Chemistry. — "*Sur une classe de fonctions admettant une dérivée seconde généralisée*". By Prof. ARNAUD DENJOY.

(Communicated at the meeting at May 29, 1920).

Considérons une série trigonométrique partout convergente

$$f(\theta) = a_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où $A_n = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$; a_0, a_n, b_n étant indépendants de θ. Soit $B_n = -b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta$. Intégrons terme à terme la série (1), et posons:

$$\varphi(\theta) = a_0 \theta + C + B_1 + \ldots + \frac{B_n}{n} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en tout point θ où la série du second membre converge. Aux points où cette série diverge, nous dirons que $\varphi(\theta)$ n'existe pas. C est quelconque, indépendant de θ. Intégrant une fois de plus, nous trouvons:

$$F(\theta) = \frac{a_0}{2}\theta^2 + C\theta + C' - A_1 - \ldots - \frac{A_n}{n^2} \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

C' étant, comme C, indépendant de θ.

RIEMANN a montré que la fonction continue $F(\theta)$ admet $f(\theta)$ pour dérivée seconde généralisée, c'est-à-dire que, si

$$R(\theta, u) = \frac{F(\theta + u) + F(\theta - u) - 2F(\theta)}{u^2},$$

on a $f(\theta) = \lim_{u=0} R(\theta, u)$, quel que soit θ indépendant de u.

Nous nous proposons dans cette note d'étudier les propriétés différentielles du premier ordre de la fonction $F(\theta)$. Il est bien connu que, si $F(\theta)$ possède au point θ_0 une dérivée $F'(\theta_0)$, la série (2) converge au même point et l'on a $\varphi(\theta_0) = F'(\theta_0)$. La réciproque est exacte. Donc, $\varphi(\theta)$ et la dérivée de F existent ou non simultanément, et coïncident chaque fois qu'elles existent.

Posons

$$Q(\theta, u) = \frac{F(\theta + u) - F(\theta)}{u}$$

On montre que:

$$Q[\theta, u] - \left(a_0 \theta + C + B_1 \ldots + \frac{B_n}{n}\right)$$

tend vers 0 avec u, si $n|u|$ reste compris entre deux nombres

positifs indépendants de u. Les propriétés différentielles du premier ordre de $F(\theta)$ et le mode de convergence ou de divergence de la série (2) sont ainsi étroitement liés.

n étant choisi comme il vient d'être dit, la différence

$$Q[\theta + \mu u, \lambda u] - \left(a_0 \theta + C + B_1 + \ldots + \frac{B_n}{n}\right)$$

tend aussi vers 0 avec u, *uniformément* dans le champ: θ quelconque, μ, λ, $\frac{1}{\lambda}$ bornés. Enfin, si $p_0 + p_1 + \ldots + p_r = 0$, l'expression

$$p_0 Q[\theta, u] + p_1 Q[\theta + \mu_1 u, \lambda_1 u] + \ldots + p_r Q[\theta + \mu_r u, \lambda_r u]$$

tend *uniformément* vers 0 avec u dans le champ: θ quelconque,

$$\sum_0^r |\mu_i + 2\lambda_i| \, |p_i| \, , \quad \sum_0^r \mu_i^2 |p_i| \, , \quad \sum_0^r \lambda_i^2 |p_i| \, , \quad \sum_0^r \left|\frac{p_i}{\lambda_i}\right|$$

tous bornés ($\mu_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$).

La démonstration se fait en remarquant que, si $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \varrho_n$, ϱ_n tend vers 0, d'après la convergence de la série (1). Donc, si

$$\sum_1^n \varrho(m) = n\,\omega(n) \, , \quad \sum_1^n m\,\varrho(m) = n^2 \omega'(n) \, , \quad \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\varrho(m)}{m^2} = \frac{\omega''(n)}{n},$$

les coefficients $\omega(n)$, $\omega'(n)$, $\omega''(n)$ tendent vers 0 quand n croît.

