Mathematics. — "*Ueber die Teilkörper des Kreiskörpers* $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$". (Erster Teil). By Dr. N. G. W. H. BEEGER. (Communicated by Prof. W. KAPTEYN).

(Communicated in the meeting of September 28, 1918).

Der Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist die Untersuchung aller Teilkorper des Kreiskörpers $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$ (l eine ungerade Primzahl), und namentlich die Bestimmung ihrer Klassenanzahlen. Ich benütze dabei die Definitionen und Notationen des HILBERT'schen "Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper" [1]).

KUMMER giebt, ohne Ableitung, die Formel für die Klassenanzahl aller Teilkörper des Kreiskörpers $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l}}\right)$ [2]) (l prim).

Die Klassenanzahlen aller Teilkörper des Kreiskörpers $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$ sind bis jetzt noch nicht berechnet worden; und weil im allgemeinen die ganze Ableitung der endgultigen Ausdrücke der Klassenanzahl nur publicirt ist für den Kreiskörper $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l}}\right)$ selbst, so gebe ich hier die ganze Herleitung meiner Formeln.

§ 1. *Einige Bemerkungen über den Körper* $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$.

Dieser Körper, den ich weiter andeute durch $K(Z)$, ist ein cyclischer Körper [3]). Es sei r eine primitive Wurzel von l^h und es sei s die Substitution $(Z:Z^r)$, so wird die Substitutionsgruppe des Körpers vorgestelt durch

$$s, s^2, \ldots . s^{l^{h-1}(l-1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Primzahl l ist im Körper die $l^{h-1}(l-1)$-te Potenz eines Primideals $\mathfrak{l}$:

$$l = \mathfrak{l}^{l^{h-1}(l-1)} \quad \mathfrak{l} = (1-Z)$$

[1]) Jahresb. d. D. M. V. Band IV. Im folgenden angedeutet durch die Buchstabe H.
[2]) Crelle Journ. Band 40.
[3]) H. Satz 128.

$\mathfrak{L}$ ist ein Hauptideal ersten Grades. [1])

Satz 1.

Die Zerlegungsgruppe des Primideals $\mathfrak{L}$ ist die ganze Gruppe (1). Ebenso die Trägheitsgruppe. Die Verzweigungsgruppe ist

$$s^{l-1},\ s^{2(l-1)}, \ldots, s^{l^{h-1}(l-1)}$$

Die einmal-überstrichene Verzweigungsgruppe ist

$$s^{l(l-1)},\ s^{2l(l-1)}, \ldots\ldots s^{l^{h-2}l(l-1)}.$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Die h-mal überstrichene Verzweigungsgruppe ist

$$s^{l^{h-1}(l-1)}$$

und besteht also nur aus der identischen Substitution [2]).

Beweis: Die Zerlegungsgruppe eines Primideals besteht aus allen Substitutionen die das Primideal ungeandert lassen. Nun gilt für jede Substitution der Gruppe (1):

$$s^a\,\mathfrak{L} = s^a\,(1-Z) = (1-Z^{r^a}) = \mathfrak{L}$$

Hiermit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Die Trägheitsgruppe eines Primideals besteht aus allen Substitutionen der Zerlegungsgruppe für welche, für alle ganzen Zahlen Ω des Körpers:

$$s^a\Omega \equiv \Omega\ (mod\ \mathfrak{L}). \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Jede ganze Zahl Ω des Körpers hat die Form

$$\Omega = a_0 + a_1\,Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_{n-1}\,Z^{n-1}$$

wo $n = l^{h-1}\,(l-1)$.

Es wird also notwendig

$$s^aZ \equiv Z\ (mod\ \mathfrak{L})$$

Es ist aber

$$s^aZ - Z = Z\,(Z^{r^a-1} - 1) \equiv 0\ (mod\ \mathfrak{L})$$

Hiermit ist der zweite Teil des Satzes bewiesen.

Der Grad der Verzweigungsgruppe ist eine Potenz von l, es sei l^b und

$$h' = \frac{r_t}{r_v} = l^{h-b-1}(l-1)$$

musz ein Teiler sein von $l-1$ weil der Grad f von $\mathfrak{L}$ gleich eins ist [3]). Also ist $b = h-1$, und

---

[1]) H. Satz 120.

[2]) Dieser Satz ist Satz 129 von HILBERT; enthält aber bei HILBERT einen FEHLER.

