Physics. — "*Le tenseur gravifique*". By TH. DE DONDER. (Communicated by Prof. H. A. LORENTZ).

(Communicated in the meeting of June 30, 1918).

Dans une note parue dans ce recueil [1]), j'ai obtenu un tenseur gravifique $t_{\lambda\mu}$ répondant à toutes les exigences de la relativité générale.

Au cours de ses recherches sur le champ gravifique, M. LORENTZ [2]) a trouvé le même tenseur gravifique.

Dans ce travail, nous donnons *explicitement* la valeur du tenseur gravifique $t_{\lambda\mu}$, et nous en déduisons la valeur explicite du tenseur $t_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu}$; on remarquera que dans celui ci *tous les termes de* $t_{\lambda\mu}$ *renfermant des dérivées secondes des potentiels gravifiques ont disparu.*

Nous montrons ensuite que dans tout champ gravifique et électromagnétique, la *force généralisée* F_λ $(\lambda = 1, 2, 3, 4)$ *est nulle.* Ce résultat est obtenu aussi au moyen de l'identité de HILBERT; les F_λ sont encore nuls dans tout champ gravifique renfermant de la matière; ce résultat est indépendant du tenseur gravifique choisi.

Dans le chapitre suivant, nous étudions divers tenseurs gravifiques, et nous indiquons une correction à effectuer sur le tenseur gravifique d'EINSTEIN [3]).

Etant donnée l'importance du champ gravifique d'EINSTEIN—SCHWARZSCHILD, nous avons cru utile de calculer le $t_{\lambda\mu}$ relatif à ce champ.

Nous montrons ensuite que $\sum\limits_{\lambda} t_{\lambda\lambda}$ est indépendant des dérivées secondes des potentiels gravifiques.

Enfin, il résulte de la covariance de $t_{\lambda\mu}$, que celui-ci est *cogrédient* au tenseur électromagnétique $T_{\lambda\mu}$ pour tout changement *linéaire* des variables x_1, x_2, x_3, x_4.

I. *Valeur explicite du tenseur gravifique* $t_{\lambda\mu}$.

Rappelons tout d'abord la valeur de ce tenseur gravifique:

---

[1]) TH. DE DONDER. Verslag Koninkl. Akad. v. Wetenschappen. Amsterdam. Deel XXV. 27 Mei 1916.

[2]) H. A. LORENTZ. Verslag Koninkl. Akad. v. Wetenschappen. Amsterdam. Deel XXV. 24 Juni 1916.

[3]) A. EINSTEIN. Sitzungsberichte Akad. d. Wissenschaften. Berlin. 26 Oktober 1916

$$t_{\lambda\mu} \equiv \varepsilon_{\lambda\mu}\, l - \sum_{\overline{ab}} \left[\left(\frac{dl}{dg_{ab,\mu}} - \frac{1}{2} \sum_i \frac{d(1+\varepsilon_{\mu i}) \dfrac{dl}{dg_{ab,\mu i}}}{dx_i} \right) g_{ab,\lambda} + \right. \left. + \frac{1}{2} \sum_i (1+\varepsilon_{\mu i}) \frac{dl}{dg_{ab,\mu i}} g_{ab,\lambda i} \right] \quad . \quad (1)$$

où

$$l \equiv kC\,(-g)^{1/2}$$

$$C \equiv \frac{1}{2} \sum_i \sum_m \sum_j \sum_l g^{jl} g^{im} (ij, lm) ;$$

C est l'invariant de courbure totale de Riemann relatif à la forme quadratique différentielle:

$$\sum_i \sum_k g_{ik}\, dx_i\, dx_k . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

On a aussi posé:

$$g_{ab,\mu} \equiv \frac{dg_{ab}}{dx_\mu} \quad , \quad g_{ab,\mu i} \equiv \frac{d^2 g_{ab}}{dx_\mu dx_i} .$$

D'autre part, on a: $\varepsilon_{\lambda\lambda} \equiv 1$, $\varepsilon_{\lambda\mu} \equiv 0$ $(\lambda \neq \mu)$; $\sum\limits_{\overline{ab}}$ indique une sommation étendue aux 10 combinaisons avec répétition des nombres 1, 2, 3, 4 pris 2 à 2.

