Mathematical Analyse. — "*Sur une propriéte des fonctions de variable complexe*". Note de M. ARNAUD DENJOY. (Présenté par Mrs. W. KAPTEYN et L. E. J. BROUWER).

(Présénte dans la séance de Décembre 29, 1917).

Je me propose de démontrer le théorème suivant:

Si une fonction analytique $F(x)$ et sa dérivée $F'(x)$ sont *régulières et non nulles* en tout point d'un contour *simple* C, à l'intérieur duquel $F(x)$ peut se mettre sous la forme:

$$F(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \dots (x-a_n)^{\alpha_n} G(x), \tag{1}$$

les a_j étant intérieurs à C, G étant *régulière et non nulle* dans C, et les a_j, α_j étant indépendants de x, *si l'argument de $F(x)$ varie dans un sens constant quand x décrit le contour C*, 1°. *$F'(x)$ possède à l'intérieur de C, $(n-1)$ zéros distincts ou confondus différents des a_j* 2°. *toute courbe d'équation $Arg\, F'(x) = cte$ pénétrant dans C, aboutit en l'un des points a_j ou passe en l'un des zéros propres à F'.*

En effet, soit $\Gamma(x)$ une détermination de $log\, G(x)$. $\Gamma(x)$ est par hypothèse holomorphe dans C et sur C.

On a:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{x-a_n} + \Gamma'(x) = \frac{V(x)}{(x-a_1)\dots(x-a_n)}.$$

D'après son expression, V est holomorphe dans et sur C, et V ne s'annule en aucun point a_j. En outre, par hypothèse, V ne s'annule pas non plus sur C. A l'intérieur de C, les zéros de $F'(x)$ distincts des a_j coïncident donc avec les zéros de V. Nous voulons montrer que V possède à l'intérieur de C, $(n-1)$ zéros distincts ou confondus. Or,

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{d}{dx} . \, log\, F(x) .$$

F et F' étant réguliers et différents de zéro sur C, le second membre est, en tout point de C, une fonction continue de x, de même que les logarithmes et *a fortiori* les arguments de F et de F'.

Supposons que C ait, en chacun de ses points, une tangente bilatérale unique, variant continûment. Soit α l'angle avec Ox de cette tangente dirigée dans le sens positif de parcours de C. Soit s l'arc de C compris entre une origine choisie sur C, et le point variable x. On a

$$e^{i\alpha}\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{d\log|F|}{ds}+i\frac{d\,Arg\,F}{ds}.$$

Donc, la partie imaginaire de $e^{ia}\frac{F'}{F}$ garde un signe constant dans le mouvement de x sur C. Donc la variation totale de Arg. $e^{ia}\frac{F}{F}$ est nulle. Or, C étant un contour simple, parcouru dans le sens direct, α augmente de 2π. Donc, Arg. $\frac{V}{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}$ diminue de 2π. Les a_j étant intérieurs à C, Arg. V augmente donc de $2(n-1)\pi$. Donc, V a $(n-1)$ zéros distincts ou confondus à l'intérieur de C.

Supposons maintenant que C ne possède pas en chaque point une tangente déterminée. Soit $2\delta_1$ la plus courte distance à C des points ζ qui sont, soit des zéros, soit des singularités de F ou de F'. δ_1 est positif puisque aucun de ces points n'est sur C. Soit $2\delta_2$ la distance minimum de deux points de C entre lesquels la variation de Arg. $F(x)$ est égale en valeur absolue à un multiple entier de 2π. Soit δ le plus petit des deux nombres δ_1 et δ_2. En un point quelconque x_1 de C, menons l'arc de courbe $g(x_1)$ d'équation:

$$Arg.\,F(x)=Arg.\,F(x_1),$$

limité de part et d'autre de x_1 à la longueur δ. Puisque F est régulier et non nul sur C, pour chaque point de C, l'arc $g(x_1)$ est déterminé. Comme F' ne s'annule pas sur ce même arc, celui-ci ne possède que des points simples.