[3]) H. Satz 71.

$$r_v = l^{h-1}$$

Nun musz noch gezeigt werden, dasz für jede ganze Zahl Ω des Körpers

$$s^{b(l-1)}\,\Omega \equiv \Omega \ (mod\ \mathfrak{L}^2).$$

Hieraus geht hervor:

$$s^{b(l-1)}\,Z \equiv Z\ (mod\ \mathfrak{L}^2)$$

Es ist $r^{b(l-1)} \equiv 1\ (mod\ l)$. Wir können daher setzen $r^{b(l-1)} = 1 + vl$ und est is also

$$s^{b(l-1)}Z - Z = Z^{r^{a(l-1)}} - Z = Z\,(Z^{vl} - 1) =$$

$$= Z\,(Z^{v} - 1)\,(Z^{v + l^{h-1}} - 1) \ \ldots\ldots\ (Z^{v + (l-1)l^{h-1}} - 1)\ \ldots\ldots \quad (3)$$

Hieraus geht hervor

$$s^{b(l-1)}\,Z - Z \equiv 0\ (mod\ \mathfrak{L}^l)$$

weil jeder Factor rechter Hand von (3) teilbar ist durch $(1 - Z) = \mathfrak{L}$. Hiermit ist der Satz der Verzweigungsgruppe bewiesen.

Wenn wir die einmal überstrichene Verzweigungsgruppe bestimmen wollen, müssen wir den grösztěn Exponenten L von $\mathfrak{L}$ bestimmen für welchen für jede Substitution der Verzweigungsgruppe gilt:

$$s^{b(l-1)}\,\Omega \equiv \Omega\ (mod\ \mathfrak{L}^L)\ ^{1)}$$

Hieraus ergibt sich

$$s^{b(l-1)}\,Z - Z \equiv 0\ (mod\ \mathfrak{L}^L).$$

und es sei $r^{b(l-1)} = 1 + vl$

Weil für die Zahlen $b = 1, 2, \ldots.\ l^{h-1}$ nicht alle Zahlen v durch l teilbar sind, kann nicht für jede Zahl b das Product aus (3) noch weiter zerlegt werden. Hieraus folgt

$$L = l.$$

Nur wenn $v \equiv 0\ (mod\ l)$ ist, so kann jeder Factor aus (3) wiederum in l-Factoren zerlegt werden. Für diese Werte von b ist also $\overline{L} = l^2$. Die einmal überstrichene Verzweigungsgruppe ist also:

$$s^{l(l-1)},\quad s^{2l(l-1)}, \ldots.\ s^{l^{h-2}l(l-1)}$$

und

$$r_{\overline{v}} = l^{h-2}$$

Die zweimal überstrichene Verzweigungsgruppe ist

$$s^{l^2(l-1)},\quad s^{2l^2(l-1)}, \ldots.\ s^{l^{h-3}l^2(l-1)}$$

und

$$r_{\overline{\overline{v}}} = l^{h-3}$$

1) H. § 44.

Wenn man auf diese Weise das Product rechter Hand von (3) weiter zerlegt, so findet man den weiteren Beweis des Satzes.

Satz 2.

Ist $\mathfrak{P}$ ein von $\mathfrak{L}$ verschiedenes Primideal von $K(Z)$, dann ist die Zerlegungsgruppe

$$s^e, \quad s^{2e}, \ldots . s^{fe}$$

wenn f der Grad des Primideals ist, und $ef = l^{h-1}(l-1)$.

Die Trägheitsgruppe besteht nur aus der identischen Substitution [1]).

Beweis: Es sei p die rationale Primzahl, die durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist. In $K(Z)$ gilt:

$$p = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots . \mathfrak{P}_e \; {}^{2})$$

wo $\mathfrak{P}_i$, e verschiedene Primideale sind. Es ist also $\mathfrak{P}$ eins dieser. Hieraus geht hervor, dass es e und nicht mehr als e Substitutionen giebt die das Ideal $\mathfrak{P}$ in ein anderes überführen. Die Zerlegungsgruppe besteht also aus f Substitutionen. Daher ist es die im Theorem angegebene Gruppe.