En dérivant l par rapport aux $g_{ab,\mu}$ et en permutant les indices, on obtient le résultat suivant:

$$\frac{dl}{dg_{ab,\mu}} = k(-g)^{1/2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{ab}}{2}\right) \sum_h \sum_l \sum_\alpha \begin{bmatrix} h\ l \\ \alpha \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} g^{a\alpha} (g^{\mu b} g^{lh} - g^{lb} g^{h\mu}) \\ + g^{b\alpha} (g^{\mu a} g^{lh} - g^{l\mu} g^{ha}) \\ - g^{\mu\alpha} (g^{ab} g^{lh} - g^{la} g^{hb}) \end{array} \right\} .$$

En dérivant de même l par rapport aux $g_{ab,\mu i}$ et en réduisant les termes semblables, on obtient:

$$\frac{dl}{dg_{ab,\mu i}} = k(-g)^{1/2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{i\mu}}{2}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_{ab}}{2}\right) (2g^{i\mu} g^{ab} - g^{a\mu} g^{bi} - g^{b\mu} g^{ai}).$$

Substituons ces expressions dans (1), et utilisons la formule:

$$\frac{d(-g)^{1/2}}{dx_i} = \frac{1}{2} (-g)^{1/2} \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,i} = - \frac{1}{2} (-g)^{1/2} \sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta,i} .$$

Après quelques réductions obtenues en permutant les indices, on a enfin:

$$\left. \begin{array}{l} t_{\lambda\mu} = \varepsilon_{\lambda\mu} l + \dfrac{k}{4} (-g)^{\frac{1}{2}} \sum\limits_a \sum\limits_b \sum\limits_i \sum\limits_h \sum\limits_\alpha \left[2g^{ah,h} g^{\mu b} - g^{ab,h} g^{h\mu} + g_{hi,\alpha} g^{a\alpha} g^{\mu b} g^{hi} \right] g_{ab,\lambda} - \\ \qquad - \dfrac{k}{2} (-g)^{\frac{1}{2}} \sum\limits_a \sum\limits_b \sum\limits_i \left[g^{\mu i} g^{ab} - g^{a\mu} g^{bi} \right] g_{ab,\lambda i} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Cette expression de $t_{\lambda\mu}$ se simplifie encore en vertu de l'équation complémentaire $l = 0$.

II. *Valeur explicite du tenseur* $t_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu}$.

Rappelons la valeur du *tenseur électromagnétique*[1]:

$$T_{\lambda\mu} = \sum_i (1 + \varepsilon_{\lambda i})\, g^{\mu i} \diamondsuit^{\lambda i}\, l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

Mais en vertu de *l'identité*[1]:

$$(1 + \varepsilon_{\lambda i}) \diamondsuit^{\lambda i}\, l \equiv k(-g)^{1/2} \sum_h \sum_l g^{hl} (ih, l\lambda) - k(-g)^{1/2}\, C g_{\lambda i}\,.$$

l'expression (4) peut s'écrire:

$$T_{\lambda\mu} = -\varepsilon_{\lambda\mu} l + k(-g)^{1/2} \sum_h \sum_l \sum_i g^{\mu i} g^{hl}\, (ih, l\lambda) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

Rappelons aussi que la parenthèse à 4 indices de CHRISTOFFEL a la valeur suivante:

$$(ih, l\lambda) \equiv \tfrac{1}{2}(g_{i\lambda,hl} - g_{h\lambda,il} - g_{il,h\lambda} + g_{hl,i\lambda}) + \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} \left(\begin{bmatrix} h\ l \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\ i \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h\ \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\ i \\ \beta \end{bmatrix} \right).$$