Deux arcs $g(x_1)$, $g(x_2)$ sont entièrement distincts. En effet, les deux arcs $g(x_1)$, $g(x_2)$ correspondent à des arguments de F différents, puisque Arg. F varie dans un sens constant sur C. Cela étant, ou bien $\frac{1}{2\pi}$ Arg. $\frac{F(x_2)}{F(x_1)}=\theta_2-\theta_1$ n'est pas un nombre entier, et alors, les deux arcs ne pourraient se rencontrer qu'en un point où F est irrégulier ou nul, circonstance impossible, puisque, leur demi-longueur étant $\delta\leq\delta_1$, aucun ne contient de points de cette sorte. Ou bien $\theta_2-\theta_1$ est un entier non nul, et les deux arcs $g(x_1)$ et $g(x_2)$ n'ont pas de points communs, d'après $\delta\leq\delta_2$. Si e_1, e_2 sont les extrémités de $g(x_1)$ respectivement intérieure et extérieure à C, e_1 et e_2 décrivent chacun une courbe sans point multiple, l'une Γ_1 intérieure à C, l'autre Γ_2 contenant C à son intérieur. Entre Γ_1 et Γ_2, on peut déformer indifféremment C sans rencontrer de point ζ.

Or la condition que Arg. $F(x)$ varie dans un sens constant équivaut à celle-ci, que C coupe une fois et une seule chacun des arcs $g(x_1)$. Donc, si le contour C présente des irrégularités, il est possible de substituer à chaque point x_1 de C un point x'_1 de l'arc correspondant $g(x_1)$ de façon que la courbe C' des points x'_1, qui coupe une fois et une seule chaque arc $g(x_1)$, soit continue et admette en tout point une tangente unique variant continûment. C' contient à son intérieur les mêmes points ζ que C. Or, la première partie du théorème est vraie pour C'. Donc elle l'est aussi pour C. Elle est donc générale.

Conservant toutes les autres hypothèses de l'énoncé, supposons simplement que Arg $F(x)$ *ne possède pas sur* C *les deux sens de variation.* Sur certains arcs ω de C, Arg $F(x)$ pourra être constant. Sur un tel arc ω, $log\ |F|$ est continu et varie dans un sens constant, puisque ni F ni F' ne s'annulent sur ω. Quand x décrit ω, le point figuratif de $u = e^{ia \frac{F'}{F}}$ parcourt sur l'axe réel un segment dont les deux extrémités sont d'un même côté de l'origine. Si la tangente à C varie continûment, comme le point u n'a pas de positions de part et d'autre de l'axe réel, la variation de Arg u sur le contour décrit par x est encore nulle. La première partie du théorème subsiste.

Si, en dehors ou aux extrémités des arcs ω, C était, en certains points, dépourvu de tangente, on introduirait les arcs $g(x_1)$ relatifs à tous les points de C, sauf aux points intérieurs aux arcs ω. L'ensemble des $g(x_1)$ formerait des régions auxquelles toutes les parties de C étrangères aux arcs ω seraient intérieures, et où l'on pourrait déformer C sans lui faire traverser de zéros ni de singularités de F ni de F', de façon à lui donner une tangente continue en conservant les conditions du théorème. Celui-ci, vrai pour le nouveau contour, l'est aussi pour C.

La première partie du théorème et cette dernière extension étant établies en toute généralité, démontrons la seconde partie.

Si une courbe g d'équation Arg $F(x) = \text{cte}$ avait dans C un certain point γ, et si, prolongée dans les deux sens à partie de γ, elle ne rencontrait pas de point ζ, elle aboutirait des deux parts à C, en des points respectifs α et β. Les deux arcs de C séparés par α et β, augmentés de l'arc de g intérieur à C, formeraient deux contours simples ne contenant pas de point ζ et sur aucun desquels Arg F ne posséderait les deux sens de variation. Alors F possédant q points a_j à l'intérieur de l'un de ces contours, et $(n-q)$ à l'intérieur de l'autre, F' aurait à l'intérieur de ces mêmes contours respectivement $(q-1)$ et $(n-q-1)$ zéros (comptés chacun avec son ordre de multiplicité), donc en tout $(n-2)$ zéros et non pas $(n-1)$. Le théorème est donc entièrement démontré.

62*

La première partie appelle diverses observations.