Es sei nun s^{ae} eine Substitution der Trägheitsgruppe, so musz für alle ganzen Zahlen Ω von $K(Z)$:

$$s^{ae}\,\Omega \equiv \Omega \; (mod\; \mathfrak{P}).$$

also

$$s^{ae}\,Z \equiv Z \; (mod\; \mathfrak{P}).$$

Es ist aber

$$s^{ae} Z - Z = Z^{r^{ae}} - Z = Z(Z-1)\,\frac{Z^{r^{ae}}-1}{Z-1}$$

Diese Zahl ist nicht teilbar durch $\mathfrak{P}$, es sei denn dasz $a = 0$ ist; denn $(1-Z) = \mathfrak{L}$ und der Bruch ist eine Einheit [3]). Die Trägheitsgruppe besteht also nur aus der identischen Substitution.

§ 2. *Die Teilkörper von* $K(Z)$.

Es ist K ein cyclischer Körper. Daher ist jede Untergruppe auch cyclisch und jeder Unterkörper ein cyclischer Körper. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir uns beschränken auf die Untersuchung Primärer Teilkörper [4]) das sind solche, die nicht zugleich Teilkörper sind eines Kreiskörpers niedrigeren Grades.

Es sei

$$s^a, \quad s^{2a}, \ldots . s^{ba} \qquad ab = l^{h-1}(l-1)$$

---

1) H. Satz 129.
2) H. Satz 122.
3) H. Beweis des Satzes. 120.
4) Weber, Algebra II pag. 77 etc. (2te Auflage).

eine Untergruppe von (1). Diese ist primär, und nur dann, wenn keine der Zahlen

$$r^a, r^{2a}, \ldots, r^{ba}$$

der Einheit congruent ist $(mod\ l^{h-1})$. Und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn a teilbar ist durch l^{h-1}. Jede primäre Untergruppe hat also die Form

$$s^{al^{h-1}}, \quad s^{2al^{h-1}}, \ldots s^{abl^{h-1}} \qquad ab = l-1$$

Den Teilkörper, der zu dieser Gruppe gehört, stelle ich weiter vor durch k.

Der *Grad der Körpers* ist al^{h-1}.

$$\eta = Z^{r^c} + Z^{r^{2c}} + \ldots + Z^{r^{bc}} \quad ; \quad c = al^{h-1}$$

ist *eine den Körper bestimmende Zahl*[1]).

Die *Substitutionen des Teilkörpers k sind*

$$s, \quad s^2, \ldots, s^c.$$

Satz 3. *Zerlegungssatz.*

Ist p eine von l verschiedene rationale Primzahl und f der kleinste positive Exponent, für welchen $p^f \equiv 1$ $(mod\ l^h)$ ausfällt, und wird $ef = l^{h-1}(l-1)$ gesetzt, so findet in k die Zerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_{\frac{ec}{v}}$$

statt, wo $\mathfrak{p}_i$ von einander verschiedene Primideale $\frac{v}{e}$-ten Grades in k sind. v ist das kleinste gemeinsame Vielfache von e und c.

Beweis: Es sei $\mathfrak{P}$ ein in p aufgehendes Primideal des Körpers $K(Z)$. Die Substitutionen, welche die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}$ gemeinsam haben mit der Untergruppe (4), sind

$$s^v, \quad s^{2v}, \ldots s^{ef} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Diese Substitutionen musz man multipliciren mit den Substitutionen der Gruppe

$$s^c, \quad s^{2c} \quad \ldots s^v$$

um die ganze Untergruppe (4) zu bekommen.

Die letzte Substitutionen gehören also nicht zu der Zerlegungsgruppe.

Die Zahlen, welche des Ideal $\mathfrak{P}$ und der Körper k gemeinsam haben, bilden ein Ideal $\mathfrak{p}$. Nehmen wir an, es sei $\mathfrak{p}$ in k kein Primideal, und in k also $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}.\mathfrak{r}$. Es wäre also in k $\mathfrak{p}$ teilbar durch $\mathfrak{q}$, und in K würde also $\mathfrak{p}\mathfrak{S} = \mathfrak{q}\mathfrak{S} . \mathfrak{r}\mathfrak{S}$ wenn $\mathfrak{S}$ das Ideal aller ganzen

[1]) Weber, pag. 85.

Zahlen von K ist. Während aber $\mathfrak{p}\mathfrak{S}$ durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist, so musz $\mathfrak{q}\mathfrak{S}$ teilbar sein durch $\mathfrak{P}$. Also würde in k_1 teilbar sein durch $\mathfrak{p}$. Hieraus würde sich ergeben $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{r} = \mathfrak{S}$ und dies ist nicht angenommen. Also ist $\mathfrak{p}$ in k ein Primideal.