On a:

$$A_m(\theta + u) = A_m(\theta) \cos mu + B_m(\theta) \sin mu.$$

D'où

$$A_m[\theta + (\lambda + \mu) u] - A_m[\theta + \mu u] = A_m(\theta)\,[\cos m\,\overline{\mu + \lambda}\,u - \cos m \mu u] +$$
$$+ B_m(\theta)\,[\sin m(\mu + \lambda) u - \sin m \mu u].$$

Si $m < n$, nous transformons les coefficients de $A_m(\theta)$ et $B_m(\theta)$ par les formules:

$$\cos \beta - \cos \alpha = \delta \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{2} (\delta^2 < 1)$$

$$\sin \beta - \sin \alpha = (\beta - \alpha)\left[1 - \theta \frac{\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{6}\right] \quad (0 < \theta < 1).$$

Si $m > n$, nous remplaçons les mêmes coefficients par 2δ, $2\delta'$ avec δ^2, $\delta'^2 < 1$.

Les résultats énoncés paraissent alors en évidence. Sous leur forme la plus simple ($p_0 = -p_1 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = \ldots = 0$), la propriété que $Q[\theta, u] - Q[\theta, \lambda u]$ tend *uniformément* vers 0 avec u, dans le champ: θ quelconque, λ et $\frac{1}{\lambda}$ bornés, donne lieu à la remarque suivante.

Soit d un *nombre dérivé* (extrême ou médian) [1] de F au point θ. Il existe alors une suite de nombres de même signe $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ tendant vers 0 et tels que: $\lim\limits_{n\ \infty} Q[\theta, h_n] = d$. Soit α un nombre superieur à 1, aussi grand que nous le voudrons, indépendant de n. Considérons l'ensemble E formé des intervalles i_n et i'_n ainsi définis: i_n est l'intervalle $\theta + \frac{|h_n|}{\alpha}$ à $\theta + \alpha\,|h_n|$; i'_n est l'intervalle $\theta - \alpha\,|h_n|$ à $\theta - \frac{|h_n|}{\alpha}$. θ est évidemment un point limite de E. Or, quelle que soit la façon dont un point $t = \theta + h$ tende vers θ sans quitter E, $Q[\theta, h]$ tend vers d.

Nous disons alors que $F(\theta)$ admet au point θ une *dérivée spéciale* à E, égale à d.

La propriété étant exacte quel que soit α invariable, il est possible de choisir α croissant indéfiniment avec n, assez lentement pour que la propriété subsiste sur l'ensemble E_d ainsi obtenu. Donc,

Si d est un nombre dérivé extrême ou médian de $F(\theta)$, d est la dérivée de $F(\theta)$ spéciale à un ensemble E_d dont l'épaisseur supérieure au point θ est 1 bilatéralement [2].

Supposons que le *rapport* $\frac{h_n}{h_{n+1}}$ *soit borné indépendamment de* n (mais non de θ). Alors, si $1 < \left|\frac{h_{n+1}}{h_n}\right| < l$, choisissons $\alpha > \sqrt{l}$, et

[1] On appelle *nombre dérivé* de F l'une quelconque des valeurs limites d de $\frac{F(\theta + u) - F(\theta)}{u} = Q(\theta, u)$ quand u tend vers 0 avec un signe invariable, θ demeurant fixe. d est un nombre dérivé *droit* si $u > 0$, *gauche* si $u < 0$. d est un *dérivé extrême*, soit *supérieur*, soit *inférieur*, si d est l'une des limites extrêmes, soit la plus grande, soit la plus petite, de $Q(\theta, u)$ quand u tend vers 0, avec un signe déterminé.

Tout nombre compris entre les dérivés extrêmes de F pour un côté donné, est appelé nombre *dérivé médian* pour le même côté.