Retournons maintenant à la valeur de $t_{\lambda\mu}$ et utilisons la formule:

$$g^{ab,h} = -\sum_\sigma \sum_\tau g_{\sigma\tau,h}\, g^{\sigma a}\, g^{\tau b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

Rapprochons la valeur de $t_{\lambda\mu}$ ainsi obtenue (3,6), et la valeur de $T_{\lambda\mu}$ (5): *tous les termes de $t_{\lambda\mu}$ renfermant des dérivées secondes des potentiels gravifiques se retrouvent, changés de signe, dans le tenseur électromagnétique $T_{\lambda\mu}$.*

Après quelques réductions provenant de permutations d'indices, on trouve enfin:

$$t_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2} k(-g)^{1/2} \sum_h \sum_l \sum_i \left\{ \begin{array}{l} g_{i\lambda,hl}[g^{\mu i} g^{hl} - g^{\mu h} g^{il}] \\ + \tfrac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta g_{\beta i,\mu}\, g_{h\lambda,\alpha} \left[\begin{array}{r} 2g^{\lambda\alpha}(g^{ih} g^{\beta l} - g^{lh} g^{\beta i}) \\ + 2g^{\lambda i}(g^{lh} g^{\alpha\beta} - g^{\beta h} g^{\alpha l}) \\ + 2g^{\lambda h}(g^{\alpha l} g^{\beta i} - g^{\alpha i} g^{\beta l}) \end{array} \right] \end{array} \right\} \qquad (7)$$

III. *La force généralisée F_λ est nulle.*

La force généralisée F_λ $(\lambda = 1, 2, 3, 4)$ satisfait aux relations suivantes[2]:

$$(-g)^{1/2} F_\lambda = \sum \frac{d(t_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu})}{dx_\mu}\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4.$$

---

[1]) TH. DE DONDER. Archives du Musée Teyler. Sér. 2. T. III. 1917 (voir spéc. pages 94 et 99).

[2]) TH. DE DONDER. Voir ma note citée ci-dessus; équations (10).

Voir aussi mon mémoire, Archives Teyler, Haarlem 1917; équations (347).

Substituons dans (8) les valeurs trouvées (7) pour le tenseur $t_{\nu\mu} + T_{\nu\mu}$. Après dérivation et permutations d'indices, on voit que tous les termes se détruisent deux à deux; on aura donc:

$$F_\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Ce résultat est indépendant de l'expression choisie pour le tenseur gravifique $t_{\lambda\rho}$. C'est ce que nous allons démontrer au moyen de *l'identité de* HILBERT [1]), qui peut s'écrire avec nos notations:

$$\tfrac{1}{2} \sum_\rho \sum_\nu (1+\varepsilon_{\rho\nu})\, g^{\rho\nu,\sigma} \Diamond^{\rho\nu} l \equiv - \sum_\rho \sum_\nu \frac{d}{dx_\nu} \{(1+\varepsilon_{\rho\sigma})\, g^{\rho\nu} \Diamond^{\rho\sigma} l\} \quad . \quad . \quad (10)$$

En vertu du principe généralisé de HAMILTON, les équations différentielles gravifiques sont [2]):

$$\Diamond^{\mu\nu}(L+l) = 0$$

ou

$$\frac{dL}{dg^{\mu\nu}} = - \Diamond^{\mu\nu} l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Or, on a [3]):

$$\Diamond^{\mu\nu} L \equiv \frac{dL}{dg^{\mu\nu}} = \left(\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2} - 1\right) \sum_k g_{\mu k}\, T_{\nu k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

d'où, en vertu de (11):

$$\Diamond^{\mu\nu} l = \left(1 - \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2}\right) \sum_k g_{\mu k}\, T_{\nu k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

et inversement:

$$T_{\sigma\nu} = \sum_\rho (1+\varepsilon_{\rho\sigma})\, g^{\rho\nu} \Diamond^{\rho\sigma} l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

En vertu de (11), le premier membre de l'identité de HILBERT (10) peut s'écrire:

$$-\left(\frac{dL}{dx_\sigma}\right)_M .$$

D'autre part, en vertu de (14), le second membre de cette identité (10) peut s'écrire:

$$-\sum_\nu \frac{dT_{\sigma\nu}}{dx_\nu} .$$

On a donc:

---

[1]) D. HILBERT. Nachrichten Königl. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen. Math. phys. Klasse. Heft 3. 1915. (Berlin 1916).