D'abord, la démonstration reposant simplement sur ceci que le point $e^{i\alpha}\frac{F'}{F}$ ne tourne pas autour de l'origine, *il suffirait* pour l'exactitude de la *première partie* du théorème, *que le sens de variation de Arg F sur C fût le même, simplement chaque fois que le module de F passe par un maximum ou par un minimum.*

Considérons le cas où C contient un zéro régulier et simple de F'. On suppose toujours $F(\xi) \neq 0$, de façon que l'argument de F ne soit indéterminé en aucun point de C. Pour préciser le sens de la première partie du théorème, il convient de savoir si ξ doit ou non être considéré comme intérieur à C. Nous examinerons pour cela comment il convient de modifier un arc de C contenant ξ et indifférement petit, de façon que le sens de variation de Arg F sur le nouvel arc ne soit ni double, ni différent de celui de C. La ligne Arg $F =$ Arg $F(\xi)$ possède en ξ un point double à tangentes rectangulaires. Les deux branches γ_1 et γ_2 de cette courbe délimitent quatre angles curvilignes de sommet ξ. Une ligne Arg $F =$ Arg $F(\xi) + \varepsilon$ se compose, si ε est assez petit, de deux arcs distincts, intérieurs respectivement à deux angles, opposés par le sommet, formés par γ_1 et γ_2 et disposés relativement à γ_1 et à γ_2 comme le sont par rapport à leurs asymptotes les deux branches d'une hyperbole équilatère. Suivant le signe de ε, les arcs sont dans l'un ou dans l'autre des deux couples d'angles ainsi placés. Numérotons par exemple 1 et 3 ceux qui correspondent à $\varepsilon > 0$, 2 et 4 les deux autres. Supposons que γ_1 désigne la branche séparant les angles 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part. γ_2 sépare d'une part 1 et 4, d'autre part 2 et 3. Arg F croît, quand on traverse soit γ_1 en passant de 2 à 1 ou de 4 à 3, soit γ_2 en passant de 4 à 1 ou de 2 à 3.

C ne peut pas pénêtrer dans deux angles opposés. C traverse une des deux branches γ_1 et γ_2, et une seule. Si donc C ne contient pas un arc de l'autre branche, il est entièrement situé (sauf en ξ) d'un même côté de cette dernière. On peut, aux abords de ξ, déplacer C de ce même côté sans changer le sens de variation de Arg F. ξ doit donc être considéré comme situé du même côté de C que la branche γ_1 ou γ_2 non traversée.

Si C n'est pas tangent à la branche non traversée, il ne peut pas présenter une tangente unique en ξ. Donc, si *C possède un point anguleux en ξ, ξ doit être regardé comme situé du côté de C opposé à l'intérieur de l'angle* (ouvert de moins de π) *formé par les deux arcs de C séparés par ξ.*

Si C, traversant γ_1, contient un arc γ'_2 compris dans γ_2, C quitte

γ_2, suffisamment prolongé, du même côté aux deux extrémités de γ'_2. Je dis que ξ doit être considéré comme situé du côté de C, où se trouvent les parties de γ_2 étrangères à γ'_2.

En effet, si par exemple Arg $F(x)$ est non décroissant sur C, C doit atteindre γ_2 par l'angle 2 et le quitter par l'angle 1, ou atteindre γ_2 par l'angle 4 et le quitter par l'angle 3. Plaçons-nous dans la première hypothèse.

Traçons un trait $\alpha_1' \beta_1'$ aussi court et voisin de ξ qu'on le voudra, et normal à γ_1, α_1' étant dans l'angle 2 et β_1' dans l'angle 1. Sur le trait $\alpha_1' \beta_1'$, Arg F croît. L'arc de courbe: Arg $F =$ Arg $F(\alpha_1')$ situé dans l'angle 2, et suivi à partir de α_1' en s'éloignant de γ_1 vers la partie quasi-asymptote à γ_2, coupe C en un point α_1 très voisin de l'extrémité initiale de γ_2'. De même l'arc de la courbe Arg. $F =$ Arg. $F(\beta_1')$, situé dans l'angle 1 et suivi à partir de β_1' dans le sens quasi-asymptote à γ_2, coupe C en β_1, très voisin de l'extrémité terminale de γ_2'. Soit C' le contour obtenu en modifiant C entre α_1 et β_1 par la substitution du premier parcours au second. Sur le parcours $\alpha_1 \alpha_1' \beta_1' \beta_1$, Arg F ne décroît jamais, tout comme sur C entre α_1 et β_1, en passant par l'arc γ_2'. Si α_1' et β_1' sont assez voisins de ξ, les deux contours C et C' ne comprennent entre eux aucun point ζ. A leur intérieur, le nombre des a_i est le même, et il doit donc en être ainsi du nombre des zéros de F', si le premier de ces deux nombres détermine le second. Il faut donc considérer ξ comme situé relativement à C ainsi qu'il l'est par rapport à C', c'est-à-dire du côté de l'arc γ_2' opposé à celui où C quitte γ_2'.