Nun ist $\mathfrak{p}\mathfrak{S}$, auszer durch $\mathfrak{P}$, auch teilbar durch die Primideale

$$s^c\,\mathfrak{P},\quad s^{2c}\,\mathfrak{P}, \ldots . s^v\mathfrak{P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (6)$$

Diese sind alle von einander verschieden, weil keine der Substitutionen zu der Zerlegungsgruppe gehört. $\mathfrak{p}\mathfrak{S}$ ist also teilbar durch ihr Product. Wir werden nun zeigen, dasz $\mathfrak{p}$ durch kein anderes Primideal $\mathfrak{P}'$ teilbar ist. Nehmen wir an, dasz dies wohl der Fall sei. Es besteht eine Zahl A von K, die teilbar ist durch das Product Π der Ideale (6) aber nicht durch $\mathfrak{P}'$:

$$A = \Pi\,\mathfrak{Q}.$$

Es wäre dann

$$s^c A = s^c\Pi\,.\,s^c\mathfrak{Q} \text{ oder}$$
$$s^c A = \Pi\,.\,s^c\mathfrak{Q}$$

Es sei n_r die relativ-Norm in Beziehung zu k:

$$n_r(A) = \Pi^b\,.\,n_r(\mathfrak{Q})$$

Das erste Glied ist eine Zahl von k, die teilbar ist durch $\mathfrak{P}$, und also auch durch $\mathfrak{p}$. Das zweite Glied ist aber nicht teilbar durch $\mathfrak{P}'$ und kann also auch nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein. Dies ist unmöglich. Hieraus geht hervor, dasz $\mathfrak{p}$ durch kein anderes Primideal $\mathfrak{P}'$ teilbar ist.

Das Primideal $\mathfrak{p}$ kann weiter nicht teilbar sein durch das Quadrat eines der Primideale (6), denn in diesem Falle würde p in K auch durch ein Quadrat teilbar sein und das ist nicht der Fall. Hiermit ist der erste Zeil des Satzes bewiesen.

Um auch den Grad der Primideale zu bestimmen, bemerke man, dasz aus

$$\mathfrak{p} = s^c\,\mathfrak{P}\,.\,s^{2c}\,\mathfrak{P}\,.\ldots s^v\mathfrak{P} \text{ folgt:}$$

$$N(\mathfrak{p}\,\mathfrak{S}) = N(\mathfrak{P})^{\frac{v}{c}} = p^{\frac{fv}{c}} \text{ [1]}$$

Es ist aber $N(\mathfrak{p}\mathfrak{S}) = n(\mathfrak{p})^b$., wenn n die Norm in k vorstellt. Hieraus ergibt sich

$$n(\mathfrak{p})^b = p^{\frac{fv}{e}}$$
$$n(\mathfrak{p}) = p^{\frac{fv}{bc}} = p^{\frac{v}{e}}..$$

Satz 4. *Zerlegungssatz.*

Die Primzahl l gestattet in k die Zerlegung

1) H. Satz. 122.

$$l = \mathfrak{l}^c$$

wo $\mathfrak{l} = (1-Z)^b \mathfrak{g}$ ein Primideal ersten Grades in k ist.

Beweis:

Wir wissen, dasz in K

$$l = \mathfrak{L}^{l^{h-1}(l-1)}$$

wo $\mathfrak{L}$ ein Primideal ersten Grades ist:

$$\mathfrak{L} = (1-Z)\,\mathfrak{G}.$$

Die Zahlen welche $\mathfrak{L}$ und k gemeinsam haben bilden ein Primideal $\mathfrak{l}$. Man kann dies auf gleicher Weise beweisen wie im Satz 3. Weiter sind alle Zahlen von $\mathfrak{L}$ die in k liegen, teilbar durch

$$s^c(1-Z)\,.\,s^{2c}(1-Z)\,.\,\ldots s^{bc}(1-Z)$$

also durch $(1-Z)^b$. Hieraus ergibt sich

$$\mathfrak{l} = (1-Z)^b\mathfrak{G} = \mathfrak{L}^b$$

und weil

$$l = \mathfrak{L}^{l^{h-1}(l-1)}$$

$$l = \mathfrak{l}^c \qquad \text{wo } \mathfrak{l} = (1-Z)^b.$$

Bestimmung der Discriminante des Korpers k.

Satz 5.