[2]) TH. DE DONDER. Archives Teyler, Haarlem 1917. (Voir équation 339).

[3]) Voir équation (353) de mon mémoire, Archives Teyler.

$$K_\sigma \equiv \left(\frac{dL}{dx_\sigma}\right)_M = \sum_\nu \frac{dT_{\sigma\nu}}{dx_\nu}.$$

Or, en vertu de (346) [1]:

$$(-g)^{1/2} F_\sigma + K_\sigma = \sum_\nu \frac{dT_{\sigma\nu}}{dx_\nu}$$

d'où

$$F_\sigma = 0, \qquad \sigma = 1, 2, 3, 4.$$

Remarquons que tout ce qui précède peut être généralisé immédiatement en remplaçant l par une fonction covariante plus générale, par exemple: $l - \frac{1}{4}\varrho(-g)^{1/2}$, où ϱ est une fonction de x_1, x_2, x_3, x_4; on obtiendrait ainsi nos équations généralisées [2]) du champ gravifique renfermant des masses.

IV. *Autres tenseurs gravifiques.*

Les seize fonctions $t_{\lambda\mu}$ dont l'ensemble constitue le tenseur gravifique ne devant, jusqu'à présent, satisfaire qu'aux quatre équations aux dérivées partielles [3]):

$$\sum_\mu \frac{dt_{\lambda\mu}}{dx_\mu} = -K_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, 3, 4,$$

il en résulte qu'il existe une infinité de tenseurs gravifiques différents. Le développement ultérieur de la théorie de la gravitation montrera probablement que le tenseur gravifique doit être déterminé d'une manière *univoque* par des conditions aux limites et des conditions initiales.

En se reportant aux relations (341 à 345) de mon mémoire [4]) (Archives TEYLER), on verra aisément que les seize fonctions suivantes:

$$t^{\lambda\mu} \equiv \varepsilon_{\lambda\mu}\, l - \sum_{ab}\left[\left(\frac{dl}{dg^{ab,\mu}} - \frac{1}{2}\sum_\iota \frac{d(1+\varepsilon_{\mu\iota})\frac{dl}{dg^{ab,\mu\iota}}}{dx_\iota}\right) g^{ab,\lambda} + \frac{1}{2}\sum_\iota (1+\varepsilon_{\mu\iota})\frac{dl}{dg^{ab,\mu\iota}}\, g^{ab,\lambda\iota}\right] \quad (15)$$

déterminent un tenseur gravifique.

---

[1]) Voir équation (346) de mon mémoire, Archives Teyler.
[2]) Voir la dernière page de mon mémoire, Archives Teyler.
[3]) Voir équation (344) de mon mémoire, Archives Teyler.
[4]) Voir aussi notations (348 à 352) de ce mémoire.

Grâce à la théorie des invariants différentiels, ou par un calcul direct, on trouvera que:

$$t^{\lambda\mu} = t_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2}(-g)^{1/2} \sum_{\alpha}\sum_{\sigma}\sum_{\iota} g_{\sigma\kappa\lambda} \begin{bmatrix} g^{\iota\mu}\left(g^{\sigma\alpha,\mu} - 2g^{\sigma\alpha,i} + g^{\sigma\alpha,\alpha}\right) \\ -g^{\alpha\iota}\left(g^{\sigma\mu,\mu} - g^{\sigma\mu,\iota}\right) \end{bmatrix} . \quad (16)$$