[2] Soit $m(x)$ la mesure de la partie d'un ensemble donné E comprise entre un point fixe a et un point quelconque x. $m(x)$ a le signe de $x - a$, à moins d'être nul. On appelle *épaisseur supérieure droite, épaisseur inférieure droite, epaisseur supérieure gauche, épaisseur inférieure gauche* de E en un point x_0, les nombres dérivés de même qualification respective de la fonction $m(x)$ en x_0. Ces nombres dérivés appartiennent au segment (0,1), (c'est à dire à l'ensemble des nombres μ tels que $0 \leq \mu \leq 1$). On dit que E possède en x_0 une épaisseur (sous-entendu bilatérale) ou une épaisseur droite, ou une épaisseur gauche égales à λ en x_0, si $m(x)$ admet en x_0 le nombre λ respectivement pour dérivée (ordinaire, bilatérale) ou pour derivée droite ou pour dérivée gauche. On sait que les points de E où E n'a pas l'épaisseur 1 forment un ensemble de mesure nulle (LEBESGUE).

construisons comme il a été dit plus haut les intervalles i_n, i'_n. Quelque soit n, i_n et i_{n+1} ont une partie commune, et il en est de même de i'_n et de i'_{n+1}. L'ensemble E formé des i_n et des i'_n contient tout l'intervalle $\theta - \alpha\,|h_1|$ à $\theta + \alpha\,|h_1|$, sauf le point θ. Donc *$F(\theta)$ admet d pour dérivée* (ordinaire, ou générale) *au point θ*.

En nous plaçant à un autre point de vue, il nous sera possible d'étendre et de préciser les propriétés connues de l'ensemble E où existe $\varphi(\theta)$.

Considérons la courbe Γ représentant géométriquement $F(\theta)$. θ est porté en abscisse, $F(\theta)$ en ordonnée. Soit M le point (θ, F). Pour une valeur déterminée de θ, la fonction $R(\theta, u)$ est continue en u, quel que soit u, pourvu que l'on pose $R(\theta, 0) = f(\theta)$. Soit $\psi(\theta)$ le maximum de $|R(\theta, u)|$ pour toutes les valeurs de u. D'après

$$R(\theta, u) = \frac{Q[\theta, u] - Q[\theta, -u]}{u},$$

nous avons, quel que soit u:

$$|Q(\theta, u) - Q(\theta, -u)| < \psi(\theta)\,|u|.$$

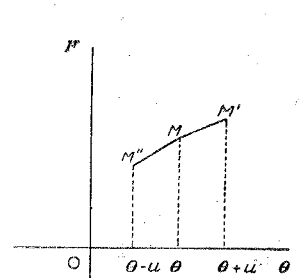

FIG. 1

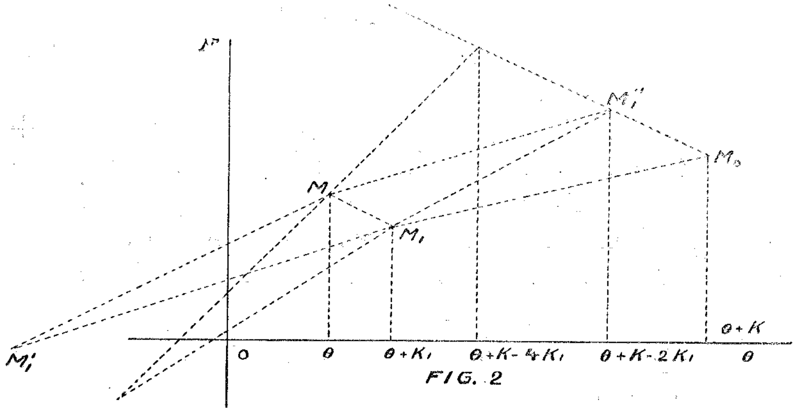

FIG. 2

Donc les points M' et M'' d'abscisses respectives $\theta + u$ et $\theta - u$ sont sensiblement alignés avec le point M. Les deux droites MM', MM' ont des pentes d'autant plus voisines l'une de l'autre que $|u|$ est plus petit (Fig. 1).

Donc de la position de M' d'abscisse $\theta + u$, nous déduirons avec une certaine approximation connue, la position de M' d'abscisse $\theta - u$. Sur l'axe des θ, nous pouvons considérer $\theta - u$ comme l'image de $\theta + u$ par rapport au point θ, regardé comme réfléchissant. M'' est sensiblement le symétrique de M' par rapport à M.

