_n défini plus haut, les sommes

$$u_{n\,p}(M) + u_{n\;p+1}(M) + \dots + u_{n.q}(M)$$

sont, indépendamment de p, de q et de M, bornées en module par un même nombre λ_n. (en particulier, avec $q=p$, $|u_{n.p}(M)| < \lambda_n$). Soit a_n un nombre de module inférieur à $\frac{1}{n^2 \lambda_n}$. Je dis qu'*en ajoutant par colonnes les séries* $a_n f_n(M-M_n)$, *nous obtenons une série*

$$w_1(M) + w_2(M) + \dots + w_p(M) + \dots,$$

convergente en tout point M. En effet, on a:

$$w_p(M) = a_1 u_{1.p}(M-M_1) + a_2 u_{2.p}(M-M_2) + \dots + a_n u_{n.p}(M-M_n) + \dots$$

La série $w_p(M)$ est convergente puisque, M n'étant intérieur qu'à un nombre limité de sphères I_n, la série $w_p(M)$ n'a qu'un nombre limité de termes supérieurs en valeur absolue à l'inverse du carré de leur rang.

Soit ε un nombre positif. Nous voulons prouver que, M étant choisi, il est possible de déterminer N_0 de façon que $|w_{p+1}(M) + \dots + w_{p+q}(M)| < \varepsilon$ quelque soit $p > N_0$, et quelque soit q.

Cette relation s'écrit:

$$\left|\alpha_1 \sum_{m=p+1}^{m=p+q} u_{1\,m}(M-M_1)+\alpha_2 \sum_{m=p+1}^{m=p+q} u_{2\,m}(M-M_2)+\dots+\alpha_n \sum_{m=p+1}^{m=p+q} u_{n\,m}(M-M_n)+\dots\right|<\varepsilon.$$

Nous allons même montrer que l'on peut résoudre par $p>N_1$ inégalité

$$\left|\alpha_1 \sum_{m=p+1}^{m=p+q} u_{1,m}(M-M_1)\right|+\dots+\left|\alpha_n \sum_{m=p+1}^{m=p+q} u_{n\,m}(M-M_n)\right|+\dots<\varepsilon. \quad (1)$$

Nous divisons les termes de la série du premier membre de (1) en trois catégories.

1° M étant intérieur à un nombre limité (ou nul) de sphères $I(M_n)$, soient $M_{n_1}, M_{n_2}, \dots, M_{n_h}$ les centres de ces sphères. Puisque les séries

$$\sum_{p=1}^{\infty} u_{n_1\,p}(M-M_{n_1}),\quad \sum_{p=1}^{\infty} u_{n_2.p}(M-M_{n_2}),\ \dots,\ \sum_{p=1}^{\infty} u_{n_h\,p}(M-M_{n_h})$$

sont convergentes au point M, nous pouvons déterminer N_1 de façon que, si $p>N_1$,

$$|u_{n_i,p+1}(M-M_{n_i})+u_{n_i,p+2}(M-M_{n_i})+\dots+u_{n_i,p+q}(M-M_{n_i})|<\frac{\varepsilon}{3h|\alpha_n|}$$

pour $i=1,2,\dots,h$, quelque soit q. Les termes $\left|\alpha_{n_i} \sum_{n=p+1}^{i=p+q} u_{n_i\,m}(M-M_{n_i})\right|$ ont alors une somme inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$.

2° Soit N' un entier supérieur a $\frac{3}{\varepsilon}$. La série $\sum_{N'+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a une somme inférieure à $\frac{1}{N'}$, donc à $\frac{\varepsilon}{3}$. Tous les termes de la série (1) de rangs supérieurs à N' et différents des n_i, ont donc une somme inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$.