Die Discriminante des Körpers ist

$$\pm\, l^{\frac{l^{h-1}(lh-h-1)-b+1}{b}}$$

Beweis:

Wir benützen die Beziehungen:

$$D = d^b n(\mathfrak{d}_r)\ ^{1)}$$

$$\mathfrak{d}_r = N_r(\mathfrak{D}_r)\ ^{2)}$$

$$\mathfrak{D}_r = \mathfrak{E}'\,.\,\mathfrak{E}''\,.\,\ldots\,.\,\mathfrak{E}^{(b-1)}\ ^{3)}$$

wo D die Discriminante von K ist, d die von k und $\mathfrak{d}_r$ die relativ-Discriminante.

Das Element

$$\mathfrak{E}^{(i)} = \left\{(Z-Z^{r^{ic}}),\ (Z^2-Z^{2r^{ic}}),\ \ldots\ldots(Z^{l^{h-1}(l-1)}-Z^{l^{h-1}(l-1)r^{ic}})\right\}.$$

Weil D eine Potenz von l ist,[4] kann die Relativ-Discriminante $\mathfrak{d}_r$ nur teilbar sein durch $\mathfrak{l}$ und die Relativ-Differente $\mathfrak{D}_r$ nur durch $\mathfrak{L}$; also auch $\mathfrak{E}^{(i)}$ nur durch $\mathfrak{L}$. Aus der Form des Elementes $\mathfrak{E}^{(i)}$ folgt,

[1]) H. Satz 39.

[2]) H Satz 38.

[3]) H. pag. 205.

[4]) H. Satz 121.

dasz alle ihre Zahlen teilbar sind durch $\mathfrak{l}$ und dasz sie nicht alle teilbar sind durch $\mathfrak{l}^2$, also

$$\mathfrak{E}^{(i)} = \mathfrak{l}$$

$$\mathfrak{D}_r = \mathfrak{l}^{b-1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{d}_r = \mathfrak{l}^{b-1}$$

$$n(\mathfrak{d}_r) = l^{b-1} \quad \pm l^{l^{h-1}(lh-h-1)} = d^{b} l^{b-1}$$

Hieraus folgt der Satz.

§ 3. *Die Klassenanzahl des Teilkörpers k.*

Satz 6.

Wenn die Zahl b gerade ist, und der Teilkorper also reell ist, so hat man fur die Klassenanzahl des Teilkorpers den Ausdruck:

$$h = \frac{\Delta}{R}$$

wo

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}(a-2)(a-3)} \begin{vmatrix} \log \varepsilon_1 & \log \varepsilon_2 \ldots\ldots \log \varepsilon_{c-1} \\ \log \varepsilon_2 & \log \varepsilon_3 \ldots\ldots \log \varepsilon_c \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \log \varepsilon_{c-1} & \log \varepsilon_c \ldots\ldots \log \varepsilon_{2c-3} \end{vmatrix}$$

$$c = a l^{h-1}$$

$$\varepsilon_g = \sqrt{\frac{(1-Z^{r^g})(1-Z^{r^{g+c}})\ldots(1-Z^{r^{g+(b-1)c}})}{(1-Z^{r^{g-1}})(1-Z^{r^{g-1+c}})\ldots(1-Z^{r^{g-1+(b-1)c}})}}$$

R ist der Regulator.

Wenn der relative Grad b ungerade ist, wenn also der Teilkörper imaginar ist, ist

$$h = \frac{\Pi_u \sum_{t=1}^{c} e^{\frac{2\pi u t i}{c}} (r_t + r_{t+c} + \ldots + r^{t+(b-1)c})}{2^{\frac{1}{2}c-1}\, l^{\frac{1}{2}hc}} \cdot \frac{\Delta}{R'}$$

wo das Product uber alle ungerade Werte $u < c$ lauft.