Considérons maintenant deux points M et M_1 de la courbe Γ, ayant pour abscisses $\theta, \theta + k_1$. Soit A un nombre supérieur à

$\psi(\theta)$ et à $\psi(\theta + k_1)$. Désignons par M_0 un autre point de la courbe, et soit $\theta + k$ son abscisse.

Formons sur l'axe des θ, les images du point $\theta + k$, par une succession de réflexions alternées sur les points-miroirs $(\theta, \theta + k_1)$. Nous obtenons, selon que la première réflexion a lieu sur θ ou sur $\theta + k_1$, deux suites de points-images:

$$\theta - k, \qquad \theta + k + 2\,k_1, \quad \theta - k - 2\,k_1, \quad \theta + k + 4\,k_1, \ldots$$

et

$$\theta - k + 2\,k_1, \quad \theta + k - 2\,k_1, \quad \theta - k + 4\,k_1, \quad \theta + k - 4\,k_1, \ldots$$

Les points représentatifs de F pour ces deux suites d'abscisses, seront, avec une certaine approximation que notre objet est d'étudier, 1° dans le premier cas, le symétrique M' de M_0 par rapport à M, puis le symétrique M'' de M' par rapport à M_1, puis le symétrique de M'' par rapport à M_1, et ainsi de suite, 2° dans le second cas, le symétrique M'_1 de M_0 par rapport à M_1, puis le symétrique M''_1 de M'_1 par rapport à M, etc.

Dans ce qui suit, nous ne restreindrons pas la portée de nos conclusions en considérant uniquement les points-images déduits de $\theta + k$ par un nombre pair de réflexions sur le couple $(\theta, \theta + k_1)$. Ces points-images ont pour abscisses des nombres en progression arithmétique de raison $2k_1$, formant la suite $\theta + k + 2m\,k_1$, m étant un entier de signe quelconque. Un tel point-image est obtenu par $|m|$ réflexions doubles de $\theta + k$ sur le couple $(\theta, \theta + k_1)$, la première réflexion se faisant sur θ ou sur $\theta + k_1$, selon que m est positif ou négatif. Exprimons les ordonnées des points de la courbe Γ correspondant aux points-images: $\theta + k + 2mk_1$.

Nous avons par hypothèse, quel que soit u:

$$F(\theta + u) + F(\theta - u) = 2\,F(\theta) + \delta A u^2 \qquad \delta^2 < 1$$

$$F[\theta - u] + F(\theta + 2\,k_1 + u) = 2\,F(\theta + k_1) + \delta' A\,(u + k_1)^2 \qquad \delta'^2 < 1$$

D'où:

$$F[\theta + u] - F[\theta + 2k_1 + u] = -\,2\,[F(\theta + k_1) - F(\theta)] + \delta A\,[u^2 + (u + k_1)^2]$$

Supposons d'abord m positif. Donnons à u successivement les valeurs $k, k + 2k_1, \ldots, k + 2\,(m-1)\,k_1$. Il vient:

$$F[\theta + k] - F(\theta + 2mk_1 + k) = -\,2m\,[F(\theta + k_1) - F(\theta)] + \delta A \omega,$$

avec

$$\omega = k^2 + (k + k_1)^2 + \ldots [k + (2m - 1)\,k_1]^2.$$

Supposons m négatif et égal à $-m'$. Dans la relation précédente, nous remplaçons m par m' et k par $k - 2m'k_1$. Il vient:

$$F(\theta + k) - F(\theta + 2mk_1 + k) = -\,2m\,[F(\theta + k_1) - F(\theta)] + \delta A \omega_1.$$

avec

$$\omega_1 = (k - k_1)^2 + \ldots + (k + 2mk_1)^2.$$

Les deux formules coïncident indépendamment de m, sauf par les coefficients ω et ω_1. Si $m = 0$, on a $\omega = \omega_1 = 0$.

Nous écrivons ainsi la relation générale:

$$\frac{F(\theta + k) - F(\theta)}{k} = \frac{F(\theta + 2m\,k_1 + k) - F(\theta)}{2m\,k_1 + k} \cdot \frac{2m\,k_1 + k}{k} + \frac{F(\theta + k_1) - F(\theta)}{k_1} \times \frac{-2mk_1}{k} + \delta A\,\frac{\omega'}{k}$$

ω' étant ω ou ω_1 selon que m est positif ou négatif. Posons

$$k + 2m\,k_1 = k'$$

$$\frac{k'}{k} = \mu, \qquad \frac{-\,2m\,k_1}{k} = \nu.$$

Il vient:

$$Q[\theta, k] = Q[\theta, k']\,\mu + Q[\theta, k_1]\,\nu + \delta A\,\frac{\omega'}{k}.$$

Soit $\left|\frac{k}{k_1}\right| = r$ supposé au moins égal à 1, et ε défini par

$$\varepsilon^2 = 1, \quad \varepsilon\,\frac{k}{k} > 0.$$

Nous choisirons l'image k' d'abord de manière que μ soit positif et ν non négatif. D'après $\mu + \nu = 1$, cette condition sera

$$0 \leq \frac{-\,2m\,k_1}{k} < 1.$$

Donc m a le signe de $-\varepsilon$, si $m \neq 0$, et en outre $2|m| < r$. Donc,

$$\text{si } \varepsilon = +1,\ -r < 2m < 0,\ \omega' = \omega_1 = k^2\left[\left(1 - \frac{1}{r}\right)^2 + \ldots + \left(1 + \frac{2m}{r}\right)^2\right] < 2|m|\,k^2$$

$$\text{si } \varepsilon = +1,\ r > 2m > 0,\ \omega' = \omega = k^2\left[1 + \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{2m-1}{r}\right)^2\right] < 2mk^2.$$

Donc, dans tous les cas,

$\delta A\,\frac{\omega'}{k}$ peut être remplacé par $2\delta mkA$.

La substitution est exacte même pour $m = 0$.

La condition $\mu > 0$, montre que k' et k sont de même signe. Parmi toutes les images $\theta + k + 2mk_1$ de $\theta + k$, situées du même côté de θ que $\theta + k$, choisissons celle qui, sans être intérieure à l'intervalle $\theta - k_1$, $\theta + k_1$, est la plus voisine de θ.

Nous appellerons ce point $\theta + k'$ *l'image-réduite propre à* θ du point $\theta + k$ par rapport au couple $(\theta, \theta + k_1)$. La distance de deux images consécutives obtenue par une suite de réflexions doubles sur le couple $(\theta, \theta + k_1)$ étant $2k_1$, k' vérifie les conditions

$$|k_1| \le |k'| < 3\,|k_1|$$

qui, jointes aux formules $k' = k + 2mk_1$ et à la condition $\frac{k'}{k} > 0$, déterminent complètement k'. En effet, soit p l'entier non négatif déterminé par les conditions

$$2p + 1 \le r < 2p + 3.$$

D'après $\frac{k}{k_1} = \varepsilon r$ avec $\varepsilon^2 = 1$, $m\varepsilon \le 0$ et $r > 2\,|m|$, on a : $\varepsilon \frac{k'}{k_1} = r - 2|m|$.

D'où $1 \le r - 2\,|m| < 3$ et enfin $|m| = p$, $m = -p\varepsilon$.

$\theta + k'$ étant l'image-réduite caractérisée comme il est dit, nous trouvons finalement, en utilisant $2\,|m| < r = \left|\frac{k}{k_1}\right|$ la formule:

$$Q(\theta, k) = Q(\theta, k')\,\mu + Q(\theta, k_1)\,\nu + \sigma \frac{k^2}{k_1} A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

avec $\delta^2 < 1$, si $0 < \frac{k'}{k} < 1$, $\sigma = 0$ si $k' = k$.

