

NEDERL. AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

---

PROCEEDINGS OF THE  
SECTION OF SCIENCES

VOLUME XLIV  
(Nos. 6–10)

PUBLISHED BY  
N.V. NOORD-HOLLANDSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ,  
AMSTERDAM 1941

Proc. Ned. Akad. Wet., Vol. 44, Nos. 6–10, p. 683–1254, Amsterdam, 1941





## CONTENTS

Proceedings No. 6 . . . . .	683
„ No. 7 . . . . .	769
„ No. 8 . . . . .	881
„ No. 9 . . . . .	1043
„ No. 10 . . . . .	1165



# INDEX

## **Anatomy.**

- ARIËNS KAPPERS, C. U.: "Neurobiotactic influences in the arrangement of midbrain and 'tween-brain centres", p. 130.
- ARIËNS KAPPERS, C. U.: "The oculomotor nucleus of the electric stargazers: *Astroscopus guttatus* and *Astroscopus y-graecum*", p. 369.
- ARIËNS KAPPERS, C. U.: "Introductory note on the phylogenetic and ontogenetic development of the Cortex cerebri", p. 521.
- BAUMANN, C.: "Hemiballism and Biballism", p. 852.
- BRUMMELKAMP, R.: "Equal distribution of the neo-cortical nucleus mass and equal growth intensity of the neo-cortex. (The significance of neurobiotaxis for this problem)", p. 529.
- BRUMMELKAMP, R.: "Microgyria and retarded migration", p. 1011.

## **Astronomy.**

- NIJLAND †, A. A.: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen". XXXIV. R X Lyrae, p. 754.
- NIJLAND, † A. A.: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen". XXXV. R W Lyrae, p. 757.

## **Biochemistry.**

- BUNGENBERG DE JONG, H. G., and E. G. HOSKAM: "Motory phenomena in coacervate drops in a diffusion field and in the electric field", p. 1099.
- BUNGENBERG DE JONG, H. G., E. G. HOSKAM and L. H. V. D. BRANDHOF-SCHAEGEN: "The influence of the temperature on the complexcoacervation of gelatine and gum arabic", p. 1104.

## **Botany.**

- BLAAUW, A. H.: "On the Relation between Flower-formation and Temperature". I. (Bulbous Irises), p. 513.
- BLAAUW, A. H.: "On the Relation between Flower-formation and Temperature". II. (Bulbous Irises), p. 684.
- BLAAUW, A. H., ANNIE M. HARTSEMA en C. W. C. VAN BEEKOM: "Bloemen of bollen bij *Allium Cepa* L.". I, p. 244.
- BLAAUW, A. H., ANNIE M. HARTSEMA en C. W. C. VAN BEEKOM: "Bloemen of bollen bij *Allium Cepa* L." II, p. 361.
- BOK, R.: "The influence of oxygen-nitrogen mixtures upon the dwarfing of *Ardista Crispa* (Thunb.) A. DC", p. 1128.
- DILLEWIJN, C. VAN: "Some technical remarks about the colchicine treatment of Gramineae", p. 1118.
- FUNKE, G. L.: "The photoperiodic responses of *Anthemis tinctoria* in different ranges of wave length", p. 989.

- FUNKE, G. L.: "The growth of the petioles of waterplants in solutions of phytohormones". I, p. 1121.
- FUNKE, G. L.: "The growth of the petioles of waterplants in solutions of phytohormones". II, p. 1214.
- GORTER, A. and W. NADORT: "Composition of Gas in the Intercellular Spaces of Potatoes", p. 1112.
- GOUWENTAK, CORNELIA A.: "Cambial Activity as Dependent on the Presence of Growth Hormone and the Non-Resting Condition of Stems", p. 654.
- ITERSON Jr., G. VAN, and A. D. J. MEEUSE: "The shape of cells in homogeneous plant tissues". I, p. 770.
- ITERSON Jr., G. VAN, and A. D. J. MEEUSE: "The shape of cells in homogeneous plant tissues". II, p. 897.
- MAAS GEESTERANUS, R. A.: "On the development of the stellate form of the pith cells of *Juncus* species". I, p. 489.
- MAAS GEESTERANUS, R. A.: "On the development of the stellate form of the pith cells of *Juncus* species". II, p. 648.

#### Chemistry.

- JAEGER, F. M., and J. A. VAN DIJK: "On the Preparation of  $\beta$ -Phenyl-isopropylamine (Benzedrine), of the isomeric  $\alpha$ -Phenyl-propylamine and of  $\beta$ -Phenyl- $\alpha$ -propylene-diamine and on the Resolution of these Bases into their Optically-active Antipodes". I, p. 26.
- JAEGER, F. M., and W. FROENTJES: "On the Resolution of  $\alpha$ -Phenylpropylamine into its Optically-active Antipodes". (2nd Part), p. 140.
- JAEGER, F. M., and W. FROENTJES: "On the Resolution of  $\beta$ -Phenyl- $\alpha$ -Propylene-diamine into its Optically-active Components". (3th Part), p. 354.
- JAEGER, F. M., and E. ROSENBOHM: "The Temperature-Coefficient of the Electrical Resistance of Ruthenium and its Thermo-electrical Behaviour with respect to Platinum", p. 144.
- LOOSJES, R., and A. C. SCHUFFELEN: "Ion Activities in Suspensions (Preliminary note)", p. 475.

#### Embryology.

- WOERDEMAN, M. W.: "On the development of polarity in the ectoderm of amphibian embryos", p. 262.

#### Geology.

- BROUWER, H. A.: "Tektonik und Magma in der Insel Celebes und der indonesische Gebirgstypus", p. 253.
- GERMERAAD, H.: "On the rocks of the isle of Koendoer. Riouw-Archipelago. Neth. East Indies", p. 1227.
- KONING, L. P. G.: "On gersdorffite in the Falconbridge ore deposit, Sudbury District, Ontario, Canada", p. 93.
- KUENEN, PH. H.: "Major geological cycles", p. 333.
- ROEVER, W. P. DE: "Die permischen Alkaligesteine und die Ophiolithe des timoresischen Faltengebirges", p. 993.

WESSEM, A. VAN: "On rocks from the isles of Soegi, Tjombol and Tjitlim. Riouw Archipelago. Netherlands East Indies", p. 1219.

WESTERVELD, J.: "Three geological sections across South Sumatra", p. 1131.

#### **Geophysics.**

VENING MEINESZ, F. A.: "Gravity over the Hawaiian Archipelago and over the Madeira area; conclusions about the Earth's crust", p. 2.

VENING MEINESZ, F. A.: "Gravity over the continental edges", p. 883.

#### **Histology.**

BOL, F. P.: "On the structure of the connective tissue of the anterior lobe of the hypophysis cerebri and the nature of the intraprotoplasmic networks described by Tello in and around the cells of the anterior lobe", p. 1008.

#### **Hormonology.**

KAAY, F. C. VAN DER, und L. P. H. J. DE VINK: "Die Wirkung des gonadotropen aus schwangerem Stutenserum gewonnenen Hormons bei verschiedenen Haustieren". I, p. 670.

KAAY, F. C. VAN DER, und L. P. H. J. DE VINK: "Die Wirkung des gonadotropen aus schwangerem Stutenserum gewonnenen Hormons bei verschiedenen Haustieren". II, p. 760.

#### **Hydrodynamics.**

BURGERS, J. M.: "Some considerations on the development of boundary layers in the case of flows having a rotational component", p. 13.

BURGERS, J. M.: "On the distinction between irregular and systematic motion in diffusion problems", p. 344.

BURGERS, J. M.: "On the influence of the concentration of a suspension upon the sedimentation velocity (in particular for a suspension of spherical particles)", p. 1045.

BURGERS, J. M.: "On the influence of the concentration of a suspension upon the sedimentation velocity (in particular for a suspension of spherical particles)", p. 1177.

#### **Mathematics.**

BELINFANTE, M. J.: "Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie". (Erste Mitteilung). Die CAUCHYschen Integralsätze und die TAYLORSche Reihe, p. 173.

BELINFANTE, M. J.: "Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie". (Zweite Mitteilung). Der Satz vom Integral der logarithmischen Ableitung. I, p. 276.

BELINFANTE, M. J.: "Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie". (Dritte Mitteilung). Der Satz vom Integral der logarithmischen Ableitung. II, p. 420.

BELINFANTE, M. J.: "Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie". (Vierte Mitteilung). Der WEIERSTRASSsche Unbestimmtheitssatz, p. 563.

BELINFANTE, M. J.: "Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie". (Fünfte Mitteilung). Die intuitionistische Uebertragung des PICARDSchen Satzes, p. 711.

BRIJN, N. G. DE: "Ein Satz über schlichte Funktionen", p. 47.

GODEAUX, LUCIEN: "Une propriété des variétés de VERONESE", p. 1058.

GROOT, J. DE: "Sätze über topologische Erweiterung von Abbildungen", p. 933.

HAANTJES, J.: "The conformal DIRAC equation", p. 324.

- HAANTJES, J.: "Conformal Differential Geometry. Curves in conformal euclidean spaces", p. 814.
- JONGH, B. H. DE: "Algemeen Minimum-waarschijnlijkheids Theorema", p. 738.
- KOKSMA, J. F.: "Ueber die Diskrepanz (mod 1) und die ganzzahligen Lösungen gewisser Ungleichungen", p. 75.
- KOKSMA, J. F., und B. MEULENBELD: "Ueber die Approximation einer homogenen Linearform an die Null", p. 62.
- KOKSMA, J. F., und B. MEULENBELD: "Simultane Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern", p. 310.
- KOKSMA, J. F., und B. MEULENBELD: "Diophantische Approximationen homogener Linearformen in imaginären quadratischen Zahlkörpern", p. 426.
- KULK, W. VAN DER: "Eine Verallgemeinerung eines Theorems aus der Theorie der PFAFF'schen Gleichungen für den einfachsten Fall  $m = 2$ ". I, p. 452.
- KULK, W. VAN DER: "Eine Verallgemeinerung eines Theorems aus der Theorie der PFAFF'schen Gleichungen für den einfachsten Fall  $m = 2$ ". II, p. 625.
- LOONSTRA, F.: "Folgen und Reihen in bewerteten Körpern". (Erste Mitteilung). I, p. 286.
- LOONSTRA, F.: "Folgen und Reihen in bewerteten Körpern". (Erste Mitteilung). II, p. 397.
- LOONSTRA, F.: "Die Lösung von Differentialgleichungen in einem bewerteten Körper", p. 409.
- LOONSTRA, F.: "Die LIESchen Fundamentalsätze in bewerteten Körpern", p. 568.
- LOONSTRA, F.: "Folgen und Reihen in bewerteten Körpern". (Zweite Mitteilung), p. 577.
- LOONSTRA, F.: "Bericht über die Konstruktion und die Fortsetzung von Bewertungen", p. 700.
- LOONSTRA, F.: "Bericht über die Konstruktion und die Fortsetzung von Bewertungen". II, p. 806.
- MEIJER, C. S.: "Neue Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen". (Erste Mitteilung), p. 81.
- MEIJER, C. S.: "Neue Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen". (Zweite Mitteilung), p. 186.
- MEIJER, C. S.: "Neue Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen". (Dritte Mitteilung), p. 298.
- MEIJER, C. S.: "Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen und ihre Produkte". (Erste Mitteilung), p. 435.
- MEIJER, C. S.: "Neue Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen". (Vierte Mitteilung), p. 442.
- MEIJER, C. S.: "Neue Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen". (Fünfte Mitteilung), p. 590.
- MEIJER, C. S.: "Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen und ihre Produkte". (Zweite Mitteilung), p. 599.
- MEIJER, C. S.: "Eine neue Erweiterung der LAPLACE-Transformation". (Erste Mitteilung), p. 727.
- MEIJER, C. S.: "Eine neue Erweiterung der LAPLACE-Transformation". (Zweite Mitteilung), p. 831.
- MEIJER, C. S.: "Multiplikationstheoreme für die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(z)$ ", p. 1062.

- MOLENAAR, P. G.: "Ueber die Differentialkovariante erster Ordnung der binären kubischen Differentialform", p. 41.
- MONNA, A. F.: "Sur un principe de variation de GAUSS dans la théorie du potentiel", p. 50.
- MONNA, A. F.: "Quelques applications de la théorie moderne du potentiel aux fonctions holomorphes", p. 718.
- MONNA, A. F.: "Sur la représentation des fonctions harmoniques", p. 939.
- ORNSTEIN, L. S., and J. M. W. MILATZ: "The analogy between the statistics of numbers and statistical mechanics", p. 163.
- REMAK, ROBERT: "Ein Satz über die sukzessiven Minima bei definiten quadratischen Formen", p. 1071.
- RUTGERS, J. G.: "Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL". I, p. 464.
- RUTGERS, J. G.: "Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL". II, p. 636.
- RUTGERS, J. G.: "Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL". III, p. 744.
- RUTGERS, J. G.: "Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL". IV, p. 840.
- RUTGERS, J. G.: "Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL". V, p. 978.
- RUTGERS, J. G.: "Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL". VI, p. 1092.
- UVEN, M. J. VAN: "Likelihood as conditioned probability", p. 947.
- VEEN, S. C. VAN: "Die Entwicklung des vollständigen elliptischen Integrales erster Art in der Nähe von  $k=1$ ". I, p. 606.
- VEEN, S. C. VAN: "Annäherungsformeln für das vollständige elliptische Integral erster Art in der Nähe von  $k=1$ ". II, p. 614.
- VEEN, S. C. VAN: "Annäherungsformeln für das vollständige elliptische Integral erster Art in der Nähe von  $k=1$ ". III, p. 825.
- VEEN, S. C. VAN: "Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art". I, p. 964.
- VEEN, S. C. VAN: "Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergenten Reihen". I, p. 974.
- VEEN, S. C. VAN: "Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art". II, p. 1077.
- VEEN, S. C. VAN: "Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergenten Reihen". II, p. 1085.
- VEEN, S. C. VAN: "Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art". III, p. 1198.
- VEEN, S. C. VAN: "Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergenten Reihen". III, p. 1206.
- WEITZENBÖCK, R.: "Ueber die Figur dreier Ebenen im  $R_5$ ", p. 907.
- WEITZENBÖCK, R., and W. J. BOS: "Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im  $R_4$ ". (Sechste Mitteilung), p. 1052.

- WEITZENBÖCK, R., und W. J. BOS: "Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im  $R_4$ ". (Siebente Mitteilung), p. 1185.
- WOLFF, J.: "Théorème sur l'itération d'une représentation conforme". (Deuxième communication), p. 195.
- WOLFF, J.: "Sur l'itération d'une représentation conforme". (Troisième communication), p. 308.
- WOLFF, J.: "Séries se rapportant aux fonctions holomorphes bornées", p. 619.
- WOLFF, J.: "Inégalités remplies par les fonctions univalentes", p. 956.
- WOLFF, J.: "Domaines d'univalence et d'étoilement des fonctions holomorphes à partie réelle positive dans un demi-plan", p. 1210.
- WRONA, W.: "Eine Verallgemeinerung des SCHURSchen Satzes", p. 943.

### **Mechanics.**

- BIEZENO, C. B., and J. J. KOCH: "Some explicit formulae, of use in the calculation of arbitrarily loaded, thin-walled cylinders", p. 505.
- BIEZENO, C. B., and J. J. KOCH: "On the elastic behaviour of the so-called "Bourdon" pressure gauge". I, p. 779.
- BIEZENO, C. B., and J. J. KOCH: "On the elastic behaviour of the so-called "Bourdon" pressure gauge". II, p. 914.

### **Medicine.**

- BIJTEL, J.: "A contribution to our knowledge about the conduction of stimuli in the auditory nerve", p. 198.
- BIJTEL, J.: "Some considerations concerning our knowledge of the action of the auditory organ". I, p. 1037.
- BIJTEL, J.: "Some considerations concerning our knowledge of the action of the auditory organ". II, p. 1159.
- DEVIVERE, D. VON, and A. DE KLEYN: "A new form of position nystagmus", p. 921.
- GERLINGS, P. G.: "Investigations about stimulation and paralysis of the labyrinth by methylamine", p. 1031.
- GERLINGS, P. G., and A. DE KLEYN: "Vestibular nystagmus caused by acoustic stimulation", p. 800.
- GREWEL, F.: "Classification of the disorders of language, speaking and voice", p. 1248.
- KLEYN, A. DE: "Position nystagmus caused by "Neck-reflexes", especially in cases of arachnoiditis posterior", p. 153.
- KLEYN, A. DE: "Détournements des différentes formes de nystagmus dans le système nerveux central". I, p. 268.
- KLEYN, A. DE: "Détournements des différentes formes de nystagmus dans le système nerveux central". II, p. 378.
- KLEYN, A. DE: "Détournements des différentes formes de nystagmus dans le système nerveux central". III, p. 540.
- KLEYN, A. DE: "Lésions partielles du huitième nerf crânien". I, p. 547.
- KLEYN, A. DE: "Lésions partielles du huitième nerf crânien". II, p. 690.
- KLEYN, A. DE: "Lésions partielles du nerf vestibulaire et de ses voies centrales". III, p. 787.



- KLEYN, A. DE, and H. W. STENVERS: "Tonic neck-reflexes on the eye-muscles in man", p. 385.
- KLEYN, A. de: "Some remarks on symmetrical hearing remnants", p. 1190.
- LANGE, CORNELIA DE: "Microscopic investigation of the brain in a case of cranio-synostosis", p. 664.
- LANGELAAN, J. W.: "The [ultimate structure of the striped muscle fibre of the frog distinguishable with the microscope", p. 1166.
- ONG SIAN GWAN: "De l'immunité contre le phosgène", p. 205.
- ONG SIAN GWAN: "De l'immunité contre le phosgène. Présence d'une protéine nouvelle dans le poumon intoxiqué par le phosgène". (Deuxième mémoire), p. 871.
- ONG SIAN GWAN: "Biophysique. Spectres d'absorption de l'extrait et des protéines du poumon normal et du poumon intoxiqué par le phosgène dans l'ultra-violet". (Troisième mémoire), p. 1024.
- UTERMÖHLEN, G. P.: "L'effet prismatique dans les cas-MÉNIÈRE", p. 200.

#### Palaeontology.

- BELLEN, R. C. VAN: "Some eocene Foraminifera from the neighbourhood of Ričice near Imotski, E. Dalmatia, Yugoslavia", p. 996.
- BELLEN, R. C. VAN, J. F. C. DE WITT PUYT, A. C. RUTGERS, and J. VAN SOEST: "Smaller Foraminifera from the Lower Oligocene of Cuba", p. 1140.
- FLORSCHÜTZ, F.: "Azolla filiculoides Lam. uit de Paludina-klei van Berlijn", p. 339.
- KEIJZER, F.: "Eine neue eozäne Foraminiferengattung aus Dalmatien", p. 1006.
- REGTEREN ALTENA, C. O. VAN: "Old Tertiary Mollusca from Curaçao", p. 1234.

#### Petrology.

- HEERING, J.: "Cordieritpseudomorphosen in Sanidin-Albit-Rhyoliten von Tandjoeng Illipoi, Wetar (Niederl. Ost-Indien)", p. 102.

#### Physics.

- BOSCH, J. C. VAN DEN, and P. F. A. KLINKENBERG: "Some Observations on the Spectra of Germanium", p. 556.
- CLAY, J.: "Cosmic Ray Showers", p. 888.
- ELTEREN, J. F. VAN: "The orientation of watermolecules round charged particles", p. 930.
- HEUX, J. W. N. LE: "Recherches sur quelques phénomènes d'interférence des courbes de vibration". (Suite), p. 926.
- ITERSON, F. K. TH. VAN: "La pression du toit sur le charbon près du front dans les exploitations par tailles chassantes". (Troisième Chapitre). I, p. 120.
- ITERSON, F. K. TH. VAN: "La pression du toit sur le charbon près du front dans les exploitations par tailles chassantes". (Troisième Chapitre). II, p. 230.

#### Physiology, Comparative.

- BAERENDS, G. P.: "On the Life-History of *Ammophila campestris* Jur", p. 483.
- JORDAN, H. J., and N. POSTMA: "Ueber den Tonus des Schneckenfusses (*Helix pomatia* L.)". III. Zwei antagonistische Zentren in den Pedalganglien. (Vorläufige Mitteilung), p. 1169.

- POSTMA, N.: "Ueber den Tonus des Schneckenfusses (*Helix pomatia* L.). I. Der Tonus gemessen an der Pedalkonstanz. (Vorläufige Mitteilung), p. 1151.
- POSTMA, N.: "Ueber den Tonus des Schneckenfusses (*Helix pomatia* L.)". II. Die Tonuslösung. (Vorläufige Mitteilung), p. 1239.
- SEGAAR, J.: "Der Einfluss von Kohlensäure auf die Atmungsbewegungen von Crustaceen". I, p. 860.
- SEGAAR, J.: "Der Einfluss von Kohlensäure auf die Atmungsbewegungen von Crustaceen". II, p. 1017.
- Psychology.**
- RÉVÉSZ, G.: "Die menschlichen Kommunikationsformen und die sog. Tiersprache". III, p. 109.
- Zoology.**
- HOOGENRAAD, H. R., and A. A. DE GROOT: "Observations on a special manner of feeding of a species of *Diffugia* (*Diffugia rubescens* PENARD)", p. 217.
- HOOIJER, D. A.: "Note on a diseased dental condition in *Hippopotamus amphibius* L.", p. 1147.
-

## AUTHOR-INDEX

### A

ARIËNS KAPPERS, C. U., 130, 369, 521.

### B

BAERENDS, G. P., 483.  
BAUMANN, C., 852.  
BEEKOM, C. W. C. VAN, 244, 361.  
BELINFANTE, M. J., 173, 276, 420, 563,  
711.  
BELLEN, R. C. VAN, 996, 1140.  
BIEZENO, C. B., 505, 779, 914.  
BLAAUW, A. H., 244, 361, 513, 684.  
BOK, R., 1128.  
BOL, F. P., 1008.  
BOS, W. J., 1052, 1185.  
BOSCH, J. C. VAN DEN, 556.  
BRANDHOF-SCHAEGEN, L. H. V. D., 1104.  
BROUWER, H. A., 253.  
BRUMMELKAMP, R., 529, 1011.  
BRUIJN, N. G. DE, 47.  
BUNGENBERG DE JONG, H. G., 1099, 1104.  
BURGERS, J. M., 13, 344, 1045, 1177.  
BIJTEL, J., 198, 1037, 1159.

### C

CLAY, J., 888.

### D

DEVIVERE, D. VON, 921.  
DILLEWIJN, C. VAN, 1118.  
DIJK, J. A. VAN, 26.

### E

ELTEREN, J. F. VAN, 930.

### F

FLORSCHÜTZ, F., 339.  
FROENTJES, W., 140, 354.  
FUNKE, G. L., 989, 1121, 1214.

### G

GERLINGS, P. G., 800, 1031.  
GERMERAAD, H., 1227.

GODEAUX, LUCIEN, 1058.  
GORTER, A., 1112.  
GOUWENTAK, CORNELIA A., 654.  
GREWEL, F., 1248.  
GROOT, A. A. DE, 217.  
GROOT, J. DE, 933.

### H

HAANTJES, J., 324, 814.  
HARTSEMA, ANNIE M., 244, 361.  
HEERING, J., 102.  
HEUX, J. W. N. LE, 926.  
HOOGENRAAD, H. R., 217.  
HOOIJER, D. A., 1147.  
HOSKAM, E. G., 1099, 1104.

### I

ITERSON, F. K. TH. VAN, 120, 230.  
ITERSON Jr., G. VAN, 770, 897.

### J

JAEGER, F. M., 26, 140, 144, 354.  
JONGH, B. H. DE, 738.  
JORDAN, H. J., 1169.

### K

KAAY, F. C. VAN DER, 670, 760.  
KEIJZER, F., 1006.  
KLEYN, A. DE, 153, 268, 378, 385, 540,  
547, 690, 787, 800, 921, 1190.  
KLINKENBERG, P. F. A., 556.  
KOCH, J. J., 505, 779, 914.  
KOKSMA, J. F., 62, 75, 310, 426.  
KONING, L. P. G., 93.  
KUENEN, PH. H., 333.  
KULK, W. VAN DER, 452, 625.

### L

LANGE, CORNELIA DE, 664.  
LANGELAAN, J. W., 1166.  
LOONSTRA, F., 286, 397, 409, 568, 577,  
700, 806.  
LOOSJES, R., 475.

## M

MAAS GEESTERANUS, R. A., 489, 648.  
 MEEUSE, A. D. J., 770, 897.  
 MEIJER, C. S., 81, 186, 298, 435, 442,  
 590, 599, 727, 831, 1062.  
 MILATZ, J. M. W., 163.  
 MOLENAAR, P. G., 41.  
 MONNA, A. F., 50, 718, 939

## N

NADORT, W., 1112.  
 NIJLAND †, A. A., 754, 757.

## O

ONG SIAN GWAN, 205, 871, 1024.  
 ORNSTEIN, L. S., 163.

## P

POSTMA, N., 1151, 1169, 1239.

## R

REGTEREN ALTENA, C. O. VAN, 1234.  
 REMAK, ROBERT, 1071.  
 RÉVÉSZ, G., 109.  
 ROEVER, W. P. DE, 993.  
 ROSENBOHM, E., 144.

RUTGERS, A. C., 1140.  
 RUTGERS, J. G., 464, 636, 744, 840, 978,  
 1092.

## S

SCHUFFELEN, A. C., 475.  
 SEGAAR, J., 860, 1017.  
 SOEST, J. VAN, 1140.  
 STENVERS, H. W., 385.

## U

UTERMÖHLEN, G. P., 200.  
 UVEN, M. J. VAN, 947.

## V

VEEN, S. C. VAN, 606, 614, 825, 964, 974,  
 1077, 1085, 1198, 1206.  
 VENING MEINESZ, F. A., 2, 883.  
 VINK, L. P. H. J. DE, 670, 760.

## W

WEITZENBÖCK, R., 907, 1052, 1185.  
 WESSEM, A. VAN, 1219.  
 WESTERVELD, J., 1131.  
 WITT PUYT, J. F. C. DE, 1140.  
 WOERDEMAN, M. W., 262.  
 WOLFF, J., 195, 308, 619, 956, 1210.  
 WRONA, W., 943.

PROCEEDINGS

VOLUME XLIV

No. 6

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: M. W. WOERDEMAN

---

---

CONTENTS

- BLAAUW, A. H.: "On the Relation between Flower-Formation and Temperature", II. (Bulbous Irises), p. 684.
- KLEYN, A. DE: "Lésions partielles du huitième nerf crânién". II, p. 690.
- LOONSTRA, F.: "Bericht über die Konstruktion und die Fortsetzung von Bewertungen". (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 700.
- BELINFANTE, M. J.: "Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie". (Fünfte Mitteilung). Die intuitionistische Uebertragung des PICARD'schen Satzes. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 711.
- MONNA, A. F.: "Quelques applications de la théorie moderne du potentiel aux fonctions holomorphes". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 718.
- MEIJER, C. S.: "Eine neue Erweiterung der LAPLACE-Transformation". (Erste Mitteilung). (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 727.
- JONGH, B. H. DE: "Algemeen Minimum-waarschijnlijkheids Theorema". (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 738.
- RUTGERS, J. G.: "Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL". III. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 744.
- NIJLAND †, A. A.: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen". XXXIV. R X Lyrae. (Communicated by Prof. A. PANNEKOEK). (With one plate), p. 754.
- NIJLAND, † A. A.: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen". XXXV. R W Lyrae. (Communicated by Prof. A. PANNEKOEK). (With one plate), p. 757.
- KAAY, F. C. VAN DER, und L. P. H. J. DE VINK: "Die Wirkung des gonadotropen aus schwangerem Stutenserum gewonnenen Hormons bei verschiedenen Haustieren". II. (Communicated by Prof. G. KREDIET). (With one plate), p. 760.
- 
-

**Botany.** — *On the Relation between Flower-Formation and Temperature.*  
II. (*Bulbous Irises*). By A. H. BLAAUW. (Contribution N<sup>o</sup>. 68 of  
the Laboratory for Plantphysiological Research, Wageningen).

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

Basing ourselves on the series of experiments described in the first part and with reference to the communications Nos. 41 and 50 on the influence of the temperature in summer on flowering or non-flowering (Proceed. Vol. XXXVII and XXXIX), we can now outline *the relation between flower-formation and temperature* with these Irises as follows.

I. Bulbous plants in general, and among these the Bulbous Iris, must have reached a certain size before they can proceed to the formation of flowers. Under a certain limit the small bulbs can in no way, at least by no temperature-treatment, be induced to form flowers. It should be added that it is not known as yet whether e.g. by transplantation or by injection of some substance such young bulbs can be made to flower. Such bulbs however would not be in their natural state, which we are considering here.

A certain size and a certain weight must have been reached before, under definite conditions, generative organs can be produced. It is not age of which we are speaking here, but size or weight, for with the Hyacinth e.g. this flowering limit is not determined by the fact whether the bulb is already 3 years old and not 2; no, a two-year-old bulb, measuring 8 cm in circumference, will (with *Innocence*) under good condition usually be able to form a spike, but a three-year-old bulb of only 6 cm circumference will hardly ever do so. A tulip has a so-called one year bulb; if the bulbs (with *Pride of Haarlem*) weigh less than 8 g, they will pretty certainly originate no flowers, but a bulb of 12 g from the same mother-bulb, will in most cases start producing a flower: weight or circumference are decisive. Both these bulbs have not as yet themselves assimilated with green leaves of their own; both have been fed and grown by the mother-bulb. Only the bigger of the two has the power to originate a flower. The measure at which a bulb is or is not able to flower diverges widely for the different races and varieties of the same species. For the above-mentioned Darwin-tulip the limit lies at 8 to 10 g, but for certain early tulips it lies much lower, so that even small bulbs of 3 g can still form flowers. Now, with the Hyacinth and Tulip little attention has been paid to this flowering limit, it is an important factor however in the culture of the Bulbous Iris (see Comm. N<sup>o</sup>. 41, Proceed. XXXVII, 1934), and therefore every grower of Irises knows the limits for the different varieties well. For *Imperator* it lies at about 5—6 cm (2,4—4,0 g), with *Wedgwood* at 7—8 cm (7,4—

11 g), but with *Yellow Queen* already at  $3\frac{1}{2}$ — $4\frac{1}{2}$  cm (1.2—2.7 g). For closely related races this limit diverges very much and is a fixed characteristic of each race.

It should be remembered that the size of these bulbs, determining the flowering limit, can have been brought about in various ways: 1. from seed, about three years being required to reach the flowering stage; so here, barring the small reserve in the seed, it is only the assimilatory function of the own leaves (1 to 4) in three successive seasons, which in collaboration with the roots builds up the bulb; 2. the flowering or non-flowering mother-bulb produces a few smaller or bigger bulblets, which sometimes require 2 years, sometimes 1, to become able to flower; here the bulb has therefore grown to the flowering size partly by food-supply from the mother-bulb, partly by its own assimilation; 3. lastly, the full-grown bulb may have been entirely built up by the mother-bulb; this is the case e.g. with a flowering *Iris* plant, where the biggest of the new bulbs, though flattened and of little value for the trade, reaches the weight at which it has become able to flower by food-supply from the mother-bulb only.

Thus the flowering power can be brought about *by assimilation of the bulb itself, but also by food-supply and growth from the mother-bulb only*. In the latter case the new bulb must just as well reach a certain size in order to be able to flower: the smaller bulbs, though also in direct connection with the assimilating mother-bulb, cannot produce flowers. So by reaching the said limit something in the bulb has changed *qualitatively*, one might say *potentially*. This however may very well be the result of quantitative differences and a change in the relations caused by these.

II. The question may now be put: has the flowering power come into being gradually, or in a short time at (which, of course, does not mean "by") a definite size of the bulb? It seems probable for two reasons that the flowering power was already in preparation for a considerable time during growth, i.e. during the assimilation. In the first place the flowering limit is slightly different every year, which indicates that already the time before digging has a perceptible influence.

[Every year bulbs of *Imperator* are sorted in the beginning of August, directly after digging, at a circumference lying between 5 and 6 cm, with a weight of 2.4—4 g. Groups of 100 are then kept at different temperatures until planted at the end of October. In the following year the percentage of bloomers is counted in the field. After one year the number of bloomers is much greater than after another, as appears from the following example.

	5°	7°	9°	13°	17°	20°	23°	25½°	28°	31°
Weight per bulb 3.12 g 1934—35	22	39	60	87	65	63	80	—	88	94
Weight per bulb 3.40 g 1936—37	0	1	18	54	49	70	40	57	68	76

The bulbs that had been sorted in 1934 had in 1935 a very high percentage of bloomers as compared with other years; 1937 was an average blooming season. In the above series only after a treatment at 20° the bloom is about the same in both years.]



In the second place: with the size of the bulbs *also the flowering power steadily increases*, from  $\pm 5$  cm up to the biggest size of  $\pm 10$  cm. This is observed after various treatments: the bigger the bulb, with the more certainty the flower-origination will be successful. Therefore also below the limit a gradual approach to the flowering power is in any case more likely than a rather sudden development of such a condition.

So we suppose that during the growth of the bulb as well before as after the average size at which the flowering power begins has been reached, a process is active slowly increasing and passing at a certain point the size-limit above which the bulb is able to flower.

This limit means that below it *under no condition* flower-formation can occur, and that above it *under definite conditions* flowers are originated. The state below this limit we may provisionally denote as the *subflorigene state*.

[It is once more pointed out that in this article by flowering power only the ability is meant to form flower-organs, without regard to the process by which subsequently this flower-origination is brought into bloom].

III. Above this limit we cannot speak off-hand of a florigene state, being a state in which the flower will be formed. For with the Bulbous Irises at least three phases can be clearly distinguished above this limit. Although the bulbs above this size will *later on*, under definite conditions, produce flowers, still in the first months after digging even the heaviest bulbs are as yet unable to do so in any temperature, as contrasted with the Hyacinth e.g. So after digging the Iris-bulbs are still *undisposed* to form flowers, though a *predisposition to do so does exist*. This state may then be termed the *preflorigene phase*.

Numerous temperature-experiments revealed the following very characteristic properties with such bulbs kept in dark (IV—VIII).

IV. If after digging temperatures of 20° C and upwards are applied to the bulbs continuously flowers are never formed; the florigene phase leading to flower-formation is never reached.

[We have even kept bulbs for a whole year at 20° and upwards, e.g. first dry, afterwards planted and kept in dark; no flower-formation took place. By individual variation it may happen that in 20° an occasional bulb originates flower-primordia.]

V. On the other hand the temperatures of 20° C and upwards still strengthen the preflorigene phase.

[1. of the smaller bulbs a much greater percentage subsequently forms flowers if after digging first a *high temperature* has been given for a *couple of weeks*.

2. also with heavy bulbs flower-formation is brought about with greater certainty if previously heat has been given for a few weeks, e.g. 3 to 5 weeks 23° to 31° C.]

So the preflorigene state is not only promoted during the growth of the bulb, but also without growth by a high temperature.

VI. Temperatures below 17° C finally lead to flower-formation, i.e. they cause the preflorigene state to pass into the florigene phase. The



stronger the preflorigene state, the stronger the florigene phase will become as the result of these low temperatures, and with the more certainty flower-formation is finally reached. Still the starting of the flower-origination with *Imperator* as a rule requires  $2\frac{1}{2}$  to 3 months in the most favourable temperature (at  $9^{\circ}$  C, also at  $7^{\circ}$  and  $13^{\circ}$  C).

VII. The same low temperatures that bring about the florigene phase at the same time weaken the preflorigene phase. This can be clearly proved with smaller bulbs of e.g. 5 to 7 cm; when after digging these are placed for some weeks in  $5^{\circ}$  to  $9^{\circ}$  C, the chance of flower-formation will be very much lessened and in most cases reduced to zero. Only temperatures of  $20^{\circ}$  and upwards can then restore the bulbs to the preflorigene phase. Of this we have numerous proofs: after 7 weeks at  $5^{\circ}$  the preflorigene state will generally have disappeared, but if then  $23^{\circ}$  is given for another 4 to 6 weeks or  $20^{\circ}$  for 6 to 8 weeks, afterwards a considerable percentage of the bulbs will again be able to form flowers in low temperatures.

VIII. About  $17^{\circ}$  C is the transitional temperature: part of the bulbs reach the flower-forming period in the long run, others never get so far and go on forming leaflets for a long time.

IX. Incidentally attention is here drawn to the leaf-formation. The requirements for it seem on the whole to be rather simpler: the newly germinated seed as well as the smallest bulb are able to form leaves. With the Bulbous Iris the optimum lies at about  $13^{\circ}$  C; leaves are however also formed at  $20^{\circ}$  and higher in dark, the upper limit lies at  $25^{\circ}$  to  $28^{\circ}$  C. So the relation to the temperature is very different from that for the flower-formation.

X. We know that the lower temperatures promote, or cause the florigene phase, with a simultaneous decline of the preflorigene phase. One might be inclined simply to say that the one state is directly transformed into the other. But the matter cannot be as simple as that. For  $9^{\circ}$  C makes the florigene phase appear sooner than  $5^{\circ}$  (see Fig. 1), but in  $5^{\circ}$  the preflorigene state disappears sooner than in  $9^{\circ}$  (see the experiments in the above mentioned communications). Secondly we saw that after the disappearance of the preflorigene phase in lower temperatures, it is possible to revive it by higher temperatures. This would suggest a reversible process, but it is also quite possible that the high temperature develops the preflorigene state afresh from the subflorigene state, and not by diminishing the florigene phase.

We hope that a few experiments will enable us to settle which conception is the true one. To this point we shall return later.

XI. Thus, during the growth of the bulb a subflorigene state passes into the preflorigene state and in high temperatures this latter is strengthened further. But only in temperatures below  $17^{\circ}$  the florigene phase develops, with a decline of the preflorigene phase. New experiments showed however, when this florigene state has advanced far enough, e.g.

by 9°, so that the flower-origination will begin within a few days (2<sup>d</sup> half of Oct. after 9°), that *then* the bulbs can nevertheless accomplish this flower-formation in 20° C, and even very smoothly. So there must still exist a distinct difference between the development of the florigene state and the flower-formation itself, for in 20° in dark the former can never come into being, whereas in 20° the flower may all the same be formed, provided the florigene condition has advanced far enough in the low temperature. Experiments on this point are being continued and may still considerably influence our conceptions.

XII. Summarizing we may state that the data up to now obtained about the relation between flower-formation and temperature with these Iris bulbs compel us to distinguish at least four different phases:

1. *The subflorigene phase*: as long as the bulbs remain under a certain weight no temperature-treatment can bring about flower-formation.

2. *The preflorigene phase*: the bulbs reach such a size that under definite conditions flower-formation will become possible. When dug, in August, bulbs of this size are in the preflorigene phase, which probably has been initiated in the soil for some time previously. A direct flower-origination cannot take place as yet in any temperature. Temperatures above 17° or 20° strengthen the preflorigene phase, but cannot lead to the florigene phase.

3. *The florigene phase*. Temperatures below 17° bring about the florigene phase and at the same time weaken the preflorigene phase. If the preflorigene phase is strong enough by size of bulb and by high temperature, the low temperature is able in the course of many weeks to raise the florigene phase so far that the organs of the flower can be formed.

4. *The flower-forming period* will now set in. The low temperatures which formed the florigene phase are also favourable for this flower-origination. These processes seem to be alike, but evidently are not, though. For if the low temperature has developed the florigene phase far enough, also in 20° the flower-origination can start and proceed very smoothly, whereas 20° is not able to give rise to the florigene phase (barring scarce individual exceptions).

The relation between these different phases is being more closely investigated by a number of experiments.

As no experiments were made by us, based on transplantations (see e.g. MELCHERS, Ber. d. D. B. G. 1939; HAMNER a. BONNER, Bot. Gaz. 100, 1938) or on the use of growth-substances, either by absorption or by injection, we are not qualified and have no occasion to speak in the above description more concretely of definite substances, in casu preflorigene and florigene (see e.g. CAJLACHJAN, C. R. Ac. Sci. U.R.S.S., 1936; KUYPER a. WIERSUM, Proc. Ac. Sci. Amst. 39, 1936; MELCHERS, Ber. D. B. G. 57, 1939). For simplicity one might also use them here, as a hypothesis; I have preferred, however, for the present to speak of "phase" or "state",

since it is more likely that a whole complex of reactions is involved than a definite substance.

The relation here described between flower-formation and temperature holds for the bulbous plants from the *Xiphium*-section of the genus *Iris*, but not for the root-stock Irises or the bulbs from the *Reticulata*-section, which behave more like many other bulbous plants. A comparison of different investigated plants we hope to give later. The here described bulbous Irises with their characteristic low temperature-maximum for the flower-formation (at about 17° C) and with the opposite effect of low and high temperatures, at first seemed to be an exception. The plants investigated up to now, a.o. Hyacinth and Tulip, have a much higher temperature-optimum, form their flower over a much wider temperature-range and therefore do not show the same contrast between low and high temperatures. In some respects, however, the flower-formation of *Allium Cepa* appears to agree with that of the described Irises and it is probable that a large group of plants shows something similar. It is quite imaginable that the great difference in the relation between temperature and flower-formation with these Irises and e.g. the Hyacinth, signifies a characteristic difference between two large groups of plants.

Wageningen, April 1941.

---

**Medicine.** — *Lésions partielles du huitième nerf crânien. II.* Par A. DE KLEYN.

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

Passant en revue la littérature du passé et spécialement celle des dernières années <sup>1)</sup>, on semble pouvoir confirmer que les fractures transversales traumatiques isolées de la cochlée ou du vestibule sont une trouvaille exceptionnelle.

Il est compréhensible qu'aux temps où la technique radiographique était encore incapable de trouver ces fractures transversales, on ne pensait jamais à une cause périphérique des lésions partielles du labyrinthe.

RUTTIN <sup>2)</sup>, décrivant un cas de traumatisme où la cochlée était restée intacte et le vestibule détruit, écrivait alors cette phrase: „Durch Läsion des Labyrinths ist dies kaum zu erklären, wir wären eher geneigt eine zentrale Läsion an zu nehmen”.

Mais BUYS et FERNANDES <sup>3)</sup> écrivaient déjà en 1911: Les idées anciennement admises excluaient la possibilité d'une lésion partielle du labyrinthe. Or des observations qui deviennent tous les jours plus nombreuses confirment que la lésion labyrinthique partielle est une réalité.

Depuis la publication de STENVERS <sup>4)</sup> concernant sa méthode radiographique de la pyramide pétreuse, quelques cas de fractures transversales avec lésions partielles du rocher furent déjà rapportés <sup>5)</sup>. Plusieurs années furent néanmoins nécessaires pour retrouver pareilles publications dans la littérature. Parlant des fractures du labyrinthe BRÜNNER <sup>6)</sup> a écrit en 1925: „Das Symptomenbild einer Querfractur ist ein einfaches und besteht in Taubheit und labyrinthärer Unerregbarkeit für den kalorischen und Drehreiz”. On trouve cependant en 1928 dans son rapport fait en collaboration avec SCHÖNBAUER <sup>7)</sup> cette phrase: „Ausnahmen von dieser Regel, also Fälle mit Hörresten sind sehr selten”.

<sup>1)</sup> GROVE, W. A., *Laryngoscope*, **49**, 678 et 833 (1939).

RAMADIER, J. A. et CAUSSÉ, R., *Traumatismes de l'oreille*, Masson 1937.

VOSS, O., *Die Chirurgie der Schädelbasisfrakturen*, J. A. Barth, 1936.

<sup>2)</sup> RUTTIN, E., *Monatschr. f. Ohrenheilk.*, **46**, 475 (1912).

<sup>3)</sup> cit. d'après RAMADIER, J. A. et CAUSSÉ, R., *Traumatismes de l'oreille*, Masson 1937.

<sup>4)</sup> STENVERS, H. W., *Arch. f. Ohrenheilk.*, **103**, 1 (1919).

<sup>5)</sup> DE KLEYN, A. und STENVERS, H. W., *Arch. f. Ohrenheilk.*, **103**, 162 (1919).

<sup>6)</sup> BRÜNNER, H., *Monatschr. f. Ohrenh.*, **59**, 697, 763 et 922 (1925).

<sup>7)</sup> SCHÖNBAUER, L. et BRÜNNER, H., *Handbuch der Neurologie des Ohres*, **II**, 368 (1928).

Nous trouvons aussi dans la monographie (1926) de ULRICH<sup>8)</sup> cette idée: „Labyrinthfrakturen hat stets ein Erlöschen der cochlearis und vestibularis Funktion zur Folge. Die anatomische Unterlage des isolierten Funktionsausfalles der Schnecke (oder auch des Vorhofes) ist wahrscheinlich der isolierte Abriss des einen oder anderen Astes des Nervus acusticus und nicht eine partielle Labyrinthfraktur“.

Que l'idée de ULRICH changeait quelques années après s'est manifestée par une publication de sa clinique, rédigée par KLINGENBERG<sup>9)</sup> rapportant quelques cas de fractures passant uniquement par la cochlée accompagnées seulement de troubles auditifs. KLINGENBERG prétendait que le cas publié de STENVERS et moi-même n'était pas probant vu que le malade souffrait depuis longtemps d'une surdité produite par l'otosclérose. Cette objection me semble peu fondée pour la raison que le patient était *totale*ment sourd du côté traumatisé mais entendait, moins bien, admettons, du côté non blessé. La radiographie montrait en surplus une ligne de fracture passant seulement par la cochlée laissant intact le vestibule qui confirmait en dernier lieu les dires sincères du malade signalant, la disparition totale et subite de l'ouïe après l'accident. Il est très regrettable de constater dans les rapports des cas publiés par STENVERS et moi-même<sup>10)</sup> et par KLINGENBERG que les épreuves caloriques ont été faites de telle façon qu'une appréciation nette de la valeur fonctionnelle vestibulaire fut impossible car ces épreuves caloriques se faisaient alors uniquement par l'injection d'une quantité d'eau froide dans le conduit auditif externe. Cependant comme déjà remarqué antérieurement<sup>11)</sup> il est indispensable pour établir avec certitude une destruction de la partie vestibulaire d'un labyrinthe, d'exécuter l'épreuve calorique froide et chaude, manifestant ainsi un nystagmus typique dirigé dans les deux directions classiques. Une variante de cette méthode qui consiste dans une injection d'eau froide seulement dans une oreille, en ayant soin de varier la position de la tête dans l'espace, changeant ainsi le sens du nystagmus réactionnel froid, possède la même valeur. L'emploi de l'épreuve calorique seulement froide, appliqué trop souvent encore par nombre de neurologues et d'otologues, peut dans bien des cas fausser leurs conclusions.

Une observation expérimentale en est une preuve bien démonstrative. Il est connu qu'une destruction brutale d'un labyrinthe déclenche instantanément un nystagmus dirigé vers la côté sain qui disparaît plus ou moins

<sup>8)</sup> ULRICH, R., Verletzungen des Gehörorgans bei Schädelbasisfrakturen (Acta Oto-Laryngologica, Supplem. VI 1926).

<sup>9)</sup> KLINGENBERG, A., Ztschr. f. Hals usw. Kunde, 22, 452 (1929).

<sup>10)</sup> Dans le cas, rapporté par STENVERS et moi-même les nystagmus post-rotatoires, déclenchés après rotation dextro- et lévogyre, étaient d'une durée normale et symétrique, ce qui semble prouver que les deux vestibules étaient excitables. Ce fait peut se rattacher aussi au quelques cas présentant des lésions isolées de la cochlée produites par les fractures décrits par BIECHELE. (Ztschr. f. Laryngol. usw., 24, 293 (1933)). KLINGENBERG écrivait ses conclusions se basant uniquement sur les résultats obtenus par l'examen calorique froid.

<sup>11)</sup> DE KLEYN, A., Arch. f. Ohrenheilk., 122, 169 (1929).



vite et peut se manifester à nouveau par des excitations sensibles les plus diverses. L'injection d'une quantité d'eau froide ou d'eau chaude dans un conduit auditif externe se trouve parmi eux. Or une excitation réellement calorique froide provoque aussi un nystagmus du même côté que le nystagmus latent et nous ne pouvons par ce fait jamais établir l'origine réellement calorique ou sensible dans les cas où un nystagmus horizontal post-calorique froid est dirigé vers le côté non-excité.

Ce nystagmus, déclenché par l'injection d'eau froide, apparaît *rarement* chez l'homme; les existants sensibles semblent être trop faibles pour les produire.

Pendant un exemple clinique, complétant cette étude expérimentale, prouve l'insuffisance grave d'un examen vestibulaire fait par l'épreuve seulement froide et montre enfin combien une expertise incomplète peut avoir des conséquences néfastes pour les accidentés <sup>12)</sup>.

Observation: Mr. X, âgé de 40 ans, avait eu un an et demi passé, un accident de moto à l'étranger et était transporté d'urgence dans une clinique, où une fracture du labyrinthe droit fut constatée ainsi que quelques égratignures sans importance. La surdité totale de l'oreille droite était restée inchangée et l'obscurité et la fatigue semblaient être des facteurs prédisposés à éveiller chez la victime un état vertigineux observé la première fois le jour de l'accident. La compagnie d'assurances, chargée de régler les indemnités de l'accident, se méfiait des plaintes ininterrompues de la victime, se basant sur le rapport de l'otologiste attitré, disant: „Non obstant une surdité totale de l'oreille droite, le vestibule droit est parfaitement excitable. L'irrigation d'eau froide dans le conduit auditif droit déclenche un nystagmus horizontal typique battant vers la gauche". Les plaintes de la victime furent ainsi estimées d'origine fonctionnelle.

La compagnie décida une contre-expertise par le mécontentement de la victime qui fut transféré dans ce but à la clinique.

Les données, rapportées par l'otologue, furent confirmées. Pendant un examen plus détaillé nous fournissait des données très importantes que voici:

Surdité totale de l'oreille droite; audition normale à l'oreille gauche; et excitabilité normale du même côté. L'injection d'eau froide dans l'oreille gauche déclenchait un nystagmus horizontal dirigé vers la droite, l'injection d'eau chaude déclenchait un nystagmus horizontal vers la gauche. L'oreille droite ne présentait pas des réactions similaires car *l'excitation froide ou chaude de l'oreille droite produisait toujours un nystagmus dirigé vers la gauche*. Il fallut donc conclure que le nystagmus n'était pas un nystagmus calorique mais un nystagmus produit par l'excitation sensible du conduit auditif externe. Une preuve supplémentaire de destruction labyrinthique était donnée par l'épreuve rotatoire: la rotation lévogyre déclenchait un nystagmus post-rotatoire horizontal de très courte durée et la rotation dextrogyre déclenchait un nystagmus horizontal de durée normale.

Cette observation démontre qu'après un an et demi la compensation centrale décrite par RUTTIN <sup>13)</sup> ne s'était pas encore établie. Cette contre-expertise a convaincu la compagnie.

Des cas analogues non juridiques ont encore été observés depuis lors. Un examen calorique incomplet est la cause pour laquelle certains auteurs trouvent encore une certaine excitabilité calorique dans un labyrinthe

<sup>12)</sup> DE KLEYN, A., Confinia neurologica, 2, 257 (1940).

<sup>13)</sup> RUTTIN, E., Verhandl. d. Dtsch. Otol. Gesellsch., 93 (1914).

détruit chirurgicalement (par exemple: URBANTSCHITSCH<sup>14</sup>), STRUYCKEN et QUIX<sup>14</sup>, LUND<sup>14</sup>, GRAHE<sup>14</sup>). Par des données plus précises, j'ai su constater que les examens caloriques se faisaient seulement par l'eau froide (*chez les malades de STRUYCKEN et QUIX, LUND et GRAHE*) et sans changer la position de la tête dans l'espace. Des renseignements plus précis sur la méthode d'examen d'URBANTSCHITSCH manquent.

Concernant les autres publications des fractures isolées de la cochlée, les observations de GROVE<sup>15</sup>) ne sont pas des exemples types à prouver l'existence d'une destruction isolée de la cochlée car tous les cas ont été soumis seulement à l'épreuve calorique froide.

En résumé: il faut admettre l'existence simultanée d'une destruction isolée de la cochlée et d'une intégrité du vestibule dans les fractures transversales du rocher. Ces cas d'ailleurs sont rares et ceux qu'on rapporte dans la littérature montrant dans ces circonstances une excitabilité du vestibule, ne sont pas des preuves absolument probantes.

Plus rare encore sont les cas de destruction totale du vestibule avec la présence simultanée d'une cochlée intacte.

Un cas intéressant est celui signalé par RUTTIN<sup>16</sup>). Bien que le diagnostic d'une fracture transversale est très probable, il faut cependant tenir certaines réserves parce que le malade n'est pas succombé et qu'un examen radiographique ne put confirmer en ces temps (1911) le diagnostic.

Le seul et même cas, analogue à celui décrit par STENVERS et moi-même, qui est connu dans la littérature, est une observation de SCHLITTLER<sup>17</sup>). Il put observer simultanément une inexcitabilité calorique du vestibule et une diminution seulement de l'acuité auditive du même côté. L'examen vestibulaire ne contient aucun détail. Dans sa monographie, VOSS<sup>18</sup>) a rapporté que dans toutes ses fractures transversales du rocher seulement dans un cas la surdité totale manquait. Aussi l'examen vestibulaire ne contient aucun détail.

GRAHE ne signale aucun cas. RAMADIER<sup>19</sup>) au contraire, rapportant le cas de SCHLITTLER, confirme leur existence par cette phrase „Il existe donc cliniquement des fractures vestibulaires isolées, de même que des fractures cochléaires isolées". Il n'y joignait cependant aucune observation personnelle.

En résumé, il faut admettre qu'il est de la plus haute importance d'examiner dans l'avenir plus méticuleusement encore les cas de fractures

<sup>14</sup>) Voir: URBANTSCHITSCH, Monatschr. f. Ohrenheilk., 50, 418 (1916).

STRUYCKEN et QUIX, Réunion Néerl. d'Oto-Rhino-Laryng. 14 Mai 1922.

LUND, R., Réunion de la Soc. danoise d'Oto-Rhino-Laryng. 2 décembre 1922.

GRAHEN, Zentr.bl. f. Ohrenheilk., 21, 114 (1923).

<sup>15</sup>) GROVE, l.c., p. 698. Voir aussi RAINER, A., Hals-Nasen-Ohrenartz, I, 29, 37 (1938) et WULLSTEIN, H., Arch. f. Ohrenheilk., 147, 259 (1940).

<sup>16</sup>) L.c., Fall VI, p. 479.

<sup>17</sup>) SCHLITTLER, E., Acta Oto-Laryngologica, 24, 213 (1936).

<sup>18</sup>) VOSS, l.c., p. 51.

<sup>19</sup>) RAMADIER, l.c.

transversales par l'aide précieuse d'une radiographie parfaite et d'un examen vestibulaire aussi complet que possible. Les fractures longitudinales et les fractures combinées ne feront certainement pas exception à cette règle <sup>20</sup>). L'idée ancienne, niant toutes possibilités de troubles graves auditifs et vestibulaires dans les fractures longitudinales doit être rejetée. Ce qui était à prévoir, HAYMANN signale dans sa littérature, concernant les traumatismes occasionnés par les armes à feu, avoir rencontré des lésions partielles de la 8-me paire <sup>21</sup>).

### C. Otitis.

On peut observer bien souvent qu'une inflammation de l'oreille moyenne provoque une surdité totale ou presque totale sans attaquer la partie vestibulaire de l'oreille interne.

Observation: Un garçon, âgé de 16 ans, avait souffert toujours depuis l'âge d'un an d'une otite moyenne. À l'âge de 5 ans fut jugée nécessaire une intervention sur la mastoïde. Une seconde intervention, fait dans l'espoir de fermer une fistule rétroauriculaire, séquelle de première intervention, n'avait pas tari les sécrétions de l'oreille. Afin de subir un évidemment pétromastoidien, le malade fut transféré dans la clinique.

Une sécrétion fétide s'écoulait de l'oreille malade. Des vertiges accompagnées d'un état nauséux apparaissaient de temps à autre, donnant une sensation subjective de déplacement de l'entourage. Un vomissement aurait eu lieu sans crise de vertige 15 jours auparavant.

L'examen acoustique montrait une surdité totale de l'oreille gauche et une audition parfaite à l'oreille droite. Des exostoses, localisées sur la parois antérieure et postérieure du conduit auditif externe, empêchaient de constater des restes éventuels du tympan. Le malade ne présentait aucun nystagmus spontané ni le signe de l'indication spontanée mais bien le signe de la fistule produit par la compression du conduit auditif externe. Par le pincement des paupières du patient, il fut très difficile de préciser exactement la direction du nystagmus pendant la compression. Les deux labyrinthes étaient normalement excitables pour l'eau froide et chaude avec présence du signe de l'indication réactionnelle typique. L'épreuve rotatoire déclenchait dans les deux sens un nystagmus post-rotatoire horizontal, rotatoire et vertical symétrique et d'une durée normale. L'examen radiographique montrait une cavité bien visible dans la mastoïde très suspecte de cholestéatome ce qui fut confirmé par l'opération. L'examen neurologique et interne étaient normaux.

On voit par cet exemple comment une otite moyenne chronique a su détruire en totalité une fonction cochléaire respectant néanmoins le vestibule. Le signe de la fistule est toutefois un indice que le vestibule aurait peut-être dans un avenir prochain subi le même sort.

L'inverse se rencontre fort peu, car il est plus rare d'observer lors d'une otite chronique un processus destructif du vestibule laissant intact la cochlée.

Observation: Un garçon, âgé de 10 ans, souffrait depuis 8 ans d'une otorrhée chronique droite, devenue fétide les derniers temps. Une gifle reçue depuis une dizaine de jours l'avait rendu nauséux et il souffrait depuis lors de vertiges et de céphalées.

<sup>20</sup>) Voir e.a. KOCH, J., Monatschr. f. Ohrenheilk., 137, 105 (1933).

<sup>21</sup>) HAYMANN, L., Zentr.bl. f. Ohrenheilk., bnd 13—16, (1915, 1917, 1918, 1919).  
Voir aussi RAUCH, M., l.c.



L'oreille gauche avait souffert d'une otite moyenne de courte durée. L'oreille droite présentait une otite chronique moyenne. Bien que la voix chuchotée était entendue seulement ad concham, la cochlée semblait très peu atteinte car le WEBER était nettement localisé à droit, la limite supérieure était normale et le diapason ut<sup>7</sup> (4096 V. D.) était entendu pendant une période normale. L'oreille gauche ne présentait aucune anomalie. La voix chuchotée était entendue à plus de 6 mètres non obstat la présence d'une petite perforation sèche dans le tympan.

*Examen vestibulaire:*

Inexcitabilité totale du labyrinthe droit. En regard direct on voyait déjà un nystagmus spontané horizontal rotatoire battant vers la gauche qui ne pouvait être influencé par une injection froide ou chaude dans le conduit auditif externe droit. Une parésie du facial existait du même côté.

Excitabilité normale du côté gauche.

La présence d'une fistule, trouvée au cours de l'opération, est probablement la cause de la destruction vestibulaire.

Ce cas présente donc une destruction totale du labyrinthe droit, combinée avec une fonction normale de la cochlée.

*D. Affections de la VIII<sup>me</sup> paire.*

Les maladies infectieuses, certaines intoxications et plusieurs formes de méningite déterminent une souffrance du nerf VIII. Certains cas de méningite cérébrospinale se prêtent fort bien à la description type de ce tableau clinique. Pendant la guerre mondiale 1914—1918 l'occasion s'est présentée bien des fois à VERSTEEGH et moi-même, de pouvoir examiner des militaires atteints de méningite cérébrospinale épidémique. L'examen ophtalmologique de ces hommes fut confié au Dr. TEN DOESSCHATE, l'examen neurologique au Dr. PAMEYER, l'examen radiologique au Dr. STENVERS et l'étude épidémiologique au Dr. BIJL<sup>22</sup>).

Par ces examens attentifs du nerf VIII au cours de cette affection on avait pu constater chez ces malades deux types de dureté d'oreille.

Les cas du premier type furent les plus nombreux et laissaient supposer des possibilités de la présence d'une névrite acoustique. Les troubles fonctionnels auditifs de ces malades se caractérisaient spécialement par une diminution nette de l'acuité auditive pour les sons moyens tout en laissant inaltérée l'acuité des sons aigus et bas. On ne pouvait constater aucune altération dans la fonction vestibulaire.

Ce type de surdité pourrait à première vue, confirmant ainsi l'opinion généralement admise, être expliqué par une action délétère sur le nerf VIII détruisant d'abord le nerf auditif et aussi le nerf vestibulaire dans les cas plus graves.

Mais nous mettons déjà en 1919 l'opinion qu'il serait possible peut-être de trouver dans tous les névrites acoustiques aussi des anomalies vestibulaires et que par conséquent l'antithèse entre le nerf auditif et vestibulaire

<sup>22</sup>) DE KLEYN, A., VERSTEEGH, C., TEN DOESSCHATE, G., STENVERS, H. W., PAMEYER, J. W. et BIJL, J. P., Militair Geneesk. Tijdschr., 22, 65 (1918). (Voir aussi: DE KLEYN et VERSTEEGH, Acta Oto-Laryngologica, 3, 302 (1922) et STENVERS, H. W., Acta Oto-Laryngologica, 3, 282 (1922).)

présumée jusqu'à l'heure actuelle n'existerait plus. Après 20 ans cette hypothèse n'est pas démontrée parce que, comme déjà mentionné antérieurement, on manque encore la finesse dans les méthodes d'examen vestibulaires. Les examens auditifs par contre sont perfectionnés et des anomalies minuscules échappent moins vite à nos investigations cliniques.

Chez 25 malades nous avons pu retrouver ce type de dureté d'oreille. Elle est peu décrite dans la littérature pour la seule raison qu'on ne se doute absolument pas de son existence, parce que, le malade présente une épreuve de la voix chuchotée plus ou moins normale. Pour la même raison ces malades mêmes ne se doutent personnellement pas de leurs infirmités. Le second type de dureté d'oreille se caractérise par une diminution très prononcée de tous les sons accompagnée généralement de troubles vestibulaires graves menant même très souvent jusqu'à l'inexcitabilité totale du vestibule. Cinq cas qu'on a pu observer de ce dernier type ne présentaient aucune forme spéciale de surdité. Les recherches anatomo-pathologiques dans la méningite cérébrospinale épidémique nous ont fait connaître les différentes voies suivies par l'infection pour atteindre l'oreille interne où on a pu trouver aussi bien des altérations tant circonscrites que diffuses. Il est logique de rechercher la localisation pathogénique de cette forme de surdité dans l'oreille interne même. En concordance avec cette hypothèse STENVERS a réellement pu montrer par la radiographie des anomalies localisées dans le labyrinthe et d'autres cas encore sont venus par après se joindre aux premiers. Par la prise de plusieurs radiographies à différentes stades de la maladie, nous avons trouvé que les lésions de l'oreille interne n'étaient visibles que quelques mois après le début de l'affection.

La névrite acoustique peut aussi se produire par d'autres maladies infectieuses et intoxications. Si les troubles de la VIII<sup>me</sup> paire, survenant lors d'un oreillon ou d'un herpes zona otitique, sont provoqués primairement par une névrite toxique ou sont secondaires à la méningite concomitante, est un fait inconnu. Cette dernière hypothèse défendue par VOSS<sup>23)</sup> entre autre, est admise par la plupart des auteurs.

Il est un fait établi que dans ces altérations nerveuses peuvent se présenter différentes combinaisons de troubles cochléaires et vestibulaires. Des cas sont décrits présentant:

1. Des troubles cochléaires sans troubles vestibulaires visibles.
2. Des troubles simultanés cochléaires et vestibulaires.
3. Des troubles vestibulaires isolés.

Toutes ces formes capricieuses se rencontrent bien souvent dans l'infection syphilitique<sup>24)</sup>.

Voici une observation clinique, souvent observée dans la parotidite (cas du type 1).

<sup>23)</sup> VOSS, O., Ztschr. f. Ohrenheilk., 70, 58 (1914). Voir discussion récente de KLICPERA, RECHT et UNTERBERGER: Monatschr. f. Ohrenheilk., 74, 248 (1940).

<sup>24)</sup> Voir différentes communications de O. BECK (Monatschr. f. Ohrenheilk.).

Un homme âgé de 23 ans, avait souffert, passé un an, d'une parotidite ayant frappé son oreille gauche d'une surdité totale et permanente. Il fut pris pendant l'évolution de sa maladie de quelques vertiges et souffre depuis lors de bourdonnements seulement. A l'examen l'oreille gauche semblait totalement sourde et l'oreille droite normale. Les troubles vestibulaires spontanés étaient absents et les deux labyrinthes présentaient une excitabilité normale. Le signe de l'indication réactionnelle était normale après la rotation du malade dans les deux sens ainsi que toutes les formes du nystagmus post-rotatoire à la fois vive et symétrique (horizontal, rotatoire et vertical). Les positions compensatrices des yeux étaient en position latérale gauche et droite de 6°.

Comme séquelle de sa parotidite, le malade souffrait d'une surdité totale gauche bien que toutes ses fonctions vestibulaires soient restées intactes et symétriques. Remarquons que dans l'anamnèse l'infection parotidienne a semblé à son début, avoir insulté le système vestibulaire.

Parmi les produits médicamenteux nocifs au nerf VIII, se rangent e.a. les salicylates, la quinine et les dérivés du salvarsan. Des combinaisons analogues de troubles cochléaires et vestibulaires, mentionnés déjà ci-dessus, se retrouvent encore ici. Le nerf cochléaire semble en général le plus souvent atteint et les troubles vestibulaires manquent bien souvent en totalité ou en partie. Le contraire n'est pas une chose impossible.

Dans quelques cas il faut admettre la destruction complète permanente et bilatérale de la VIII<sup>me</sup> paire, dont voici une observation personnelle.

Une fillette, âgée de 10 ans, et atteinte d'une pleurésie, reçut de son médecin traitant une dose élevée de salicylate. De suite après l'ingestion du médicament surgit une surdité totale des deux oreilles, accompagnée de troubles sérieux de l'équilibre. L'examen montrait une destruction totale et bilatérale de la fonction cochléaire et vestibulaire qui n'a jamais plus rétrocedé par après.

Etablir la cause médicamenteuse dans ce cas est bien difficile, mais admissible car aucune autre cause n'avait été trouvée non obstant des examens consécutifs exécutés par des internistes éminents dirigeant leurs investigations vers l'éventualité d'une méningite ou autre affection cérébrale.

On admet que les intoxications de ce genre lèsent surtout ou le nerf VIII ou le labyrinthe périphérique. On ne peut cependant oublier le fait qu'une intoxication soit chimique, soit toxinique influence aussi le système nerveux central, y compris les voies acoustiques et vestibulaires. Une première expérience appuyait cette idée en étudiant l'influence de la nicotine<sup>25)</sup> et d'autres produits<sup>26)</sup> sur l'arc réflexe nystagmique vestibulaire. Une étude expérimentale est seule capable de résoudre la question de l'action périphérique ou centrale de chaque toxique.

On ne peut oublier de signaler que certaines tumeurs, localisées dans la fosse cérébelleuse peuvent parfois produire des lésions partielles de la VIII<sup>me</sup> paire. Les premiers cas, décrits par FREY, CLAUS et LÖWENSTEIN, présentaient soit une destruction du nerf vestibulaire accompagnée encore

<sup>25)</sup> DE KLEYN, A. et VERSTEEGH, C., *Pflügers Arch.*, 196, 331 (1922).

<sup>26)</sup> Voir e. a. KLEITMANN, N. P., *Pflügers Arch.*, 205, 160 (1924). BERGGREN, S., *Acta Oto-Laryngologica*, 11, 200 (1927). ARNDTS, N., DE KLEYN, A. et VERSTEEGH, C., *Arch. f. Ohrenheilk.*, 114, 233 (1926).

d'une sensibilité auditive (FREY<sup>27</sup>) et CLAUS<sup>28</sup>), soit une destruction du nerf cochléaire respectant la fonction vestibulaire (LÖWENSTEIN<sup>29</sup>)). CLAUS fait remarquer avec raison que dans le stade débutant d'une affection de la VIII<sup>me</sup> paire, le nerf vestibulaire ou le nerf cochléaire peuvent être atteint isolément, ainsi que dans la régression de l'affection et confirme cette idée par une observation bien démonstrative.

#### E. Troubles subits de la huitième paire.

Depuis le jour où MÉNIÈRE a décrit son malade foudroyé subitement par des vertiges insupportables et frappé de surdité totale, personne n'ignore depuis lors le tableau clinique de l'hémorragie labyrinthique dont l'étiologie est le plus souvent l'apanage d'une affection sanguine: la leucémie. Ce tableau se retrouve bien plus souvent encore dans l'inflammation purulente de l'oreille moyenne ayant attaqué l'oreille interne.

Un deuxième groupe de cas présente souvent un syndrome un peu différent du premier. Se présentant le plus souvent chez des personnes de la cinquantaine en parfaite santé mais étant généralement de légers hypertendus, apparaît soudainement après une période légèrement vertigineuse une surdité totale d'une oreille sans troubles visibles du système vestibulaire. Rarissime chez les jeunes, la base anatomo-pathologique nous est entièrement inconnue. Un seul cas présentait une radiographie du labyrinthe, faite par mon assistant LUBBERS<sup>30</sup>), identique à celles que STENVERS a pu déceler dans ses cas de méningite cérébrospinale épidémique. Cette trouvaille laissait supposer pour certains cas une localisation du processus pathogénique localisé dans le labyrinthe périphérique. Cette interprétation ne sait exister pour les cas où l'ouïe se restitue après quelques semaines.

Les cas où l'élimination subite et isolée de la fonction vestibulaire ou auditive apparaît des deux côtés est à l'heure actuelle une question encore très problématique.

Concernant la première éventualité, il nous est connue par les études de GÜTTICH<sup>31</sup>), que les tumeurs du 4<sup>me</sup> ventricule présentent parfois une élimination bilatérale de la fonction vestibulaire avec une fonction cochléaire parfaitement intacte. Trouver la présence des anomalies neurologiques et internes n'est cependant pas absolument nécessaire comme dans les cas de GÜTTICH.

Une observation typique de ce genre est la suivante.

Une infirmière (examinée par le Dr. STENVERS et moi-même en l'an 1935) très douée avait remarqué un jour que sa marche et l'usage du vélo étaient devenus subitement incertains à tel point que l'obscurité lui en empêchait tout usage. En parfaite santé, la personne se sentait fortement handicapée par cet état de choses. Examen acoustique, voix

27) FREY, Monatschr. f. Ohrenheilk., 43, 825 (1909).

28) CLAUS, Verhandl. d. Otol. Gesellsch., 313 (1910).

29) LÖWENSTEIN, Ztschr. v. d. ges. Neurol. und Psych., 24, 534 (1914).

30) Pas encore publié.

31) E.a. GÜTTICH, A., Arch. f. Ohrenheilk., 147, 5 (1940).

chuchotée entendue à droite à 4 mètres, à gauche à une distance normale. L'examen au diapason était normal à gauche et présentait à droite une surdité légère du type oreille interne. L'examen vestibulaire montrait aucune réaction réflexe, ni calorique, ni galvanique, ni post-rotatoire. Les réactions d'adaptation statique et le signe de l'indication réactionnelle étaient absentes.

Les examens internes, neurologiques et sérologiques révélèrent aucune anomalie. Une légère entérite était la seule souffrance de la malade. Un espace de cinq ans n'avait apporté aucun changement à la situation. L'état général était parfait et les plaintes de la personne bien que diminuées en intensité n'étaient pas encore disparues.

*Une observation opposée à la précédente* est le cas d'un ouvrier âgé de 56 ans. Praticant le métier de chaudronnier, il souffrait depuis bien longtemps d'une dureté d'oreille professionnelle. Un jour il s'était rendu à son travail comme d'habitude et trébuchait là-bas en descendant un support. Cet accident insignifiant avait provoqué chez l'homme une surdité bilatérale totale à tel point qu'il avait l'impression d'un arrêt fictif du mouvement de l'usine.

*L'examen acoustique* montrait une surdité totale bilatérale. Des épreuves décelant la simulation et l'épreuve psycho-galvanique démontraient l'infirmité.

L'examen radiographique des pyramides pétreuses était normal. Tous les réflexes vestibulaires étaient symétriques et normaux (épreuve rotatoire, galvanique, calorique, réaction d'adaptation statique etc.).

*Examen neurologique et interne: normal.*

Un an plus tard la situation était restée inchangée.

Trouver une interprétation étiologique de ces deux cas est chose bien difficile à l'heure actuelle <sup>32)</sup>. Se basant sur les observations de GÜTTICH et sur la bilatéralité de ces troubles auditifs et vestibulaires, il me semble invraisemblable de devoir rechercher ici une cause périphérique mais il semble plus logique d'admettre un processus pathologique circonscrit, localisé dans l'amoëlle allongée ou dans le mésencéphale.

Un cas observé par LÉVIN <sup>33)</sup> est plus difficile encore à interpréter. Chez une de ces malades il avait constaté une inexcitabilité bilatérale avec une audition parfaite (contrôlé par l'examen aux diapasons et par l'audiomètre). Quelques anomalies trouvées dans certaines affections neurologiques comme douleurs spontanées et violentes dans la nuque et dans les yeux, accompagnées de vomissements, furent trouvées. Les réactions galvaniques normales des deux labyrinthes laissaient toutefois soupçonner une souffrance périphérique de l'oreille interne.

<sup>32)</sup> Voir aussi les cas observés par PERWITSCHKY (Zbl. Hals usw. Heilk., 30, 375 (1938) et par GÜTTICH, A. (Ztschr. f. d. ges. Neurologie, 165, 171 (1939)), où les malades n'étaient pas totalement sourds et semblaient cependant présenter des troubles psychiques.

<sup>33)</sup> LÉVIN, P. M., Journ. of Nervous and Mental diseases, 89, 335 (1939).



**Mathematics.** — *Bericht über die Konstruktion und die Fortsetzung von Bewertungen.* I. By F. LOONSTRA. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

LITERATURUEBERSICHT.

- J. KÜRSCHÁK: „Ueber Limesbildung und allgemeine Körpertheorie“ (J. f. d. r. u. ang. Math. 142 (1913)).
1. Die Erweiterung eines bewerteten Körpers zu einem vollständigen bewerteten Körper.
  2. Die Bewertung der algebraischen Erweiterungen eines bewerteten Körpers. Zum Beweise der Ungleichheit  $|a + b| \leq |a| + |b|$  werden die Hadamardschen Resultate benutzt. Es ist möglich, jeden bewerteten Körper  $K$  zu einem kleinsten algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körper  $K'$  zu erweitern (eventuell ist  $K'$  nicht vollständig, aber die kleinste vollständige Erweiterung von  $K'$  ist ebenfalls algebraisch abgeschlossen).
- A. OSTROWSKI: „Fragen der allgemeinen Körpertheorie“ (J. f. d. r. u. ang. Math. 143 (1913)).
1. Jede endliche separable Erweiterung eines bewerteten Körpers ist vollständig.
  2. Eine unendliche separable algebraische Erweiterung eines vollständigen Körpers ist nicht vollständig.
  3. Die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung eines vollständigen Körpers ist dann und nur dann vollständig, wenn sie endlich in bezug auf diesen Körper ist.
- A. OSTROWSKI: „Zur Theorie der perfekten Körper“ (J. f. d. r. u. ang. Math. 147 (1917)).
1. Jede endliche bewertete Erweiterung eines vollständigen Körpers ist vollständig.
  2. Eine algebraische bewertete Erweiterung eines vollständigen Körpers  $K$ , die Größen von beliebig hohem Grade in bezug auf  $K$  enthält, ist nicht vollständig.
  3. Die kleinste algebraisch abgeschlossene bewertete Erweiterung eines vollständigen Körpers  $K$  ist dann und nur dann vollständig, wenn sie endlich in bezug auf  $K$  ist.
- A. OSTROWSKI: „Über einige Lösungen der Funktionalgleichung  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ “ (Acta Mathematica 41 (1918)).
1. Eine nicht-triviale Bewertung des Körpers der rationalen Zahlen ist entweder zur gewöhnlichen Absolutbetragbewertung äquivalent, oder sie ist zu einer  $p$ -adischen Bewertung äquivalent.
  2. Ein archimedisch bewerteter Körper ist zu einem mit gewöhnlichen Absolutbeträgen bewerteten Körper aus komplexen Zahlen isomorph.
- K. RYCHLIK: „Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper“ (J. f. d. r. u. ang. Math. 153 (1924)).
1. Die Bewertung algebraischer Erweiterung eines nicht-archimedisch bewerteten Körpers durch Verallgemeinerung des von Hensel angewandten Vorgangs für die algebraischen Erweiterungen des Körpers der  $p$ -adischen Zahlen.
  2. Der derivierte Körper eines algebraisch abgeschlossenen nicht-archimedisch bewerteten Körpers ist algebraisch abgeschlossen.

A. OSTROWSKI: „Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper“ (Mathematische Zeitschrift 39 (1934)).

Hinsichtlich der Bewertungstheorie: Für die Bewertung algebraischer Erweiterungen eines bewerteten Körpers  $K$ , genügt es vorauszusetzen, dass  $K$  relativ vollständig ist.

Die Aufstellung sämtlicher Bewertungen einer algebraischen Erweiterung und einer einfachen transzendenten Erweiterung eines bewerteten Körpers.

§ 1. Im Laufe der Zeit erschienen verschiedene Abhandlungen, in denen zunächst der Begriff der Bewertung rein postulierend durch definierende Eigenschaften eingeführt wurde, während später die Frage nach der konstruktiven Erfassung des Bewertungsbegriffs, d.h. die Frage nach der Aufstellung sämtlicher Bewertungen eines vorgegebenen Körpers und deren möglicher Erweiterungen gelöst wurde. Das Ziel dieser Ausführungen ist es, eine historische Uebersicht zu geben; dazu habe ich mich beschränkt auf die Literatur, die sich mit der Aufstellung von Bewertungen beschäftigt. Es gibt die letzten Jahre wichtige Abhandlungen hinsichtlich der Bewertungstheorie, z.B. die im Journal f.d.r. und angewandte Math. 170 (1934) erschienene Arbeit von H. HASSE und F. K. SCHMIDT. In jener Arbeit wird die Aufgabe, alle möglichen Strukturen der nicht-trivial bewerteten Körper zu bestimmen, behandelt und gelöst.

Ich erwähne weiter die Untersuchungen von W. KRULL, „Allgemeine Bewertungstheorie“ (J. f. d. r. und ang. Math. 167 (1932)), in denen die Bewertungstheorie nur postulierend entwickelt wird, ohne auf die konstruktive Erzeugung der allgemeinsten Bewertung einzugehen. Kümmert man sich aber um die konstruktive Erfassung, so stellte sich heraus, dass die Arbeit von A. OSTROWSKI: „Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper.“ Math. Zeitschr. 39 (1934), in dieser Richtung am fruchtbarsten gewesen ist.

§ 2. Der Ausgangspunkt der Bewertungstheorie ist die gemeinsame Behandlung der HENSELSCHEN  $p$ -adischen Körper und des Körpers aller reellen oder aller komplexen Zahlen. Der Begriff der Bewertung ist von KÜRSCHÁK (J. f. d. r. und ang. Math. 142 (1913), „Ueber Limesbildung und allgemeine Körpertheorie“) zum ersten Male eingeführt worden. KÜRSCHÁK betrachtet sie als eine Verallgemeinerung des absoluten Betrages von  $a$  auf den Fall eines beliebigen Körpers: Es sei jedem Elemente  $a$  eines Körpers  $K$  eine reelle Zahl  $|a|$  so zugeordnet, dass den folgenden Forderungen genügt wird:

$$1) \quad |0| = 0; \quad |a| > 0 \text{ für } a \neq 0,$$

$$2) \quad |1 + a| \leq 1 + |a|,$$

$$3) \quad |ab| = |a| \cdot |b|,$$

4) es gibt in  $K$  wenigstens ein solches Element, dass  $|a|$  von Null und Eins verschieden ist.

Jede solche Zuordnung wird eine Bewertung des Körpers  $K$ , die Zahl  $|a|$  die Bewertung von  $a$  genannt. Elemente von gleicher Bewertung werden als äquivalent bezeichnet. Die bekanntesten bewerteten Körper erhalten

wir, wenn wir für  $K$  einen reellen oder komplexen Zahlkörper wählen und jedem Element seinen absoluten Wert zuordnen. Die  $p$ -adische Bewertung des Körpers der rationalen Zahlen mittels einer Primzahl  $p$  erhält man wenn man jede von Null verschiedene rationale Zahl  $a$  in der Gestalt  $a = \frac{u}{v} \cdot p^\alpha$  darstellt, wo  $u$  und  $v$  zu  $p$  teilerfremde ganze Zahlen sind und nun festsetzt, dass  $|a| = c^\alpha$  ( $0 < c < 1$ ) und  $|0| = 0$ . Im betrachteten Falle stellt es sich heraus, dass

$$2a) \quad |a + b| \leq \max(|a|, |b|).$$

Wenn die Bewertung eines Körpers derartig ist, dass die schärfere Ungleichheit (2a) für jedes Paar von Elementen gilt, so spricht man von einer nicht-archimedischen Bewertung, und sonst nennt man die Bewertung archimedisch.

Es ist naheliegend, die bekannten Begriffe des Limes und der Fundamentalfolge von den reellen und komplexen Zahlen auf beliebige bewertete Körper zu übertragen. Es ist bekannt, dass im Körper der reellen Zahlen eine Folge nur dann und dann immer einen Grenzwert hat, wenn sie eine Fundamentalfolge ist. Man kann behaupten, dass die irrationalen Zahlen dazu eingeführt wurden, um die Bestimmung des Limes einer Fundamentalfolge, die im Körper  $R$  der rationalen Zahlen nur ausnahmsweise möglich ist, im Körper der reellen Zahlen zu einer stets ausführbaren Operation zu machen. Der Körper der reellen Zahlen besitzt also die Eigenschaft, dass jede Fundamentalfolge konvergiert: man nennt darum diesen Körper einen vollständigen (oder perfekten) Körper.

Die Beantwortung der Frage, ob jeder bewertete Körper  $K$  zu einem vollständigen bewerteten Körper  $K'$  ergänzt werden kann, geschieht mittels der von CANTOR stammenden Methoden. Die so erhaltene Erweiterung wird von KÜRSCHÁK der derivierten Körper  $K'$  von  $K$  genannt, und  $K'$  wird bewertet, indem man dem Limes  $A$  der Fundamentalreihe  $a_1, a_2, \dots$  die Zahl  $|A| = \lim_{v \rightarrow \infty} |a_v|$  zuordnet.

Zwei Bewertungen  $\varphi$  und  $\psi$  eines Körpers  $K$  werden äquivalent genannt, wenn sie zu äquivalenten vollständigen Erweiterungskörpern führen, d.h. wenn jede Folge  $\{a_v\}$  von  $K$ , die für  $\varphi$  eine Nullfolge ist, auch für  $\psi$  eine Nullfolge ist und umgekehrt. V. D. WAERDEN beweist (Moderne Algebra I), dass für die zwei Bewertungen  $\varphi$  und  $\psi$ ,  $\psi$  eine Potenz von  $\varphi$  ist, d.h. eine feste positive Zahl  $\varepsilon$  existiert mit  $\psi(a) = \varphi(a)^\varepsilon$  für alle  $a$  aus  $K$ .

In dem Falle, dass  $K$  den Körper der rationalen Zahlen bedeutet, diese aber nicht mit ihren absoluten Werten bewertet sind, sondern in bezug auf eine Primzahl  $p$ , erhalten wir als derivierten Körper denjenigen Körper, den HENSEL mit  $K(p)$  bezeichnet, und dessen Elemente er  $p$ -adisch, rationale Zahlen nennt. Jede von Null verschiedene Grösze des Körpers  $K(p)$  kann in eine und nur eine unendliche Reihe von der Gestalt

$$a_0 p^\alpha + a_1 p^{\alpha+1} + \dots + a_n p^{\alpha+n} + \dots$$



entwickelt werden, in der die Exponenten ganze rationale Zahlen sind, die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  den Zahlen  $0, 1, 2, \dots, p-1$  entnommen sind und  $a_0$  von Null verschieden ist;  $c^{-x}$  ist dann die Bewertung dieser Zahl.

Man kann diese  $p$ -adischen rationalen Zahlen so definieren, dass sie teils in bezug auf den Primzahl  $p$  bewertete gewöhnliche rationale Zahlen sind, teils neue Symbole, die so beschaffen sind, dass sie den Körper der in bezug auf  $p$  bewerteten rationalen Zahlen zu einem vollständigen Körper erweitern.

Es ist also mit Hilfe des Bewertungsbegriffs die Vollständigkeitseigenschaft der  $p$ -adischen Körper als auch die „Stetigkeit“ des Körpers aller reellen oder komplexen Zahlen zu bewerkstelligen.

In den KÜRSCHÁKschen Untersuchungen ist nun eine allgemeine Vorschrift enthalten, die Definition der Bewertungsfunktion von einem gegebenen Grundkörper auf seine algebraischen Erweiterungen auszudehnen, eine Methode von der OSTROWSKI später beweist, dass sie die einzig mögliche ist.

Vom Grundkörper wollen wir voraussetzen, dass er ein vollständiger bewerteter Körper ist. Bekanntlich wird jede Grösze des erweiterten Körpers einer und nur einer solchen algebraischen Gleichung genügen, deren Koeffizienten dem Grundkörper  $K$  entnommen sind und die in  $K$  irreduzibel ist. Wir nennen diese Gleichung die Definitionsgleichung jener Grösze.

Es sei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

die Definitionsgleichung, welcher  $\alpha$  genügt, dann setzen wir  $|\alpha| = |a_n|^{\frac{1}{n}}$ .

Es handelt sich nun um die Frage, ob die so zugeordnete Zahl  $|\alpha|$  in der Tat die Forderungen einer Bewertung befriedigt. Dass im erweiterten Körper die Gleichung  $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$  richtig ist, kann leicht bewiesen werden und dabei spielt der Umstand, dass der Grundkörper  $K$  vollständig ist, gar keine Rolle. Wollen wir aber die Ungleichheit  $|1 + \alpha| \leq 1 + |\alpha|$  beweisen für die bewertete Erweiterung, so braucht man solche Hilfsmittel, bei denen die Vollständigkeit des Grundkörpers wesentlich ist. KÜRSCHÁK teilt mit, dass für den Fall, dass der Grundkörper  $K(p)$  ist, das beste Hilfsmittel von HENSEL stammt. Es besteht nämlich der wichtige Satz (HENSEL, Theorie der algebraischen Zahlen, S. 74): Sind die Koeffizienten von

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

aus  $K(p)$  entnommen und ist  $|a_n| \leq 1$ , so kann dieses Polynom nur dann in  $K(p)$  irreduzibel sein, wenn auch  $|a_1|, \dots, |a_n|$  sämtlich  $\leq 1$  sind.

Ziehen wir noch in Betracht, dass im Körper  $K(p)$  gilt

$$|a + b| \leq \max(|a|, |b|),$$

so ersehen wir hier unmittelbar die Richtigkeit der folgenden Behauptung:  
Ist in dem irreduziblen Polynom

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad |a_n| \leq 1,$$

so ist auch in

$$f(t-1) = t^n + \dots + b_n$$

die Bewertung von

$$b_n = (-1)^n + a_1 (-1)^{n-1} + \dots + a_n$$

gewiss  $\leq 1$ . Das ist aber eben der zu beweisende Satz mit der unwesentlichen Beschränkung  $|a_n| \leq 1$ . Dieser HENSELSche Beweis kann in allen nicht-archimedischen Fällen angewandt werden. Es ist KÜRSCHÁK nicht gelungen, diesen HENSELSchen Beweis so zu verallgemeinern, dass er auch dann zum Ziele führt, wenn die Bewertung archimedisch ist. Er beweist aber die Ungleichheit  $|1 + \alpha| \leq 1 + |\alpha|$  mit Hilfe von HADAMARDSchen Sätzen (HADAMARD, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor; Journal de Math. (4) 8 (1892)).

Sind nämlich die Koeffizienten von  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  dem vollständigen bewerteten Körper  $K$  entnommen und ist  $f(z)$  in diesem Körper irreduzibel, so ist der Konvergenzradius von

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \dots$$

gleich  $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ .

Nun bedeute  $\alpha$  in irgendeiner Erweiterung von  $K$  eine Wurzel der in  $K$  irreduziblen Gleichung  $f(z) = 0$ . Wir setzen  $|\alpha| = |a_n|^{\frac{1}{n}}$ . Es wird dann in der Tat  $|1 + \alpha| \leq 1 + |\alpha|$ , denn zwischen den Konvergenzradien  $l$  und  $l'$  der Reihen

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \dots \quad \text{und} \quad \frac{1}{f(t-1)} = \frac{c'_0}{t} + \frac{c'_1}{t^2} + \dots$$

besteht die Ungleichheit  $l' \leq 1 + l$ . Den Beweis unterlassen wir.

Bei dem Beweise der Formel  $|a\beta| = |a| \cdot |\beta|$  wollen wir vorerst den Fall betrachten, dass  $\alpha$  und  $\beta$  (in bezug auf  $K$ ) separabel sind. Die Definitionsgleichung von  $\alpha$  sei  $z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0$ , diejenige von  $\beta$  sei  $z^n + \dots + b_n = 0$ , endlich diejenige von  $\gamma = \alpha\beta$  sei  $z^h + \dots + c_h = 0$ . Die zu beweisende Formel ist

$$|a_m|^{\frac{1}{m}} |b_n|^{\frac{1}{n}} = |c_h|^{\frac{1}{h}}.$$

Es ist das lediglich eine Gleichung zwischen Bewertungen solcher Gröszen, die  $K$  angeören. Wir wollen darum diejenige Erweiterung  $L$  von  $K$  benutzen, die gerade hinreicht zur Zerlegung von

$$(z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m)(z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n)$$

in lineare Faktoren.  $L$  ist eine solche endliche normale Erweiterung von  $K$ , in welcher jedes Element separabel (in bezug auf  $K$ ) ist, also zugleich eine einfache Erweiterung von  $K$ . Es ist  $L = K(\vartheta)$ . Die Definitionsgleichung von  $\vartheta$  habe die folgenden Wurzeln:  $\vartheta, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{r-1}$ . Es ist  $\alpha = \varphi(\vartheta), \beta = \psi(\vartheta), \gamma = \chi(\vartheta)$ .

Es sei  $r$  ein gemeinsames Vielfaches von  $m, n$  und  $h$ ; ferner sind die Produkte

$$\begin{aligned} & (z - \varphi(\vartheta)) (z - \varphi(\vartheta_1)) \cdots (z - \varphi(\vartheta_{r-1})) \\ & (z - \psi(\vartheta)) (z - \psi(\vartheta_1)) \cdots (z - \psi(\vartheta_{r-1})) \\ & (z - \chi(\vartheta)) (z - \chi(\vartheta_1)) \cdots (z - \chi(\vartheta_{r-1})), \end{aligned}$$

gleich der  $\frac{r}{m}$ -ten,  $\frac{r}{n}$ -ten resp.  $\frac{r}{h}$ -ten Potenz von

$$z^m + \dots + a_m, z^n + \dots + b_n, z^h + \dots + c_h.$$

Es ist demnach

$$\begin{aligned} \varphi(\vartheta) \varphi(\vartheta_1) \cdots \varphi(\vartheta_{r-1}) &= \pm a_m^{\frac{r}{m}}, \\ \psi(\vartheta) \psi(\vartheta_1) \cdots \psi(\vartheta_{r-1}) &= \pm b_n^{\frac{r}{n}}, \\ \chi(\vartheta) \chi(\vartheta_1) \cdots \chi(\vartheta_{r-1}) &= \pm c_h^{\frac{r}{h}}. \end{aligned}$$

Ziehen wir noch in Betracht, dasz

$$\chi(\vartheta) \cdots \chi(\vartheta_{r-1}) = \varphi(\vartheta) \psi(\vartheta) \cdots \varphi(\vartheta_{r-1}) \psi(\vartheta_{r-1}),$$

so folgt hieraus

$$\pm c_h^{\frac{r}{h}} = a_m^{\frac{r}{m}} b_n^{\frac{r}{n}},$$

also in der Tat

$$|c_h|^{\frac{1}{h}} = |a_m|^{\frac{1}{m}} |b_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Sind  $\alpha, \beta$  und  $\gamma = \alpha\beta$  nicht separabel (in bezug auf  $K$ ), so bestimmt man  $u, v$  und  $w$  so, dasz

$$\bar{\alpha} = \alpha^{p^u}, \bar{\beta} = \beta^{p^v}, \bar{\gamma} = \gamma^{p^w}$$

separabel sind. Da für die Elemente  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  die Gleichung  $|\bar{\alpha}\bar{\beta}| = |\bar{\alpha}| \cdot |\bar{\beta}|$  bewiesen ist, so erhält man auch nun einfach  $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ .

Das Erwähnte hat KÜRSCHÁK in die Lage gesetzt, jeden bewerteten Körper zu einem algebraisch abgeschlossenen, bewerteten Körper zu erweitern. Ob dieser Körper auch vollständig ist, bleibt noch unbestimmt.

Man kann aber beweisen, dasz der derivierte Körper dieses algebraisch

abgeschlossenen Körpers, also seine kleinste vollständige Erweiterung stets wieder algebraisch abgeschlossen ist: Es sei nämlich  $K$  ein algebraisch abgeschlossener, bewerteter Körper und  $K'$  sein derivierter Körper. KÜRSCHÁK beweist, dass jede rationale ganze Funktion

$$F(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n,$$

deren Koeffizienten  $K'$  entnommen sind, in  $K'$  in lineare Faktoren zerfällt. Er bildet eine Funktion  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ , deren Koeffizienten dem Körper  $K$  entnommen sind und die Ungleichungen

$$|a_1 - A_1| < \varepsilon, \dots, |a_n - A_n| < \varepsilon$$

befriedigen. Es ist für  $f(z)$  immer eine Zerlegung

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$$

möglich. Es werden nun  $n$  Fundamentalfolgen nach der Rekursionsformel

$$\alpha_v^{(k+1)} = \alpha_v^{(k)} - \frac{F(\alpha_v^{(k)})}{(\alpha_v^{(k)} - \alpha_1^{(k)}) \cdots (\alpha_v^{(k)} - \alpha_{v-1}^{(k)}) (\alpha_v^{(k)} - \alpha_{v+1}^{(k)}) \cdots (\alpha_v^{(k)} - \alpha_n^{(k)})}$$

gebildet. Bezeichnen wir ihre Limes in  $K'$  mit  $\gamma_1, \dots, \gamma_v, \dots, \gamma_n$ , so ist  $F(z) = (z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \cdots (z - \gamma_n)$ . Damit hat dann KÜRSCHÁK das Ziel seiner Abhandlung erreicht: Jeder bewertete Körper kann erweitert werden zu einem algebraisch abgeschlossenen, vollständigen, bewerteten Körper.

Die gefundenen Resultate befähigen uns also auch, jede algebraische Erweiterung des Körpers  $K(p)$  der  $p$ -adischen rationalen Zahlen zu bewerten. KÜRSCHÁK bemerkt, dass HENSEL für diesen Fall nicht die HADAMARDSchen Sätze, sondern viel einfacheren Untersuchungen über die Zerlegung der ganzen Funktionen in  $K(p)$  benutzt. KÜRSCHÁK beschlieszt den § 45 seiner Abhandlung mit der Bemerkung, dass auch in allen anderen Fällen die Sätze über die Bewertung der algebraischen Erweiterungen mittels solcher Methoden bewiesen werden können, die den HENSELSchen Ueberlegungen etwas näher stehen als die von ihm selbst benutzten. Er hat aber vergebens nach einer grösseren Annäherung gestrebt. Es gelingt K. RYCHLIK (J. f. d. r. u. ang. Math. 153 (1924)) die KÜRSCHÁKschen Resultate mittels der HENSELSchen Methoden zu beweisen (siehe § 5 dieses Kapitels).

§ 3. KÜRSCHÁK stellt am Schlusse seiner Abhandlung folgende Frage: Ist schon die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung des Körpers der rationalen  $p$ -adischen Zahlen vollständig? Oder, gibt es in der kleinsten Erweiterung von  $K(p)$  zu einem algebraisch abgeschlossenen vollständigen Körper Grössen, die keiner algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus  $K(p)$  genügen? Er spricht die Vermutung aus, dass es solche „transzendenten“  $p$ -adischen Zahlen wirklich gibt. Es ist OSTROWSKI gelungen nicht

allein diese Frage zu bejahen, aber sogar die allgemeinere Frage zu lösen, wann die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung  $K'$  eines vollständigen Körpers  $K$  vollständig ist (OSTROWSKI: Fragen der allgemeinen Körpertheorie, J. f. d. r. u. ang. Math. 143 (1913)). Er beweist nämlich, dasz:

1. jede endliche separable Erweiterung eines vollständigen Körpers vollständig ist;
2. eine unendliche separable algebraische Erweiterung eines vollständigen Körpers nicht vollständig ist und
3. die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung eines vollständigen Körpers dann und nur dann vollständig ist, wenn sie endlich in bezug auf diesen Körper ist. Für die Beweise verweisen wir auf die Originalabhandlung.

Vier Jahre nachher erscheint von OSTROWSKI ein zweiter Aufsatz: Zur Theorie der perfekten Körper (J. f. d. r. u. ang. Math. 147 (1917)). In einer Fußnote bemerkt OSTROWSKI, dasz er die Definition der Bewertung statt der Forderung  $|1 + a| \leq 1 + |a|$  der schärferen Bedingung  $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$  unterwirft. (Damit beschränkt er sich also auf die nicht-archimedischen Bewertungen. Wie OSTROWSKI an anderer Stelle zeigt <sup>1)</sup>, sind die wichtigsten Fragen der Bewertungstheorie im Falle der archimedischen Bewertung trivial zu beantworten.)

Es wird in der zweiten Abhandlung OSTROWSKIS die folgende Frage untersucht: Unter welchen Umständen ist eine bewertete algebraische Erweiterung eines vollständigen bewerteten Körpers selber vollständig? Es stellt sich heraus, dasz

1. jede endliche bewertete Erweiterung  $\bar{K}$  eines vollständigen Körpers  $K$  vollständig ist;
2. eine algebraische bewertete Erweiterung  $\bar{K}$  eines vollständigen Körpers  $K$ , die Größen von beliebig hohem Grade in bezug auf  $K$  enthält, nicht vollständig ist;
3. die kleinste algebraisch abgeschlossene bewertete Erweiterung  $\bar{K}$  eines vollständigen Körpers  $K$  dann und nur dann vollständig ist, wenn sie endlich in bezug auf  $K$  ist. Den Satz 3 hat OSTROWSKI bereits in seiner früheren Abhandlung vollständig, die Sätze 1 und 2 aber nur unter der Voraussetzung bewiesen, dasz  $\bar{K}$  separabel in bezug auf  $K$  ist. Wir müssen die Beweise unterlassen.

Zum Schluß sei noch erwähnt, dasz OSTROWSKI in dieser Abhandlung beweist, dasz die von KÜRSCHÁK angegebene Bewertung algebraischer Erweiterungen auch die einzig mögliche Bewertung derselben ist. Der Beweis folgt hier in § 6.

#### § 4. Die im Jahre 1918 in dem Acta Mathematica 41 erschienene

<sup>1)</sup> Ueber einige Lösungen der Funktionalgleichungen  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ ; Acta Mathematica 41 (1918).

Arbeit „Ueber einige Lösungen der Funktionalgleichung  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ “ von A. OSTROWSKI darf man sehr wichtig für die Bewertungstheorie nennen. In dieser Abhandlungen sollen die Lösungen der Funktionalgleichung

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y) \quad (1)$$

mit der Nebenbedingung  $\varphi(0) = 0$  und

$$\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) \quad (2)$$

untersucht werden, wo die Funktion  $\varphi$  nur reeller Werte fähig ist, die Argumente  $x, y, \dots$  aber sämtliche Elemente eines beliebigen Körpers darstellen. Untersucht man zuerst das System (1), (2) im Körper  $\mathcal{R}$  der rationalen Zahlen, dann ist, abgesehen von einigen trivialen Lösungen, entweder

$$\varphi(x) = \|x\|^\rho \quad 0 < \rho \leq 1$$

(wenn man für gewöhnliche Absolutbetragbewertung Doppelstriche benutzt), oder

$$\varphi(x) = c^{\alpha(p, x)} \quad 0 < c < 1,$$

wo  $\alpha(p, x)$ , die Ordnung, die ganze Zahl ist von der Eigenschaft, dass  $\frac{x}{\alpha(p, x)}$  in gekürzter Form weder im Zähler noch im Nenner  $p$  enthält.

Der von OSTROWSKI herrührende Satz zeigt also, dass die uns bekannten Bewertungen des Körpers der rationalen Zahlen, nämlich die  $p$ -adischen und die nach dem absoluten Betrag, im wesentlichen die einzig möglichen sind. Der Beweis von OSTROWSKI ist später von ARTIN (Ueber die Bewertungen algebraischer Zahlkörper, J. f. d. r. u. ang. Math. 167, 1932) und v. D. WAERDEN (Moderne Algebra I) etwas vereinfacht worden. Wir geben hier den Beweis von v. D. WAERDEN.

Bezeichnen wir  $\varphi(a)$  mit  $|a|$ , so folgt einfach  $|n| \leq \|n\|$ , wenn  $n$  eine ganze rationale Zahl ist. Seien nun  $a$  und  $b$  zwei natürliche Zahlen  $> 1$  und entwickeln wir  $b^v$  nach Potenzen von  $a$

$$b^v = c_0 + c_1 a + \dots + c_n a^n, \quad 0 \leq c_k < a, c_n \neq 0.$$

Es ist  $a^n \leq b^v$ , d.h.  $n \leq v \cdot \frac{\log b}{\log a}$ , also

$$\begin{aligned} |b^v| &\leq |c_0| + |c_1| |a| + \dots + |c_n| |a|^n \\ &\leq a(1 + |a| + \dots + |a|^n) \\ &\leq a(n+1) \max(1, |a|^n) \\ &\leq a(n+1) M^n, \end{aligned}$$

wenn  $M = \max(1, |a|)$ , also

$$\begin{aligned} |b|^v &< a \left( \frac{\log b}{\log a} v + 1 \right) M^{\frac{\log b}{\log a} v}, \text{ oder } |b| \leq M^{\frac{\log b}{\log a}} \\ |b| &\leq \max(1, |a|^{\frac{\log b}{\log a}}). \end{aligned}$$



1. Die Bewertung ist archimedisch: dann gibt es ein  $b$  mit  $|b| > 1$ . Wäre für irgend eine andere ganze Zahl  $a > 1$  etwa  $|a| \leq 1$ , so würde aus der eben bewiesenen Ungleichung der Widerspruch  $|b| \leq 1$  folgen. Es ist also  $|a| > 1$  für alle ganzen  $a > 1$ . Also gilt

$$|b| \leq |a|^{\frac{\log b}{\log a}};$$

da aber  $a$  und  $b$  vertauscht werden können, so gilt  $|a|^{\frac{1}{\log a}} = |b|^{\frac{1}{\log b}}$ .

Ist  $|b| = b^e$ , so folgt hieraus  $|a| = a^e$  und also  $|r| = \|r\|^e$  für jede rationale  $r$ . Es ist  $e > 0$  wegen  $|a| > 1$ , und  $e \leq 1$  wegen  $2^e = |2| = |1 + 1| \leq 1 + 1 = 2$ .

2. Die Bewertung ist nicht-archimedisch; es ist also  $|a| \leq 1$  für alle ganzen  $a$ . Aus  $|a| < 1$  und  $|b| < 1$  folgt  $|a + b| \leq \max(|a|, |b|) < 1$ , also bildet die Gesamtheit aller ganzen Zahlen  $a$  mit  $|a| < 1$  ein Ideal im Ring der ganzen Zahlen; das Ideal ist prim, weil aus  $|ab| = |a| \cdot |b| < 1$  entweder  $|a| < 1$  oder  $|b| < 1$  (oder beides) folgt und jedes Primideal wird im Ring der ganzen Zahlen von einer Primzahl erzeugt, also sind alle ganze Zahlen  $a$  mit  $|a| < 1$  Vielfachen einer Primzahl  $p$ . Jede rationale Zahl  $r$  kann in der Form  $r = \frac{m}{n} p^e$  mit ganzen, nicht durch  $p$  teilbaren  $m$  und  $n$  geschrieben werden.

Da  $|m| = |n| = 1$ , so wird  $|r| = |p|^e = p^{-\sigma}$ , wo  $\sigma = \frac{-\log |p|}{\log p}$  eine feste, wegen  $|p| < 1$ , positive Zahl ist.

Aus der zweiten Hälfte dieser Abhandlung geht hervor, dass bei den tiefergehenden Untersuchungen der Bewertungstheorie allein die nicht-archimedischen Bewertungen von Belang sind. Denn es gilt nach OSTROWSKI: Ein archimedisch bewerteter Körper  $K$  ist zu einem mit gewöhnlichen Absolutbeträgen bewerteten Körper aus komplexen Zahlen isomorph.

Betrachten wir nämlich den Körper  $W$  aller reellen Zahlen, so gibt es in  $W$  irreduzible Funktionen von einer Unbestimmten nur vom zweiten Grade und es genügt eine Wurzel einer von ihnen, etwa von  $x^2 + 1$  zu adjungieren um den Körper  $Z$  aller komplexen Zahlen zu erhalten, in dem es schon keine nichtlinearen irreduziblen Funktionen von einer Unbestimmten mehr gibt.

Ordnet man jeder Zahl  $\alpha$  von  $Z$  die Zahl  $\|\alpha\|^e$  zu, so stellt der so entstehende bewertete Körper  $Z_e$  zugleich einen vollständigen Körper da, weil  $Z$  es ist. Von  $Z_e$  gilt nun der wichtige Satz:

Es gibt keinen archimedischen bewerteten Körper  $K$ , der einen Körper  $Z_e$  zum Unterkörper hat, ohne mit ihm identisch zu sein.

Nehmen wir nämlich an, es gebe eine bewertete Erweiterung  $K$  von  $Z_e$ , und es sei  $x$  ein in  $K$  aber nicht in  $Z_e$  enthaltenes Element. Es sei die

untere Grenze der Zahlen  $|x - a|$ , wo  $a$  alle Größen von  $Z_\rho$  durchläuft, gleich  $m$ . Dann gibt es ein  $A$  aus  $Z_\rho$  mit  $|x - A| = m$ . Denn sonst müsste es eine Folge der komplexen Zahlen  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) geben, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x - a_n| = m \text{ ist.}$$

Die komplexen Zahlen  $a_i$  müssten aber dann eine Häufungsstelle  $A$  haben mit  $|x - A| = m$ , denn die absoluten Beträge der Zahlen  $a_i$  sind begrenzt, wegen

$$|a_i| \leq |x| + |x - a_i|.$$

Das Element  $x - A$  von  $K$ , das wir durch  $y$  bezeichnen, hat dann die Eigenschaft, dass für alle Größen aus  $Z$  gilt:  $|y - a| \geq |y| = m$ . Wäre  $m \neq 0$ , so existierte ein  $a$  von  $Z_\rho$  mit  $0 < |a| < m = |y|$ .

Nun besitzt auch  $y - a$  die Eigenschaft, dass für kein Element  $a$  von  $Z_\rho$   $|y - a - a| < |y - a| = m$  sein kann. Daher besitzt auch  $y - 2a$  jene Eigenschaft, dass für kein Element  $a$  von  $Z_\rho$

$$|y - 2a - a| < |y - 2a| = m$$

sein kann. Also ist  $|y - na| = |y| = m$  für jede natürliche Zahl  $n$ . Dies ist aber unmöglich. Denn es folgte dann

$$2m = |y - na| + |y| \geq |na| = n^e |a|,$$

wo die rechte Seite mit  $n$  unendlich groß wird, während  $2m$  konstant ist, also wäre die Annahme  $m \neq 0$  unmöglich.

Es stellt sich nun leicht heraus, dass ein beliebiger, archimedisch bewerteter Körper  $K$  mit einem Unterkörper von  $Z_\rho$  analytisch isomorph ist (d.h. so isomorph, dass die entsprechenden Elemente dieselben Bewertungen haben). Denn der derivierte Körper  $K'$  enthält den bewerteten Körper  $W_\rho$  (oder einen zu ihm analytisch isomorphen). Ist  $x^2 + 1 = 0$  irreduzibel in  $K'$ , so adjungieren wir zu  $K'$  eine Wurzel von  $x^2 + 1 = 0$  und bewerten den so entstandenen Körper  $K''$  (andernfalls setzen wir  $K'' = K'$ ). Dann muss  $K''$  einen mit  $Z_\rho$  analytisch isomorphen Unterkörper  $Z'_\rho$  enthalten. Nach dem Bewiesenen fällt aber  $K''$  mit  $Z'_\rho$  zusammen. Also ist  $K$  mit einem Unterkörper von  $Z_\rho$  analytisch isomorph. Ist umgekehrt  $K$  mit einem Unterkörper von  $Z$  isomorph, und ordnen wir jedem Element von  $K$  die Bewertung zu, die das ihm entsprechende Element in  $Z_\rho$  hat, so entsteht eine archimedische Bewertung von  $K$ . Zum Schluss sei noch erwähnt, dass man aus jeder isomorphen Abbildung von  $K$  auf  $Z$  nach dem Obigen eine archimedische Bewertung von  $K$  herleiten kann.

Zusammenfassend erhalten wir folgenden Satz, durch welchen die Theorie der archimedischen Bewertungen erledigt wird:

Alle archimedischen Bewertungen eines Körpers  $K$  werden erhalten, indem man  $K$  auf alle möglichen Weisen in den Körper der reellen oder in den der komplexen Zahlen einbettet und jedesmal  $|a| = \|a\|^\rho$ ,  $0 < \rho \leq 1$  setzt.

**Mathematics.** — *Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie.* (Fünfte Mitteilung)<sup>1)</sup>. Die intuitionistische Uebertragung des PICARDSchen Satzes. By M. J. BELINFANTE. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

Dieser Schlussteil meiner Untersuchung enthält die intuitionistische Uebertragung der PICARDSchen Sätze<sup>1)</sup>, deren elementarer Beweis das Hauptziel meiner Untersuchungen über die Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie war. Bei diesem Beweis ist der LANDAUSchen Darstellung<sup>2)</sup> auf Schritt und Tritt gefolgt. Es enthält § 1 einen Hilfssatz, § 2 den BLOCHSchen Satz, § 3 den SCHOTTKYSchen Satz, § 4 den kleinen PICARDSchen Satz und § 5 die intuitionistische Uebertragung des grossen PICARDSchen Satzes.

§ 1. **Satz A.** *Es sei  $f(z)$  regulär für  $|z| \leq R$  und ebenda  $|f(z)| < M$ . Es sei weiter  $f(0) = 0$  und  $|f'(0)| \geq a > 0$ . Es lässt sich dann eine nur von  $a$ ,  $R$  und  $M$  abhängige, positive Konstante  $\varphi = \varphi(M; a, R)$  derart bestimmen, dass  $f(z)$  in  $|z| < R$  alle Werte  $w$  annimmt, die dem absoluten Betrage nach  $\leq \varphi$  sind.*

*Beweis.* Wie aus der Betrachtung von  $F(z) = \frac{f(Rz)}{Rf'(0)}$  ersichtlich, können wir uns auf den Fall  $R = 1$ ,  $f'(0) = 1$  beschränken. Es ist dann  $M \geq 1$ . Nun hat man für  $|z| \leq \frac{1}{4M}$ :

$$|f(z) - z| = \left| \sum_2^{\infty} \frac{z^n f^n(0)}{n!} \right| < \frac{M|z^2|}{1-|z|} \leq \frac{1}{3}|z|,$$

folglich für  $|z| = \frac{1}{4M}$ :  $|f(z)| > \frac{1}{6M}$ .

Mithin ist für  $|w| \leq \frac{1}{6M}$ :

$$\int_{|z|=\frac{1}{4M}} \frac{f'(z) dz}{f(z) - w} = \int_{|z|=\frac{1}{4M}} \frac{f'(z) dz}{f(z)} + \sum_1^{\infty} w^n \int_{|z|=\frac{1}{4M}} \frac{f'(z) dz}{\{f(z)\}^{n+1}} = 2\pi\sqrt{-1}.$$

<sup>1)</sup> Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 173, 276, 420, 563. Von dieser fünften Mitteilung wurden die Resultate schon mitgeteilt in Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **34**, 1395—1397 (1931).

<sup>2)</sup> E. LANDAU, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. 2te Aufl. 1929.

Folglich lässt sich nach dem Hauptsatz der dritten Mitteilung<sup>3)</sup> für  $|w| \leq \frac{1}{6M}$  eine Nullstelle von  $f(z) - w$  in  $|z| < \frac{1}{4M}$  bestimmen. Also ist  $\varphi = \frac{1}{6M}$  und im allgemeinen Fall  $\varphi = \frac{\alpha^2 R^2}{6M}$  eine Zahl mit der verlangten Eigenschaft.

§ 2. Satz B. Es sei  $f(z)$  regulär für  $|z| \leq 1$  und  $|f'(0)| \geq 1$ . Alsdann nimmt  $f(z)$  dort alle Werte eines Kreisinnern vom Radius  $B$  an, wo  $B$  eine absolute Konstante ist.

*Beweis.* Wie aus der Betrachtung von  $F(z) = \frac{f(z)}{f'(0)}$  ersichtlich, können wir uns auf den Fall  $f'(0) = 1$  beschränken. Wir zeigen, dass die Konstante  $\varphi (1; \frac{1}{4})$  von Satz A § 1 Radius eines solchen Kreisinnern  $K$  ist. Um bei einer vorgelegten Funktion  $f(z)$  den Mittelpunkt  $w_0$  von  $K$  zu bestimmen, wählen wir eine solche positive Zahl  $\mu$ , dass  $f'(z)$  in  $|z| \leq 1$  dem absoluten Betrage nach  $< \mu$  bleibt. Weiter bestimmen wir die ganze Zahl  $p$  so, dass  $\frac{\mu + \frac{1}{2}}{2^p} < 1$  ist und schliesslich wählen wir zu jeder ganzen Zahl  $n \leq p$  (inklusive Null) eine rationale Zahl  $M_n$  und eine komplexe Zahl  $z_n$  mit  $|z_n| = 1 - \frac{1}{2^n}$  in solcher Weise, dass  $|f'(z_n)| > M_n - \frac{1}{2}$  ist und die Beziehung  $|f'(z)| \leq M_n$  für jedes  $z$  mit  $|z| = |z_n|$  (also nach Satz 7 der zweiten Mitteilung<sup>4)</sup> auch für jedes  $z$  mit  $|z| < |z_n|$ ) gilt. Da  $z_0 = 0$  und  $f'(0) = 1$  ist, darf  $M_0 = 1$  gesetzt werden. Es ist offenbar  $\frac{M_p}{2^p} < 1$ ; mithin lässt sich ein solches  $\nu < p$  bestimmen, dass:

$$\frac{M_\nu}{2^\nu} \geq 1 > \frac{M_{\nu+1}}{2^{\nu+1}}$$

ist. Es ist dann  $f(z_\nu)$  der gesuchte Mittelpunkt  $w_0$ . Denn setzen wir  $g(z) = f(z + z_\nu) - f(z_\nu)$ , so haben wir für  $|z| \leq \frac{1}{2^{\nu+1}}$ :

$$|z + z_\nu| \leq |z_{\nu+1}|, \text{ mithin } |f'(z + z_\nu)| \leq M_{\nu+1} < 2^{\nu+1},$$

folglich:

$$|g(z)| = \left| \int_{z_\nu}^{z_\nu + z} f'(\zeta) d\zeta \right| < 1.$$

<sup>3)</sup> Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 420.

<sup>4)</sup> Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 285.

Es ist weiter  $g(0) = 0$  und  $|g'(0)| = |f'(z_v)| > M_v - \frac{1}{2} \cong 2^{v-1}$ . Wendet man also den Satz von § 1 an auf  $g(z)$  mit  $M = 1$ ,  $R = \frac{1}{2^{v+1}}$  und  $a = 2^{v-1}$ , so erkennt man, dass  $g(z)$  alle Werte des Kreisinnern  $|w| \cong \varphi(1; \frac{1}{4}) = B$  in  $|z| < \frac{1}{2^{v+1}}$  annimmt. Mithin nimmt die Funktion  $f(z) = g(z - z_v) + w_0$  alle Werte des Kreisinnern  $|w - w_0| \cong B$  an und zwar in  $|z - z_v| < \frac{1}{2^{v+1}}$ , also in  $|z| < 1$ .

§ 3. **Satz C<sub>1</sub>**. Zu jedem  $\omega > 1$  und jedem  $\vartheta$  mit  $0 < \vartheta < 1$  lässt sich eine solche positive Zahl  $\psi(\omega; \vartheta)$  bestimmen, dass jede in  $|z| \cong 1$  reguläre Funktion  $F(z)$ , die dort den Bedingungen  $F(z) \neq 0$ ,  $F(z) \neq 1$  und  $\frac{1}{\omega} < |F(0)| < \omega^5$  genügt, in  $|z| \cong \vartheta$  der Ungleichung  $|F(z)| < \psi(\omega; \vartheta)$  genügt.

Dem Beweis schicken wir einige Hilfssätze voraus.

**Lemma I.** Setzt man:

$$G = \pm \log(\sqrt{m+1} + \sqrt{m}) \pm \frac{1}{2} n \pi \sqrt{-1} \quad (m, n \text{ ganz positiv oder Null}),$$

so ist:

$$-e^{\frac{\pi \sqrt{-1}}{2} [e^{2G} + e^{-2G}]} = 1.$$

**Lemma II.** Jeder Kreis vom Radius Eins enthält wenigstens einen Punkt  $G = \pm \log(\sqrt{m+1} + \sqrt{m}) \pm \frac{1}{2} n \pi \sqrt{-1}$  in seinem Innern.

**Lemma III.** Es sei  $f(z)$  regulär für  $|z| \cong 1$  und es gäbe in jedem Kreisinnern vom Radius Eins einen Wert, den  $f(z)$  auslässt.<sup>6)</sup> Es sei weiter  $\vartheta$  eine positive Zahl kleiner als Eins. Alsdann gilt für jedes  $|z| \cong \vartheta$ :

$$|f'(z)| \cong \frac{1}{(1-\vartheta)B},$$

wo  $B$  die Konstante von Satz B § 2 ist.

**Beweis von Lemma III.** Für jedes  $|z_0| \cong \vartheta$  gilt entweder:

$$|f'(z_0)| < \frac{1}{(1-\vartheta)B} \text{ oder: } |f'(z_0)| > \frac{1}{2(1-\vartheta)B}.$$

<sup>5)</sup> Diese letzte Bedingung darf durch die geringere  $|F(0)| < \omega$  ersetzt werden. Vgl. Satz C<sub>2</sub>.

<sup>6)</sup> Wir sagen, dass  $f(z)$  in einem Gebiet  $g$  den Wert  $a$  auslässt, falls die Beziehung  $f(z) = a$  für jedes  $z$  in  $g$  ungereimt ist.

Da im letzten Fall die Hilfsfunktion  $g(z) = \frac{f\{z_0 + (1-\vartheta)z\}}{(1-\vartheta)f'(z_0)}$  in  $|z| \leq 1$  regulär und  $g'(0) = 1$  ist, nimmt  $g(z)$  dort nach Satz B § 2 alle Werte eines Kreisinnern vom Radius  $B$  an. Mithin nimmt  $f(z)$  in  $|z| \leq 1$  zwar alle Werte eines gewissen Kreisinnern  $K$  vom Radius  $B(1-\vartheta)|f'(z_0)|$  an, jedoch (nach Voraussetzung) *nicht* alle Werte eines mit  $K$  konzentrischen Kreisinnern vom Radius Eins und hieraus folgt sofort die Behauptung.

**Beweis von Satz C<sub>1</sub>.** Durch die Beziehung:

$$f(z) = \log \left( \sqrt{\frac{\log F(z)}{2\pi\sqrt{-1}}} - \sqrt{\frac{\log F(z)}{2\pi\sqrt{-1}} - 1} \right) \quad \dots \quad (1)$$

oder:

$$F(z) = -e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2} \{e^{2f(z)} + e^{-2f(z)}\}} \quad \dots \quad (2)$$

werden wegen  $F(z) \neq 0$  und  $F(z) \neq 1$  in  $|z| \leq 1$  reguläre Funktionen  $f(z)$  definiert. Wegen  $\frac{1}{\omega} < |F(0)| < \omega$  lässt sich zu jeder die Bedingungen des Satzes erfüllenden Funktion  $F(z)$  eine Funktion  $f(z)$  so festlegen, dass  $f(0)$  dem absoluten Betrage nach kleiner als eine nur von  $\omega$  abhängige, positive Zahl  $\varphi(\omega)$  ist. Wenn nun  $G$  dieselbe Bedeutung hat wie in Lemma I, so ist nach Lemma I und (2), wegen  $F(z) \neq 1$ ,  $f(z) \neq G$ .<sup>7)</sup> Nach Lemma II und III hat man also:  $|f'(z)| \leq \frac{1}{(1-\vartheta)B}$  für jedes  $|z| \leq \vartheta$ . Mithin ist für jedes  $|z| \leq \vartheta$ :

$$|f(z)| \leq |f(0)| + \int_0^\vartheta |f'(z)| dz < \varphi(\omega) + \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)B} \quad \dots \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgert man nun leicht, dass sich eine positive, nur von  $\omega$  und  $\vartheta$  abhängige, Zahl  $\psi(\omega, \vartheta)$  bestimmen lässt mit der Eigenschaft, dass jede die Bedingungen des Satzes erfüllende Funktion  $F(z)$  für  $|z| \leq \vartheta$  absolut genommen kleiner als  $\psi(\omega, \vartheta)$  bleibt, w.z.b.w.

**Satz C<sub>2</sub>.** *Es gilt die Behauptung von Satz C<sub>1</sub> auch, falls statt  $\frac{1}{\omega} < |F(0)| < \omega$  nur  $|F(0)| < \omega$  vorausgesetzt wird.*

<sup>7)</sup> Denn für eine reguläre Funktion  $F(z)$  folgt aus  $F(a) \neq F(b)$ , dass  $a \neq b$  ist, wie aus

$$F(b) - F(a) = \sum_1^\infty \frac{(b-a)^n}{n!} F^n(a) \neq 0$$

ersichtlich.



*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\omega > 3$ . Es ist entweder:  $|F(0)| > \frac{1}{\omega}$  oder:  $|F(0)| < \frac{2}{\omega}$ . Im letzten Fall braucht man nur Satz C<sub>1</sub> anzuwenden auf  $F_1(z) = 1 - F(z)$  mit  $\omega + 1$  statt  $\omega$ .

§ 4. Satz D. *Es sei  $F(z)$  ganz und variabel und es seien  $a$  und  $b \neq a$  komplexe Zahlen. Alsdann nimmt  $F(z)$  wenigstens einen der Werte  $a$  und  $b$  an.*

*Bemerkung.* Die Aussage: "Eine ganze nicht-konstante Funktion  $F(z)$  lässt entweder keinen oder nur einen Wert aus" ist nicht stichhaltend. Man erkennt dies an dem Beispiel  $F(z) = e^z(1 + ae^z)$ , falls weder  $a=0$  noch  $a \neq 0$  bekannt ist.

*Beweis von Satz D.* Wir setzen  $f(z) = \frac{F(z) - a}{b - a}$  und zeigen, dass  $f(z)$  wenigstens einen der Werte Eins und Null annimmt. Wir bestimmen  $z_0$  derart, dass  $f'(z_0) \neq 0$  ist. Sei  $\omega > 1$  so gewählt, dass  $|f(z_0)| < \omega$  ist und sei  $r = \frac{2\psi(\omega; \frac{1}{2})}{|f'(z_0)|}$ , wo  $\psi(\omega; \frac{1}{2})$  die Konstante von Satz C<sub>2</sub> mit  $\vartheta = \frac{1}{2}$  ist. Wir setzen  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1$  und wählen für  $\nu = 1; 2$  ein den Kreis  $|z - z_0| = r$  in seinem Innern enthaltendes Polygon  $L_\nu$ , auf dessen Rande  $f(z) \neq n_\nu$  ist. Sei nun  $I_\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{L_\nu} \frac{f'(z) dz}{f(z) - n_\nu}$ . Ist  $I_\nu > 0$ , so lässt sich

nach dem Satz vom Integral der logarithmischen Ableitung eine Nullstelle von  $f(z) - n_\nu$  bestimmen. Folglich brauchen wir nur zu beweisen, dass die Beziehung  $I_1 = I_2 = 0$  unmöglich richtig sein kann. In diesem Fall aber wäre nach Satz VI der zweiten Mitteilung<sup>8)</sup> in dem Kreis  $|z - z_0| = r$ :  $f(z) \neq 0$  und  $f(z) \neq 1$ . Setzen wir:

$$g(z) = f \left\{ \frac{2\psi(\omega; \frac{1}{2})}{f'(z_0)} z + z_0 \right\},$$

so wäre für  $|z| \leq \frac{1}{2}$ , wegen  $|g(0)| = |f(z_0)| < \omega$ , nach Satz C<sub>2</sub>  $|g(z)| < \psi(\omega; \frac{1}{2})$ , folglich  $|g'(0)| < 2\psi(\omega; \frac{1}{2})$ , entgegen der Beziehung  $g'(0) = 2\psi(\omega; \frac{1}{2})$ .

**Umkehrung von Satz D.** *Eine ganze Funktion  $F(z)$ , die zwei von einander verschiedene Werte  $a$  und  $b$  auslässt, ist konstant.*

*Beweis.* Wäre  $F(z_1) \neq F(z_2)$ , so wäre nach Satz D entweder irgendwo  $F(z) = a$  oder irgendwo  $F(z) = b$ , entgegen der Voraussetzung.

§ 5. **Hilfssatz.** *Es sei  $f(z)$  eindeutig-regulär und variabel für  $0 < |z| \leq r$  und es sei  $\psi(\omega; \frac{1}{2})$  die Konstante von Satz C<sub>2</sub> mit  $\vartheta = \frac{1}{2}$ . Es seien weiter drei komplexe Zahlen  $\zeta_1$ ,  $\zeta$  und  $\zeta_2$  gegeben, die folgenden Bedingungen genügen:*

<sup>8)</sup> Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 284.

$$|\zeta_2| < |\zeta| < |\zeta_1| < r e^{-4\pi} \dots \dots \dots (1)$$

$$|f(\zeta_\nu)| < \omega; \nu = 1, 2 \dots \dots \dots (2)$$

$$|f(\zeta)| > \psi(\omega; \frac{1}{2}) \dots \dots \dots (3)$$

Alsdann nimmt  $f(z)$  in  $|z| \leq r$  wenigstens einen der beiden Werte Null und Eins an.

*Beweis.* Wir setzen  $n_1 = 0$  und  $n_2 = 1$ . Wir wählen für  $\nu = 1, 2$  in  $|z| < r$  zwei Polygone  $l_\nu$  und  $L_\nu$  ( $l_\nu$  innerhalb  $L_\nu$ ) in solcher Weise, dass der Ring

$$|\zeta_2| e^{-4\pi} \leq |z| \leq |\zeta_1| e^{4\pi} \dots \dots \dots (C)$$

in dem von  $l_\nu$  und  $L_\nu$  gebildeten Polygonring liegt und dass auf dem Rande von  $l_\nu$  und von  $L_\nu$  die Ungleichung  $f(z) \neq n_\nu$  gilt. Wir setzen weiter:

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{L_\nu} \frac{f'(z) dz}{f(z) - n_\nu} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{l_\nu} \frac{f'(z) dz}{f(z) - n_\nu}.$$

Falls die ganze, nicht negative Zahl  $I_\nu > 0$  ist, so lässt sich nach dem Nebensatz zum Hauptsatz der dritten Mitteilung<sup>9)</sup> eine Nullstelle von  $f(z) - n_\nu$  bestimmen. Wir brauchen also nur zu beweisen, dass die Beziehung  $I_1 = I_2 = 0$  unmöglich richtig sein kann. In diesem Fall aber wäre nach einem Satz der dritten Mitteilung<sup>10)</sup> die Beziehung  $f(z) - n_\nu \neq 0$  in dem Ring (C) erfüllt. Bestimmen wir nun für  $p = 1, 2$  die in  $|z| \leq 1$  regulären Funktionen  $h_p(z)$  durch die Beziehung  $h_p(z) = f(\zeta_p e^{4\pi z})$ , so wäre für  $|z| \leq 1$ :  $h_p(z) \neq 0$ ,  $h_p(z) \neq 1$  und  $|h_p(0)| < \omega$ . Nach Satz C<sub>2</sub> wäre dann für  $|z| \leq \frac{1}{2}$ :  $|h_p(z)| < \psi(\omega; \frac{1}{2})$ , folglich:  $|f(z)| < \psi(\omega; \frac{1}{2})$  für jedes  $z$  mit  $|z| = |\zeta_p|$ , mithin (nach einem Satz der dritten Mitteilung<sup>11)</sup>) auch für jedes  $z$  mit  $|\zeta_2| < |z| < |\zeta_1|$ , entgegen den Voraussetzungen (3) und (1).

**Satz E<sub>1</sub>.** Es sei  $F(z)$  eindeutig-regulär für  $0 < |z - z_0| < R$  und es sei der Punkt  $z_0$  wesentlich singular. Es seien zwei von einander entfernte komplexe Zahlen  $a$  und  $b$  und eine positive Zahl  $\rho < R$  beliebig vorgelegt. Alsdann nimmt  $F(z)$  in dem Kreise  $|z - z_0| = \rho$  wenigstens einen der beiden Werte  $a$  und  $b$  an.

*Beweis.* Wir setzen  $f(z) = \frac{F(z_0 + Rz) - a}{b - a}$  und brauchen nur zu zeigen, dass  $f(z)$  in dem Kreise  $|z| < \frac{\rho}{R} = r$  wenigstens einen der beiden Werte Eins und Null annimmt.

<sup>9)</sup> Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 425.

<sup>10)</sup> Nebensatz zu Satz VI der zweiten Mitteilung, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 425.

<sup>11)</sup> Nebensatz zu Satz VII der zweiten Mitteilung, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 425.

Nach dem WEIERSTRASSschen Satz<sup>12)</sup> können wir drei komplexe Zahlen  $\zeta_1$ ,  $\zeta$  und  $\zeta_2$  bestimmen, welche die Bedingungen (1), (2) und (3) des Hilfssatzes erfüllen. Folglich ist der Satz eine unmittelbare Folgerung des Hilfssatzes.

*Bemerkung.* In der klassischen Theorie beweist man den Satz, dass eine für  $0 < |z - z_0| < R$  eindeutig-reguläre Funktion, die dort die Werte  $a$  und  $b$  auslässt, in  $z_0$  keine wesentlich singuläre Stelle hat. Wir beweisen jetzt eine mit diesem klassischen Satz verwandte intuitionistische Umkehrung des grossen PICARDSchen Satzes; wir betonen aber, dass der obige Satz  $E_1$  keineswegs eine unmittelbare Folgerung dieser Umkehrung  $E_2$  ist.

**Satz  $E_2$ .** *Es sei  $F(z)$  eindeutig-regulär für  $0 < |z - z_0| < R$  und es habe die LAURENTSche Reihe:*

$$F(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_1^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

wenigstens einen von Null entfernten Koeffizienten  $b_k$ . Es seien weiter zwei komplexe Zahlen  $a$  und  $b \neq a$  und eine positive Zahl  $\varrho < R$  derart gegeben, dass  $F(z)$  in  $|z - z_0| < \varrho$  die Werte  $a$  und  $b$  auslässt. Alsdann ist  $z_0$  ein Pol von bestimmter Ordnung<sup>13)</sup>.

*Beweis.* Wir setzen wieder  $f(z) = \frac{F(z_0 + Rz) - a}{b - a}$ . Wir wählen  $\zeta_1$  und  $\omega > 1$  derart, dass  $|\zeta_1| < \frac{\varrho}{R} e^{-4\pi}$  und  $|f(\zeta_1)| < \omega$  (1) ist. Sei  $\delta$  kleiner als jede der Zahlen  $|\zeta_1|$  und  $\sqrt[k]{\frac{|b_k|}{2\psi(\omega; \frac{1}{2})}}$ . Es lässt sich dann  $\zeta$  mit  $|\zeta| = \delta$  so bestimmen, dass  $|f(\zeta)| > \psi(\omega; \frac{1}{2})$  (2) ist. Denn aus  $|f(z)| < 2\psi(\omega; \frac{1}{2})$  für jedes  $|z| = \delta$  würde folgen:

$$|b_k| = \left| \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{|z|=\delta} f(z) z^{k-1} dz \right| < |b_k|.$$

Aus (1) und (2) folgern wir nun, dass die Beziehung  $|f(\zeta_2)| < \omega$  unmöglich für ein  $\zeta_2$  mit  $|\zeta_2| < |\zeta|$  erfüllt sein kann, da sonst  $f(z)$  nach dem obigen Hilfssatz in  $|z| < \frac{\varrho}{R}$  einen der beiden Werte Eins und Null annehmen würde. Es gilt somit  $|f(z)| > \frac{1}{2}\omega$  für  $|z| < |\zeta|$ . Folglich hat  $f(z)$  nach der Umkehrung des WEIERSTRASSschen Satzes<sup>14)</sup> in  $z = 0$  einen Pol bestimmter Ordnung.

<sup>12)</sup> Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 565.

<sup>13)</sup> Vgl. die Umkehrung des WEIERSTRASSschen Satzes, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 566.

<sup>14)</sup> Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 566.

**Mathematics.** — *Quelques applications de la théorie moderne du potentiel aux fonctions holomorphes.* Par A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

1. *Introduction.* — Le but de cet article est de montrer par quelques exemples l'importance d'une application aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du problème de DIRICHLET et des fonctions sous-harmoniques, ou encore plus généralement, de la théorie moderne du potentiel.

D'une part, l'importance de cette application a un sens direct: on peut obtenir des généralisations de théorèmes connus, par exemple des généralisations quant à la frontière des domaines.

D'autre part l'application des résultats de la théorie mentionnée peut faire sortir la vraie nature d'un théorème. En effet, puisqu'on applique des théorèmes sur des fonctions réelles, la voie s'ouvre pour obtenir des théorèmes dans un espace à plus de deux dimensions — naturellement des théorèmes sur des fonctions réelles — qui correspondent à des théorèmes sur les fonctions holomorphes. Si une telle généralisation est possible, on peut présumer que le théorème sur les fonctions holomorphes peut être établi sans aucun moyen spécifiquement deux-dimensionnel, et inversement, si une telle généralisation n'est pas possible, il semble que de tels moyens, par exemple la représentation conforme, sont indispensables.

Remarquons que si  $f(z)$  est holomorphe dans un domaine,  $\log |f(z)|$  y est sous-harmonique.

Dans ce qui suit nous faisons usage de la notion de „mesure harmonique”. M. R. NEVANLINNA a déjà utilisé cette notion dans son livre „Eindeutige Analytische Funktionen”, mais pas sous la forme la plus générale. Pour la théorie générale de cette mesure on peut voir un article de M. BRELOT, intitulé „Familles de PERRON et problème de DIRICHLET”<sup>1)</sup>. L'auteur y étudie le problème de DIRICHLET pour valeurs-frontière non continues. Il arrive aux notions „mesure harmonique intérieure” et „mesure harmonique extérieure” d'un sous-ensemble de la frontière d'un domaine. Si ces deux mesures sont égales, il appelle la valeur commune la „mesure harmonique” et l'ensemble est dit „mesurable”. En particulier les ensembles boréliens sont mesurables. La mesure harmonique est indiquée par  $\mu^P(\epsilon)$ ; elle dépend de la position du point  $P$  dans le domaine et est une fonction harmonique de  $P$ .

Les résultats sur les fonctions harmoniques ou sous-harmoniques sont valables dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

2. *Lemme de SCHWARZ.* — Ce lemme apparaît comme un cas particulier d'une formule donnant une représentation générale des fonctions sous-harmoniques:

Si  $u(P)$  est sous-harmonique dans le domaine borné  $\Omega$  et si  $u$  admet une majorante harmonique dans  $\Omega$ , d'où résulte qu'il y a une plus petite majorante harmonique  $u^*(P)$  pour  $u$ , alors on a

$$u(P) = - \int_{\Omega} G(P, S) d\theta(S) + u^*(P). \quad \dots \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Acta de Szeged IX (1939).

Ici,  $\theta$  signifie une distribution de masse positive dans  $\Omega$  (déterminée uniquement par  $u$ ) et  $G(P, S)$  la fonction de GREEN pour  $\Omega$  avec pôle en  $S$  (au sens généralisé de WIENER;  $G$  peut donc être discontinu en quelques points de la frontière  $\mathcal{S}$ ). Si en particulier  $u$  est borné supérieurement dans  $\Omega$ ,  $u \leq M$ , il s'en suit

$$u(P) \equiv - \int_{\Omega} G(P, S) d\theta(S) + M. \dots \dots \dots (2)$$

Supposons que  $u(P)$  est telle que la distribution  $\theta$  contienne les masses finies  $n_i > 0$  dans les points  $S_i$ , en nombre fini ou infini dénombrable. Alors on obtient,  $G$  étant  $> 0$ ,

$$u(P) \equiv - \sum_i G(P, S_i) n_i + M. \dots \dots \dots (3)$$

Si la série diverge, la formule reste vraie, puisqu'alors les deux membres sont  $-\infty$ .  
 Appliquons cette formule aux fonctions holomorphes dans  $\Omega$ . Soit donc  $f(z)$  régulier et de module borné supérieurement. Soient  $a_i$  les zéros de  $f(z)$  avec multiplicité  $n_i$ ;  $n_i$  entier  $> 0$ ). La distribution  $\theta$  correspondant à  $\log |f(z)|$  a les masses  $n_i$  aux points  $a_i$ .  
 On obtient donc

$$\log |f(z)| \equiv M - \sum_i n_i G(z, a_i). \dots \dots \dots (4)$$

En prenant pour  $\Omega$  le cercle  $|z| < R$ ,  $a_i = 0$  et  $n_i = 1$ , on a  $G(z, a_i) = \log \frac{R}{|z|}$  et (4) devient le lemme de SCHWARZ:

$$|f(z)| \equiv e^M \frac{|z|}{R}.$$

Il se peut que la série à droite de (4) diverge partout dans  $\Omega$ ; si elle diverge en un seul point  $z_0 \neq a_i$ , elle diverge partout en vertu du théorème de HARNACK. Il suffit donc par exemple de choisir les multiplicités en  $a_i$  telles que

$$n_i > \frac{1}{i G(z_0, a_i)}.$$

Inversement, si la série converge en un seul point  $z \neq a_i$ , elle converge partout dans  $\Omega$  sauf aux points  $a_i$  où elle est infinie logarithmique.

Il s'en suit le théorème suivant:

*Si la fonction  $f(z)$  est telle que la série*

$$\sum_i n_i G(z, a_i)$$

*diverge en un point  $z$  de  $\Omega \neq a_i$ ,  $f(z)$  est non bornée dans  $\Omega$  ou bien, elle est identiquement zéro.*

Remarquons que si dans les relations (3) ou (4) l'égalité a lieu dans un seul point  $\neq a_i$ , on a partout dans  $\Omega$  l'égalité puisqu'une fonction sous-harmonique ne peut avoir un maximum dans un point intérieur que si elle est partout constante. On a alors

$$f(z) = e^M \prod_i e^{-n_i \Phi(z, a_i)}$$

où  $\Phi(z, a_i)$  désigne la fonction analytique ayant  $G(z, a_i)$  comme partie réelle.

3. *La formule de POISSON-JENSEN.* — Soit  $u(P)$  sous-harmonique dans  $\Omega$  et borné supérieurement. Posons ( $Q$  désigne un point de la frontière  $\Sigma$  de  $\Omega$ )

$$\lambda(Q) = \overline{\lim}_{P \rightarrow Q} u(P). \quad (5)$$

$\lambda(Q)$  est semi-continu supérieurement et sommable ( $\mu$ ), de sorte que l'intégrale

$$v(P) \equiv \int_{\Sigma} \lambda(Q) d\mu^P(Q) \quad (6)$$

existe et est finie. On a alors (BRELOT, Acta de Szeged<sup>1</sup>)

$$u(P) \equiv v(P). \quad (7)$$

Aux points réguliers de  $\Sigma$  on a

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow Q} v(P) \equiv \lambda(Q)$$

et donc, en vertu de (5) et (7)

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow Q} u = \overline{\lim}_{P \rightarrow Q} v \quad (8)$$

$v(P)$  est une fonction harmonique dans  $\Omega$ , puisque  $\mu^P$  est harmonique.

C'est donc une majorante harmonique de  $u(P)$  et  $v(P)$  vaut donc au moins la plus petite majorante harmonique  $u^*(P)$  de  $U(P)$  sur  $\Omega$ :

$$v(P) \equiv u^*(P) \equiv u(P). \quad (9)$$

Par cette relation on peut améliorer les inégalités (2) et (3). On obtient respectivement

$$u(P) \equiv - \int_{\Omega} G(P, S) d\theta(S) + \int_{\Sigma} \lambda(Q) d\mu^P(Q) \quad (2a)$$

et

$$u(P) \equiv - \sum_i n_i G(P, S_i) + \int_{\Sigma} \lambda(Q) d\mu^P(Q) \quad (3a)$$

Ces deux formules expriment une relation entre la valeur de  $u$  dans un point intérieur de  $\Omega$  et les plus grandes limites de  $u$  à la frontière et ils ressemblent donc la formule de POISSON-JENSEN de la théorie des fonctions holomorphes. Cependant, celle-ci exprime une égalité. Il faut donc étudier quand dans (7) l'égalité a lieu.

Si l'égalité a lieu en un seul point intérieur, l'égalité a lieu partout. Puisque  $v(P)$  est harmonique il faut pour cela que  $u(P)$  est partout harmonique dans  $\Omega$ . Mais cela ne suffit pas comme le montre l'exemple suivant.

Supposons que  $u$ , borné supérieurement, est sous-harmonique dans un domaine  $\Delta$  contenant  $\Omega + \Sigma$  et harmonique dans  $\Omega$ . Supposons de plus que l'ensemble des points de  $\Sigma$  dont la partie du voisinage appartenant à  $\Omega$  est un voisinage fin<sup>2</sup>), est de mesure

1) Voir aussi M. BRELOT, Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de DIRICHLET. Bull. Soc. Royale des Sc. de Liège Ns. 6—7 (1939).

2) On entend par cela une partie du voisinage dont la section par une sphère de centre  $Q$  est de mesure infiniment petite par rapport à l'aire de la sphère.



harmonique nulle; il existe évidemment de tels  $\Omega$ . On a alors en vertu des propriétés des fonctions sous-harmoniques

$$\lambda(Q) = u(Q),$$

sauf peut être aux points d'un ensemble de mesure harmonique nulle.  $u(P)$  étant défini dans  $\Delta$ , contenant  $\Omega + \Sigma$ , la meilleure majorante harmonique existe; elle vaut

$$\bar{u}(P) = \int_{\Sigma} u(Q) d\mu^P(Q)$$

On a donc

$$v(P) = \bar{u}(P)$$

Nous supposons encore que l'ensemble des points irréguliers de  $\Omega$  n'est pas vide (ceci est compatible avec la condition précédente) et que la distribution de masse, correspondant à  $u$ , porte une masse finie sur cet ensemble, soit  $-m(Q)$ . On a alors<sup>1)</sup>

$$\bar{u}(P) - u^*(P) = \int G(P, Q) dm(Q).$$

Donc, puisque  $u = u^*$  en vertu de l'harmonicité de  $u$  dans  $\Omega$ ,

$$v(P) > u(P).$$

Remarquons que dans cet exemple  $u$  n'est pas borné inférieurement au voisinage de  $\Sigma$  puisque la distribution porte une masse finie sur un ensemble de capacité nulle. Si nous ayons exigé ceci, donc  $u \geq m$ , la distribution correspondant à  $u(P)$  n'avait pas portée une masse finie sur l'ensemble des points irréguliers. Alors on aurait  $\bar{u} = u^*$ , donc  $v = u$ .

Par suite de ces exemples on pourrait s'imaginer qu'une condition nécessaire et suffisante pour  $u$  est d'être borné inférieurement. Cependant ni l'un, ni l'autre est vrai. Que ce n'est pas une condition nécessaire est immédiate: il suffit de considérer un domaine tel que dans l'exemple précédent, mais maintenant sans points irréguliers, et de placer une masse finie négative dans un point de  $\Sigma$ . Alors  $u$  n'est pas borné et néanmoins on a  $v = \bar{u} = u^* = u$ . On peut également sans peine construire un exemple montrant que la condition n'est pas suffisante. On utilise la notion de „solution extérieure” et la distribution  $v^P$  sur  $\Sigma$ , obtenue par extrémisation de la masse unité dans  $P$ . Nous n'insistons pas.

Une condition suffisante pour qu'on ait  $u(P) = v(P)$  est que  $u$  est continu aux points de  $\Sigma$  sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure harmonique intérieure nulle. La démonstration est simple. On a aux points réguliers sauf sur un ensemble de mesure harmonique intérieure nulle puisque  $\lambda$  est semi-continu supérieurement,

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow Q} v(P) \leq \lambda(Q) = \lim_{P \rightarrow Q} u(P)$$

Donc presque partout (au sens mentionné ci-dessus)

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow Q} (v(P) - u(P)) \leq 0,$$

d'où résulte

$$v - u \leq 0.$$

Avec (7) on a donc  $u(P) = v(P)$ .

<sup>1)</sup> Voir M. BRELOT, Fonctions sous-harmoniques et balayage, Ac. Royale de Belgique XXIV (1938).

L'application aux fonctions holomorphes donne:

Soit  $f(z)$  régulier dans  $\Omega$  et soient  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) les zéros de  $f(z)$  avec multiplicité  $n_i$ . Soit  $|f(z)|$  borné et continu presque partout ( $\mu$ ) sur  $\Sigma$ . Posons  $\overline{\lim}_{P \rightarrow Q} |f(z)| = \lambda(Q)$ .

Alors on a

$$|f(z)| = \prod_i e^{-n_i G(z, a_i)} e^{\int \log \lambda(Q) d\mu^z(Q)} \dots \dots \dots (10)$$

Si de plus  $f(z)$  a des pôles aux points  $b_j$ , d'ordres  $m_j$ , on a de même

$$|f(z)| = \frac{\prod_i e^{-n_i G(z, a_i)}}{\prod_j e^{-m_j G(z, b_j)}} e^{\int \log \lambda(Q) d\mu^z(Q)} \dots \dots \dots (11)$$

Cette formule est une généralisation de la formule de POISSON-JENSEN où l'on suppose  $f(z)$  partout continu sur  $\Sigma$ . Remarquons que cette formule reste valable si la fonction de GREEN pour  $\Omega$  n'existe pas au sens classique, donc si  $G(z, a_i)$  n'est pas partout continu sur  $\Sigma$ , les points de discontinuité formant un ensemble de capacité nulle; il faut alors substituer la fonction de GREEN généralisée ( $\Omega$  n'a pas un ordre de connexion fini alors).

*Remarque.*

La formule (3a) contient la généralisation suivante d'un théorème de NEVANLINNA et OSTROWSKI.

Soit  $f(z)$  régulier dans  $\Omega$  et de module  $\leq M$ . Posons

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow Q} |f(z)| = \lambda(Q)$$

Soit  $e$  un sous-ensemble mesurable ( $\mu$ ) de  $\Sigma$  et supposons qu'on a presque partout ( $\mu$ ) sur  $e$

$$\lambda(Q) \leq m < M$$

Alors on a

$$\log |f(z)| < \mu^z(e) m + (1 - \mu^z(e)) M$$

Comparer aussi BRELOT, Bull. Sc. Liège I.c. L'auteur y étudie aussi le cas de  $e$  non-mesurable ( $\mu$ ).

On peut sans peine former des théorèmes sur les fonctions sous-harmoniques dans un espace à trois dimensions qui correspondent à des théorèmes qu'on déduit de cette inégalité. Par exemple on peut ainsi généraliser le théorème de PHRAGMÉN-LINDELÖF. Remarquons que dans ce dernier cas on ne peut pas remplacer le demi-cercle par une demi-sphère. C'est puisque l'angle solide sous lequel on voit un cercle aux point  $P$ , n'est pas constant sur les surfaces des sphères passant par ce cercle (contrairement à ce qui se passe au cas analogue deux-dimensionnel).

4. *Représentation des fonctions harmoniques bornées.* — En partant des formules précédentes on peut obtenir une représentation générale des fonctions harmoniques bornées, qui cependant ne met pas en évidence les valeurs limites à la frontière. Nous supposons dans ce qui suit que la frontière  $\Sigma$  est un ensemble parfait.

Soit  $u(P)$  borné supérieurement dans  $\Omega$  et harmonique sauf aux points  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) où  $u$  devient infini négative comme  $\frac{-n_i}{r_{PS_i}}$  (ou  $-n_i \log \frac{1}{r_{PS_i}}$  dans le cas deux-dimensionnel).

Soit  $\{\Omega_n\}$  une suite de domaines croissants, tendant vers  $\Omega$ , dont on suppose qu'aucun des points  $S_n$  ne se trouve sur les frontières  $\Sigma_n$  de  $\Omega_n$ . On a alors,  $u$  étant continu sur  $\Sigma_n$

$$u(P) = - \sum_{S_i \subset \Omega_n} n_i G(P, S_i) + \int_{\Sigma_n} u(Q) d\mu_n^P(Q). \quad \dots \quad (12)$$

( $P$  dans  $\Omega_n$ )

Afin de rendre possible le passage à la limite pour  $n \rightarrow \infty$ , nous appliquons une formule de M. M. RIESZ <sup>1)</sup>. Il existe une fonction positive et bornée telle qu'on a,  $P_0$  étant choisi arbitrairement, mais fixé, dans  $\Omega$ ,

$$\mu_n^P(e) = \int_e \gamma_n^P(Q) d\mu_n^{P_0}(Q). \quad \dots \quad (13)$$

De même

$$\mu^P(e) = \int_e \gamma^P(Q) d\mu^{P_0}(Q). \quad \dots \quad (14)$$

L'intégrale dans (12) se réduit alors à

$$\int_{\Sigma_n} u(Q) \gamma_n^P(Q) d\mu_n^{P_0}(Q). \quad \dots \quad (15)$$

Supposons ensuite que  $u \leq 0$ ; ce n'est pas une restriction car si  $u \leq M$ , on considère  $u - M$ .

La fonction d'ensemble

$$\theta_n^{P_0}(e) = - \int_e u(Q) d\mu_n^{P_0}(Q). \quad \dots \quad (16)$$

définit alors une distribution de masse positive sur  $\Sigma_n$ ; on voit que les  $\theta_n^{P_0}$  sont également bornés. (12) s'écrit alors

$$u(P) = - \sum_{S_i \subset \Omega_n} n_i G(P, S_i) - \int_{\Sigma_n} \gamma_n^P(Q) d\theta_n^{P_0}(Q). \quad \dots \quad (17)$$

Si  $n \rightarrow \infty$ ,  $\theta_n^{P_0}$  tend vers une distribution positive  $\theta^{P_0}$  sur  $\Sigma$ . Il s'agit de montrer que l'intégrale tend vers

$$\int_{\Sigma} \gamma^P(Q) d\theta^{P_0}(Q). \quad \dots \quad (18)$$

---

<sup>1)</sup> M. RIESZ, Intégrales de RIEMANN-LIOUVILLE et potentiels. Acta de Szeged IX (1938).

Il suit de (13) et (14) qu'on a presque partout ( $\mu$ ) sur  $\Sigma_n$  et  $\Sigma$ , si  $e$  appartient à une famille d'ensembles convenable

$$\lim_{e \rightarrow Q_n} \frac{\mu_n^P(e)}{\mu_n^{P_0}(e)} = \gamma_n^P(Q), \dots \dots \dots (19)$$

$$\lim_{e \rightarrow Q} \frac{\mu^P(e)}{\mu^{P_0}(e)} = \gamma^P(Q), \dots \dots \dots (20)$$

si  $e$  tend vers  $Q_n(Q)$  telle que  $\mu_n^{P_0}(e)$  [ $\mu^{P_0}(e)$ ] tend vers zéro <sup>1)</sup>. Les points exceptionnelles forment donc un ensemble de mesure harmonique nulle. On peut donc enfermer ces points sur  $\Sigma$  et les  $\Sigma_n$  dans ensembles ouverts de mesure harmonique arbitrairement petite. Puisque les  $\gamma_n$  sont bornés, même également bornés, on peut voir que les parties des intégrales de (17) et (18), se rapportant à ces ensembles ouverts, tendent vers zéro et il suffit donc de considérer les parties restantes, étendues sur les ensembles fermés  $\Sigma'_n$  et  $\Sigma'$ , qui ne contiennent que des points où l'on a (19) et (20).

Remarquons ensuite qu'on a pour tout  $e$  <sup>2)</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^P(e) = \mu^P(e),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{P_0}(e) = \mu^{P_0}(e),$$

de sorte que pour tout  $e$  de mesure harmonique  $> 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n^P(e)}{\mu_n^{P_0}(e)} = \frac{\mu^P(e)}{\mu^{P_0}(e)}$$

et on peut montrer que cette convergence a lieu uniformément par rapport à  $e$  (si  $\mu_n^{P_0}(e) \neq 0$ ) <sup>3)</sup>. Pour  $n > N(\epsilon)$  on a donc

$$\left| \frac{\mu_n^P(e)}{\mu_n^{P_0}(e)} - \frac{\mu^P(e)}{\mu^{P_0}(e)} \right| < \frac{1}{3} \epsilon.$$

Choisissons alors  $e$  telle que

$$\left| \frac{\mu^P(e)}{\mu^{P_0}(e)} - \gamma^P(Q) \right| < \frac{1}{3} \epsilon$$

$$\left| \frac{\mu_n^P(e)}{\mu_n^{P_0}(e)} - \gamma_n^P(Q_n) \right| < \frac{1}{3} \epsilon.$$

Donc  $|\gamma^P(Q) - \gamma_n^P(Q_n)| < \epsilon$  et  $\gamma_n^P(Q_n)$  tend donc vers  $\gamma^P(Q)$  si  $Q_n \rightarrow Q$  pour  $n \rightarrow \infty$  en restant sur les  $\Sigma'_n$ . Il s'en suit encore que  $\gamma^P(Q)$  est continu sur  $\Sigma'$ . Cette convergence a lieu uniformément par rapport à  $Q$  sur  $\Sigma'$ . En effet, sinon, on pourrait

<sup>1)</sup> La démonstration est tout à fait analogue à celle des propriétés correspondantes de l'intégrale de LEBESGUE, Voir par exemple C. DE LA VALLÉE POUSSIN, Intégrales de LEBESGUE, Fonctions d'ensemble etc. p. 72 et 105.

<sup>2)</sup> C'est une conséquence de la théorie du balayage.

<sup>3)</sup> Remarquer qu'on a  $\mu_n^P(e_k) \rightarrow \mu_n^P(e)$  si  $\epsilon_k \rightarrow e$  et que  $\mu_n^P$  est absolument continu par rapport à  $\mu_n^{P_0}$ .

trouver une suite  $N_i \rightarrow \infty$  et une suite de  $Q^{(i)}$  tendant vers un point  $Q$  de  $\Sigma'$  telle que

$$|\gamma^P(Q^{(i)}) - \gamma_{N_i}^P(Q_{N_i}^{(i)})| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots$$

ce qui est en contradiction avec le fait que  $Q$ , appartenant à  $\Sigma'$ , est un point de continuité.

Il résulte alors de ce qui précède que (18) est la limite pour  $n \rightarrow \infty$  de l'intégrale dans (17).

Enfin on a donc

$$u(P) = - \sum_i n_i G(P, S_i) - \int_{\Sigma} \gamma^P(Q) d\theta^{P_0}(Q). \dots \dots (21)$$

Inversement toute fonction qui admet la représentation (21) est harmonique dans  $\Omega$  sauf aux points  $S_i$ , où elle est infinie négative comme indiquée ci-dessus.

Dans cette représentation des fonctions harmoniques bornées supérieurement les propriétés spéciales de la fonction ne s'expriment que dans la distribution  $\theta$ , le noyau  $\gamma^{P_0}(Q)$  ne dépendant que de  $\Omega$ . D'ailleurs, il résulte de la démonstration précédente que  $\theta$  ne dépend que des valeurs de  $u$  au voisinage de  $\Sigma$ .

L'application de ces formules sur le terme  $u^*(P)$  dans (1) donne une représentation générale des fonctions sous-harmoniques bornées supérieurement. Si  $u \leq 0$ , on obtient ( $u^*$  est harmonique sans exception)

$$u(P) = \int_{\Omega} G(P, S) d\theta(S) - \int_{\Sigma} \gamma^P(Q) d\theta_1^{P_0}(Q), \dots \dots (22)$$

L'application de (21) aux fonctions holomorphes donne le résultat suivant:

Soit  $f(z)$  holomorphe dans  $\Omega$  et de module  $\leq 1$ . Soient  $a_i (i = 1, 2, \dots)$  les zéros de  $f(z)$  avec multiplicité  $n_i$ . Alors on a

$$|f(z)| = \prod_i e^{-n_i G(z, a_i)} e^{-\int_{\Sigma} \gamma^z(Q) d\theta^{z_0}(Q)} \dots \dots (23)$$

Si  $H(z, a_i)$  et  $\delta z(Q)$  sont respectivement les fonctions conjuguées de  $G(z, a_i)$  et de  $\gamma^z(Q)$  par rapport à  $z$  et si

$$\Phi(z, a_i) = G(z, a_i) + iH(z, a_i)$$

$$\Psi^z(Q) = \gamma^z(Q) + i\delta z(Q)$$

on obtient

$$f(z) = \prod_i e^{-n_i \Phi(z, a_i)} e^{-\int_{\Sigma} \Psi^z(Q) d\theta^{z_0}(Q)} \dots \dots (24)$$

Si  $\Omega$  n'est pas simplement connexe,  $H(z, a_i)$  et  $\delta z$  ne sont en général pas uniforme.

La formule (24) est une généralisation de la représentation bien connue des fonctions holomorphes et bornées dans le cercle unité:

$$f(z) = \pi(z) e^{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z} d\theta(\alpha) + iC} \dots \dots (25)$$

où  $\pi(z)$  désigne un produit de BLASCHKE dans le cercle unité.

$$\pi(z) = \prod_i \frac{\bar{a}_i}{|a_i|} \frac{a_i - z}{1 - \bar{a}_i z}$$

Le produit dans (24), fini ou infini selon qu'il y a un nombre fini ou une infinité dénombrable de zéros, est la généralisation d'un tel produit pour un domaine  $\Omega$  quelconque. Dans (25) on a pris  $z_0 = 0$  et on voit donc l'élément arbitraire dans cette formule. On a dans ce cas, si  $z = r e^{i\varphi}$  et  $Q \equiv e^{i\theta}$

$$\gamma^z(Q) = \Re \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)}$$

La mesure  $\mu^0(e)$  se réduit alors à la mesure de LEBESGUE de  $e$  (si celle-ci existe).

Il faut remarquer qu'on pourrait démontrer la formule générale (24) pour des domaines simplement connexes par une représentation conforme sur le cercle unité en partant de (25). Cependant notre démonstration est valable aussi quand une telle représentation conforme n'est pas possible et la formule analogue (22) dans le cas d'un espace à plus de deux dimensions ne peut même être obtenue que par une démonstration directe comme ci-dessus.

La généralisation de (24) pour le cas de fonctions, ayant des pôles d'ordre  $m_j$  aux points  $b_j$  est immédiate: le produit  $\prod e^{-n_j G}$  est alors remplacé par un quotient de deux tels produits. (comparer (11)).

Ajoutons la propriété suivante (voir FROSTMAN l.c. ci-dessus p. 107). Pour que  $f(z)$  soit un produit de BLASCHKE, il faut et il suffit que la distribution  $\theta$  s'annule identiquement Il résulte alors de (16) qu'une condition nécessaire et suffisante est que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_n} \log |f(Q_n)| d\mu_n^{z_0}(Q_n) = 0.$$

*Remarque.* — La démonstration ci-dessus est analogue à celle de M. FROSTMAN pour (25), où l'on n'a cependant pas besoin de (13) et où le passage à la limite est presque immédiat puisqu'on connaît alors explicitement  $\gamma^z$ . Voir: O. FROSTMAN, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles. Meddel. från Lunds univ. Mat. Sem. Bd. 3 (1935).

Dordrecht, avril 1941.



**Mathematics.** — *Eine neue Erweiterung der LAPLACE-Transformation.*  
(Erste Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof.  
J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

LITERATURVERZEICHNIS.

R. V. CHURCHILL.

1. The inversion of the LAPLACE transformation by a direct expansion in series and its application to boundary-value problems. *Math. Zeitschrift*, **42**, 567—579 (1937).

R. COURANT und D. HILBERT.

2. *Methoden der mathematischen Physik*, II (1937).

G. DOETSCH.

3. *Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation* (1937).

C. S. MEIJER.

4. Ueber WHITTAKERSche bzw. BESSELSche Funktionen und deren Produkte. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (2) **18**, (4tes Heft) 10—39 (1936).
5. Einige Integraldarstellungen aus der Theorie der BESSELSchen und WHITTAKERSchen Funktionen. *Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam*, **39**, 394—403 und 519—527 (1936).
6. Ueber eine Erweiterung der LAPLACE-Transformation. *Ibidem*, **43**, 599—608 und 702—711 (1940).
7. Neue Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen. *Ibidem*, **44**, 81—92, 186—194, 298—307, 442—451 und 590—598 (1941).

E. C. TITCHMARSH.

8. *Introduction to the theory of FOURIER integrals* (1937).

E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON.

9. *A course of modern analysis* (fourth edition, 1927).

§ 1. Einleitung.

Genügt  $F(x)$  gewissen Bedingungen, so gilt bekanntlich nach der schon von vielen Autoren<sup>1)</sup> untersuchten Umkehrformel der LAPLACE-Transformation

$$\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} e^{xs} ds \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt. \quad (1)$$

In der vorliegenden Abhandlung werde ich eine Erweiterung von (1) ableiten. Ich beweise:

---

<sup>1)</sup> Man vergl. DOETSCH, [3], 104—105; TITCHMARSH, [8], 6; COURANT und HILBERT, [2], 202—204.

Genügt  $F(x)$  gewissen Bedingungen und ist  $k \equiv m \equiv -k$ , so gilt

$$\frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i \Gamma(1+2m)} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} e^{ixs} M_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) (xs)^{k-\frac{1}{2}} ds \left. \vphantom{\lim} \right\} (2)$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-ist} W_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt.$$

Hierin bezeichnen  $M_{k,m}(z)$  und  $W_{k,m}(z)$  die beiden WHITTAKERSchen Funktionen. D.h. also <sup>2)</sup>

$$M_{k,m}(z) = z^{\frac{1}{2}+m} e^{-iz} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k+m; 1+2m; z\right) \dots (3)$$

und

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)} z^{\frac{1}{2}+m} e^{-iz} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k+m; 1+2m; z\right) \left. \vphantom{\Gamma} \right\} (4)$$

$$+ \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)} z^{\frac{1}{2}-m} e^{-iz} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k-m; 1-2m; z\right).$$

Nun folgt aus (3)

$$M_{-m-\frac{1}{2}, m}(z) = z^{\frac{1}{2}+m} e^{iz};$$

ebenso aus (4)

$$W_{-m+\frac{1}{2}, m}(z) = z^{\frac{1}{2}-m} e^{-iz}.$$

Für  $k = -m$  geht (2) also in (1) über; Formel (1) ist daher ein Spezialfall von (2).

Die Sätze, Hilfssätze und Beweismethoden der vorliegenden Arbeit sind nahe verwandt mit den Sätzen, Hilfssätzen und Beweismethoden meiner neuerdings erschienenen Arbeit „Ueber eine Erweiterung der

<sup>2)</sup> Man vergl. WHITTAKER and WATSON, [9], §§ 16.1 und 16.41.

$${}_1F_1(a; b; z) = 1 + \frac{a}{b} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Die in (2) auftretende Funktion

$$\frac{\Gamma(1-k+m)}{\Gamma(1+2m)} e^{iz} M_{k-\frac{1}{2}, m}(z)$$

ist also gleich

$$\frac{\Gamma(1-k+m)}{\Gamma(1+2m)} e^{iz} M_{k-\frac{1}{2}, m}(z) = \frac{\Gamma(1-k+m)}{\Gamma(1+2m)} z^{\frac{1}{2}+m} + \frac{\Gamma(2-k+m)}{\Gamma(2+2m)} \frac{z^{\frac{1}{2}+m}}{1!} + \frac{\Gamma(3-k+m)}{\Gamma(3+2m)} \frac{z^{\frac{1}{2}+m}}{2!} + \dots$$

Für ganze Werte von  $2m$  kann  $W_{k,m}(z)$  durch Grenzübergang definiert werden. Man vergl. WHITTAKER and WATSON, [9], § 16.12 und 16.4.

LAPLACE-Transformation" <sup>3)</sup>. Der Beweis von Satz 1 z.B. erinnert in sehr vielen Hinsichten an den Beweis von Satz 1 meiner vorigen Arbeit.

Ich nehme mich vor später auf den jetzt behandelten Gegenstand zurückzukommen und nicht nur die bisher untersuchten, sondern auch viel allgemeinere Transformationen aus einem anderen Gesichtspunkt zu betrachten.

## § 2. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Das Hauptresultat in Bezug auf Formel (2) lautet wie folgt:

**Satz 1. Voraussetzungen:** 1. Die Funktion  $F(t)$  sei definiert für  $t > 0$  und in jedem endlichen Intervall  $0 < T_1 \leq t \leq T_2$  im RIEMANNschen Sinn eigentlich integrierbar.

2. Es sei  $a \geq 0$ ; das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta t} |F(t)| dt$$

sei konvergent für jedes  $\beta > a$ .

3. Es sei  $x > 0$  und  $F(t)$  von beschränkter Variation in der Umgebung des Punktes  $t = x$ .

**Behauptung <sup>4)</sup>:** Bezeichnet  $x$  den in Voraussetzung 3 genannten Punkt und ist  $k \leq m \leq -k$  und  $\beta > a$ , so gilt (2).

Ein entsprechender Satz für die LAPLACE-Transformation kommt bei DOETSCH <sup>5)</sup> vor.

<sup>3)</sup> MEIJER, [6].

<sup>4)</sup> Ist  $\Re(z) > 0$  und  $k \leq m \leq -k$ , so gilt

$$|e^{-z} W_{k+\frac{1}{2}, m}(z) z^{-k-\frac{1}{2}}| \leq e^{-\Re(z)}, \dots \dots \dots (A)$$

Für  $k < m$  folgt diese Beziehung aus der bekannten Integralformel (man vergl. WHITTAKER and WATSON, [9], § 16.12)

$$e^{-z} W_{k+\frac{1}{2}, m}(z) z^{-k-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-z}}{\Gamma(m-k)} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{m+k} t^{m-k-1} dt;$$

ist  $k = m$ , so kann (A) leicht aus (4) abgeleitet werden.

Aus (A) und der zweiten Voraussetzung von Satz 1 ergibt sich sofort, dass das in (2) auftretende Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} W_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt$$

absolut konvergiert.

<sup>5)</sup> DOETSCH, [3], 105, Satz 2.

Ist  $F(t)$  stetig, so kann man Formel (2) in folgender Gestalt schreiben:

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} W_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt, \dots \dots (5)$$

$$F(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i \Gamma(1+2m)} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} e^{ts} M_{k-\frac{1}{2}, m}(ts) (ts)^{k-\frac{1}{2}} f(s) ds. \dots (6)$$

Mit diesen Bezeichnungen behauptet Satz 1: Genügt  $F(t)$  gewissen Voraussetzungen und wird  $f(s)$  durch (5) erklärt, so gilt (6).

Es gibt daher sicher Funktionen  $F(t)$  und  $f(s)$ , für welche die Beziehungen (5) und (6) zugleichzeitig gelten; m.a.W.: Es existieren gewisse Funktionen  $f(s)$ , die in der Gestalt (5) geschrieben werden können, wobei  $F(t)$  durch (6) definiert ist.

In den Sätzen 2 und 3 gebe ich möglichst einfache hinreichende Bedingungen, damit eine Funktion  $f(s)$  in der Gestalt (5) darstellbar sei, wobei  $F(t)$  durch (6) definiert wird. Diese Sätze behaupten also: Genügt  $f(s)$  gewissen Voraussetzungen und wird  $F(t)$  durch (6) erklärt, so gilt (5).

**Satz 2. Voraussetzungen:** 1. Die Funktion  $f(s)$  sei analytisch in der Halbebene  $\Re(s) > a \cong 0$ .

2. Für ein festes  $\beta > a$  sei das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\beta + iy)| dy$$

konvergent.

3. Es sei  $|f(s)| < A$  für  $\Re(s) \cong \beta$ , wo  $A$  eine nicht von  $s$  abhängige Zahl bedeutet.

4. Es sei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x + iy) = 0$$

gleichmässig für alle reellen Werte von  $y$ .

**Behauptung:** Ist  $\Re(k) \cong -\Re(m) < \frac{1}{2}$  und  $\Re(s) > \beta$ , so gilt <sup>6)</sup>

<sup>6)</sup> Unter den gemachten Voraussetzungen konvergiert das Integral

$$\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} e^{tz} M_{k-\frac{1}{2}, m}(tz) (tz)^{k-\frac{1}{2}} f(z) dz;$$

man darf daher den CAUCHYSchen Hauptwert

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} \quad \text{durch} \quad \int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}$$

ersetzen.

$$f(s) = \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i \Gamma(1+2m)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} dt \left. \vphantom{f(s)} \right\} \dots (7)$$

$$\times \int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} e^{\frac{1}{2}tz} M_{k-\frac{1}{2},m}(tz) (tz)^{k-\frac{1}{2}} f(z) dz.$$

Ein Spezialfall dieses Satzes kommt bei CHURCHILL <sup>7)</sup> vor.

**Satz 3. Voraussetzungen:** 1. Die Funktion  $f(s)$  sei analytisch in der Halbebene  $\Re(s) > a \equiv 0$ .

2. Es sei  $\mu > 1$  und  $|s^\mu f(s)| < B$  für  $\Re(s) > a$ , wo  $\mu$  und  $B$  von  $s$  unabhängige Zahlen bedeuten.

**Behauptung:** Ist  $\Re(k) \equiv -\Re(m) < \frac{1}{2}$ , so gilt (7) für jedes  $\beta$  mit  $\Re(s) > \beta > a$ .

**Beweis von Satz 3.** Dieser Satz ist ein Spezialfall von Satz 2, da  $f(s)$  den Voraussetzungen von Satz 2 genügt und zwar für jedes  $\beta > a$  <sup>8)</sup>.

### § 3. Spezialfälle von (5) und (6).

Verschiedene Spezialfälle des Formelpaares (5) und (6) kommen schon vor in meinen früheren Arbeiten. Ich werde hier nur drei Beispiele erwähnen <sup>9)</sup>.

Erstes Beispiel:

$$K_{\lambda+n}(\zeta) K_{\lambda-n}(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty e^{i\tau}} e^{-\frac{1}{2}\left(\nu + \frac{\zeta^2}{\nu}\right)} W_{\frac{1}{2},\lambda}(\nu) K_n\left(\frac{\zeta^2}{2\nu}\right) \nu^{-1} d\nu \quad (8)$$

und

$$K_n(z^2) = \frac{e^{z^2}}{2^{2\lambda-1} \sqrt{\pi} i \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)} \int_C e^{u^2} M_{-\frac{1}{2},\lambda}(2u^2) K_{\lambda+n}(2zu) K_{\lambda-n}(2zu) du. \quad (9)$$

In (8) (und ebenso in (10) und in (12)) ist  $\zeta \neq 0$ ,  $|\arg \zeta| < \frac{1}{2}\pi$  und  $\tau$  beliebig mit

$$\text{Max}\left(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi + 2 \arg \zeta\right) < \tau < \text{Min}\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi + 2 \arg \zeta\right).$$

<sup>7)</sup> CHURCHILL, [1], 571, Satz 2. Der Satz von CHURCHILL bezieht sich auf den Fall mit  $k = -m$ , d.h. also auf den LAPLACESchen Fall.

<sup>8)</sup> Man sieht leicht ein, mit Rücksicht auf den CAUCHYSchen Satz, dass der Wert des Integrals

$$\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} e^{\frac{1}{2}tz} M_{k-\frac{1}{2},m}(tz) (tz)^{k-\frac{1}{2}} f(z) dz$$

von  $\beta$  unabhängig ist (man vergl. auch (14), (27) und (28)).

<sup>9)</sup> Man vergl. [4], 19, Beispiel 2, 20, Beispiel 7 und 21, Beispiel 16; [7], 445, Formel (144), 596, Formel (177) und 593, § 15.

In (9) (und ebenso in (11) und in (13)) wird  $z \neq 0$  und  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  vorausgesetzt;  $C$  bezeichnet einen in der komplexen  $u$ -Ebene von  $-\infty i e^{-i \arg z}$  nach  $\infty i e^{-i \arg z}$  laufenden Integrationsweg, der den Punkt  $u=0$  durch einen auf der rechten Seite dieses Punktes liegenden Halbkreis vermeidet.

(8) und (9) gehen nach Transformation ( $\zeta = \sqrt{2s}$ ,  $v = st$ ,  $z = t^{-1}$ ,  $u = \sqrt{\frac{1}{2}ts}$ ) und Umgestaltung der Integrationswege in Formeln der Gattung (5) und (6) (mit  $k=0$ ,  $m=\lambda$ ,  $F(t) = t^{-1} e^{-t^{-1}} K_n(t^{-1})$  und  $f(s) = 2K_{\lambda+n}(\sqrt{2s}) K_{\lambda-n}(\sqrt{2s})$ ) über.

Zweites Beispiel<sup>10)</sup>:

$$W_{k,\lambda}(2\zeta) W_{-k,\lambda}(2\zeta) = \frac{2^{-k}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty e^{i\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(v + \frac{\zeta^2}{v}\right)} D_{2k}(\sqrt{2v}) W_{-k,\lambda}\left(\frac{\zeta^2}{v}\right) v^{-1} dv \quad (10)$$

und

$$D_{2k}(z) = \frac{2^{k+1} e^{iz^2} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \lambda + k\right)}{\sqrt{\pi i z} \Gamma(1+2\lambda)} \int_C e^{t u^2} M_{-k-1,\lambda}\left(\frac{1}{2} u^2\right) W_{k,\lambda}(zu) W_{-k,\lambda}(zu) u^{-1} du. \quad (11)$$

Drittes Beispiel:

$$e^{-\zeta} W_{2k+\frac{1}{2},2m}(2\zeta) = \frac{2^{2k+\frac{1}{2}} \zeta^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty e^{i\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(v + \frac{\zeta^2}{v}\right)} W_{k+\frac{1}{2},m}(v) W_{k,m}\left(\frac{\zeta^2}{v}\right) v^{-1} dv \quad (12)$$

und<sup>11)</sup>

$$W_{k,m}(z^2) = \frac{2^{-2k-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - k + m\right)}{\sqrt{\pi i} \Gamma(1+2m)} \int_C e^{t(z-u)^2} M_{k,m}(u^2) W_{2k+\frac{1}{2},2m}(2zu) u^{-1} du. \quad (13)$$

#### § 4. Hilfssätze.

**Bezeichnungen.** Im Folgenden benutze ich die abkürzenden Bezeichnungen (man vergl. (3) und (4))

$$\left. \begin{aligned} N_{k,m}(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + m\right)}{\Gamma(1+2m)} e^{iz} M_{k,m}(z) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + m\right)}{\Gamma(1+2m)} z^{1+m} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - k + m; 1+2m; z\right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

<sup>10)</sup>  $D_n(z)$  bezeichnet die parabolische Zylinderfunktion; man vergl. WHITTAKER and WATSON, [9], § 16.5.

In (11) wird  $\Re(k) > -\frac{3}{2}$  vorausgesetzt.

<sup>11)</sup> Formel (13) gilt für  $\Re(k) < \frac{1}{2}$ .



und

$$R_{k,m}(z) = e^{-z} W_{k,m}(z). \dots \dots \dots (15)$$

**Hilfssatz 1.**

$$\frac{d}{dz} \{ z^{-m-\frac{1}{2}} N_{k,m}(z) \} = z^{-m-1} N_{k-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(z), \dots \dots (16)$$

$$\frac{d}{dz} \{ z^{m-\frac{1}{2}} N_{k,m}(z) \} = z^{m-1} N_{k-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(z), \dots \dots (17)$$

$$\frac{d}{dz} \{ z^{-k} N_{k,m}(z) \} = z^{-k-1} N_{k-1,m}(z), \dots \dots \dots (18)$$

$$\frac{d}{dz} \{ z^{-m-\frac{1}{2}} R_{k,m}(z) \} = -z^{-m-1} R_{k+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(z), \dots \dots (19)$$

$$\frac{d}{dz} \{ z^{m-\frac{1}{2}} R_{k,m}(z) \} = -z^{m-1} R_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(z), \dots \dots (20)$$

$$\frac{d}{dz} \{ z^k R_{k,m}(z) \} = -z^{k-1} R_{k+1,m}(z), \dots \dots \dots (21)$$

**Beweis.** Die Beziehungen (16), (17) und (18) folgen leicht aus (14). Aus (15), (4) und der ersten KUMMERSchen Formel <sup>12)</sup>

$$e^{-z} {}_1F_1(a; b; z) = {}_1F_1(b-a; b; -z) \dots \dots \dots (22)$$

geht hervor

$$R_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)} z^{1+m} {}_1F_1(\frac{1}{2}+k+m; 1+2m; -z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)} z^{1-m} {}_1F_1(\frac{1}{2}+k-m; 1-2m; -z);$$

hieraus können (19), (20) und (21) ohne Mühe abgeleitet werden.

**Hilfssatz 2.**

$$\left. \begin{aligned} &(x-t) \int N_{k-\frac{1}{2},m}(xs) R_{k+\frac{1}{2},m}(ts) s^{-1} ds \\ &= x^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} N_{k,m-\frac{1}{2}}(xs) R_{k+\frac{1}{2},m}(ts) - (k+m) t^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} N_{k+\frac{1}{2},m}(xs) R_{k,m-\frac{1}{2}}(ts) + C. \end{aligned} \right\} (23)$$

**Beweis.** Man hat <sup>13)</sup>

$$(k+m) R_{k,m-\frac{1}{2}}(z) = z^{\frac{1}{2}} R_{k+\frac{1}{2},m}(z) - R_{k+1,m-\frac{1}{2}}(z).$$

Die rechte Seite von (23) ist also gleich

$$\begin{aligned} &x^{\frac{1}{2}+m} t^{\frac{1}{2}-m} \{ (xs)^{-m} N_{k,m-\frac{1}{2}}(xs) \} \{ (ts)^{m-\frac{1}{2}} R_{k+\frac{1}{2},m}(ts) \} \\ &- x^{\frac{1}{2}+k} t^{\frac{1}{2}-k} \{ (xs)^{-\frac{1}{2}-k} N_{k+\frac{1}{2},m}(xs) \} \{ (ts)^{\frac{1}{2}+k} R_{k+\frac{1}{2},m}(ts) \} \\ &+ x^{\frac{1}{2}-m} t^{\frac{1}{2}+m} \{ (xs)^{m-\frac{1}{2}} N_{k+\frac{1}{2},m}(xs) \} \{ (ts)^{-m} R_{k+1,m-\frac{1}{2}}(ts) \} + C, \end{aligned}$$

<sup>12)</sup> WHITTAKER and WATSON, [9], § 16. 11.

<sup>13)</sup> Man vergl. WHITTAKER and WATSON, [9], 352, example 3.

und dieser Ausdruck kann unter Anwendung von (16), (17), (18), (19), (20) und (21) leicht nach  $s$  differenziert werden; das Resultat wird

$$(x-t) s^{-1} N_{k-t, m}(xs) R_{k+t, m}(ts).$$

**Hilfssatz 3.**

$$N_{k, m}(z) = e^{k\pi i} R_{-k, m}(z e^{\pi i}) + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + k + m)} e^{z + (k-m-t)\pi i} R_{k, m}(z), \quad (24)$$

$$N_{k, m}(z) = e^{-k\pi i} R_{-k, m}(z e^{-\pi i}) + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + k + m)} e^{z - (k-m-t)\pi i} R_{k, m}(z). \quad (25)$$

**Beweis.** Aus (4) mit  $-k$  statt  $k$  und  $z e^{\pi i}$  statt  $z$  geht hervor mit Rücksicht auf (22)

$$\begin{aligned} \frac{W_{-k, m}(z e^{\pi i})}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m)} &= \frac{e^{(k+m)\pi i} \Gamma(-2m) z^{k+m} e^{-kz}}{\Gamma(\frac{1}{2} + k - m) \Gamma(\frac{1}{2} - k + m)} {}_1F_1(\frac{1}{2} - k + m; 1 + 2m; z) \\ &+ \frac{e^{(k-m)\pi i} \Gamma(2m) z^{k-m} e^{-kz}}{\Gamma(\frac{1}{2} + k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k + m)} {}_1F_1(\frac{1}{2} - k - m; 1 - 2m; z). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung und (4) findet man ohne Mühe

$$\begin{aligned} &\frac{W_{-k, m}(z e^{\pi i})}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m)} + \frac{e^{-(k+m)\pi i} W_{k, m}(z)}{\Gamma(\frac{1}{2} + k + m)} \\ &= \frac{1}{\pi} \{ e^{(k+m)\pi i} \cos(k-m)\pi + e^{-(k+m)\pi i} \cos(k+m)\pi \} \Gamma(-2m) \\ &\quad \times z^{k+m} e^{-kz} {}_1F_1(\frac{1}{2} - k + m; 1 + 2m; z) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{(k-k)\pi i} \{ e^{2m\pi i} - e^{-2m\pi i} \} \Gamma(-2m) z^{k+m} e^{-kz} {}_1F_1(\frac{1}{2} - k + m; 1 + 2m; z) \\ &= \frac{e^{-k\pi i}}{\Gamma(1+2m)} z^{k+m} e^{-kz} {}_1F_1(\frac{1}{2} - k + m; 1 + 2m; z) = \frac{e^{-k\pi i}}{\Gamma(1+2m)} M_{k, m}(z) \end{aligned}$$

wegen (3). Es gilt also

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m)}{\Gamma(1+2m)} M_{k, m}(z) = e^{k\pi i} W_{-k, m}(z e^{\pi i}) + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + k + m)} e^{(k-m-t)\pi i} W_{k, m}(z),$$

und diese Beziehung ist infolge (14) und (15) äquivalent mit (24).

Der Beweis von (25) geht ganz analog.

**Hilfssatz 4.** Für jedes feste positive  $\varepsilon$  und für  $|z| \rightarrow \infty$  gilt

$$R_{k, m}(z) = e^{-z} z^k \{ 1 + O(z^{-1}) \} \quad (-\frac{3}{2}\pi + \varepsilon < \arg z < \frac{3}{2}\pi - \varepsilon), \quad (26)$$

$$N_{k, m}(z) = e^z z^{-k} \{ 1 + O(z^{-1}) \} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + k + m)} e^{(k-m-t)\pi i} z^k \{ 1 + O(z^{-1}) \} \quad \left. \begin{aligned} &(-\frac{3}{2}\pi + \varepsilon < \arg z < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

und

$$N_{k,m}(z) = e^z z^{-k} \{1 + O(z^{-1})\} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + k + m)} e^{-(k-m-1)\pi i} z^k \{1 + O(z^{-1})\} \left. \vphantom{N_{k,m}(z)} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \vphantom{N_{k,m}(z)} \right\} \left( -\frac{1}{2}\pi + \varepsilon < \arg z < \frac{3}{2}\pi - \varepsilon \right).$$

Beweis. Formel (26) ist bekannt <sup>14)</sup>; (27) und (28) können mit Hilfe von (24) und (25) aus (26) abgeleitet werden.

**Hilfssatz 5.** Ist  $\Re(\zeta) > \Re(z) > 0$  und  $\Re(m) > -\frac{1}{2}$ , so gilt

$$\int_0^\infty R_{k+\frac{1}{2},m}(\zeta u) N_{k-\frac{1}{2},m}(zu) u^{-1} du = \frac{\zeta^{1-m} z^{1+m}}{\zeta - z} \dots \quad (29)$$

Beweis. Hilfssatz 5 kann leicht aus Hilfssatz 2 abgeleitet werden; man berücksichtige das Verhalten der Funktionen  $R_{k,m}(z)$  und  $N_{k,m}(z)$  in der Umgebung der Punkte  $z = \infty$  und  $z = 0$ .

**Hilfssatz 6.** Es sei

$$\xi \neq 0, \eta \neq 0, |\arg \xi| \leq \frac{1}{2}\pi, |\arg \eta| \leq \frac{1}{2}\pi \text{ und } \xi + \eta \neq 0;$$

es sei ferner

$$m + \frac{1}{2} > 0, m - \mu > 0, \dots \dots \dots (30)$$

$$k + m - \mu < 1, m - \mu < \frac{1}{2}. \dots \dots \dots (31)$$

Behauptung:

$$\frac{\Gamma(1-k+m)}{\Gamma(k+m)} \int_0^\infty e^{-\xi z} N_{1-k,m}(\xi z) R_{k+m-\mu,\mu+\frac{1}{2}}(\eta z) z^{m-\mu-\frac{1}{2}} dz \left. \vphantom{\int_0^\infty} \right\} \quad (32)$$

$$= \Gamma(2m-2\mu) \xi^{2\mu-m+\frac{1}{2}} \eta^{-\mu} \left(1 + \frac{\eta}{\xi}\right)^{2\mu-2m}.$$

Beweis <sup>15)</sup>. Das auf der linken Seite von (32) stehende Integral konvergiert in der Umgebung des Punktes  $z = 0$  infolge der Voraussetzung (30) (siehe (14), (15) und (4)); das Integral ist infolge (31) auch konvergent für  $z = \infty$  (siehe (26), (27) und (28)). Wegen der Theorie der analytischen Fortsetzung darf ich also  $\xi$  und  $\eta$  positiv annehmen.

Nun hat man <sup>16)</sup>, falls  $\Re(\frac{1}{2} + m + s)$  und  $\Re(m - 2\mu - \frac{1}{2} + s)$  positiv sind,

$$\int_0^\infty R_{k+m-\mu,\mu+\frac{1}{2}}(\eta z) z^{s+m-\mu-\frac{3}{2}} dz = \frac{\eta^{-s-m+\mu+\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2} + m + s) \Gamma(m - 2\mu - \frac{1}{2} + s)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + s)}. \quad (33)$$

<sup>14)</sup> WHITTAKER and WATSON, [9], § 16.3—16.4.  
<sup>15)</sup> Man vergl. analoge Beweise in früheren Arbeiten des Verfassers, z.B. [4], 29—36; [5], 401—403; [7], 85—87.  
<sup>16)</sup> Man vergl. [7], Formeln (61) und (29).

Ferner folgt aus (14) und (22)

$$\frac{\Gamma(1-k+m)}{\Gamma(k+m)} e^{-\zeta z} N_{\frac{1}{2}-k,m}(\zeta z) = \frac{\Gamma(1-k+m)}{\Gamma(1+2m)} \zeta^{1+m} {}_1F_1(1-k+m; 1+2m; -\zeta).$$

Wegen der BARNES'schen Theorie der hypergeometrischen Funktionen gilt daher <sup>17)</sup>

$$\frac{\Gamma(1-k+m)}{\Gamma(k+m)} e^{-\xi z} N_{\frac{1}{2}-k,m}(\xi z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i+\sigma}^{\infty i+\sigma} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m-s) \Gamma(\frac{1}{2}-k+s) (\xi z)^s ds}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+s)}; \quad (34)$$

hierin ist  $\sigma$  beliebig und der Integrationsweg lässt die Pole von  $\Gamma(\frac{1}{2}+m-s)$  zur Rechten, die Pole von  $\Gamma(\frac{1}{2}-k+s)$  hingegen zur Linken.

Trägt man nun das Integral (34) in die linke Seite von (32) ein, so bekommt man nach Vertauschung der Integrationsfolge und Anwendung von (33)

$$\frac{\eta^{-m+\mu+\frac{1}{2}}}{2\pi i} \int_{-\infty i+\sigma}^{\infty i+\sigma} \Gamma(m-2\mu-\frac{1}{2}+s) \Gamma(\frac{1}{2}+m-s) \xi^s \eta^{-s} ds$$

und dieser Ausdruck ist gleich <sup>18)</sup>

$$\Gamma(2m-2\mu) \xi^{2\mu-m+\frac{1}{2}} \eta^{-\mu} \left(1 + \frac{\eta}{\xi}\right)^{2\mu-2m},$$

womit der Beweis geliefert ist.

**Hilfssatz 7.** *Es sei  $x > y > 0$ ,  $k < 1$  und  $r > 0$ . Ich betrachte das Integral*

$$H = \left\{ \int_{-\infty i}^{-ri} + \int_{C_r} + \int_{ri}^{\infty i} \right\} N_{k-\frac{1}{2},m}(xs) R_{k,m+\frac{1}{2}}(ys) s^{-1} ds;$$

hierin bezeichnet  $C_r$  den auf der rechten Seite der imaginären Achse liegenden Halbkreis mit Mittelpunkt  $s=0$  und Radius  $r$  (von  $-ri$  bis  $ri$  durchlaufen).

**Behauptung:**

$$H = 2\pi i x^{m+\frac{1}{2}} y^{-m}.$$

**Beweis.** Für die Funktion  $N_{k,m}(z)$  gilt wegen (14) und (22) <sup>19)</sup>

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)} e^{\zeta z} N_{k,m}(\zeta e^{-\pi i}) = e^{-(k+m)\pi i} N_{-k,m}(\zeta). \quad \dots \quad (35)$$

<sup>17)</sup> Die linke Seite von (34) ist gleich der Summe der Residuen des Integranden in den Polen auf der rechten Seite des Integrationsweges.

<sup>18)</sup> Ich berechne die Summe der Residuen des Integranden in den Polen auf der linken Seite des Integrationsweges.

<sup>19)</sup> In Bezug auf (35) vergl. man die WHITTAKERSche Gestalt der ersten KUMMERSchen Formel ([9], § 16.11).

Sind die Bedingungen (30) und (31) erfüllt, so folgt also aus (32), mit  $\xi = -ix$  und  $\eta = iy$  ( $x > y > 0$ ) angewendet,

$$\begin{aligned} & e^{-(k+m)\pi i} \int_0^{\infty} N_{k-\frac{1}{2}, m}(ixz) R_{k+m-\mu, \mu+\frac{1}{2}}(iyz) z^{m-\mu-\frac{1}{2}} dz \\ &= e^{i(m-3\mu-1)\pi i} \Gamma(2m-2\mu) x^{2\mu-m+\frac{1}{2}} y^{-\mu} \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{2\mu-2m}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung ist äquivalent mit

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) R_{k+m-\mu, \mu+\frac{1}{2}}(ys) s^{m-\mu-\frac{1}{2}} ds \\ &= e^{(2m-2\mu)\pi i} \Gamma(2m-2\mu) x^{2\mu-m+\frac{1}{2}} y^{-\mu} \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{2\mu-2m}. \end{aligned}$$

Ganz analog beweist man

$$\begin{aligned} & \int_0^{-\infty} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) R_{k+m-\mu, \mu+\frac{1}{2}}(ys) s^{m-\mu-\frac{1}{2}} ds \\ &= e^{-(2m-2\mu)\pi i} \Gamma(2m-2\mu) x^{2\mu-m+\frac{1}{2}} y^{-\mu} \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{2\mu-2m}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_0^{\infty} - \int_0^{-\infty} = \int_{-\infty i}^{-ri} + \int_{ri}^{\infty i}$$

und

$$\{e^{(2m-2\mu)\pi i} - e^{-(2m-2\mu)\pi i}\} \Gamma(2m-2\mu) = \frac{2\pi i}{\Gamma(1-2m+2\mu)}$$

findet man somit

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \int_{-\infty i}^{-ri} + \int_{ri}^{\infty i} + \int_0^{\infty} \right\} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) R_{k+m-\mu, \mu+\frac{1}{2}}(ys) s^{m-\mu-\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{2\pi i x^{2\mu-m+\frac{1}{2}} y^{-\mu}}{\Gamma(1-2m+2\mu)} \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{2\mu-2m}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Bei dieser Relation darf Voraussetzung (30) fortgelassen werden, weil der Punkt  $s=0$  nicht mehr auf dem Integrationswege liegt. Formel (36) bleibt also gültig, wenn man  $\mu = m$  setzt; das Resultat dieser Substitution ist die Behauptung des Hilfssatzes.

**Wiskunde.** — *Algemeen Minimum-waarschijnlijkheids Theorema.* Door B. H. DE JONGH.  
(Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

§ 1. *Inleiding.*

Reeds van haar eerste ontwikkeling af heeft de waarschijnlijkheidsleer zich tot taak gesteld inzicht te verschaffen in de gedaante van samengestelde grootheden, die elk op hun beurt verschillende waarden kunnen aannemen, terwijl aan elk van die waarden zekere waarschijnlijkheid eigen is. Slaagt men erin, alle waarden, die de samengestelde grootheid kan aannemen, zoomede de aan elk daarvan gekoppelde waarschijnlijkheid te bepalen, dan is daarmede het gestelde doel in den meest volledige zin bereikt. Een voorbeeld van zulk een samengestelde grootheid biedt de verzekeringsportefeuille, gevormd uit een aantal onderling onafhankelijke posten, die over zekere periode elk een aantal verschillende uitkomsten kunnen opleveren, terwijl aan elk van die uitkomsten een zekere waarschijnlijkheid eigen is.

Zijn nu van een samengestelde grootheid, waaronder hier en in het vervolg te verstaan een grootheid van het bovenomschreven karakter, de componenten bekend, dan is de gestelde opgave in beginsel uitvoerbaar en vereischt niet anders dan elementair rekenwerk. Met behulp van het rekenschema van BERNOULLI<sup>1)</sup> kan men ten aanzien van zeer eenvoudige complexen ook tot praktische resultaten komen. Zijn deze complexen echter van iets minder eenvoudig karakter, dan nemen de becijferingen weldra niet te overweldigende afmetingen aan. Er diende dus naar andere wegen te worden gezocht.

Voor complexen van bijzondere samenstelling, zooals die welke gevormd worden door onderling gelijke componenten, geeft de waarschijnlijkheidsrekening langs de door LAPLACE gebaande wegen uitkomst, zij het ook dat bij de hanteering van LAPLACE's benaderingsmethode de noodige omzichtigheid dient te worden betracht. Zeer nadrukkelijk vestigt KEYNES<sup>2)</sup> hierop den nadruk, zoodat bij dit punt niet nader zal behoeven te worden stilgestaan.

§ 2. *Theorema van TCHEBYCHEFF.*

Het was TCHEBYCHEFF die erin slaagde een leerstelling te concipieeren, welke voor alle voornoemde complexen geldt en daarbij het voordeel biedt van zoodanige formulering, dat een onder alle omstandigheden betrouwbaar waarschijnlijkheidsoordeel resulteert. TCHEBYCHEFF vond namelijk een algemeen geldige benedengrens voor de gesommeerde waarschijnlijkheid van alle tot zekere — nader te omschrijven — groepen behorende uitkomsten van een samengestelde grootheid. Denkt men zich die uitkomsten naar grootte gerangschikt, dan bevatten bedoelde groepen die uitkomsten, welke begrensd worden door twee hunner, die gelijke positieve resp. negatieve afwijking ten opzichte van de gemiddelde uitkomst der samengestelde grootheid vertoonen. Aansluitend aan het zooeven geschetste voorbeeld gaat het hier dus over uitkomstengroepen, begrensd door risicopremie der portefeuille plus of min zekere afwijking.

Gemakkelijk valt in te zien, dat naargelang deze, dus symmetrisch ten opzichte van de gemiddelde uitkomst begrensde groepen nauwer dan wel wijder worden genomen, hun minder, resp. meer waarschijnlijkheid eigen moet zijn. Het Theorema van TCHEBYCHEFF

<sup>1)</sup> E. CZUBER; *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig 1908, I par. 42.

<sup>2)</sup> J. M. KEYNES; *A Treatise on Probability*, Londen 1921, Ch. XXIX.



bepaalt nu de betrekking tusschen de wijde deze grenzen en de waarschijnlijkheid, welke aan de gezamenlijke binnen die grenzen gelegen uitkomsten op zijn minst gekoppeld moet zijn. Hoe definieert deze grenzen door de positieve, resp. negatieve grensafwijking te stellen op het  $t$ -voud van het Mathematisch Risico van het complex en concludeert, dat aan de gezamenlijke uitkomsten binnen deze grenzen een waarschijnlijkheid grooter dan  $1 - \frac{1}{t^2}$  gekoppeld moet zijn ( $t$  vertegenwoordigt daarbij een getal grooter dan de eenheid).

Onder verwijzing naar het aan het slot van dit artikel opgenomen overzicht der gevolgde notatie, kan het theorema als volgt worden weergegeven:

$$-t \sqrt[*w*]{(V^2)} < v < t \sqrt[*w*]{(V^2)} \dots w > 1 - \frac{1}{t^2}$$

Er worden hierbij dus ten aanzien van de betrokken samengestelde grootheid twee gegevens verwerkt: het Mathematisch Risico  $\sqrt[*w*]{(V^2)}$  en de gemiddelde uitkomst ( $X$ ), immers  $v = x - (X)$ . Zijn de componenten van de samengestelde grootheid bekend, dan kunnen ( $X$ ) en  $\sqrt[*w*]{(V^2)}$  daaruit worden afgeleid, een rekenwerk, dat ook voor zeer samengestelde grootheden niet onuitvoerbaar behoeft te zijn.

### § 3. Ruimer probleemstelling.

Het is echter mogelijk gebleken door toepassing van een geheel andere methode, dan aan de bewijsvoering van het Theorema van TCHEBYCHEFF ten grondslag ligt<sup>1)</sup>, met verwerking van dezelfde gegevens tot verder strekkende resultaten te komen. Deze hier nader te ontwikkelen methode is er in de eerste plaats op gericht het volstrekte waarschijnlijkheidsminimum te bepalen en zulks ten aanzien van zoodanige groepen van uitkomsten als met behulp van gemiddelde uitkomst en Mathematisch Risico definieerbaar zijn. In twee opzichten reikt dit verder dan het Theorema van TCHEBYCHEFF, dat eenzijdig geen volstrekt waarschijnlijkheidsminimum geeft, anderzijds zich tot één soort, met name de symmetrische afwijkingsgroepen beperkt. Daarnaast werd beoogd de betrokken materie in zoodanigen vorm te gieten, dat onnoodige belasting van het abstracte denkvermogen dat op dit gebied steeds gevaar loopt in een warnet van overbodige associaties verstrikt te geraken, vermeden wordt. Een bij uitstek geschikt middel om den gedachtengang daarvan vrij te houden staat hier ten dienste: het gestelde probleem vertoont n.l. een zeer bruikbare analogie aan een eenvoudig, en daarbij gemakkelijk in het voorstellingsvermogen vallend fysisch vraagstuk.

### § 4. Analogie.

Beschouwt men de aan de waarden  $x_1, x_2, \dots$  gekoppelde waarschijnlijkheden  $w_1, w_2, \dots$  als aan de armen van een in evenwichtstoestand verkeerende balans op afstanden  $x_1, x_2, \dots$  van het linker eindpunt gekoppelde massa  $w_1, w_2, \dots$  dan correspondeert de gemiddelde uitkomst ( $X$ ) met het steunpunt van de balans en de grootheid ( $V^2$ ), het kwadraat van het Mathematisch Risico, met het traagheidsmoment. Immers:

$$(X) = w_1 x_1 + w_2 x_2 \dots$$

en

$$(V^2) = w_1 \{x_1 - (X)\}^2 + w_2 \{x_2 - (X)\}^2 \dots$$

definities, welke, in acht nemend  $\Sigma w = 1$  volledig correspondeeren met die van zwaartepunt resp. traagheidsmoment ten opzichte daarvan. De mogelijkheid wordt daardoor geopend het hier te behandelen waarschijnlijkheidsprobleem op eenvoudige wijze in beeld te brengen.

<sup>1)</sup> A. A. MARKOFF, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1912, par. 13.

De grootheid  $X$  samengesteld als volgt:

$$w_1 = \frac{50}{108} \quad x_1 = \frac{2}{15}$$

$$w_2 = \frac{33}{108} \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

$$w_3 = \frac{25}{108} \quad x_3 = \frac{11}{15}$$

waarvan  $(X) = \frac{1}{3}$  en  $(V^2) = \frac{1}{18}$ , laat zich als in fig. 1 weergegeven in beeld brengen.

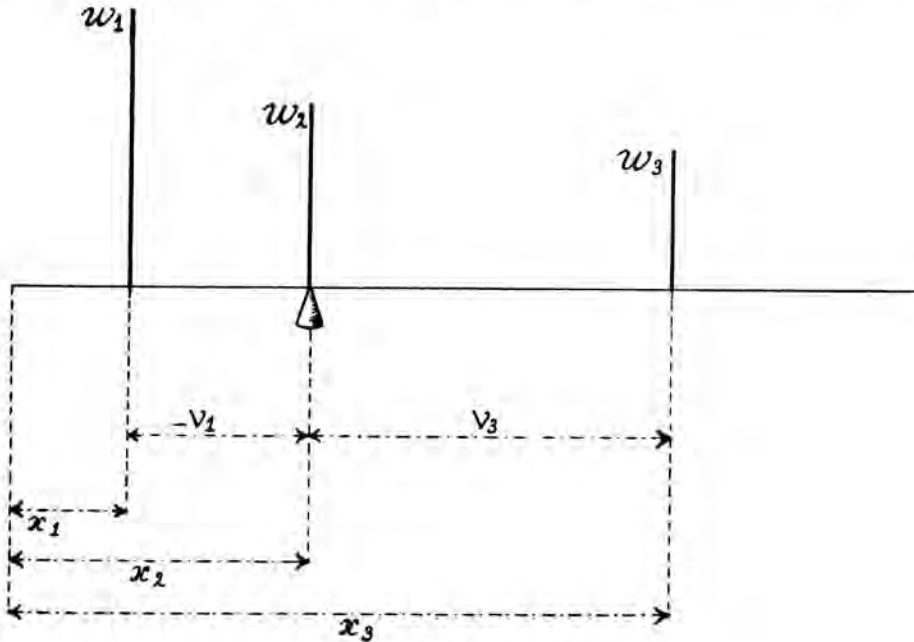


Fig. 1.

§ 5.  $w_{min} = 0$ .

Het onderzoek naar de minimum waarschijnlijkheid van afwijkingsgroepen, welke,  $(X)$  en  $(V^2)$  gegeven zijnde, met behulp van deze gegevens kunnen worden gedefinieerd, worde aangevangen met het stellen van de vraag, welke groep geheel van waarschijnlijkheid verstoken, dus afwezig kan zijn. Voor het te vinden traject zal dan gelden  $w_{min} = 0$ .

In het algemeen zal dit traject het grootst bevonden worden indien de  $w$ -massa op de beide grenzen is geconcentreerd. Immers, wordt de  $w$ -massa in acht nemend  $\sum w = 1$  — geheel of ten deele — meer buitenwaarts geplaatst, dan heeft dit verhooging van het traagheidsmoment tengevolge, die alleen gecompenseerd zou kunnen worden door een deel van de massa binnen de grenzen te brengen, d.w.z. het traject te verkleinen.

Stellen wij nu de negatieve grensafwijking t.o.v. het zwaartepunt  $(X) \dots = -a$  en de positieve grensafwijking t.o.v. het zwaartepunt  $(X) \dots = na$  waarbij  $n$  een willekeurig positief getal, grooter dan 0 weergeeft, en noemen wij de bijbehorende waarschijnlijkheden  $w_1$  resp.  $w_2$ , dan kan uit:

$$w_1 + w_2 = 1 \quad \dots \dots \dots (I)$$

$$\left. \begin{aligned} (X) &= w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ &= w_1 \{(X) - a\} + w_2 \{(X) + na\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II)$$

worden afgeleid:

$$w_1 = \frac{n}{n+1} \quad \text{en} \quad w_2 = \frac{1}{n+1}$$

Nu kan uit:

$$(V^2) = w_1 a^2 + w_2 n^2 a^{2^1}), \dots \dots \dots (III)$$

met behulp van de voor  $w_1$  resp.  $w_2$  gevonden uitdrukkingen  $a$  worden afgeleid en vindt men:

$$a = \sqrt{\frac{(V^2)}{n}}$$

zoodat voor de grensafwijkingen gevonden wordt:

$$-\sqrt{\frac{(V^2)}{n}} \quad \text{resp.} \quad \sqrt{n(V^2)}$$

en de algemeene gedaante van de grootheid ( $X$ ) waarvoor  $w_{min} = 0$  zich als volgt laat formuleren:

$$\begin{array}{cccc} \underline{w} & \underline{x} & \underline{v} & \underline{v^2} \\ \frac{n}{n+1} \cdot \left\{ (X) - \sqrt{\frac{(V^2)}{n}} \right\} & \vdots & -\sqrt{\frac{(V^2)}{n}} & \vdots & \frac{(V^2)}{n} \\ \frac{n}{n+1} \cdot \left\{ (X) + \sqrt{n(V^2)} \right\} & \vdots & \sqrt{n(V^2)} & \vdots & n(V^2) \\ \Sigma \frac{1}{n+1} & & & & \\ \hline & (X) & & & \end{array}$$

Er kan dus worden geconcludeerd, dat in het bijzondere geval, dat de  $X$ -waarde zoodanig is geconstitueerd, dat de waarschijnlijkheid uitsluitend op twee bovenomschreven  $v$ -waarden is geconcentreerd, voor het tusschen beide grenzen gelegen traject geldt dat  $w_{min} = 0$ .

Zooals reeds werd opgemerkt heeft elke andere samenstelling van de  $X$ -waarde bij gelijkblijvende ( $X$ ) en ( $V^2$ ) tot gevolg dat waarschijnlijkheid binnen de gestelde grenzen moet vallen, zoodat dus in het algemeen voor elk  $X$ -waarde geldt:

$$-\sqrt{\frac{(V^2)}{n}} < v < \sqrt{n(V^2)} \dots W \cong 0$$

$$\S 6. \quad w_{min} = 1 - \frac{1}{\rho^2}$$

Worden de grenzen ruimer gesteld, dan die van het traject, waarvoor  $w_{min} = 0$ , dan zal dat tot gevolg hebben, dat  $w$ -massa binnen de grenzen moet worden gebracht, immers zwaartepunt zoowel als traagheidsmoment moeten onveranderd blijven. Dit laatste is overigens mogelijk wanneer beide grenzen worden verzet in dier voege, dat  $-v_1$  en  $v_2$  evenredig worden vergroot.

De minimum  $w$ , welke krachtens gegeven ( $X$ ) en ( $V^2$ ) aan een aldus verwijld traject

1) Zie pag. 743.

gekoppeld moet zijn, zal gevonden worden door de binnen de grenzen te brengen massa op dat punt te dirigeren, waar de te koppelen massa de sterkste compensatie biedt tegen de verhoging van het traagheidsmoment, veroorzaakt door de buitenwaartsche verplaatsing van de grensmassa's. Dit punt is het zwaartepunt ( $X$ ), immers de daaraan gekoppelde massa draagt het minste, met name niets tot ( $V^2$ ) bij.

Wordt nu het nieuwe, verruimde traject uitgedrukt door het oorspronkelijke traject, waarvoor  $w_{min}=0$ , te vermenigvuldigen met  $t$ , (een positief getal, grooter dan de eenheid) dan verkrijgt men de navolgende situatie:

$$\begin{array}{cccc}
 \underline{w} & \underline{x} & \underline{v} & \underline{v}^2 \\
 \frac{1}{t^2} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \left\{ (X) - t \sqrt{\frac{(V^2)}{n}} \right\} & & -t \sqrt{\frac{(V^2)}{n}} & t^2 \frac{(V^2)}{n} \\
 \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) \cdot & (X) & 0 & 0 \\
 \frac{\Sigma}{\Sigma} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left\{ (X) + t \sqrt{n(V^2)} \right\} & & t \sqrt{n(V^2)} & t^2 n (V^2) \\
 \frac{1}{(X)} & & & 
 \end{array}$$

Uitgaande van het overzicht aan het slot van de vorige paragraaf, levert de samenstelling van het bovenstaande geen moeilijkheden op: de oorspronkelijke  $v$ -waarden worden met  $t$  vermenigvuldigd en de waarde  $v=0$ , voortvloeiend uit  $x_2 = (X)$ , wordt er aan toegevoegd.

Hiermede is de minimum waarschijnlijkheid van de afwijkingsgroep begrensd door

$$-t \sqrt{\frac{(V^2)}{n}} \quad \text{resp} \quad t \sqrt{n(V^2)}$$

gevonden en blijkt te bedragen

$$1 - \frac{1}{t^2}$$

#### § 7. Algemeen Minimum Waarschijnlijkheids Theorema.

Er kan dus worden geconcludeerd, dat in het bijzondere geval, dat de  $X$ -waarde zoodanig is geconstitueerd, dat de waarschijnlijkheid uitsluitend op ( $X$ ) en de beide weergegeven grenswaarden is geconcentreerd, voor het tusschen de beide grenzen gelegen traject geldt, dat  $w = 1 - \frac{1}{t^2}$ . Ook nu zal elke andere samenstelling van de  $X$ -waarde bij gelijkblijvende ( $X$ ) en ( $V^2$ ) tot gevolg moeten hebben, dat meer waarschijnlijkheid binnen de gestelde grenzen moet vallen, zoodat dus in het algemeen voor elke  $X$ -waarde geldt:

$$-t \sqrt{\frac{(V^2)}{n}} <^w v <^w t \sqrt{n(V^2)} \dots w \cong 1 - \frac{1}{t^2}$$

Voor symmetrische afwijkingsgroepen, waarvoor  $n=1$  valt hieruit af te leiden

$$-t \sqrt{(V^2)} <^w v <^w t \sqrt{(V^2)} \dots w \cong 1 - \frac{1}{t^2}$$

een resultaat, dat zich in zooverre van het Theorema van TCHEBYCHEFF onderscheidt, dat dit voor dezelfde afwijkingsgroep  $w > 1 - \frac{1}{t^2}$  tot uitkomst geeft. Hierbij worde nog opgemerkt, dat aan het gevonden minimumwaarschijnlijkheids-theorema, waar dat van TCHEBYCHEFF rechtstreeks uit kan worden afgeleid, ook in dier voege een meerdere algemeenheid toekomt, dat het betrekking heeft op alle grootheden welke verschillende waarden kunnen aannemen, terwijl aan elk van die waarden zekere waarschijnlijkheid eigen is, onverschillig of zij al dan niet uit samenvoeging van andere grootheden van hetzelfde karakter zijn ontstaan.

Tenslotte moge hier nog aan worden toegevoegd, dat de gevolgde methode met behulp waarvan door grensverruiming waarschijnlijkheidsminimumconclusies konden worden getrokken, met behulp van grensvernauwing tot waarschijnlijkheidsmaximumconclusies leidt.

*Notatie.*

$X$  zij een grootheid, die de waarden  $x_1, x_2 \dots$  kan aannemen, elk met een daaraan gekoppelde waarschijnlijkheid  $w_1, w_2 \dots \Sigma w = 1$ .

$$(X) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots$$

$$(X^2) = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + \dots$$

$$v = x - (X).$$

$$(V) = w_1 \{x_1 - (X)\} + w_2 \{x_2 - (X)\} \dots$$

$$= w_1 v_1 + w_2 v_2 + \dots$$

$$= 0.$$

$$(V^2) = w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 \dots$$

$a <^w b \dots w = p$  lees:  $a$  is waarschijnlijk kleiner dan  $b$ ; de waarschijnlijkheid bedraagt  $p$ .

*Zusammenfassung.*

Für Wertgruppen, deren Mittelwert und quadratischer Mittelwert bekannt sind, kann das gewissen Abweichungsgruppen zugehörige Wahrscheinlichkeitsminimum, worauf — jedoch nur für symmetrische Gruppen — das Theorema von TCHEBYCHEFF Beziehung hat, auch für gewisse asymmetrische Gruppen bestimmt werden. Es lässt sich ein allgemeineres Wahrscheinlichkeitsminimumtheorema formulieren, woraus das TCHEBYCHEFFsche als ein spezieller — symmetrischer — Fall hervorgeht.

Aus der Identität der Definitionen vom Mittelwerte resp. quadratischen Mittelwerte mit denen vom Schwerpunkte resp. Trägheitsmomente einer an verschiedenen Stellen belasteten, in Gleichgewicht befindlichen Bilanz ergibt sich, dass sich das Problem der Verteilung der Wahrscheinlichkeit ( $\Sigma w = 1$ ) über die verschiedenen, einer Gruppe zugehörigen Werte zurückführen lässt auf die Verteilung der Masse 1 über diverse Stellen der Bilanzarme. Mit Benutzung dieser Analogie wird das genannte allgemeinere Wahrscheinlichkeitsminimumtheorema abgeleitet.

**Mathematics.** — *Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL. III.* By J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

La substitution  $\nu = -\frac{1}{2}$  resp.  $\nu = \frac{1}{2}$  dans (160) jusqu'à (163) donne les formules particulières:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 1}{2n} I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(x-a) \cos a \cdot \frac{a^\varrho da}{\sqrt{x-a}}, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 2}{2n + 1} I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(x-a) \sin a \cdot \frac{a^\varrho da}{\sqrt{x-a}}, R(\varrho) > -2 \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1}}{2\varrho + 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 1}{2n + 1} \times \\ \times \{(2n + 1) \sin x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) - (2\varrho + 2n + 2) \cos x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x)\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin 2a \cdot (x-a)^\varrho \frac{da}{\sqrt{a}}, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1}}{2\varrho + 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 1}{2n + 1} \times \\ \times \{(2n + 1) \cos x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) + (2\varrho + 2n + 2) \sin x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos^2 a \cdot (x-a)^\varrho \frac{da}{\sqrt{a}}, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (167)$$



$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 1}{2n} I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(x-a) \cdot \cos a \frac{a^\varrho da}{\sqrt{x-a}}, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 2}{2n + 1} I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(x-a) \cdot \sin a \frac{a^\varrho da}{\sqrt{x-a}}, R(\varrho) > -2 \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1}}{2\varrho + 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 1}{2n + 1} \times \\ \times \{(2n + 1) \sin x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) - (2\varrho + 2n + 2) \cos x I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin^2 a \cdot (x-a)^\varrho \frac{da}{\sqrt{a}}, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1}}{2\varrho + 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 1}{2n + 1} \times \\ \times \{(2n + 1) \cos x I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) + (2\varrho + 2n + 2) \sin x I_{\varrho+2n+\frac{3}{2}}(x)\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin 2a \cdot (x-a)^\varrho \frac{da}{\sqrt{a}}, R(\varrho) > -1. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Par addition resp. soustraction de (164) et (169), ainsi de (165) et (168), de (166) et (171), de (167) et (170) on obtient:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n}{2n} I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(2a-x) \frac{a^\varrho da}{\sqrt{x-a}}, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\varrho + 2n + \frac{1}{2}) \binom{2\varrho + 2n}{2n} I_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\varrho + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+\frac{1}{2}} \cos x, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\varrho + 2n + \frac{1}{2}) \binom{2\varrho + 2n + 1}{2n + 1} I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\varrho + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho + \frac{1}{2}} \sin x, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho + 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n + 1}{2n + 1} I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(2\alpha - x) \frac{\alpha^{\varrho} d\alpha}{\sqrt{x - \alpha}}, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\varrho) 2^{\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n}{2n + 1} \times \\ \times \{(2n + 1) \sin x I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x) - (2\varrho + 2n + 1) \cos x I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin 2\alpha \cdot (x - \alpha)^{\varrho} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (176)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n}{2n + 1} \{(2n + 1)(\varrho + 2n + \frac{1}{2}) \sin x I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x) - \\ - (2\varrho + 2n + 1)(\varrho + 2n + \frac{3}{2}) \cos x I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x)\} = 0, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n}{2n + 1} \{(2n + 1)(\varrho + 2n + \frac{1}{2}) \cos x I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x) + \\ + (2\varrho + 2n + 1)(\varrho + 2n + \frac{3}{2}) \sin x I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x)\} = \\ = \frac{2\varrho}{\Gamma(\varrho + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho + \frac{1}{2}}, R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\varrho) 2^{\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho + 2n}{2n + 1} \times \\ \times \{(2n + 1) \cos x I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x) + (2\varrho + 2n + 1) \sin x I_{\varrho + 2n + \frac{1}{2}}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos 2\alpha \cdot (x - \alpha)^{\varrho} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}, R(\varrho) > -1. \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

La substitution  $\varrho = 0$  dans (160) et (161') conduit aux formules particulières:

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n + 1) I_{\nu + 2n + 1}(x) = \int_0^x I_{\nu}(x - a) \cos a da, R(\nu) > -1 \quad (180)$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) I_{v+2n+2}(x) = \int_0^x I_v(x-a) \sin a \, da, \quad R(\nu) > -1. \quad (181)$$

En vertu de  $I$  on peut écrire pour les membres gauches de (180) et (181):  $x I_\nu(x) - 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{v+2n+1}(x)$  et  $x I_{\nu+1}(x) - 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{v+2n+2}(x)$ ; alors nous trouvons:

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{v+2n+1}(x) = \frac{x}{\nu} I_\nu(x) - \frac{1}{\nu} \int_0^x I_\nu(x-a) \cos a \, da, \quad R(\nu) > -1 \quad (182)$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{v+2n+2}(x) = \frac{x}{\nu} I_{\nu+1}(x) - \frac{1}{\nu} \int_0^x I_\nu(x-a) \sin a \, da, \quad R(\nu) > -1. \quad (183)$$

Multiplions les deux membres de (182) par  $\sin x$  resp.  $\cos x$  et ceux de (183) par  $\cos x$  resp.  $\sin x$ , alors nous trouvons par soustraction resp. addition des membres correspondants:

$$\left. \begin{aligned} & 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \sin x I_{v+2n+1}(x) - \cos x I_{v+2n+2}(x) \} = \\ & = \frac{x}{\nu} \{ \sin x I_\nu(x) - \cos x I_{\nu+1}(x) \} - \frac{1}{\nu} \int_0^x I_\nu(a) \sin a \, da, \quad R(\nu) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

$$\left. \begin{aligned} & 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \cos x I_{v+2n+1}(x) + \sin x I_{v+2n+2}(x) \} = \\ & = \frac{x}{\nu} \{ \cos x I_\nu(x) + \sin x I_{\nu+1}(x) \} - \frac{1}{\nu} \int_0^x I_\nu(a) \cos a \, da, \quad R(\nu) > -1. \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

La substitution  $\nu = 2n+1$  resp.  $\nu = 2m$  ( $m$  entier positif ou nulle) dans (182) et (183) donne, à cause des séries (b) et (c):

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{2m+1}(x-a) \cos a \, da = x I_{2m+1}(x) + \\ & + (-1)^m (2m+1) \{ \cos x + I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n I_{2n}(x) \}, \quad m \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^x I_{2m}(x-a) \cos a \, da = x I_{2m}(x) - \\ & - (-1)^m \cdot 2m \{ \sin x - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n+1}(x) \}, \quad m \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (187)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{2m+1}(x-a) \sin a \, da &= x I_{2m+2}(x) + \\ &+ (-1)^m (2m+1) \left\{ \sin x - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n I_{2n+1}(x) \right\}, m \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (188)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{2m}(x-a) \sin a \, da &= x I_{2m+1}(x) + \\ &+ (-1)^m \cdot 2m \left\{ \cos x + I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n I_{2n}(x) \right\}, m \equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

Multiplions les deux membres de (186) par  $\sin x$  resp.  $\cos x$  et ceux de (188) par  $\cos x$  resp.  $\sin x$ , alors nous trouvons par soustraction resp. addition des membres correspondants, ainsi à l'égard de (187) et (189):

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{2m+1}(a) \sin a \, da &= x \left\{ \sin x I_{2m+1}(x) - \cos x I_{2m+2}(x) \right\} + \\ &+ (-1)^m (2m+1) \left[ \sin x I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n \left\{ \sin x I_{2n}(x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos x I_{2n+1}(x) \right\} \right], m \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{2m+1}(a) \cos a \, da &= x \left\{ \cos x I_{2m+1}(x) + \sin x I_{2m+2}(x) \right\} + \\ &+ (-1)^m (2m+1) \left[ 1 + \cos x I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n \left\{ \cos x I_{2n}(x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin x I_{2n+1}(x) \right\} \right], m \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (191)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{2m}(a) \sin a \, da &= x \left\{ \sin x I_{2m}(x) - \cos x I_{2m+1}(x) \right\} - \\ &- (-1)^m \cdot 2m \left[ 1 - \cos x I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \left\{ \sin x I_{2n+1}(x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos x I_{2n+2}(x) \right\} \right], m \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{2m}(a) \cos a \, da &= x \left\{ \cos x I_{2m}(x) + \sin x I_{2m+1}(x) \right\} - \\ &- (-1)^m \cdot 2m \left[ \sin x I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \left\{ \cos x I_{2n+1}(x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin x I_{2n+2}(x) \right\} \right], m \equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

En substituant  $\nu = -\frac{1}{2}$  et  $\nu = \frac{1}{2}$  dans (182) jusqu'à (185) on obtient:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2n+\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^x \cos a \cos(x-a) \frac{da}{\sqrt{a}} - \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \cos x = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^x \sin a \sin(x-a) \frac{da}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2\pi_0}} \int_0^x \cos(x-2a) \frac{da}{\sqrt{a}} \end{aligned} \right\} (194)$$

(comme la demie somme des membres précédents),

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2n+\frac{3}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^x \sin a \cos(x-a) \frac{da}{\sqrt{a}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^x \cos a \sin(x-a) \frac{da}{\sqrt{a}} - \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2\pi_0}} \int_0^x \sin(x-2a) \frac{da}{\sqrt{a}} \end{aligned} \right\} (195)$$

(comme la demie somme des membres précédents),

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \sin x I_{2n+\frac{1}{2}}(x) - \cos x I_{2n+\frac{3}{2}}(x) \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi_0}} \int_0^x \sin 2a \frac{da}{\sqrt{a}} \quad (196)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \cos x I_{2n+\frac{1}{2}}(x) + \sin x I_{2n+\frac{3}{2}}(x) \} &= \\ &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} - \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^x \sin^2 a \frac{da}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^x \cos^2 a \frac{da}{\sqrt{a}} - \sqrt{\frac{2x}{\pi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi_0}} \int_0^x \cos 2a \frac{da}{\sqrt{a}} \end{aligned} \right\} (197)$$

(comme la demie somme des membres précédents).

§ 8. Considérons le cas particulier auquel (155) se réduit pour  $m=0$ , c'est-à-dire:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2\rho+2n) I_{\nu+\rho+2n+1}(x) &= \\ &= \int_0^x I_{\nu}(x-a) I_{\rho-1}(a) a da, \left\{ \begin{array}{l} R(\nu) > -1 \\ R(\rho) > -1. \end{array} \right\} \dots \end{aligned} \right\} (198)$$

Posons  $\nu = -\frac{1}{2}$  et  $\nu = \frac{1}{2}$ , alors nous trouvons :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2\rho+2n) I_{\rho+2n+\frac{1}{2}}(x) &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\rho-1}(a) \cos(x-a) \frac{a da}{\sqrt{x-a}}, \quad R(\rho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (199)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2\rho+2n) I_{\rho+2n+\frac{3}{2}}(x) &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\rho-1}(a) \sin(x-a) \frac{a da}{\sqrt{x-a}}, \quad R(\rho) > -1. \end{aligned} \right\} \quad (200)$$

La substitution  $\rho = \frac{1}{2}$  resp.  $\rho = \frac{3}{2}$  dans (199), et (200) donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2n+2) I_{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \cos a \cos(x-a) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da, \quad (201)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2n+3) I_{2n+2}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \sin a \cos(x-a) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da, \quad (202)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2n+2) I_{2n+2}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \cos a \sin(x-a) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da, \quad (203)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2n+3) I_{2n+3}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \sin a \sin(x-a) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da. \quad (204)$$

Multiplions les deux membres de (201) par  $\sin x$  resp.  $\cos x$  et ceux de (203) par  $\cos x$  resp.  $\sin x$ , alors nous trouvons par soustraction resp. addition des membres correspondants, ainsi à l'égard de (202) et (204) :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2n+2) \{ \sin x I_{2n+1}(x) - \cos x I_{2n+2}(x) \} &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da, \end{aligned} \right\} \quad (205)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2n+2) \{ \cos x I_{2n+1}(x) + \sin x I_{2n+2}(x) \} &= \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \cos^2 a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da, \end{aligned} \right\} \quad (206)$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2n+3) \left\{ \sin x I_{2n+2}(x) - \cos x I_{2n+3}(x) \right\} = \left. \begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \sin^2 a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da, \end{aligned} \right\} \dots (207)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2n+3) \left\{ \cos x I_{2n+2}(x) + \sin x I_{2n+3}(x) \right\} = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da. \end{aligned} \right\} \dots (208)$$

Par addition et soustraction des membres des paires (201) et (204), (202) et (203), (205) et (208), (206) et (207), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) I_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \cos(2a-x) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da,$$

donc en vertu de  $I$  pour  $\varrho = 0$  :

$$\int_0^x \cos(2a-x) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da = \frac{\pi x}{2} I_0(x), \dots (209)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 I_{2n+1}(x) = \frac{x}{2} \cos x, \dots (210)$$

donc en vertu de (201) et (204) et d'après  $I$  pour  $\varrho = 0$  :

$$\int_0^x \cos a \cos(x-a) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da = \frac{\pi x}{4} \{ I_0(x) + \cos x \}, \dots (211)$$

$$\int_0^x \sin a \sin(x-a) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da = \frac{\pi x}{4} \{ I_0(x) - \cos x \}, \dots (212)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)^2 I_{2n+2}(x) = \frac{x}{2} \sin x, \dots (213)$$

donc en vertu de (202) et (203) et d'après  $I$  pour  $\varrho = 1$  :

$$\int_0^x \sin a \cos(x-a) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da = \frac{\pi x}{4} \{ \sin x + I_1(x) \}, \dots (214)$$

$$\int_0^x \cos a \sin(x-a) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da = \frac{\pi x}{4} \{ \sin x - I_1(x) \}, \dots (215)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) I_{2n+2}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin(2a-x) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da,$$

donc d'après  $I$  pour  $\varrho=1$ :

$$\int_0^x \sin(2a-x) \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da = \frac{\pi}{x} I_1(x), \quad \dots \quad (216)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ (2n+1) \sin x I_{2n+1}(x) + (2n+2) \cos x I_{2n+2}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da, \end{aligned}$$

donc en vertu de  $I$ :

$$\int_0^x \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da = \frac{\pi x}{2} \{ \sin x I_0(x) + \cos x I_1(x) \}, \quad \dots \quad (217)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ (2n+1)^2 \sin x I_{2n+1}(x) - (2n+2)^2 \cos x I_{2n+2}(x) \} = 0, \quad (218)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \{ (2n+1)^2 \cos x I_{2n+1}(x) + (2n+2)^2 \sin x I_{2n+2}(x) \} = \frac{x}{2}, \quad (219)$$

{qui correspondent à (210) et (213)},

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ (2n+1) \cos x I_{2n+1}(x) - (2n+2) \sin x I_{2n+2}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^x \cos 2a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da, \end{aligned}$$

donc en vertu de  $I$ :

$$\int_0^x \cos 2a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} da = \frac{\pi x}{2} \{ \cos x I_0(x) - \sin x I_1(x) \}, \quad \dots \quad (220)$$

Ayant égard à (211), (212), (214) et (215) on peut écrire pour (201) jusqu'à (204):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2n+2) I_{2n+1}(x) = \frac{x}{2} \{ I_0(x) + \cos x \}, \quad \dots \quad (221)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2n+3) I_{2n+2}(x) = \frac{x}{2} \{ \sin x + I_1(x) \}, \quad \dots \quad (222)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2n+2) I_{2n+2}(x) = \frac{x}{2} \{ \sin x - I_1(x) \}, \quad (223)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2n+3) I_{2n+3}(x) = \frac{x}{2} \{ I_0(x) - \cos x \}, \quad (224)$$

Ayant égard à (217) et (220) on peut écrire pour (205), (208), (206) et (207):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2n+2) \{ \sin x I_{2n+1}(x) - \cos x I_{2n+2}(x) \} = \left. \begin{aligned} & \\ & = \frac{x}{2} \{ \sin x I_0(x) + \cos x I_1(x) \}, \end{aligned} \right\} \quad (225)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2n+3) \{ \cos x I_{2n+2}(x) + \sin x I_{2n+3}(x) \} = \left. \begin{aligned} & \\ & = \frac{x}{2} \{ \sin x I_0(x) + \cos x I_1(x) \}, \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2n+3) \{ \sin x I_{2n+2}(x) - \cos x I_{2n+3}(x) \} = \left. \begin{aligned} & \\ & = \frac{x}{2} \{ 1 - \cos x I_0(x) + \sin x I_1(x) \}, \end{aligned} \right\} \quad (227)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2n+2) \{ \cos x I_{2n+1}(x) + \sin x I_{2n+2}(x) \} = \left. \begin{aligned} & \\ & = \frac{x}{2} \{ 1 + \cos x I_0(x) - \sin x I_1(x) \}, \end{aligned} \right\} \quad (228)$$

**Astronomy.** — *Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen.*  
 XXXIV. *R X Lyrae.* Von A. A. NIJLAND †. (Communicated by  
 Prof. A. PANNEKOEK.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

Die Beobachtungen wurden alle in *R* angestellt. Spectrum *Me* (SCHNEL-  
 LER, 1940). Gesamtzahl der Beobachtungen 498 (von 2416994 bis 2428278).  
 In 78 in der Figur 1 mit **V** bezeichneten Fällen war der Stern unsichtbar.  
 Es bleiben also 420 Beobachtungen für die Diskussion übrig.

TABELLE I. Vergleichsterne.

<i>*</i>	<i>* - v</i>	St.	H.A. 57	Grenze	<i>H</i>
<i>A</i>	—	24.6	10. <sup>m</sup> 84	—	10. <sup>m</sup> 89
<i>a</i>	—	19.4	—	—	11.55
<i>b</i>	—	17.0	11.88	—	11.86
<i>α</i>	—	11.6	12.51	—	12.54
<i>c</i>	—	8.3	12.97	13. <sup>m</sup> 42	12.96
<i>γ</i>	+ 0 <sup>m</sup> 14; - 1'59"	3.7	—	13.76	13.54
<i>e</i>	—	0.0	—	14.04	14.00

Die Tabelle I gibt eine Uebersicht der benutzten Vergleichsterne. Die  
 Sterne *a* und *e* hat NIJLAND in seiner Skizze der Umgebung des Veränder-  
 lichen leider nicht angegeben. Die Sterne *c*, *γ* und *e* wurden 20-, bzw.  
 10-, und 121-mal an die Grenze von *R* angeschlossen; die sich hieraus  
 ergebenden Helligkeiten sind: *c* = 13<sup>m</sup>.42, *γ* = 13<sup>m</sup>.76, *e* = 14<sup>m</sup>.04. Der  
 Stufenwert ist 0<sup>m</sup>.126.

Die Figur 1 enthält die Beobachtungen. Die Reihe der Abweichungen  
 (Beobachtung minus Kurve) zeigt 131 Plus-, 166 Minuszeichen, 123 Null-  
 werte, 136 Zeichenfolgen, 160 Zeichenwechsel. Das Mittel der absoluten  
 Werte der Abweichungen ist 0<sup>m</sup>.197.

Es wurden keine Farbenschätzungen ausgeführt. Ein Einfluss des Mond-  
 scheines auf die Helligkeitsschätzung ist nicht nachweisbar. Es verteilen  
 sich auf 59 bei Mondschein angestellte Beobachtungen die Abweichungen  
 wie folgt: 17 Plus-, 25 Minuszeichen, 17 Nullwerte.

Die Tabelle II enthält die aus der Kurve abgelesenen Epochen der  
 Maxima. Die Spalte *R* wurde mit den einfachen Elementen 2422720 +

TABELLE II.

E	B	Maxima			E	B	Maxima		
		$\nu$	R	B-R			$\nu$	R	B-R
- 22	<sup>241</sup> 7245	<sup>m</sup> 12.3	7220	+ 25	+ 1	<sup>242</sup> 2980	<sup>m</sup> 12.6	2970	+ 10
- 21	7493	12.2	7470	+ 23	+ 2	3226	12.2	3220	+ 6
- 20	7725	12.0	7720	+ 5	+ 3	3480	12.9	3470	+ 10
- 19	7980	11.6	7970	+ 10	+ 4	3713	11.8	3720	- 7
- 18	8228	12.0	8220	+ 8	+ 5	3995	11.8	3970	+ 25
- 17	8478	11.8	8470	+ 8	+ 6	4224	12.3	4220	+ 4
- 16	8725	12.6	8720	+ 5	+ 7	4476	11.4	4470	+ 6
- 15	8971	12.0	8970	+ 1	+ 8	-	-	-	-
- 14	9221	12.0	9220	+ 1	+ 9	4988	12.3	4970	+ 18
- 13	9464	11.5	9470	- 6	+ 10	5208	12.4	5220	- 12
- 12	9726	12.2	9720	+ 6	+ 11	5455	11.6	5470	- 15
- 11	9968	12.6	9970	- 2	+ 12	5718	12.8	5720	- 2
- 10	<sup>242</sup> 0222	12.3	0220	+ 2	+ 13	5971	12.2	5970	+ 1
- 9	0463	11.6	0470	- 7	+ 14	6220	11.8	6220	0
- 8	0708	11.7	0720	- 12	+ 15	6473	13.2	6470	+ 3
- 7	0930	11.8	0970	- 40	+ 16	6712	12.6	6720	- 8
- 6	1199	11.8	1220	- 21	+ 17	6989	12.5	6970	+ 19
- 5	1456	12.0	1470	- 14	+ 18	7233	12.3	7220	+ 13
- 4	1713	12.0	1720	- 7	+ 19	7468	11.6	7470	- 2
- 3	1965	12.5	1970	- 5	+ 20	7720	12.0	7720	0
- 2	2205	11.2	2220	- 15	+ 21	7984	12.9	7970	+ 14
- 1	2465	12.3	2470	- 5	+ 22	8224	11.8	8220	+ 4
0	2718	12.2	2720	- 2					

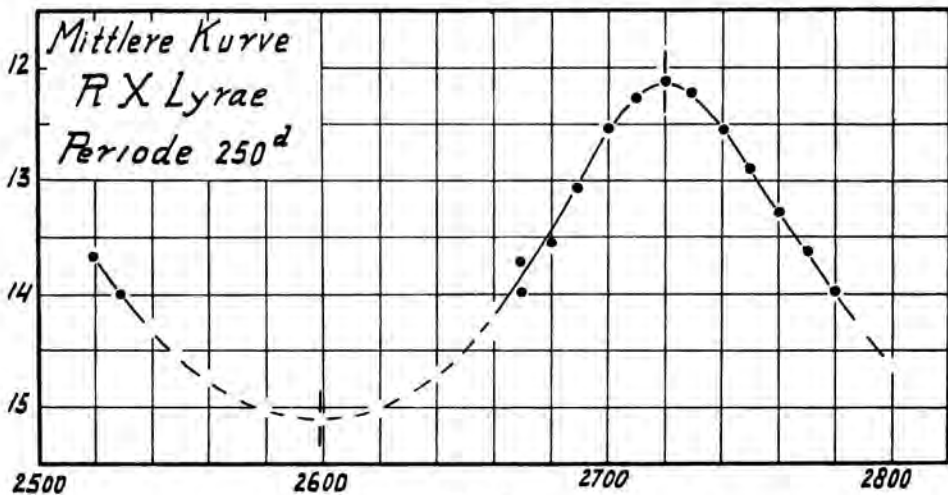


Fig. 2.

250<sup>d</sup>.0 *E* berechnet. SCHNELLER's Katalog für 1940 gibt den Periodenwert 250<sup>d</sup>.6.

Die mittlere Helligkeit im Maximum beträgt  $12^m.12 \pm 0.06$  (m.F.).

Wird die Helligkeit des Minimums auf 15.1 geschätzt, so beträgt die Amplitudo 3<sup>m</sup>.0.

Auch für *RX Lyrae* wurde der mittlere Verlauf der Lichtkurve in der Nähe des Maximums durch Ablesung der Helligkeit für je 10<sup>d</sup> abgeleitet; an die so erhaltene mittlere Kurve in Fig. 2 wurde ein hypothetischer mittlerer Kurvenzug für die Umgebung des Minimums hinzugefügt.

Die Streuung in der Nähe von  $\pm 70^d$  erreicht die Werte; im aufsteigen-

TABELLE III. Die mittlere Kurve.

Phase	$\nu$	Phase	$\nu$	Phase	$\nu$	Phase	$\nu$
- 80 <sup>d</sup>	<sup>m</sup> (14.75)	- 20 <sup>d</sup>	<sup>m</sup> 12.60	+ 30 <sup>d</sup>	<sup>m</sup> 12.85	+ 90 <sup>d</sup>	<sup>m</sup> (14.76)
- 60	14.23	- 10	12.27	+ 40	13.23	+110	(15.01)
- 50	13.87	0	12.12	+ 50	13.60	+130	(15.11)
- 40	13.47	+ 10	12.21	+ 60	13.94	+150	(15.02)
- 30	13.04	+ 20	12.48	+ 70	14.27	+170	(14.75)

den Aste: 0<sup>m</sup>.425; im absteigenden Aste 0.227; Mittel 0.326. Das Verhältnis der Streuungen 0<sup>m</sup>.425 und 0<sup>m</sup>.227 ist 1.87, das Verhältnis der durchschnittlichen Geschwindigkeiten des Lichtwechsels bei Auf- und Abstieg ist 1.07.

A. A. NIJLAND †: MITTLERE LICHTKURVEN VON LANGPERIODISCHEN VERÄNDERLICHEN. XXXIV. RX LYRAE.

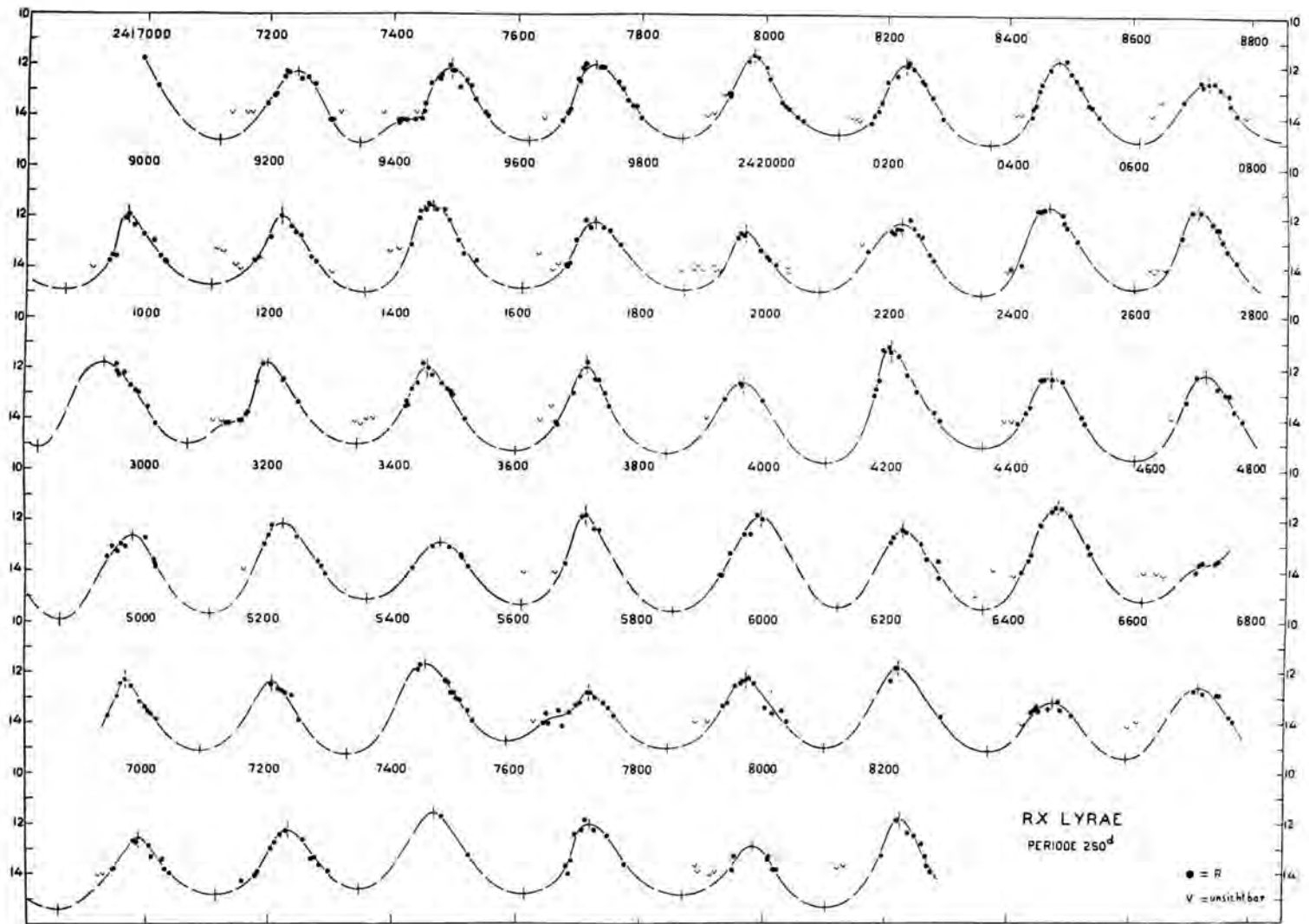


Fig. 1.



**Astronomy.** — *Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen.*  
 XXXV. *R W Lyrae.* Von A. A. NIJLAND †. (Communicated by  
 Prof. A. PANNEKOEK.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

Die Beobachtungen wurden alle in *R* angestellt. Spektrum *M7e* (SCHNELLER, 1940). Gesamtzahl der Beobachtungen 399. Fünf stark abweichende Schätzungen (2420711, 3666, 3735, 5244 und 5798), in der Figur I eingeklammert, wurden verworfen. In 57, in der Figur mit **V** bezeichneten Fällen war der Stern unsichtbar. Aus dieser Figur ersieht man, dass nicht nur die kleinste Helligkeit niemals beobachtet wurde, sondern dass auch ein ziemlich grosser Teil der Lichtkurve oberhalb des Minimums nicht durch direkte Beobachtung festgelegt werden konnte.

TABELLE I. Vergleichsterne.

*	<i>BD</i>	* — <i>v</i>	St.	H.A. 57	Grenze	<i>H</i>
<i>c</i>	+ 43.3056	—	45.22	<sup>m</sup> 9.84	—	<sup>m</sup> 9.84
<i>d</i>	+ 43.3053	—	38.03	10.70	—	10.51
<i>e</i>	—	—	31.53	10.90	—	11.12
<i>f</i>	—	—	27.53	11.52	—	11.50
<i>h</i>	—	—	23.02	11.80	—	11.92
<i>j</i>	—	+ 0 <sup>m</sup> 17.3; + 10'20"	20.50	—	—	12.16
<i>k</i>	—	+ 0 15.0; — 5 30	18.34	—	—	12.36
<i>m</i>	—	+ 0 20.0; — 7 20	11.92	—	—	12.96
<i>n</i>	—	+ 0 5.1; + 5 10	6.37	—	<sup>m</sup> 13.54	13.48
<i>p</i>	—	+ 0 32.7; — 2 50	0.0	—	14.07	14.07

Die Tabelle I gibt eine Uebersicht der benutzten Vergleichsterne.

Die Sterne *n* und *p* wurden 60- und 130-mal an die Grenze von *R* angeschossen; die sich hieraus ergebenden Helligkeiten sind: *n* = 13<sup>m</sup>.54, *p* = 14<sup>m</sup>.07. Der Stufenwert ist 0<sup>m</sup>.093.

Die Figur I enthält die Beobachtungen. Die Reihe der Abweichungen (Beobachtung minus Kurve) zeigt 111 Plus-, 127 Minuszeichen, 99 Nullwerte, 128 Zeichenfolgen, 109 Zeichenwechsel. Das Mittel der absoluten Werte der Abweichungen ist 0<sup>m</sup>.166. Es wurden keine Farbenschätzungen erhalten.

Ein Einfluss des Mondscheines auf die Helligkeitsschätzung ist nicht merkbar. Es verteilen sich auf 52 bei Mondschein angestellte Beobachtun-

gen die Abweichungen wie folgt: 14 Plus-, 16 Minuszeichen und 22 Nullwerte.

Die Tabelle II enthält die aus der Kurve abgelesenen Epochen der Maxima  $M$ . Die Spalte  $R$  wurde mit den einfachen Elementen

$$\text{J.D. } 2422358 + 506.8 E$$

berechnet. Von einer Verbesserung dieser Elemente mittels der hier gegebenen Daten wurde Abstand genommen. SCHNELLER's Katalog für 1940 gibt den Periodenwert  $503^d.2$ .

TABELLE II.

$B$	Maxima $M$			$B$	Maxima $M$		
	$\nu$	$R$	$B-R$		$\nu$	$R$	$B-R$
<sup>241</sup> 7277	<sup>m</sup> 11.4	7290	- 13	<sup>242</sup> 2872	<sup>m</sup> 11.7	2865	+ 7
7794	10.2	7797	- 3	3388	11.7	3372	+ 16
8303	12.3	8304	- 1	3890	12.6	3878	+ 12
8813	12.6	8810	+ 3	4382	12.6	4385	- 3
9295	9.7	9317	- 22	4890	11.8	4892	- 2
9826	12.6	9824	+ 2	5403	12.7	5399	+ 4
<sup>242</sup> 0337	13.2	0331	+ 6	5942	13.0	5906	+ 36
0832	11.7	0838	- 6	6420	13.0	6412	+ 8
1343	13.2	1344	- 1	6910	12.1	6919	- 9
1870	12.5	1851	+ 19	7386	12.8	7426	- 40
2361	12.6	2358	+ 3	7903	12.6	7933	- 30
					<sup>m</sup> 12.21		

Eine mittlere Lichtkurve wurde für die Umgebung des Maximums abgeleitet (Tabelle III), die durch Mittelwerte aus den hypothetisch gezogenen Kurven der Umgebung der Minima ergänzt wurde.

TABELLE III. Die mittlere Kurve.

Phase	$\nu$	Phase	$\nu$	Phase	$\nu$	Phase	$\nu$
- 80 <sup>d</sup>	<sup>m</sup> 14.24	+ 20 <sup>d</sup>	<sup>m</sup> 12.35	+120 <sup>d</sup>	<sup>m</sup> 13.85	+300	(15.22) <sup>m</sup>
- 70	13.99	+ 30	12.51	+130	13.98	+320	(15.24)
- 60	13.70	+ 40	12.66	+140	14.12	+340	(15.21)
- 50	13.37	+ 50	12.81	+160	(14.37)	+360	(15.11)
- 40	12.95	+ 60	12.97	+180	(14.57)	+380	(14.93)
- 30	12.60	+ 70	13.12	+200	(14.73)	+400	(14.71)
- 20	12.35	+ 80	13.26	+220	(14.88)	+420	(14.37)
- 10	12.24	+ 90	13.42	+240	(15.01)		
0	12.21	+100	13.56	+260	(15.11)		
+ 10	12.26	+110	13.71	+280	(15.18)		

A. A. NIJLAND †: MITTLERE LICHTKURVEN VON LANGPERIODISCHEN VERÄNDERLICHEN. XXXV. RW LYRAE.

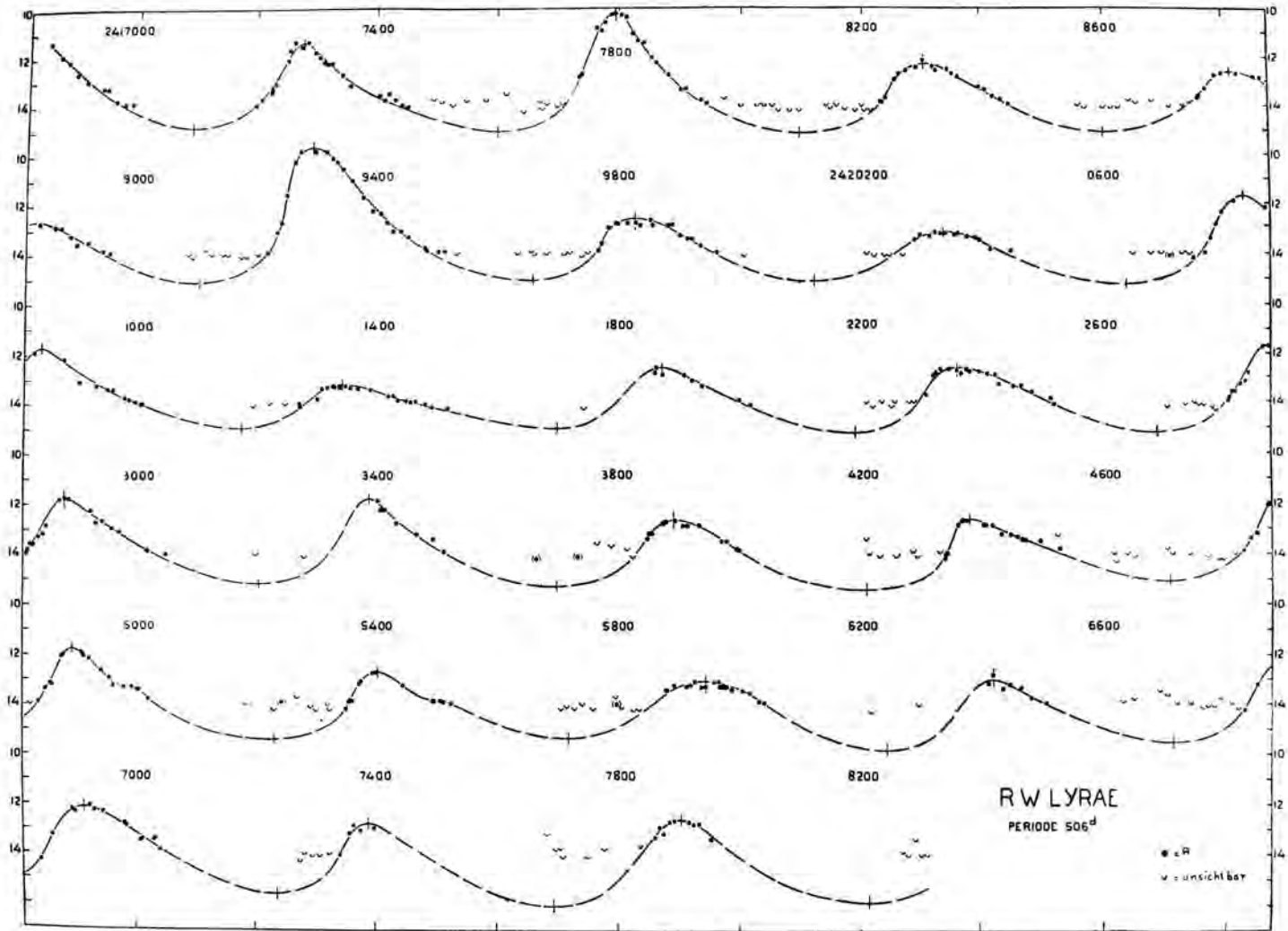


Fig. 1.

Das Maximum von *R W* Lyrae ergibt sich zu  $12^{\text{m}}.21 \pm 0^{\text{m}}.19$  (m.F.);

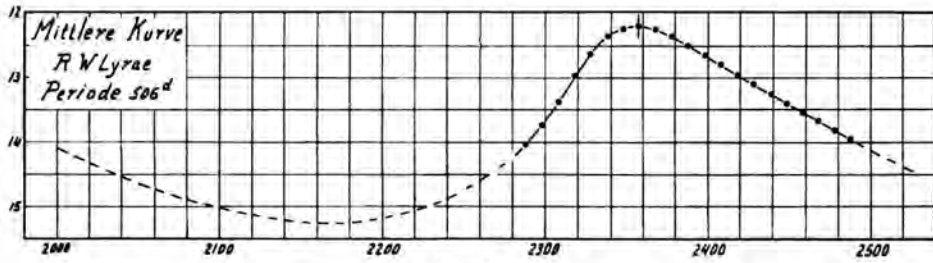


Fig. 2.

das Minimum kann auf 15.2 geschätzt werden. Nach der angenommenen Lage des Minimums würde sich  $(M - m)/P$  zu 0.37 ergeben.

**Hormonology.** — *Die Wirkung des gonadotropen aus schwangerem Stutenserum gewonnenen Hormons bei verschiedenen Haustieren. II.*  
Von Dr. F. C. VAN DER KAAJ und Dr. L. P. H. J. DE VINK.  
(Communicated by Prof. G. KREDIET.)

(Aus der Veterinären Geburtshilflichen und Gynäkologischen Klinik der Reichsuniversität zu Utrecht (Dir. Prof. Dr. F. C. VAN DER KAAJ) und der Universitäts-Frauenklinik zu Amsterdam (Dir. Prof. M. A. VAN BOUWDIJK BASTIAANSE.)

(Communicated at the meeting of May 31, 1941.)

*Gestylwirkung bei Schafen.*

Neben unsern Versuchen mit Hunden waren wir in der Gelegenheit, die Wirkung von Gestyl bei Schafen zu untersuchen. Diese Tiere, die alle schon Lämmer geworfen hatten, befanden sich zur Zeit ihrer Behandlung im Anoestrus. Das Schaf hat zwar einen Cyklus von drei Wochen, doch in den Monaten Mai, Juni, Juli und August, sowie zu Anfang September befinden die Ovaria sich in einer Ruheperiode. Erst im Nachjahr (Ende September) tritt eine erneute Funktion des Ovariums auf, welche klinisch in Brunst und im Gestatten des Coitus zum Ausdruck kommt.

Was die Technik angeht, so sei erwähnt, dass der Widder stetig bei der Herde sich aufhielt. Vor der Injektion wurden die Tiere auf etwaige Gravidität untersucht. Die Ergebnisse unserer Untersuchungen sind in den Tabellen V, VI, VII, VIII und IX zusammengefasst. An Hand dieser Tabellen werden wir die wichtigsten Befunde besprechen.

Zehn Tiere erhielten am 8. 8. 39 die erste intramuskuläre Gestylinjektion, 5 Tiere bekamen 240 R. E., 3 Stück 160 R. E. und 2 Stück 480 R. E. Schaf 34 wies die deutlichen klinischen Erscheinungen der Brunst auf und gestattete den Coitus. Von den Tieren 36 und 40 sind keine feststehenden Einzelheiten zu bekommen. Am 25. 8. 39 bekamen alle Tiere eine zweite Einspritzung von 250 R. E. Diese Injektion hatte bei 6 Tieren das Resultat, dass ein Coitus gestattet wurde und von uns festgestellt wurde. Am 3. September wurde der Widder, der Tag und Nacht bei der Herde anwesend war, von derselben getrennt. Zwei Monate nach der letzten Injektion wurden die Tiere getötet. Bei der Sektion trat zu Tage, dass 6 von den 10 Tieren trächtig waren.

Wenn wir die bei den verschiedenen Tieren erzielten Ergebnisse prüfen, so sehen wir, dass bei der Operation einzelne wichtige Tatsachen zu Tage treten. So stellten wir fest, dass bei einigen Tieren eine grössere Anzahl Corpora lutea in den Ovaria vorhanden waren als Früchte in den beiden Uterushornern (Tab. VI). Schaf 31 hatte 2 Früchte gegenüber 3 Corpora

lutea. Schaf 32 hatte 2 Corpora lutea im l. Ovarium und kein einziges im r., während beide Uterushöhlen je eine Frucht beherbergten. Hier sahen wir eine Transmigratio auftreten d.h. dass das Ei, das aus dem l. Ovarium stammte, sich nicht im l. Uterushorn entwickelte, sondern im r. Uterushorn

TABELLE V.

No.	Datum der 1. Inj.	Dosis der 1. Inj.	Klin. Erscheinungen nach 1. Inj.	Datum 2. Inj.	Dosis 2. Inj.	Klin. Erscheinungen nach 2. Inj.	Sektion am 23. 10. 39
31	8. 8.	240 R. E.		25. 8.	250 R. E.	Coitus 29. 8.	gravide
32	8. 8.	240 R. E.		25. 8.	250 R. E.	Coitus 27. 8.	gravide
33	8. 8.	240 R. E.		25. 8.	250 R. E.	Coitus 30. 8.	gravide
34	8. 8.	240 R. E.	Coitus	25. 8.	250 R. E.		nicht gravide
35	8. 8.	240 R. E.		25. 8.	250 R. E.		gravide
36	8. 8.	160 R. E.	wahrscheinlich Coitus	25. 8.	250 R. E.		gravide
37	8. 8.	160 R. E.		25. 8.	250 R. E.	Coitus 30. 8.	nicht gravide
38	8. 8.	160 R. E.		25. 8.	250 R. E.	Coitus 30. 8.	nicht gravide
39	8. 8.	480 R. E.		25. 8.	250 R. E.	Coitus 1. 9.	gravide
40	8. 8.	480 R. E.	Erscheinungen von Oestrus, aber kein Coitus	25. 8.	250 R. E.		nicht gravide

gelandet war. Wir sprechen hier von einer Transmigratio. Dasselbe zeigt Schaf 33, wo drei Corpora lutea in beiden Ovaria vorhanden waren. Im l. Uterushorn entwickelten sich 2 Früchte, während im r. Horn 4 Früchte angetroffen wurden. Bei Schaf 35 trafen wir insgesamt 8 Corpora lutea an mit 1 normal entwickelten Frucht im l. Uterushorn. Sechs Tiere waren während ihres intrauterinen Lebens succombiert und befanden sich in Resorption. Bei Schaf 36 wurden 2 Tiere in Resorption angetroffen, während Schaf 39 wieder 9 Corpora lutea besass. Nur eine Frucht kam zur normalen Entwicklung.

Die bei Schaf 36 gefundenen Lämmer sind grösser als die der andern Tiere, wahrscheinlich ist hier bereits Befruchtung nach der ersten Injektion (Tabelle V) aufgetreten.

Anlässlich des Befundes der grossen Anzahl Corpora lutea neben der kleineren Anzahl Früchte sowie der in Resorption befindlichen Früchte und der Transmigratio interna legten wir uns die Frage vor, welche diesbezüglichen Verhältnisse bei normalen Graviditäten bestanden.

Um dieses Problem einer Lösung entgegenzuführen, haben wir eine Reihe von 68 trächtigen Schafen untersucht. Bei 20 dieser Tiere wurde eine

TABELLE VI.

No. des Schafes	Corpora lutea im l. Ovarium	Anzahl Früchte im l. Uterushorn		Corpora lutea im r. Ovarium	Anzahl Früchte im r. Ovarium		Transmigratio	Gesamtanzahl Corpora lutea	Gesamtanzahl Früchte im Uterus	
		normal entwickelt	In Re-sorption		normal entwickelt	In Re-sorption			normal entwickelt	In Re-sorption
31	2	1 (1-8 cm)		1	1 (1-8 $\frac{1}{2}$ cm)			3	2	
32	2	1 (1-9 cm)		0	1 (1-9 cm)		+	2	2	
33	3	2 (1-8 cm)		3	4 (2-7 $\frac{1}{2}$ cm) (2-6 $\frac{1}{2}$ cm)		+	6	6	
35	6	1 (1-8 cm)	2	2		4		8	1	6
36	4	1 (1-14 cm)	2	3	2 (1-13 cm)			7	3	2
39	5	1 (1-7 cm)		4				9	1	

Transmigratio angetroffen. Was wir bei den 48 übrigen Tieren fanden, zeigt Tabelle VII. Die 48 untersuchten Tiere wurden in 12 Gruppen eingeteilt, die alle eine wechselnde Anzahl Schafe enthielten. Gleichlautende Ergebnisse von verschiedenen Tieren wurden einer Gruppe zugeteilt.

TABELLE VII.

No. der Gruppe	Anzahl Schafe in Gruppe	Anzahl Corp. lutea im l. Ovarium bei jedem Tier einer Gruppe	Anzahl Früchte im l. Uterushorn bei jedem Tier einer Gruppe		Anzahl Corp. lutea im r. Ovarium bei jedem Tier einer Gruppe	Anzahl Früchte im r. Uterushorn bei jedem Tier einer Gruppe		Gesamtanzahl Corpora lutea bei einer Gruppe	Gesamtanzahl Früchte im Uterus in einer Gruppe	
			normal entwickelt	In Re-sorption		normal entwickelt	In Re-sorption		normal entwickelt	In Re-sorption
1	1	1		1	1	1		2	1	1
2	8	1	1					8	8	
3	2	2	2					6	6	
4	16	1	1		1	1		32	32	
5	7				1	1		7	7	
6	3				2	2		6	6	
7	2	1	1		1			4	2	
8	3	1			1	1		6	3	
9	1	1			2	1		3	1	
10	2	2	1		1	1		6	4	
11	2				2	1		4	2	
12	1	2	1					2	1	



Wenn wir uns die Tabelle ansehen, so bemerken wir, dass Gruppe 4 die grösste Anzahl Tiere (16) umfasst, wobei beide Ovaria ein Corpus luteum enthalten und wobei in jedem Uterushorn eine Frucht vorhanden ist. Bei den Gruppen 7—12, die alle eine kleine Anzahl Tiere umfassen, sind die

TABELLE VIII.

No. des Schafes	Anzahl Schafe in Gruppe	Anzahl Corp. lutea im l. Ovarium bei jedem Tier einer Gruppe	Anzahl Früchte im l. Uterushorn bei jedem Tier einer Gruppe		Anzahl Corp. lutea im r. Ovarium bei jedem Tier einer Gruppe	Anzahl Früchte im r. Uterushorn bei jedem Tier einer Gruppe		Gesamtanzahl Corp. lutea bei einer Gruppe	Gesamtanzahl Früchte im Uterus in einer Gruppe	
			normal entwickelt	In Resorption		normal entwickelt	In Resorption		normal entwickelt	In Resorption
1	8	2	1			1		16	16	
2	1	1				1		1	1	
3	6		1		2	1		12	12	
4	2		1		2			4	2	
5	2		1		1			2	2	
6	1	3	1			1		3	2	

meisten Schwankungen ersichtlich. So zeigt sich, dass bei Gruppe 7 im l. und r. Ovarium ein Corpus luteum vorhanden ist, während das l. Uterushorn eine Frucht enthält. Dieselbe Erscheinung finden wir im umgekehrten Sinne bei den Tieren, die zur Gruppe 8 gehören. Gruppe 9, die nur aus einem Tier besteht, weist das Vorhandensein eines Corpus luteum im l. und von zwei im r. Corpus luteum auf, während nur im r. Uterushorn eine Frucht vorhanden ist. Gruppe 10 hat zwei Corpora lutea im l. Ovarium und eine Frucht im l. Uterushorn, während das r. Ovarium ein Corpus luteum hat und eine Frucht im r. Horn. Die Gruppen 10 und 12 zeigen wieder eine andere Variation. Unter sämtlichen Tieren fanden wir nur ein Tier, bei dem von den zwei vorhandenen Früchten eine in Resorption sich befand.

Wie wir bereits bemerkten, fanden wir bei 20 trächtigen Tieren eine Transmigratio. Diese kam also viel öfter vor als wir anfänglich dachten. Den von uns gefundenen Zustand der Ovaria sowie die Anzahl Früchte, die in beiden Uterushörnern vorhanden waren, gibt Tabelle VIII wieder.

Die erste und die dritte Gruppe haben die meisten Vertreter. Bei Gruppe 1 wurden 8 Tiere angetroffen, die im l. Ovarium 2 Corpora lutea hatten und in jedem der Uterushörner eine Frucht, während Gruppe 3 sechs Tiere beherbergte, welche zwei Corpora lutea im r. Ovarium hatten und in jedem Uterushorn eine Frucht.

Wenn wir nun unsere Daten von den mit Gestyl behandelten Tieren und die der normal graviden Tiere vergleichen, so sehen wir das folgende Bild.

Aus dieser Tabelle können wir feststellen, dass die Durchschnittszahl der Corpora lutea per Schaf bei den mit Gestyl behandelten Tieren grösser ist als bei normal trächtigen Tieren (5, 83: 1, 8). Die Anzahl Corpora lutea bezüglich der Anzahl normaler Früchte ist bei den mit Gestyl eingespritzten

TABELLE IX.

	Anzahl Schafe	Anzahl Corpora lutea	Anzahl normaler Früchte	Anzahl in Resorption befindlicher Früchte	Gesamtanzahl Früchte	Anzahl Fälle von Transmigratio
Gestylschafe . . .	6	35 (5,83)	15 (2,5)	8 (1,3)	23 (3,83)	2 (0,33)
Kontrollschafe .	68	122 (1,8)	104 (1,52)	1 (0,014)	105 (1,54)	20 (0,28)

Schafen grösser als bei normal schwangeren Tieren (2, 33: 1, 1). Die Anzahl der in Resorption befindlichen Früchte ist bei mit Gestyl eingespritzten Schafen grösser als bei den nicht behandelten Tieren. Bei keinem der Kontrolltiere wurde eine so grosse Anzahl Corpora lutea gefunden als bei denen, welche mit Gestyl behandelt wurden, wobei 6, 7, 8 und 9 Stück angetroffen wurden. Möglicherweise hat das Gestyl viele Follikel zugleich zur Reife gebracht, während sich dann bei dem Auftreten einer Gravidität in allen gereiften oder geplatzten Follikeln ein Corpus luteum gebildet hat. Auch das Absterben der Früchte ist etwas Auffallendes. Ist diese Erscheinung auf eine Insuffizienz des aufgebauten Corpus luteum zurückzuführen oder ist die Implantation in ungenügender Masse möglich, weil der Uterus den Veränderungen, welche die Gestylinjektionen hervorrufen, nicht hat folgen können?

Eine ausgedehnte vergleichende histo-pathologische Untersuchung muss hier noch folgen. Die Zahl der aufgetretenen Fälle von Transmigratio wich nicht sehr von einander ab. Ferner sei noch bemerkt, dass die Ovaria der mit Gestyl behandelten Tiere, die nicht trächtig wurden, keine Unterschiede aufwiesen mit 103 daraufhin untersuchten Kontrolltieren.

Zusammenfassend glauben wir auf Grund unserer Versuche die folgende Schlussfolgerung ziehen zu dürfen, nämlich dass:

- I. Gestyl, verabreicht bei Schafen im Anoestrus, eine sehr gute Wirkung aufwies;
- II. bei 6 von den 10 behandelten Tieren eine Gravidität auftrat;
- III. bei diesen Tieren eine grössere Anzahl Corpora lutea angetroffen wurde als bei 68 normal trächtigen Schafen;
- IV. bei den mit Gestyl behandelten Schafen mehr intrauteriner Fruchttod auftrat, worauf Resorption der Frucht stattfand;
- V. bei trächtigen Schafen die Transmigratio interna bei weitem nicht selten vorkommt;
- VI. nach Gestylverabreichung Superovulation und Superfecundation auftreten können.

Als letzte Gruppe von Tieren, bei denen die Gestylwirkung untersucht wurde, waren 4 junge Rinder im Alter von ungefähr 8 Monaten und ein

junges Schwein (5 Monate). Bei 3 jungen Rindern wurden 500 R. E. eingespritzt, während das 4. Tier 450 R. E. intramuskulär erhielt. Das Schwein erhielt 200 R. E. Einzelheiten. Alle sind in Tab. X verzeichnet. Bei den jungen Rindern 50 und 51 wurde das l. Ovarium 4 bzw. 3 Tage vor der Injektion entfernt, während das r. Ovarium 7 bzw. 12 Tage nach der Einspritzung weggenommen wurde. Bei den Tieren 53 und 52 wurde die erste Operation 6 bzw. 11 Tage nach der Einspritzung vorgenommen, während der zweite Eingriff 17 bzw. 24 Tage nach der Injektion erfolgte. Wenn wir einen Blick auf die Veränderungen werfen, so fällt uns sofort die grosse Gewichtssteigerung der Ovaria auf, während auch das makroskopische Bild enorme Veränderungen erfuhr. Hierfür zeugen die verschiedenen Aufnahmen vor und nach der Behandlung.

Das mikroskopische Bild der Ovaria vor der Injektion zeigt verschiedene Tertiärfollikel, die bereits kräftig ausgewachsen waren. Einer der Follikel platzte bei der Operation, doch ferner war kein Zeichen von Ovulation vorhanden. Die meisten Tertiärfollikel befanden sich in Atresion, ebenso wie die sekundären. Es sind wenig Primärfollikel vorhanden. Die Ergebnisse nach der Gestylinjektion ergeben ein betäubendes Bild. Zwar haben die Tertiärfollikel stark an Grösse zugenommen, aber alle sind atretisch. Bei den meisten Follikeln ist die ganze Granulosazellenschicht verschwunden oder doch nur in einer sehr schmalen Schicht vorhanden. Die Theca weist stellenweise eine geringe Reaktion auf. Einzelne junge Bindegewebs-elemente werden angetroffen, doch nirgendwo wurde die geringste Bildung eines Corpus luteum beobachtet. Selbst lange Zeit nach der Einspritzung ging das Ovarium, was seine Grösse angeht, zurück, doch in dieser Zeit entwickelte sich kein Corpus luteum-Gewebe, wie wir das bei den Hunden (Hund 183) gesehen hatten. Bei Färse 53 wurde bei der ersten Operation 6 Tage nach der Einspritzung 8 cm<sup>3</sup> Follikelflüssigkeit punktiert. Hierin war festgesetztermassen 40 M. E. per cm<sup>3</sup> oestron vorhanden, woraus folgt, dass die Wirkung auf die Follikel ganz entschieden stattfindet, aber viel zu heftig ist. Die Luteinisation jedoch bleibt aus, ebenso wie die Ovulation.

Eine schöne Reaktion wies das Ovarium des Schweines auf. Auch hier bestand eine grössere Gewichtszunahme. Mikroskopisch wurden einzelne Tertiärfollikel gefunden. Einzelne derselben befanden sich in Atresion. Keiner der Follikel war geborsten. Corpora lutea wurden nicht gefunden. Nach der Injektion war das Bild gründlich verändert. In einzelnen Follikeln hatten sich deutliche Corpora lutea gebildet. Der Bau dieser Corpora lutea war sehr schön und wies starke Aehnlichkeit mit dem Bau eines normalen Corpus luteum auf. Die Zellen waren rund bis ovalrund mit scharf gezeichneten runden Kernen. An verschiedenen Stellen wurde myxoematöses Gewebe angetroffen. Auch die Blutgefässversehung war gut.

Fassen wir die Ergebnisse unserer letzten Versuche zusammen, so kommen wir zu der folgenden Schlussfolgerung:

TABELLE X.

Junges Rind No.	Alter in Monaten	Total eingespritzte Einheit	Datum der Operation	Ovariumgewicht vor Injektion	Ovariumgewicht nach Injektion	Makroskopisch	
						Vor Einspritzung r. en l. Ovarium	Nach Einspritzung r. en l. Ovarium
50	8	500 R. E.	1. Vier Tage vor Injektion (li. Ov.). 2. Sieben Tage nach Inj. (r. Ov.).	2.1 g	11,5 g	Einzelne grössere Follikel, wovon eines bei der Operation sprang.	Stark vergrössert. Enthält vier grosse Follikel, viel grösser als bei voriger Operation.
51	8	500 R. E.	1. Drei Tage vor Injektion (l. Ov.). 2. 12 Tage nach Injektion (r. Ov.).	4.2 g	89 g	Viele kleine Follikel.	Stark vergrössert. Viele grosse Follikel.
53	8	500 R. E.	1. Sechs Tage n. Injektion. 2. Siebzehn nach Injekt.	15,3 g	72 g	Ziemlich viele grosse Blasen.	Stark vergrössertes Ovarium.
52	8	450 R. E.	1. Elf Tage nach der ersten Injektion. 2. 24 Tage n. Injektion.	58 g	—	Sehr gross. Voll Blasen. Einzelne mit Blut gefüllt.	Stark vergrössert. Viele Blasen.
Klinisch deutliche Symptome von Brunst gehabt. Coitus 2, 3 und 4 Tage nach Injektion.							
Ferkel	5	200 R. E.	1. 9 Tage vor Injektion. 2. 6 Tage nach Injektion.	1,9 g	7 g	Einzelne kleinere Corpora lutea.	Ovarien stark vergrössert. Einzelne grosse Follikel, viele kleinere zweiplatzte Follikel bei Operation.

Mikroskopisch		Ergebnis
Vor der Einspritzung	Nach der Einspritzung	
<p>Tertiärfollikel fallen auf. Dünne Schicht Granulosazellen. Bei einzelnen ist diese Zellschicht verschwunden. Sekundärfollikel atretisch. Einer der Follikel ist zusammengefallen. Theca und Interstitium blutreich. Viele junge Zellen hierin vorhanden. Wenige Primärfollikel.</p>	<p>Vier grosse Follikel, die das ganze Bild ungefähr einnehmen. Wand mit dünner Granulosazellenschicht. In andern Follikeln ist die Granulosazellauskleidung verschwunden. An einzelnen Stellen ist die darunter liegende Theca losmaschig. Gefässe sind stark überfüllt. Einer der Follikel hatte eine Wand, die verdeckt war und die bestand aus einem Gewebe, worin Thecazellen zu erkennen waren.</p>	<p>Grösserwerden der Follikel. Degeneration. Keine Entwicklung Corpus lut.</p>
<p>Verschiedene Tertiärfollikel sämtlich in Atresie. Granulosazellen manchmal verschwunden. In einzelnen Follikeln untergegangene Eizellen.</p>	<p>Alle Follikel sind vergrössert, doch vollkommen in Atresie. Manchmal noch dünne Granulosazellenschicht anwesend. Andere völlig verschwundene Granulosa. Keine Thecawucherung.</p>	<p>Tertiärfollikel vergrössert. Degeneration. Atresie. Kein Corpus luteum.</p>
<p>Am 23.1. bei erster Operation wurde aus den Follikeln des 1. Ovariums 8 cm<sup>3</sup> Follikelflüssigkeit aufgesogen, die 40 M. E. per cm<sup>3</sup> enthält.</p>		
<p>Follikel sind sämtlich atretisch. In verschiedenen Follikeln war die Granulosazellenschicht verschwunden. Bei einzelnen andern Follikeln ist die Granulosazellenschicht losmaschig; Kerne, die Degeneration aufweisen. Die darunterliegende Theca wuchert stellenweise mit. Stark überfüllte Blutgefässe.</p>	<p>Sämtlich Follikel atretisch. Granulosazellenschicht überall verschwunden. In einem einzigen Follikel noch etwas von der Granulosa anwesend. Die Theca interna ist losmaschig mit jungen Bindegewebszellen darin. Keine Bildung von Corpus luteum.</p>	<p>Tertiärfollikel stark vergrössert. Atresie. Kein Corpus lut.</p>
<p>Viele kleine und einzelne grössere Tertiärfollikel. Granulosazellenschicht bei einzelnen normal, bei andern degeneriert. Keine Corpora lutea. Einer der Follikel geplatzt.</p>	<p>Bildung von schönen Corpora lutea. Scharf umschriebene Zellen, Protoplasma verschwommen. Kerne rund, einige in Teilung sich befindend. Blutgefässversorgung ist gut. Andere Follikel teilweise mit Corpus luteumartigem Gewebe gefüllt. Tertiärfollikel sind gewachsen. Sekundäre atretisch.</p>	<p>Tertiärfollikel vergrössert. Bildung von Corpus luteum.</p>



- I. Dass die Gewichtszunahme sowie das makroskopische Bild der Ovaria nach der Injektion sich stark verändert hatte.
- II. Dass die Tertiärfollikel gewaltig reagiert haben und an Grösse stark zugenommen haben.
- III. Dass sämtliche Follikel in Degeneration sich befinden, während manchmal nichts mehr von der Granulosazellenschicht ersichtlich ist.
- IV. Dass sehr wenig Reaktion in der Theca beobachtet wurde, während von einer Bildung von Corpus luteumgewebe überhaupt keine Rede ist; selbst nach längerer Zeit (24 Tage) ist das nicht der Fall.
- V. Dass die Reaktion bei einem jungen Schweine von 5 Monaten sehr deutlich war. Neben Follikelvergrößerung wurde auch die Bildung von schönen Corpora lutea angetroffen.

### *Zusammenfassung.*

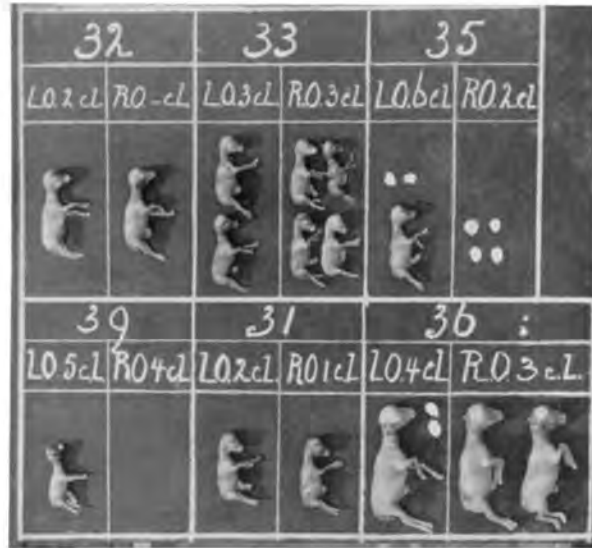
Beschrieben wird eine Untersuchung nach der Wirkung des gonadotropen Hormons, stammend aus dem Serum schwangerer Stuten bei infantilen und erwachsenen Hunden, sowie bei Schafen, jungen Rindern und bei einem Schweine. Die eingespritzte Menge, die stets intramuskulär verabreicht wurde und nur einmal intravenös, variierte zwischen 100—1000 R. E. Gestyl. Bei infantilen Hunden wurde eine leichte Reaktion auf das Ovarium beobachtet, ebenso wie auf den Uterus. Namentlich bei intravenöser Verabreichung war letzteres sehr deutlich. Die erwachsenen Hunde wurden klinisch brünstig und gestatteten in mehreren Fällen den Coitus. Die histo-pathologischen Veränderungen in den Ovaria und dem Uterus werden besprochen. Das Anwachsen der Tertiärfollikel steht im Vordergrund. Die Veränderungen der Granulosa wurden untersucht. Die Bildung von Corpus luteum-Gewebe wird ein einziges Mal beschrieben. Im Uterus traten schöne Veränderungen auf, doch nirgends wurde, wenn auch im Ovarium Corpus luteum-Gewebe vorhanden war, eine Sekretionsphase gefunden.

Bei Schafen, die alle schon einmal Junge geworfen hatten und ebenso wie die Hunde, im Anoestrus sich befanden, hatte das Gestyl eine gute Wirkung. Bei 6 von den 10 Tieren trat eine Gravidität auf. Die Einzelheiten bei der Untersuchung hiervon wurden näher beschrieben.

Die Reaktion auf die Ovaria der Färsen ist heftig. