Mathematics. — *"Ueber eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich"* (sechste Mitteilung [1])). By Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated in the meeting of November 30, 1918).

§ 1. In einem in 1912 in den Göttinger Nachrichten (S. 603—606 [2])) in Auszug abgedruckten Briefe an R. FRICKE habe ich (S. 605, Fussnote [3])) kurz skizziert, wie das von HURWITZ herrührende analytische Theorem, dass *birationale Transformationen einer Riemannschen Fläche vom Geschlechte $p > 1$ in sich unmöglich ein vollständiges kanonisches Schnittsystem der Fläche in ein äquivalentes kanonisches Schnittsystem überführen können*, mittels der Analysis Situs bewiesen werden kann, wobei sich seine Gültigkeit herausstellt für *alle periodischen, eineindeutigen und stetigen Transformationen.* Die damalige Andeutung wird im folgenden näher präzisiert und gerechtfertigt werden.

Sei O die gegebene zweiseitige Fläche, I die Menge der bei der n-periodischen, eineindeutigen und stetigen, die Ränder invariant lassenden Transformation t von O invarianten Punkte. Wir nehmen an, dass jedes von I in O bestimmte Gebiet von t in sich transformiert wird (was, wenn t die Indikatrix von O invariant lässt, stets der Fall ist), und unterziehen die Wirkung von t auf eines dieser Gebiete, welches wir mit ω bezeichnen werden, einer näheren Betrachtung. Dabei ziehen wir im Falle, dass t die Indikatrix von O umkehrt, jeden eventuellen für t *nicht* invarianten Rand von ω

[1]) Vgl. diese Proceedings, XI, S. 788; XII, S. 286; XIII, S. 767; XIV, S. 300; XV, S. 352.

[2]) Das daselbst S. 604 auf künftige Publikationen von P. KOEBE (der Neujahr 1912 im Besitze einer Abschrift meines Briefes an R. FRICKE war) hinweisende Zitat ist nach der Erledigung der Korrekturen von einer mir unbekannten Hand, ohne meine Mitwirkung oder Vorkenntnis eingefügt worden; die bezüglichen Noten sind mir erst nach ihrem Erscheinen bekannt geworden.

In engem Zusammenhang mit dem Inhalte meines (Anfang März 1912 gedruckten) Briefes an R. FRICKE stehen die Karlsruher Verhandlungen über automorphe Funktionen vom Jahre 1911; der über dieselben erstattete Bericht (Jahresber. d. D. M. V. XXI), ist, ebenso wie die in Gött. Nachr. 1912 erschienene KOEBE'sche Mitteilung über den Kontinuitätsbeweis, im Sommer 1912 gedruckt worden. Das in diesem Berichte enthaltene Referat über den Vortrag von P. KOEBE (insbesondere die auf S. 162 befindliche Anmerkung [1])) ist insofern irreführend, dass im wirklichen KOEBE'schen Vortrage, nach der ihm vorangegangenen, S. 156—157 wiedergegebenen kurzen Diskussion mit mir, vom Kontinuitätsbeweise überhaupt nicht wieder die Rede gewesen ist.

46*

in einen Punkt zusammen und fügen diesen Punkt zu ω hinzu. Sei R die Menge der übrig bleibenden (für t invarianten) Ränder r_α von ω und seien (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), ... die Rückkehrschnittpaare einer *vollständigen* kanonischen Zerschneidung von ω. Wir nehmen an, dass innerhalb jedes dieser Rückkehrschnittpaare ein a_ν so gewählt werden kann, dass nicht nur a_ν selbst, sondern auch seine beiden Seiten von t ungeachtet der Ränder äquivalent abgebildet werden (was, wenn t jeden Rückkehrschnitt der kanonischen Zerschneidung ungeachtet der Ränder äquivalent abbildet und die Indikatrix von O umkehrt, stets der Fall ist). Weiter schliessen wir den Fall aus, dass entweder kein Rückkehrschnittpaar (a_ν, b_ν) und höchstens zwei Ränder r_α, oder kein Rand r_α und nur ein einziges Rückkehrschnittpaar (a_ν, b_ν) existiert.

§ 2. Im Falle, dass in ω wenigstens zwei Rückkehrschnittpaare (a_ν, b_ν) existieren, verstehen wir unter Ω diejenige (kein Rückkehrschnittpaar mehr aufweisende) Schottkysche Ueberlagerungsfläche von ω, welche die a_ν als blättertrennende Ufer besitzt, unter L die Menge derjenigen Ränder l_α von Ω, welche durch eine unendliche Zahl von Ueberschreitungen der a_ν auf ω erzeugt werden, unter ${}_1a_\nu$, ${}_2a_\nu$, ... die Ueberlagerungsbilder von a_ν auf Ω, unter a'_ν das durch t auf ω bestimmte Bild von a_ν, unter ${}_1a'_\nu$, ${}_2a'_\nu$, ... die Ueberlagerungsbilder von a'_ν auf Ω. Wenn wir jedem ${}_\mu a_\nu$ dasjenige ${}_\lambda a'_\nu$ zuordnen, dessen Umlaufkoeffizienten zwischen den l_α die gleichen absoluten Werte besitzen, wie die entsprechenden Umlaufkoeffizienten von ${}_\mu a_\nu$, so ist in Anschluss daran eine durch die Ueberlagerung von Ω über ω in t übergehende, eineindeutige und stetige Transformation t' von Ω in sich bestimmt, welche, ebenso wie t, n-periodisch sein muss und jeden Rand l_α invariant lässt. Ob *alle* Ränder von Ω für t' invariant sind, lassen wir dahingestellt, ziehen aber jeden eventuellen für t' *nicht* invarianten Rand in einen Punkt zusammen und fügen diesen Punkt zu Ω hinzu.

Im Falle, dass in ω nur ein einziges Rückkehrschnittpaar (a, b) existiert, verstehen wir unter Ω diejenige (kein Rückkehrschnittpaar mehr aufweisende) Schottkysche Ueberlagerungsfläche von ω, welche a als blättertrennendes Ufer besitzt, unter l_1 und l_2 diejenigen Ränder von Ω, welche durch eine unendliche Zahl von Ueberschreitungen von a auf ω erzeugt werden, unter ${}_1r$, ${}_2r$, ... die Ueberlagerungsbilder auf Ω eines (für t der Annahme gemäss invarianten) Randes r von ω. Alsdann existiert eine durch die Ueberlagerung von Ω über ω in t übergehende, eineindeutige und stetige Transformation t' von Ω in sich, welche ${}_1r$ (mithin auch ${}_2r$, ${}_3r$, ...) invariant lässt, so dass sie, ebenso wie t, n-periodisch sein muss. Ob *alle* Ränder von Ω für t' invariant sind, lassen wir wieder dahingestellt und ziehen jeden eventuellen für t' *nicht* invarianten Rand in einen Punkt zusammen, den wir zu Ω hinzufügen.

Im Falle, dass in ω kein Rückkehrschnittpaar (a_ν, b_ν) existiert, verstehen wir unter Ω die Fläche ω selbst und unter t' die Transformation t selbst.

In jedem der drei Fälle besitzt die Fläche Ω *wenigstens drei* Ränder und ist sie eineindeutiges stetiges Bild eines Teilgebietes der Kugel, während t' eine n-periodische, eineindeutige und stetige Transformation von Ω in sich darstellt, welche jeden Rand, aber keinen Punkt invariant lässt.

Wir dürfen annehmen, dass von den Rändern von Ω *wenigstens einer isoliert* ist. Im entgegengesetzten Falle können wir nämlich in Ω ein Gebiet g bestimmen, zu dessen Grenze kein Grenzpunkt von Rändern von Ω gehört, und welches, ebenso wie seine Komplementärmenge, Ränder von Ω enthält. Die Vereinigung von g und seinen Bildern für $t', t'^2, \ldots. t'^{n-1}$ bildet eine Fläche, welche, ebenso wie Ω, wenigstens drei Ränder besitzt und von t' mit invarianten Rändern und ohne invariante Punkte in sich transformiert wird, überdies aber einen isolierten Rand besitzt.