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{8}(a-2)(a-4)} \begin{vmatrix} \log \varepsilon_1 & \log \varepsilon_2 & \ldots \log \varepsilon_{\frac{1}{2}c-1} \\ \log \varepsilon_2 & \log \varepsilon_3 & \ldots \log \varepsilon_{\frac{1}{2}c} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \log \varepsilon_{\frac{1}{2}c-1} & \log \varepsilon_{\frac{1}{2}c} & \ldots \log \varepsilon_{c-3} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_g = \sqrt{\frac{(1-Z^{r^g})(1-Z^{r^{g+\frac{1}{2}c}})\ldots(1-Z^{r^{g+(2b-1)\frac{1}{2}c}})}{(1-Z^{r^{g-1}})(1-Z^{r^{g-1+\frac{1}{2}c}})\ldots(1-Z^{r^{g-1+(2b-1)\frac{1}{2}c}})}}$$

$$R' = \begin{vmatrix} \log \eta_1 & \log \eta_2 & \log \eta_{1/_2 c-1} \\ \log \eta_1^{(1)} & \log \eta_2^{(1)} & \log \eta_{1/_2 c-1}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \log \eta_1^{(1/_2 c-2)} & \log \eta_2^{(1/_2 c-2)} & \log \eta_{1/_2 c-1}^{(1/_2 c-2)} \end{vmatrix}$$

$\eta_1, \eta_2 \ldots.$ ist ein System fundamentaler Einheiten und $\eta_i^{(k)}$ sind ihre Conjugierten

Beweis: Um diesen Satz zu beweisen, benützen wir den fur alle Korper giltigen Ausdruck

$$h = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} (s-1) \prod_{\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{P})^s}\right)^{-1} [1]) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

und wir beweisen zuerst den Hulfssatz:

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s}\right) = \prod_{u} \left\{1 - \left[\frac{p}{l^h}\right]^{bu} p^{-s}\right\}, p \neq l \quad . \quad . \quad (2)$$

Das Product linker Hand ist zu erstrecken uber alle verschiedenen Primideale, welche in der Primzahl p enthalten sind; das Product rechter Hand uber alle Zahlen der Reihe

$$0, 1, \ldots., (c-1).$$

Beweis: Das Symbol $\left[\frac{p}{l^h}\right]$ [2]) wird definirt durch die Gleichung

$$\left[\frac{p}{l^h}\right] = e^{\frac{2\pi p' i}{l^{h-1}(l-1)}}$$

wo p' der kleinste Exponent ist, fur welchen $r^{p'} \equiv p (mod\, l^h)$ ausfallt; r ist eine Primitivzahl nach l^h. Es möge d der groszte gemeinsame Teiler von p' und $l^{h-1}(l-1)$ sein, dann folgt aus der letzten Congruenz, dasz

$$r^{p' \frac{l^{h-1}(l-1)}{d}} \equiv p^{\frac{l^{h-1}(l-1)}{d}}$$

oder

$$1 \equiv p^{\frac{l^{h-1}(l-1)}{d}}$$

Hieraus ergibt sich, dasz $\frac{l^{h-1}(l-1)}{d}$ der kleinste Exponent ist, fur welchen die Potenz von p der Einheit congruent ist. Daher ist

$$\frac{l^{h-1}(l-1)}{d} = f$$

[1]) H. Satz 56 en § 27.
[2]) H. § 116.

und

$$d = e.$$

Das Symbol ist also eine f-te und nicht eine niedere Einheitswurzel. Folglich ist $\left[\frac{p}{l^h}\right]^b$ ein $\frac{f}{g}$-te und nicht eine niedere Einheitswurzel, wenn g der groszte gemeinsame Teiler ist von f und b; g ist also der groszte gemeinsame Teiler von

$$\frac{l^{h-1}l-1}{e} \text{ und } \frac{l^{h-1}(l-1)}{al^{h-1}}$$

Es sei q eine Primzahl, die bis zur m-ten Potenz in $l^{h-1}(l-1)$ aufgeht, in e bis zur n-ten Potenz und in al^{h-1} bis zur n'-ten Potenz. Sie geht dann in f und b bis zur $(m-n)$-ten, resp. zur $(m-n')$-ten Potenz auf. Hieraus folgt, dasz q in g aufgeht in einer Potenz deren Exponent der kleinsten der beiden Zahlen $m-n$ und $m-n'$ gleich ist. Weil dies fur alle Primzahlen q gilt, ist

$$g = \frac{l^{h-1}(l-1)}{\textit{kleinste gemeinsame Vielfache von } e \textit{ und } al^{h-1}}$$

also $g = \frac{l^{h-1}(l-1)}{v}$. Wir haben daher gefunden dasz $\left[\frac{p}{l^h}\right]^h$ eine $\frac{fv}{l^{h-1}(l-1)} = \frac{v}{e}$-te Einheitswurzel ist und keine niedere.