On remarquera que ces deux tenseurs gravifiques renferment les mêmes dérivées secondes des potentiels gravifiques. On aura en outre:

$$\sum_{\mu} \frac{d(t^{\lambda\mu} - t_{\lambda\mu})}{dx_{\mu}} = 0.$$

En vertu de nos équations (8) et (9), on pourra introduire *le tenseur gravifique* $-T_{\lambda\mu}$; M. LORENTZ [1]) a rencontré ce tenseur gravifique au cours de ses recherches. Quand on adopte le tenseur gravifique de M. LORENTZ, le *tenseur* $t_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu}$ *est identiquement nul.*

Plus récemment, M. EINSTEIN [2]) a trouvé un tenseur gravifique qui ne renferme aucune dérivée seconde des potentiels gravifiques. Nous allons indiquer une méthode nouvelle pour obtenir ce tenseur gravifique (corrigé).

L'invariant de courbure totale de RIEMANN peut s'écrire:

$$C \equiv \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} (\alpha\beta, \sigma\tau)\, g^{\beta\sigma} g^{\alpha\tau}$$

$$\equiv \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} g^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \dfrac{d \begin{Bmatrix} \alpha\sigma \\ \sigma \end{Bmatrix}}{dx_\beta} - \dfrac{d \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{Bmatrix}}{dx_\sigma} \\ + \begin{Bmatrix} \beta\tau \\ \sigma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \tau \end{Bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Il en résulte que $l \equiv kC(-g)^{1/2}$ peut s'écrire:

$$l \equiv \tfrac{1}{2}\, k \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} \left[\frac{d}{dx_\beta}\left((-g)^{1/2} \begin{Bmatrix} \alpha\sigma \\ \sigma \end{Bmatrix} g^{\alpha\beta} \right) - \frac{d}{dx_\sigma}\left((-g)^{1/2} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{Bmatrix} g^{\alpha\beta} \right) \right] + l^* \quad (17)$$

où nous avons posé: [3])

$$l^* \equiv \tfrac{1}{2}\, k \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} \begin{bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha\sigma \\ \sigma \end{Bmatrix} \dfrac{d}{dx_\beta} \left[(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta}\right] + \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{Bmatrix} \dfrac{d}{dx_\sigma} \left[(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta}\right] \\ + (-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \beta\tau \\ \sigma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{Bmatrix} - (-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \tau \end{Bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

On vérifiera, par un calcul direct, que *le lagrangien* $\Diamond^{ab}$ *d'une*

---

[1]) H. A. LORENTZ. Voir la dernière page du mémoire cité. (Verslag Amsterdam 1916).

[2]) A. EINSTEIN. Sitzungsberichte Akad. der Wissenschaften Berlin (Séance du 26 octobre 1916).

[3]) Les termes qui figurent dans la première ligne du second membre de (18) ont été omis par M. EINSTEIN.

dérivée partielle par rapport à une des variables x_1, x_2, x_3, x_4, d'une fonction quelconque de ces variables et des potentiels gravifiques est identiquement nul.

Par conséquent (17, 18):

$$\Diamond^{ab}\, l = \Diamond^{ab}\, l^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Posons maintenant [1]):

$$t_1{}^{\lambda\mu} \equiv \varepsilon_{\lambda\mu}\, l^* - \sum_{\overline{ab}} \frac{dl^*}{dg^{ab,\mu}}\, g^{ab,\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

On aura [2]):

$$\sum_{\mu} \frac{dt_1{}^{\lambda\mu}}{dx_\mu} = \sum_{\overline{ab}} \left(\Diamond^{ab}\, l^*\right) g^{ab,\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

ou, en vertu de (19):

$$\sum_{\mu} \frac{dt_1{}^{\lambda\mu}}{dx_\mu} = \sum_{\overline{ab}} \left(\Diamond^{ab}\, l\right) g^{ab,\lambda}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

ou, à cause de (339) ainsi que de (343. 344) (voir mon mémoire, Archives TEYLER):

$$\sum_{\mu} \frac{dt_1{}^{\lambda\mu}}{dx_\mu} = - K_\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