Il est essentiel de noter que $0 < \mu = \frac{k'}{k}$, $0 \le \nu$, $\mu + \nu = 1$. Ces propriétés et la formule (4) seraient conservées si k' était remplacé par l'un quelconque des termes de la série $k + 2\,qk_1$ compris entre k et k'. Mais il est essentiel pour la suite, que le rapport $\left|\frac{k'}{k_1}\right|$ soit compris entre deux nombres positifs fixes. Il nous sera commode d'avoir choisi pour jouer ce rôle les nombres 1 et 3.

Considérons maintenant une suite $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ de nombres de signes quelconques, décroissant en modules et tendant vers 0, tels enfin que $\psi[\theta + h_n] < A$, A étant indépendant de n, avec en outre $\psi(\theta) < A$.

Cette hypothèse sur les h_n ne serait d'ailleurs pas rigoureusement indispensable pour valider le raisonnement et la conclusion ci-après.

En effet, désignons par $\psi[\theta, \eta]$ le maximum de $|R(\theta, u)|$ pour $|u| \le \eta$, θ demeurant fixe. Le raisonnement subsiste alors moyennant la simple hypothèse

$$\psi[\theta + h_{n+1},\ 3\,|h_n|] < A.$$

Soit h un nombre dont la valeur absolue est au moins égale à h_1. Soit h' l'image-réduite, propre à θ, du point $\theta + h$ par rapport au couple $(\theta, \theta + h_1)$. On a:

$$Q[\theta, h] = Q[\theta, h']\,\lambda' + Q[\theta, h_1]\,\lambda_1 + \sigma \frac{h^2}{h_1} A$$

avec

$$0 < \lambda' \quad , \quad 0 \le \lambda_1 \quad , \quad \lambda' + \lambda_1 = 1 \quad , \quad \sigma^2 < 1.$$

Transformons de même $Q[\theta, h']$ et $Q[\theta, h_1]$ grâce à $\theta + h_2$.

Soient respectivement $\theta + h''$ et $\theta + h'_1$, les images-réduites propres à θ, des points $\theta + h'$, $\theta + h_1$ par rapport au couple $(\theta, \theta + h_2)$. On a:

$$Q[\theta, h] = Q[\theta, h'']\,\mu'' + Q[\theta, h_2]\,\nu'' + \sigma \frac{h'^2}{h_2} A$$

$$Q[\theta, h_1] = Q[\theta, h'_1]\,\mu'_1 + Q[\theta, h_2]\,\nu'_1 + \sigma \frac{h_1^{\,2}}{h_2} A$$

avec

$$0 < \mu'', \mu'_1 \quad ; \quad 0 \le \nu'', \nu'_1 \quad ; \quad \mu'' + \nu'' = \mu'_1 + \nu'_1 = 1.$$

Donc

$$Q[\theta, h] = Q[\theta, h'']\,\lambda'' + Q[\theta, h'_1]\,\lambda'_1 + Q[\theta, h_2]\,\lambda_2 + \delta A\left[\frac{h^2}{|h_1|} + \frac{\lambda' h'^2 + \lambda_1 h_1^{\,2}}{|h_2|}\right]$$

avec

$$\lambda'' = \lambda' \mu'' \quad , \quad \lambda'_1 = \lambda_1 \mu'_1 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda' \nu'' + \lambda_1 \nu'_1.$$

Donc

$$0 < \lambda'', \qquad 0 \le \lambda'_1, \qquad 0 \le \lambda_2, \qquad \lambda'' + \lambda'_1 + \lambda_2 = 1.$$

Enfin d'après $h'^2 < 9\,h_1^{\,2}$, $\lambda' + \lambda_1 = 1$, le coefficient de δA peut se remplacer *a fortiori* par $9\,\delta A\left(\frac{h^2}{|h_1|} + \frac{h_1^{\,2}}{|h_2|}\right)$.