3° La série $\sum_{m=1}^{m\infty} u_{n\,m}(M)$ étant uniformément convergente pour n fixe et M variable avec dist. $OM>r_n$, nous pouvons déterminer un nombre $N_{2\,n}$ tel que, si

$$p>N_{2\,n}, \text{ on a } \left|\sum_{m=p+1}^{m=p+q} u_{n.m}(M)\right|<\frac{\varepsilon}{9}\,|\lambda_n|.$$

Donnons à n les valeurs $1, 2, \dots, N'$ distinctes des n_i, les $N_{2\,n}$ ont une valeur maximum N_2. D'après $n \neq n_i$, M est extérieur à la sphère I_n de centre M_n et de rayon r_n. Si

$$p>N_2, \text{ on a } \left|\alpha_n \sum_{m=p+1}^{m=p+q} u_{n.m}(M-M_n)\right|<\frac{\varepsilon}{9n^2}.$$

Donc, la somme des termes correspondants à $n \neq n_1$, $n \leqslant N'$ est inférieure, si $p > N_2$, à $\frac{\varepsilon}{9}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\varepsilon}{9}\cdot\frac{\pi^2}{6} < \frac{\varepsilon}{3}$. Donc, si N_0 est le plus grand des deux nombres N_1 et N_2, la condition $p > N_0$ entraîne:

$$|w_{p+1}(M) + \ldots + w_{p+q}(M)| < \varepsilon,$$

quelque soit q. La série $w_p(M)$ est donc partout convergente.

Application. *$\varphi(n)$ étant une fonction positive de l'entier n, jamais croissante,* la série

$$\varphi(1)\sin\theta + \varphi(2)\sin 2\theta + \ldots + \varphi(n)\sin n\theta + \ldots,$$

est convergente quelque soit θ. Soit $f(\theta)$ sa somme. $\theta f(\theta)$ tend vers 0 avec θ. Si la série $n\varphi(n)$ est divergente, $f(\theta)$ n'est pas sommable et $|f(\theta)|$ croit indéfiniment avec $\frac{1}{|\theta|}$. Soient θ_n une suite de valeurs de θ situées sur le segment $(-\pi, +\pi)$ et y formant un *ensemble clairsemé* quelconque.

Il existe alors une suite de nombres positifs ω_n tels que, si $|\alpha_n| < \omega_n$, la série

$$\varphi(1)\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin(\theta-\theta_m) + \ldots + \varphi(n)\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin n(\theta-\theta_m) + \ldots$$

est convergente quelque soit θ. Soit $\Gamma(\theta)$ sa somme.

J'ai défini sous le nom de totalisation un procédé d'intégration de certaines fonctions non sommables. La première condition remplie par les fonctions totalisables, — savoir que l'ensemble H des points d'un ensemble parfait P au voisinage desquels la fonction est non sommable sur P, H est non dense sur P, — cette condition est remplie par toutes les fonctions limites de fonctions continues, puisque, celles-ci étant ponctuellement discontinues, l'ensemble K des points de P au voisinage desquels l'une d'elles est non bornée sur P, K est non dense sur P. K contient évidemment H.

A toute fonction limite de fonctions continues, on peut donc faire correspondre une suite d'ensembles parfaits $P_1, P_2, \ldots, P_\alpha, \ldots$, correspondants aux divers nombres ordinaux des classes I et II. Par définition, si α est de première espèce, P_α est le noyau parfait de l'ensemble fermé constitué par les points de $P_{\alpha-1}$ au voisinage desquels f est non sommable sur $P_{\alpha-1}$. Si α est de seconde espèce, P_α est le plus grand ensemble parfait commun à tous les $P_{\alpha'}$ quand $\alpha' < \alpha$. Si Q_α est l'ensemble des points de P_α au voisinage desquels P_α est de mesure positive (ou épais), $P_{\alpha+1}$ est l'ensemble des points de Q_α au voisinage desquels f est non sommable sur Q_α. Donc, $P_{\alpha+1}$ est non dense sur Q_α et *a fortiori* sur P_α. Donc, tous les P_α sont nuls à partir d'un certain rang,

Etant donnée inversement une suite quelconque d'ensembles parfaits P_α, telle que 1°. P_α soit contenu dans l'ensemble Q_α des points oú P_α est épais, et soit non dense sur Q_α, et que, 2°. si α est de seconde espèce, P_α soit le plus grand ensemble parfait commun à tous les $P_{\alpha'}$ si $\alpha' < \alpha$, il est curieux de constater qu'il est possible de former une série trigonométrique convergente $\Gamma(\theta)$ telle que l'ensemble des points de non sommabilité de $\Gamma(\theta)$ sur le continu ait pour dérivé d'ordre Ω, précisément P_1 et que la suite d'ensembles parfaits relative à $\Gamma(\theta)$ et déterminée par la première opération du calcul totalisant, soit précisément la suite P_α.