On aura encore (voir fin du paragraphe III):

$$\sum_{\mu} \frac{d(T_{\lambda\mu} + t_1{}^{\lambda\mu})}{dx_\mu} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

On pourrait construire aussi le tenseur gravifique:

$$t^1{}_{\lambda\mu} \equiv \varepsilon_{\lambda\mu}\, l^* - \sum_{\overline{ab}} \frac{dl^*}{dg_{ab,\mu}}\, g_{ab,\lambda}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

et un calcul simple montrerait que $t^1{}_{\lambda\mu} = t_1{}^{\lambda\mu}$.

IV. *Champ gravifique d'*EINSTEIN—SCHWARZSCHILD.

On sait que les potentiels gravifiques du champ d'EINSTEIN—SCHWARZSCHILD [3]) peuvent s'écrire:

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &\equiv - R^{-3}\, (R-\alpha)^{-1} \\ g_{22} &\equiv - R^2\, (1-x_2{}^2)^{-1} \\ g_{33} &\equiv - R^2\, (1-x_2{}^2) \\ g_{44} &\equiv R^{-1}\, (R-\alpha) \\ g_{\lambda\mu} &\equiv 0 \text{ où } \lambda, \mu = 1, 2, 3, 4, \text{ et } \lambda \neq \mu \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

[1]) Comme à l'équation (341) de mon mémoire, Archives Teyler.

[2]) Comme à l'équation (342) de mon mémoire, Archives Teyler.

[3]) K. SCHARZSCHILD. Sitzungsberichte Akademie d. Wissenschaften Berlin (Séance du 3 février 1916). Voir spécialement pages 191 et 194.

On a posé:

$$R \equiv (3x_1 + a^3)^{\frac{1}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Rappelons enfin que a représente une constante.

En substituant les valeurs (26) et (27) dans (3), on obtient, après de nombreuses réductions, le résultat suivant: *tous les* $t_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4)$ *sont nuls, sauf* t_{22} *qui vaut* $-R^{-2}$.

Les calculs se trouvent grandement simplifiés si l'on remarque que g se réduit à -1 dans le champ considéré.

En dérivant ce déterminant par rapport à x_i et x_λ, on obtient la relation:

$$\sum_a \sum_b g^{ab} g_{ab,i\lambda} = -\sum_a \sum_b g^{ab,i} g_{ab,\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Grâce à (28), le tenseur gravifique (3) pourra s'écrire:

$$t_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2} \sum_a \sum_b \sum_i \{[g^{ai,i} g^{\mu b} + \tfrac{1}{2} g^{ab,i} g^{\mu i}] g_{ab,\lambda} + g^{a\mu} g^{bi} g_{ab,\lambda i}\} \quad . \quad (29)$$

Pour s'assurer si le tenseur $t'_{\lambda\mu}$ d'Einstein est différent du tenseur $t_{\lambda\mu}$, il suffira de calculer t'_{33}, par exemple, relatif au champ d'Einstein-Schwarzschild: tous calculs faits, on trouve (25) que $t'_{33} = l^* = kR^{-2}$. Or t_{33} est nul; donc, *ces deux tenseurs sont différents*.

VI. *Valeur explicite de* $\sum_\lambda t_{\lambda\lambda}$.

En vertu de (3) et (6), on obtient, en permutant les indices[1]:

$$\sum_\lambda t_{\lambda\lambda} = 4l - \frac{k}{4} (-g)^{1/2} \sum g_{kh,qi} (g^{kh} g^{qi} - g^{ki} g^{qh}) +$$

$$+ \frac{k}{4} (-g)^{1/2} \sum g_{q\alpha,i} g_{h\beta,k} (-2g^{\alpha\beta} g^{qi} g^{kh} + g^{\alpha\beta} g^{ki} g^{qh} + g^{\alpha k} g^{qi} g^{\beta h}).$$