La méthode de transformation de $Q[\theta, h]$ est évidente. Nous définissons la suite $h, h', h'', \ldots, h^{(n)}, \ldots$ par cette condition que $\theta + h^{(n)}$ est l'image-réduite propre à θ de $\theta + h^{(n-1)}$ par rapport au couple $(\theta, \theta + h_n)$. De même, $h_p^{(i)}$ n'existant pas pour $i < p$ et $h_p^{(p)}$ étant égal à h_p par convention, la suite $h_p^{(n)}$, constituée de nombres de mêmes signes, sera définie, pour $n > p$, par la condition que $\theta + h_p^{(n)}$ est l'image-réduite propre à θ, de $\theta + h_p^{(n-1)}$ par rapport au couple $(\theta, \theta + h_n)$. On aura des relations telles que les suivantes :

$$|h_n| \le |h_p^{(n)}| < 3\,|h_n|,$$

quel que soit $p \le n$;

$$Q[\theta, h_p^{(n-1)}] = Q[\theta, h_p^{(n)}]\,\mu_p^{(n)} + Q[\theta, h_n]\,\nu_p^{(n)} + \sigma_p^{(n)} A \frac{(h_p^{(n-1)})^2}{h_n}$$

avec

$$0 < \mu_p^{(n)} \ ,\ 0 \le \nu_p^{(n)} \ ,\ \mu_p^{(n)} + \nu_p^{(n)} = 1 \ . \ . \ .$$

Le coefficient de $\delta_p^{(n)} A$ peut *a fortiori* être remplacé par $\frac{9\,h^2_{n-1}}{h_n}$.

Cette relation permet de justifier par récurrence la formule

$$\left.\begin{aligned} Q(\theta, h) = Q[\theta, h^{(n)}]\,\lambda^{(n)} + \ldots + Q[\theta, h_p^{(n)}]\,\lambda_p^{(n)} + \ldots + Q[\theta + h_n]\,\lambda_n + \\ + 9\,\delta A\left[\frac{h^2}{|h_1|} + \frac{h_1^{\,2}}{|h_2|} + \ldots + \frac{h^2_{n-1}}{|h_n|}\right] \end{aligned}\right\} \ (5)$$

avec la condition qu'aucun des $\lambda_p^{(n)}$ n'est négatif et que leur somme pour $p = 0,1 \ldots, n$ est 1.

$$[\lambda_0^{(n)} = \lambda^{(n)}, \quad \lambda_n^{(n)} = \lambda_n].$$

Utilisons maintenant la propriété de la convergence uniforme vers 0 de la différence $Q[\theta, \lambda u] - Q[\theta, u]$ quand λ et $\frac{1}{\lambda}$ sont bornés, u tendant vers 0.

Soit $\varepsilon(\alpha)$ le maximum de la valeur absolue de cette différence, quand $1 \leq |\lambda| < 3$, $|u| < \alpha$, θ quelconque. Alors,

$$Q[\theta, h_i^{(n)}] = Q[\theta, h_n] + \delta_{i.n}\, \varepsilon[\,|h_n|\,].$$

Les $\lambda_i^{(n)}$ étant non négatifs, on a :

$$|\,\Sigma \lambda_i^{(n)} \delta_{i.n}\,| \leq \Sigma \lambda_i^{(n)} = 1.$$

Donc

$$Q[\theta, h] = Q[\theta, h_n] + \delta' \varepsilon[|h_n|] + 9\,\delta A\left[\frac{h^2}{|h_1|} + \ldots + \frac{h^2_{n-1}}{|h_n|}\right] \quad . \quad . \quad (6)$$

Supposons que la série $\frac{h_n^2}{h_{n+1}}$ *soit absolument convergente.*

Nous allons déduire immédiatement de la formule (6) que $Q[\theta, h]$ tend vers une limite quand h tend vers 0.

Soit en effet m l'entier défini par

$$|h_m| < |h| \leq |h_{m-1}|.$$

Nous appliquons la formule (6) à la suite $h, h_m, h_{m+1}, \ldots, h_{m+q}$.

