Mathematics. — "*Nouvelle démonstration du théorème de* JORDAN *sur les courbes planes*". By Prof. ARNAUD DENJOY. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated in the meeting of June 29, 1918).

Le théorème fondamental de JORDAN sur les courbes fermées peut s'énoncer ainsi:

Si les points d'un ensemble Γ et ceux d'un cercle se correspondent réciproquement et continument, chacun à chacun, l'ensemble Γ divise le plan en deux régions.

L'hypothèse faite sur Γ caractérise une *courbe* de JORDAN. Je me propose dans cette Note de donner une démonstration du théorème ci-dessus énoncé. Je rappellerai d'abord certaines définitions et résultats connus.

Nous caractérisons comme il suit les *côtés positif et négatif en un point I d'une ligne HIK* formée de deux segments de droite HI, IK, dont I est le seul point commun. Décrivons, dans le sens direct des rotations, un arc circulaire inférieur à 2π, de centre I, ayant son origine sur IK et son extrémité sur HI. Cet arc borne, avec HI et IK, un secteur de cercle ω. Soit L un ensemble continu, tel que, à l'intérieur d'un certain cercle c de centre I et de rayon inférieur à celui de ω, L et HIK aient seulement I en commun. Nous dirons que, au voisinage de I, L est situé du côté positif de la ligne HIK (ou du côté négatif de la ligne KIH) si les points de L intérieurs à c et distincts de I sont tous dans ω.

Il est aisé de voir que, *si IK' est du côté positif de HIK, IK est du côté négatif de HIK'.*

Si I est un point non extrême d'une ligne brisée λ simple (c'est-à-dire telle qu' un point quelconque de la ligne n'appartient à deux côtés différents que si ce point est origine de l'un et extrémité de l'autre), pour définir les côtés positif et négatif de λ en I, nous considérons un secteur de cercle analogue à ω, limité au côté (ou aux deux côtés) de λ contenant I, et ne rencontrant aucun autre côté de λ.

Soit P un polygone simple, défini avec son sens de parcours. On montre (voir *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1911) que P divise le plan en deux régions (nous les appelons respectivement positive et négative, et les désignons par $P+$ et $P-$), telles que tout continu joignant un de leurs points M au polygone P, atteint celui-ci du côté positif pour $P+$, du côté négatif pour $P-$. A et B étant deux points de P, la ligne brisée décrite en parcourant P selon son sens, de A à B est *l'arc direct* AB de P. *L'arc rétrograde* AB est géométriquement identique à l'arc direct BA, mais les sens de parcours des deux arcs sont opposés.

Pour démontrer le théorème de M. JORDAN, nous utiliserons le lemme suivant:

Si, en parcourant une fois un polygone P dans un sens invariable, on rencontre successivement les quatre points A, B, C, D de ce polygone, et si (AC), (BD) sont deux continus joignant respectivement A à C, B à D, et dont tous les points, sauf A, B, C, D, sont dans une même région limitée par le polygone, ces deux continus ont au moins un point commun.

Supposons d'abord que (AC) soit une ligne brisée simple. On peut toujours choisir le sens positif de parcours de P, de façon que la région de P contenant (AC) et (BD), sauf leurs extrémités, soit $P+$.

Considérons alors le polygone π formé de l'arc direct CA de P, et de la ligne (AC) parcourue de A vers C. (AC) atteignant P en A et C du côté positif, l'arc direct AC de P s'écarte de π du côté négatif en A et C. Donc, D qui est sur cet arc est dans $\pi-$. Mais, P et π ayant en commun l'arc CA qui contient B, les côtés positifs de P et de π au voisinage de B coïncident. Donc le continu (BD) est, au voisinage de B, dans $\pi+$. On en déduit que (BD) rencontre π en un point différent de B. Comme (BD) ne rencontre pas l'arc CA, (BD) rencontre (AC).