Si l'arc γ_2' où Arg. F est constant, contient plusieurs zéros simples de F', dont aucun n'est un point anguleux pour γ_2', tous ces zéros doivent être regardés comme placés, relativement à cet arc, du côté opposé à celui où, initialement et finalement, C se sépare de γ_2. Des considérations analogues aux précédentes justifient cette conclusion et permettent d'en éclairer le sens dans tous les cas.

Si le point ξ de C est un zéro de F' multiple d'ordre p, la courbe Arg. $F =$ Arg. $F(\xi)$ possède $(p+1)$ branches simples se croisant en ξ et séparant $2(p+1)$ angles curvilignes θ de même ouverture. Dans ces divers angles, au voisinage de ξ, Arg. F est alternativement supérieur et inférieur à Arg. $F(\xi)$. Pour que Arg. F varie sur C dans un sens constant, il faut que les deux arcs de C séparés par ξ soient dans deux angles θ adjacents ou séparés par un nombre pair d'angles θ. Si ces deux angles sont adjacents, C possède (ou pourra être déformé de façon à posséder) un point anguleux en ξ. On considère ξ comme situé, par rapport à C, du côté opposé à l'intérieur de l'angle formé par les deux branches de C.

Si ces deux angles ne sont pas adjacents, q couples d'angles θ sont du côté intérieur de C, $p-q$ du côté opposé. *F' doit être considéré dans l'application du théorème comme possédant q zéros intérieurs à C et confondus avec ξ.* On le montre en adjoignant à C les arcs Arg. $F=$ Arg. $F(\xi)$ issus de ξ et intérieurs à C.

Application. Si une fonction $F(x)$ a son module constant sur un contour simple C où elle est régulière et où sa dérivée F' ne s'annule pas, si de plus F est, à l'intérieur de C, de la forme (1), *F' s'annule $(n-1)$ fois à l'intérieur de C en des points distincts des zéros ou infinis de F'.*

Car le sens de variation de Arg. F sur C est constant, sinon, en un point où il se modifierait, F' s'annulerait, puisque $\dfrac{d \log |F|}{d x}$ est toujours nul quand x décrit C.

Si C passe en un zéro simple ξ de F', les considérations antérieures permettent de définir les conventions sous lesquelles le théoréme subsiste. La ligne $|F(x)|=|F(\xi)|$ possède deux branches β_1 et β_2 se croisant en ξ. Arg. F possède en ξ un maximum sur l'une des branches, un minimum sur l'autre. Donc, pour que, sur le contour C, Arg. $F(x)$ varie en sens constant, il faut qu' à la demi-branche β_1 ou β_2 par où C arrive en ξ, succèdent l'une ou l'autre des deux demi-branches β_2 ou β_1 orthogonales à la première. ξ devra être regardé comme extérieur à l'angle droit dont il est le sommet et dont les deux demi-branches considérées forment les côtés.

On peut aussi arrondir C au voisinage de ξ par une modification infiniment petite, de façon que la tangente tourne dans un sens constant d'environ $\pm \dfrac{\pi}{2}$. ξ reste en-dehors de la convexité de cet arc. La variation de Arg. F sur le contour C ainsi tracé, possède un sens constant. C est un contour simple, auquel le théorème fondamental s'applique.

Si ξ est un zéro multiple d'ordre p de F'; les deux arcs de C aboutissant en ξ font un angle géométrique $K \dfrac{\pi}{p+1}$, K étant entier et au plus égal à $p+1$. Pour que Arg. F varie en sens constant sur C, il faut que K soit impair. Si $K=2K'+1$, $\left(K' \leq \dfrac{p}{2}\right)$, le théorème est vrai, à la condition de considérer F' comme possédant en ξ, K' zéros intérieurs à l'angle curviligne formé par les deux arcs de C se réunissant en ξ. On s'en assurera encore en ajoutant à C toutes les branches de la courbe $|F|=|F(\xi)|$ issues de ξ et intérieures à ce même angle.