Dans le coefficient de $9\,\delta A$, nous remplaçons h^2 par h^2_{m-1}, et nous ajoutons tous les termes marquants de la série $\frac{h_n^2}{|h^{n+1}|}$. Nous obtenons *a fortiori* :

$$Q[\theta, h] = Q[\theta, h_{m+q}] + \delta' \varepsilon[\,|h_{m+q}|\,] + 9\,\delta A \sum_{m-1}^{\infty} \frac{h_n^2}{|h_{n+1}|} \quad . \quad (7)$$

Soit h' un nombre quelconque inférieur en valeur absolue à h_{m-1} et q assez grand pour que $|h_{m+q}| < |h'|$. Nous trouvons, en faisant croître q :

$$|\,Q[\theta, h) - Q(\theta, h')\,| \leq 18 A \sum_{m-1}^{\infty} \frac{h_n^2}{|h_{n+1}|}.$$

Sous la seule condition : $|h|$ et $|h'| < |h_{m-1}|$.

Donc $Q[\theta, h]$ tend vers une limite quand h tend vers 0. *$F(\theta)$ possède une dérivée au point θ.* Soit $\varphi(\theta)$ sa valeur. On a, en faisant croître q indéfiniment dans la formule (7) *pour* $|h| < 2\alpha\,|h_1|$.

$$Q(\theta, h) = \varphi(\theta) + \delta A\left[\frac{h^2}{|h_m|} + 9 \sum_{m}^{\infty} \frac{h_n^2}{|h_{n+1}|}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

En résumé, *si* $|h_n|$ *tend vers 0 en décroissant, si la série* $\frac{h_n^2}{h_{n+1}}$

est absolument convergente, si les nombres $\frac{F(t+u) + F(t-u) - 2F(t)}{u^2}$ *où* $t = \theta + h_n$ *restent bornés pour toute valeur réelle de u et pour toute valeur entière de n (positif), sous ces conditions suffisantes, $F(\theta)$ possède une dérivée au point θ.*

Un cas particulier remarquable est celui où la suite $\frac{h_n}{h_{n+1}}$ est bornée.

Soit $\left|\frac{h_n}{h_{n+1}}\right| < \alpha$, α étant indépendant de n. Si $\frac{h_n}{h_{n+q}} < 2$, et si nous supprimons dans la suite les termes $h_{n+1}, \ldots, h_{n+q}$, la nouvelle suite obtenue h_n' satisfait à la condition $\left|\frac{h'_n}{h'_{n+1}}\right| < 2\alpha$. $|h|$ étant compris entre $|h_{m-1}|$ et $|h_m|$, nous considérons la suite $h, h_m, h_{m+1}, \ldots$, et, conservant son premier terme, nous la réduisons de proche en proche, en y supprimant, au fur et à mesure que nous en rencontrons un dans la suite parcourue dans son ordre naturel, tout terme supérieur en valeur absolue à la moitié du dernier terme conservé.

Dans la suite restante, $h, h'_1, h'_2 \ldots, h'_q, \ldots$ le rapport de chaque terme au suivant est inférieur en valeur absolue à 2α. La série $\frac{h'^2_n}{h'_{n+1}}$ est convergente, d'après :

$$|h'_n| < \frac{1}{2^n} \cdot |h|, \quad \text{et} \quad \frac{h'^2_n}{|h'_{n+1}|} < 2\alpha\,|h'_n|.$$

On a :

$$\frac{h^2}{|h'_1|} + 9 \sum_{1}^{\infty} \frac{h'^2_n}{|h'_{n+1}|} < 2\alpha\,|h|\left[1 + \frac{9}{2} + \ldots + \frac{9}{2^n} + \ldots\right] = 20\alpha\,|h|,$$

Donc, *dans le cas où le rapport* $\frac{h_n}{h_{n+1}}$ *est inférieur en valeur absolue à un nombre α indépendant de n, et où le rapport $|R(t,u)|$ est borné par A quels que soient u réel et $t = \theta + h_n$ ou $t = \theta$, $F(\theta)$ possède une dérivée $\varphi(\theta)$ au point θ, et on a la formule*

$$Q[\theta, h] = \varphi(\theta) + 20\delta\,\alpha A h, \quad \textit{pour } |h| < 2\alpha\,|h_1|. \; (\delta^2 < 1) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$