Supposons que ni (AC) ni (BD) ne soient des lignes brisées simples. Si ces continus n'ont pas de points communs, leur distance minimum est un nombre positif α. On remplace le continu (AC) par une ligne brisée simple λ d'extrémités A et C, située, sauf pour ces deux points, dans $P+$ comme l'est (AC), et ayant tous ses points à une distance de (AC) inférieure à α. D'après la première partie de la démonstration, λ rencontre (BD). Nous aboutissons donc à une contradiction. Donc (AC) et (BD) se rencontrent dans tous les cas.

Nous déduirons de ce lemme une proposition essentielle.

Soit Γ une courbe de JORDAN et O la circonférence de cercle correspondant ponctuellement à Γ. Si un point décrit O dans le sens direct, nous dirons que le point homologue de Γ décrit Γ dans le sens positif. On échange le sens positif de parcours de Γ en transformant le cercle O en lui-même par une symétrie par rapport à un de ses diamètres. Cela posé, *Si A, B, C, D sont quatre points d'un polygone simple P, et A', B', C', D' quatre points d'une courbe de* Jordan *Γ ne rencontrant pas P, si (AA'), (BB'), (CC'), (DD') sont quatre continus deux à deux distincts contenant respectivement les points mis en évidence dans leurs désignations et n'en ayant aucun autre de commun avec P ni avec Γ, l'ordre des quatre points A', B', C', D' sur la courbe Γ, et celui de A, B, C, D sur P, l'une et l'autre parcourus dans le sens positif, sont identiques ou inverses.*

On voit sans peine qu'en échangeant entre elles, s'il en est besoin, les dénominations des couples associés A et A', etc., et aussi en modifiant le sens positif de Γ, la proposition serait en défaut dans le cas unique où, A, B, C, D étant rencontrés sur P dans leur ordre d'énonciation, on rencontrerait sur Γ successivement A', C', B', D'. Mais alors le continu (AC) formé de (AA'), de (CC') et de l'arc direct $A'C'$ de Γ, ne rencontrerait pas le continu (BD) formé de (BB'), de (DD') et de l'arc direct $B'D'$ de Γ. Or ces deux continus sont, à l'exception de leurs extrémités A, B, C, D l'un et l'autre dans la région de P contenant Γ. C.q. f. d.

Rappelons maintenant que si l'on forme une subdivision du plan en carrés égaux (γ) par deux familles de droites respectivement parallèles à deux directions rectangulaires, et, si l'on considère les ensembles formés par les carrés ne contenant, ni intérieurement ni sur leur contour, nul point d'un continu E, ces ensembles forment des domaines (réunion d'un continuum et de sa frontière; un continuum est un ensemble connexe dont tous les points lui sont intérieurs) dont chacun est limité par un polygone simple appelé *polygone d'approximation de E, relatif au quadrillage* (γ) Le sens positif d'un tel polygone π sera défini par la condition que E soit dans $\pi-$.

Tout point H de π est situé sur l'un (ou sur deux) des côtés d'un (ou de deux ou de trois) carré γ dont l'intérieur appartient à $\pi-$ et qui contient, intérieurement ou sur son contour, au moins un point de E. L'un de ces points-ci H', est tel que la distance HH' est minimum. Les points non extrêmes du segment HH' sont situés dans $\pi-$ et étrangers à E. D'ailleurs HH' est au plus égal à la diagonale de γ.

Cela étant, soient M et N deux points, distincts ou non, appartenant à une même région limitée par Γ, et P, Q deux points de Γ tels que les segments MP, NQ aient en commun 1° avec Γ, uniquement les points respectifs P et Q, 2° entre eux, éventuellement et seulement certains de leurs points extrêmes (donc si M coïncide avec N, P est distinct de Q et inversement). M et N peuvent être joints par une ligne simple λ dont tous les points sont distincts de

Γ. Soit 4α un nombre inférieur à la distance de λ á Γ, et à la distance rectiligne PQ. ε étant moindre que α, considérons dans un quadrillage de côté ε le polygone π d'approximation de Γ, dont la région positive contient M et N. A partir de P et de Q, les segments PM, QN rencontrent π aux premiers points respectifs M_1 et N_1. Soit ϑ la plus grande des deux longueurs $M_1 P$ et $N_1 Q$. ϑ tend vers zéro avec ε. Si $\vartheta + \varepsilon < \alpha$, sur chacun des arcs directs $M_1 N_1$, $N_1 M_1$ de π, il existe des sommets, respectivement H, K, tels que les segments HH', KK' les joignant à leurs correspondants définis plus haut, ne coupent ni $M_1 P$ ni $N_1 Q$. Alors, d'après le lemme, H' et K' sont séparés sur Γ par P et par Q.