Cette expression se simplifie considérablement si l'on remarque que l'invariant de courbure C peut s'écrire:

$$C \equiv \tfrac{1}{2} \sum g_{kh,qi} (g^{kh} g^{qi} - g^{ki} g^{qh}) +$$

$$+ \tfrac{1}{8} \sum g_{q\alpha,i} g_{h\beta,k} \begin{pmatrix} 4g^{\alpha\beta} g^{qi} g^{kh} - 3g^{\alpha\beta} g^{ki} g^{qh} \\ -2g^{\alpha k} g^{qi} g^{\beta h} + 2g^{\alpha k} g^{\beta q} g^{ih} - 2g^{i\beta} g^{q\alpha} g^{kh} \\ + g^{ik} g^{q\alpha} g^{\beta h} \end{pmatrix} . \quad (30)$$

Si l'on se rappelle la signification de l (voir § I), on trouvera immédiatement, grâce à (30), que:

$$\sum_\lambda t_{\lambda\lambda} = 3l + \frac{k}{8} (-g)^{1/2} \sum g_{q\alpha,i} g_{h\beta,k} \begin{pmatrix} - g^{\alpha\beta} g^{ki} g^{qh} \\ + g^{q\alpha} g^{ki} g^{\beta h} \\ + 2g^{k\alpha} g^{hi} g^{\beta q} \\ - 2g^{q\alpha} g^{hi} g^{\beta k} \end{pmatrix} \quad . \quad . \quad (31)$$

[1]) Dans les formules qui suivent, le signe Σ represente *des sommes séparées* portant respectivement sur les valeurs 1, 2, 3, 4 de tous les indices qui suivent.

En vertu de l'équation complémentaire $l = 0$, on voit (30) que $\sum_{\lambda} t_{\lambda\lambda}$ est une *forme quadratique des dérivées premières seules.*

VII. *Covariance du tenseur gravifique* $t_{\lambda\mu}$.

Effectuons un changement *quelconque* des variables x_1, x_2, x_3, x_4, et représentons par x'_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les nouvelles variables. Le tenseur gravifique prendra une nouvelle valeur $t'_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4)$ fournie par la relation (1) où toutes les lettres auront été, au préalable, affectées *d'un accent.*

Rappelons que [1]:

$$l' = l \frac{\partial(x_1 \ldots x_4)}{\partial(x'_1 \ldots x'_4)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

Grâce à cette relation (32), il sera aisé de comparer $t'_{\lambda\mu}$ à $t_{\lambda\mu}$; de cette comparaison, il résulte que pour tout changement *linéaire* des variables x_1, x_2, x_3, x_4, on aura:

$$t'_{\lambda\mu} = \frac{\partial(x_1 \ldots x_4)}{\partial(x'_1 \ldots x'_4)} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\lambda} \cdot \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\tau} \cdot t_{\sigma\tau};$$

autrement dit, pour tout changement *linéaire* des variables x_1, x_2, x_3, x_4, le tenseur gravifique $t_{\lambda\mu}$ est *cogrédient* au tenseur électromagnétique [2] $T_{\lambda\mu}$.

Il n'en est plus de même pour un changement *quelconque* de variables [3]. Un fait analogue se présente pour les forces généralisées [4] F_λ et K_λ: la force généralisée gravifique K_λ n'est *cogrédiente* à la force généralisée électromagnétique F_λ que pour les changements *linéaires* des variables x_1, x_2, x_3, x_4.

Le 30 avril 1918.

---

[1]) Voir équation (364) de mon mémoire, Archives TEYLER.

[2]) Voir l'equation (319) de mon mémoire, Archives TEYLER.

[3]) M. LORENTZ, avait déjà fait remarquer que $t_{\lambda\mu}$ n'est pas cogrédient à $T_{\lambda\mu}$ dans le cas d'un changement quelconque de variables (Verslag Amsterdam, 24 Juni 1916).

[4]) Voir les équations (321) et (323) de mon mémoire, Archives TEYLER.