En effet, considérons l'ensemble E formé de la réunion des ensembles F_α suivants. F_1 est constitué par les milieux des intervalles contigus à P_1. Pour F_α, nous considérons les intervalles contigus à $P_{\alpha+1}$. Parmi ces intervalles contigus, désignons par i_α ceux qui contiennent des points de Q_α. Puisque $P_{\alpha+1}$, situé sur Q_α, est non dense sur Q_α, tout point de $P_{\alpha+1}$ est limite d'intervalles i_α. Or, sur chaque intervalle i_α, Q_α a une mesure positive, puisque Q_α possède cette propriété au voisinage de chacun de ses points, et qu'il en existe dans i_α. Soit, dans chaque i_α, un point N_α où l'épaisseur de Q_α est égale à 1. La réunion de tous les N_α, pour une valeur donnée de α est un ensemble F_α situé sur Q_α, et possédant un point et un seul dans chacun des contigus i_α de $P_{\alpha+1}$. F_α a pour dérivé $P_{\alpha+1}$. E sera par définition l'ensemble de tous les F_α.

Il est aisé de voir que l'ensemble E_α est formé par tous les F_λ de rangs supérieurs ou égal à α.

E est donc clairsemé puisque, P_α étant nul à partir d'une certaine valeur de α, il en est de même des F et par suite aussi de E_α.

Formons avec les points M_n ou θ_n de E la série trigonométrique $\Gamma(\theta)$ définie plus haut. Pour un segment σ_1 sans points communs avec $F_1 + P_1$, donc situé à une distance positive de E, il n'existe qu'un nombre limité d'intervalles I_n empiétant sur σ_1. La série $\alpha_n f(\theta-\theta_n)$ est donc uniformément convergente sur σ_1. Donc elle est continue et par suite sommable sur σ_1.

Si σ_1 contient un point N_1 et nul point de P_1, soit p le rang du point N_1 dans la suite θ_n. $\Gamma(\theta) - \alpha_p f(\theta-\theta_p)$, est continue sur σ_1. Comme $f(\theta-\theta_p)$ est non sommable autour de θ_p, Γ est non sommable sur σ_1. Donc, les N_1 sont les seuls points de non-sommabilité étrangers à P_1. Comme l'ensemble des points de non-sommabilité est ferme, et que le dérivé des N_1 est P_1, cet ensemble est $\Sigma N_1 + P_1$.

Donc, le premier ensemble parfait dont la considération s'introduit par la première opération du calcul totalisant est P_1.

De même sur tout portion ϖ_α de P_α intérieure à un contigu de $P_{\alpha+1}$, la série $a_n f(\theta-\theta_n)$ est uniformément convergente. ϖ_α est un ensemble parfait qui possède au plus un point de E. Toutes les fonctions $a_n f(\theta-\theta_n)$ sauf une au plus sont sommables sur ϖ_α et leur série est uniformément convergente sur ϖ_α. Donc, f est sommable sur ϖ_α si ϖ_α ne contient aucun point N_α. Si ϖ_α contient un point N_α de E, f est ou non sommable sur ϖ_α en même temps que $f(\theta-\theta_p)$ si p est le rang de N_α dans la suite θ_n. L'épaisseur de Q_α en N_α est 1. Il en résultera généralement et en particulier si $\varphi(n) = \frac{1}{Ln}$, que $f(\theta-\theta_p)$ n'est pas sommable en θ_p. Donc, l'ensemble des points de non-sommabilité de f sur P_α est formé, en dehors de $P_{\alpha+1}$, par F_α. Comme le dérivé de F_α est $P_{\alpha+1}$, la suite d'ensembles parfaits P_α est donc celle que détermine la première opération de la totalisation pour la somme de la série trigonométrique $\Gamma(\theta)$.