Cela posé, à un sommet H de l'arc direct $M_1 N_1$ de π; faisons correspondre P ou Q ou H', selon que HH' rencontre $M_1 P$ ou $M_1 Q$, ou ni l'un ni l'autre de ces segments. Alors, á la suite des sommets de l'arc $M_1 N_1$ correspond une suite de points de Γ, tels que la distance de chacun d'eux au suivant est inférieure à $2\vartheta + 5\varepsilon$. Tous ces points sont sur un même arc PQ de Γ, puisqu' aucun d'eux n'est sur l'arc PQ contenant K'.

De même, sur ce dernier arc, nous pouvons former entre P et Q une chaîne de points, telle que la distance de chacun d'eux au suivant soit inférieure à $2\vartheta + 5\varepsilon$, chacun de ces points étant d'ailleurs distant de moins de 2ε d'un sommet de π. Nous déduisons de là les deux corollaires suivants:

1° *Toute région limitée par Γ admet pour frontière la totalité de Γ.*

Car la région contenant M et N admet pour frontière chacun des deux arcs PQ de Γ.

2° *M et N étant dans une même région de Γ, P et Q étant sur Γ et les segments MP et NQ étant sans points non extrêmes communs, ni avec Γ, ni entre eux; quel que soit le nombre positif η, il est possible de trouver deux lignes brisées λ, λ' dont tous les points sont étrangers à Γ et situés à une distance inférieure à η, respectivement de l'arc direct PQ et de l'arc direct QP de Γ, les extrémités de chacune des deux lignes λ, λ' étant, l'une sur MP, l'autre sur NQ.*

En particulier, si M, N et l'un des arcs PQ sont intérieurs à un cercle c, on peut joindre M à N par une ligne brisée ne rencontrant pas Γ et intérieure à c.

De ces corollaires nous tirons les propositions suivantes:

1° *Toute courbe de* JORDAN *admettant un arc rectiligne divise le plan en deux régions.*

En effet, soit I le milieu de l'arc rectiligne direct HK appartenant à Γ et ω un cercle de centre I ne contenant aucun point de l'arc KH de Γ. Le diamètre HK divise ω en deux demi-cercles

ω_1 et ω_2. L'intérieur de ω_1 fait partie d'une même région r_1 limitée par Γ. De même l'intérieur de ω_2 appartient à une même région r_2 limitée par Γ. D'ailleurs, toute région limitée par Γ admet I pour point frontière, donc possède des points dans ω, donc dans ω_1 ou dans ω_2. Elle coïncide donc avec r_1 ou avec r_2.

Je dis que r_1 et r_2 sont distincts. Sinon, soient α_1 et α_2 deux points symétriques par rapport à I, et respectivement intérieurs à ω_1 et à ω_2. S'il était possible de joindre α_1 à α_2 par une ligne brisée simple λ ne rencontrant pas Γ, on pourrait choisir λ sans points communs avec le segment $\alpha_2\alpha_1$ en dehors de ses points extrêmes, et en ajoutant à λ le segment $\alpha_2\alpha_1$, on obtiendrait un polygone fermé ϖ. Le segment HK et le côté $\alpha_1\alpha_2$ de ϖ se coupent en leur milieu I. D'ailleurs HK ne rencontre plus ϖ. Donc, H et K sont dans deux régions différentes de ϖ. Donc, l'arc direct KH de Γ rencontre ϖ, et comme cet arc ne rencontre pas le segment $\alpha_1\alpha_2$, il rencontre λ, ce qui est contraire à l'hypothèse. La proposition est donc démontrée.