§ 3. Seien $P_1, P_2, \ldots. P_{n-1}$ die Punkte, in welche ein in Ω willkürlich gewählter Punkt P von $t', t'^2, \ldots. t'^{n-1}$ der Reihe nach übergeführt wird. Ein P und P_1 verbindender stetiger Kurvenbogen j_P bildet mit seinen von $t', t'^2, \ldots. t'^{n-1}$ bestimmten Bildern eine geschlossene stetige Kurve k_P. Die Menge R' der Ränder r'_α von Ω lässt sich in solcher Weise in eine endliche Zahl ≥ 3 von voneinander isolierten Teilmengen $R'_1(k_P)$, $R'_2(k_P), \ldots. R'_m(k_P)$ zerlegen, dass der Umlaufkoeffizient von k_P zwischen einem zu $R'_\nu(k_P)$ und einem zu $R'_\lambda(k_P)$ gehörigen Rand modulo n gleich einem durch ν und λ bestimmten, für $\nu = \lambda$ fortfallenden Wert $c_{\nu\lambda}(k_P) \geq 0$ und $< n$ ist. Diese $R'_\nu(k_P)$ behalten ihre Brauchbarkeit und die zugehörigen $c_{\nu\lambda}(k_P)$ ihre Gültigkeit bei, wenn für festes P der Bogen j_P diskontinuierlich geändert wird. Mittels gleichzeitiger stetiger Variierung von P und j_P sieht man weiter ein, dass auch durch Aenderung des Punktes P die Rolle der $R'_\nu(k_P)$ und $c_{\nu\lambda}(k_P)$ nicht gestört wird. Indem wir aber P in hinreichender Nähe von R'_h und j_P in passender Weise wählen, können wir dafür sorgen, dass der Umlaufkoeffizient von k_P zwischen einem zu $R'_\nu(k_P)$ und einem zu $R'_\lambda(k_P)$ gehörigen Rand, für ν und λ beide von h verschieden, fortfällt und hieraus folgern wir unmittelbar, dass $c_\lambda^\nu(k_P)=0$ für jedes ν, jedes λ, jedes P und jedes j_P.

§ 4. Wir bezeichnen einen willkürlich gewählten isolierten Rand von Ω mit ϱ, die Menge der übrigen Ränder von Ω mit R'_0 und betrachten die sich um R' aperiodisch herumwindende Ueberlagerungsfläche S von Ω. Diese Fläche S ist eineindeutiges und stetiges Bild der Cartesischen Ebene; ihr Rand R'' enthält einen aus ϱ hervorgegangenen Teil R_1'' und einen aus R'_0 hervorgegangenen Teil R_2''; diese beiden Teile sind voneinander isoliert.

Sei P ein Punkt von Ω in der Umgebung von ϱ, P_1 sein von t' bestimmtes Bild. Wir verbinden P und P_1 in der Umgebung von ϱ durch einen solchen stetigen Kurvenbogen j_P, welche mit seinen von $t', t'^2, \ldots t'^{n-1}$ bestimmten Bildern eine geschlossene stetige Kurve k_P erzeugt, deren Umlaufkoeffizient zwischen zwei willkürlichen Rändern von Ω fortfällt. Die Möglichkeit, einen derartigen Kurvenbogen j_P herzustellen, folgt aus § 3. Sei P_m der Anfangspunkt, P_{1m} der Endpunkt eines Ueberlagerungsbildes von j_P auf S, so existiert eine durch die Ueberlagerung von S über Ω in t' übergehende, eineindeutige und stetige Transformation t'' von S in sich, welche P_m in P_{1m} überführt. Alsdann lässt die Transformation t''^n den Punkt P_m invariant, so dass t'', ebenso wie t', n-periodisch sein muss. Hiermit sind wir aber zu einem Widerspruch gelangt, weil eine periodische, eineindeutige und stetige Transformation der Cartesischen Ebene in sich ohne invariante Punkte nicht existieren kann.

§ 5. Im Falle, dass t die Indikatrix von O invariant lässt und von einer vollständigen kanonischen Zerschneidung von O jeden Rückkehrschnitt samt seinen beiden Seiten ungeachtet der Ränder äquivalent abbildet, besitzt t dieselbe Eigenschaft in bezug auf ω (was unmittelbar wie folgt eingesehen werden kann: Sei s ein Rückkehrschnitt von ω, der ω nicht zerlegt, so entspricht einer stetigen Variierung von s in O, wenn die Ränder von ω je in einen zu ω hinzuzufügenden Punkt zusammengezogen werden, eine stetige Variierung von s in ω). Wäre nun ω samt seiner Grenze nicht identisch mit O, so besässe ω einen *durch eine zusammenhängende perfekte Menge von für t invarianten Punkten abgeschlossenen Rand* und würde auf Grund davon die in den §§ 3 und 4 hinsichtlich der Transformation t' von Ω angestellte, auf einen Widerspruch führende Ueberlegung *auch im Falle, dass in ω kein Rückkehrschnittpaar (a_ν, b_ν) und nur zwei Ränder existieren*, in Kraft bleiben. Mithin ist in diesem Falle ω *samt seiner Grenze mit O identisch und O entweder eine Kugel, oder ein Zylinder, oder eine Cartesische Ebene, oder ein Torus.*