Fassen wir nun das Product rechter Hand aus (2). ins Auge. Weil

$$\left[\frac{p}{l^h}\right]^{b\left(u+\frac{v}{e}\right)} = \left[\frac{p}{l^h}\right]^{bu}$$

so folgt hieraus, dasz jede $\frac{v}{e}$-te Einheitswurzel $al^{h-1} : \frac{v}{e} = \frac{eal^{h-1}}{v}$ Mal in dem Producte auftritt, und da

$$\prod_{u=1}^{u=\frac{v}{e}} \left\{1 - \left[\frac{p}{l^h}\right]^{bu} p^{-s}\right\} = 1 - p^{-\frac{v}{e}s},$$

wird das Product rechter Hand von (2) dem Ausdrucke

$$\left(1-p^{-\frac{v}{e}s}\right)^{\frac{ce}{v}}.$$

gleich sein. Hieraus ergibt sich der Hulfssatz, wenn man sich des Satzes 3 § 2 bedient.

Aus (1) folgt nun:

$$h = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} (s-1) \frac{1}{1 - \frac{1}{n(l)^s}} \prod_p \prod_u \left\{1 - \left[\frac{p}{l^h}\right]^{bu} p^{-s}\right\}$$

wo die Producte sich erstrecken über alle früher genannten Werte von u und über alle Primzahlen p, mit Ausnahme von l.

Auf Grund des Satzes **4** ist $n(\mathfrak{l}) = l$ und es ist also

$$h = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} (s-1) \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_p \prod_u{}' \frac{1}{1 - \left[\frac{p}{lh}\right]^{bu} p^{-s}}$$

Das erste Product erstreckt sich über alle Primzahlen p, wie auch das zweite; denn wiewohl der Wert $p = l$ zuerst ausgeschlossen war, darf man den Factor

$$1 - \left[\frac{l}{lh}\right]^{bu} \text{für } u \neq 0$$

hinzufügen, weil er den Wert **1** besitzt.

Das dritte Product erstreckt sich über die angegebenen Werte van u, wobei aber der Accent angibt, dasz $u = 0$ jetzt ausgeschlossen ist. Wir wissen, dasz

$$\lim_{s=1} (s-1) \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = 1$$

und wir finden schlieszlich

$$h = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} \prod_p \prod_u{}' \frac{1}{1 - \left[\frac{p}{lh}\right]^{bu} p^{-s}}$$

Es werden nun die zwei Productzeichen verwechselt:

$$\prod_u{}' \prod_p \frac{1}{1 - \left[\frac{p}{lh}\right]^{bu} p^{-s}}$$

und wir entwickelen jeden Factor in eine DIRICHLET'sche Reihe

$$\prod_u{}' \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{lh}\right]^{bu} \frac{1}{n^s}.$$

In dieser Reihe setzen wir das Integral ein:

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx}\, dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{lh}\right]^{bu} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} dx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{lh}\right]^{bu} e^{-nx}.$$

Nun ist $\left[\frac{n}{lh}\right] = \left[\frac{n'}{lh}\right]$ wenn $n \equiv n' \ (mod\ l^h)$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{l^h-1} + \sum_{n=l^h+1}^{2l^h-1} + \ldots = \frac{\sum_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{-nx}}{1-e^{-l^h x}}$$

Wir haben daher zu betrachten

$$\lim_{s=1}\int_0^{\infty} x^{s-1}\,\frac{\sum_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l_h}\right]^{bu} e^{-nx}}{1-e^{-l^h x}}\,dx.$$

Weil

$$\sum_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} = 0$$

findet man für diesen Limes, wenn man zugleich setzt $e^{-x} = t$:

$$\int_0^1 \frac{\sum_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} t^n}{t(1-t^{l^h})}\,dt.$$

Es sei $F(t) = \sum_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} t^n$. Das zu betrachtende Integral wird jetz

$$\int_0^1 \frac{F(t)}{t(1-t^{l^h})}\,dt.$$

Die Integration lässt sich durchführen nach Verteiling in rationale Brüche:

$$-\frac{1}{l^h}\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)\int_0^1 \frac{dt}{t-e^{\frac{2\pi k i}{l^h}}}$$

und nach der Integration ergibt sich:

$$-\frac{1}{l^h}\left[\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) \log\frac{e^{\frac{k\pi i}{l^h}}-e^{-\frac{k\pi i}{l^h}}}{i} + \frac{\pi i}{2}\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) - \frac{\pi i}{l^h}\sum_{k=1}^{l^h-1} k F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)\right] \quad \ldots \quad (4)$$