2° *Toute courbe de* JORDAN *divise le plan en deux régions.*

Soit J un point quelconque de Γ. Soit c un cercle de centre J et laissant à son extérieur un point K_0 de Γ. Il existe un cercle c' concentrique et intérieur à c, tel que, si P est un point de Γ intérieur à c', l'un des deux arcs PJ de Γ est intérieur à c. La même propriété est dès lors vérifiée pour l'un des deux arcs PQ, si P et Q sont à la fois sur Γ et dans c'.

Il est possible d'entourer K_0 d'un cercle c'' extérieur à c et tel que, si α et β sont deux points de Γ intérieurs à c'', l'un des deux arcs $\alpha\beta$ de Γ est extérieur à c. Le segment $\alpha\beta$ rencontre en général Γ en d'autres points que α et β, peut-être même en une infinité de points. Ceux-ci forment sur le segment $\alpha\beta$ un ensemble fermé. Soit HK un intervalle contigu à cet ensemble. Le segment HK est une corde de Γ. Ses extrémités seules font partie de Γ. L'un des deux arcs HK de Γ est extérieur à c. L'autre contient J. On peut, quitte à échanger les dénominations de H et de K, supposer que ce dernier arc est l'arc direct KH de Γ.

Soit Γ_1 la courbe de JORDAN obtenue en ajoutant à l'arc direct KH de Γ, le segment rectiligne HK. Dans c, Γ et Γ_1 coïncident, puisque ces deux courbes diffèrent uniquement par leurs arcs directs HK, l'un et l'autre extérieurs à c.

Γ_1 divise le plan en deux régions admettant l'une et l'autre J pour point frontière. Soient M et N deux points appartenant respectivement à ces deux régions et contenus dans c'. Joignons M et N à J. Soient, à partir de M et de N respectivement, P et Q les deux premiers points de rencontre obtenus avec Γ. Les segments

9

MP, NQ étant intérieurs à c', où Γ et Γ_1 coïncident, P et Q sont sur Γ_1 et les segments MP, NQ n'ont avec Γ_1 d'autres points communs que P et Q. MP et NQ n'ont pas de points communs entre eux, sauf éventuellement P et Q, si ces points coïncident avec J.

Je dis que tout point S étranger à Γ peut être joint à M ou à N par une ligne brisée ne rencontrant pas Γ. En effet, d'après le premier corollaire, S peut être joint à un point T intérieur à c' et étranger à Γ. T est, relativement à Γ_1, dans la même région que M ou que N. Soit R le premier point de rencontre à partir de T, du segment TJ avec Γ (et avec Γ_1, puisque TJ est dans c'). En vertu du second corollaire, on peut joindre T à M (ou T à N) par une ligne brisée $TT_1\,M_1\,M$ (ou $TT_1\,N_1N$) étrangère à Γ_1, et intérieure à c, puisque c contient les segments MP, NQ, TR, l'un des deux arcs PR et l'un des deux arcs QR. Comme l'arc direct HK de Γ ne pénètre pas dans c, la même ligne brisée est sans points communs avec Γ. Donc, Γ divise le plan en deux régions au plus.

D'ailleurs, M et N sont dans deux régions différentes de Γ, sinon on pourrait joindre M à N par une ligne brisée étrangère à Γ et située dans c. Donc, cette même ligne ne rencontrerait pas Γ_1, et par suite M et N seraient dans la même région de Γ_1, ce qui est faux par hypothèse.

Donc, Γ divise le plan en deux régions et deux seulement. Le théorème de Jordan est donc démontré. Nous avons au surplus obtenu un procédé pour définir le côté positif de Γ en un point J. On se donne c. On en déduit c', puis une corde HK de Γ, telle que ni cette corde, ni l'arc direct HK ne rencontrent c. La courbe formée par l'arc direct KH de Γ suivi de la corde HK, limite une région contenant le côté positif de la corde HK. Les points de cette région situés dans c' définissent le côté positif de Γ en J.

On montre sans difficulté que ce côté est indépendant de la corde auxiliaire choisie HK, et que les côtés positifs de Γ en tous ses points appartiennent à une même région limitée par Γ et que l'on peut appeler région positive de Γ.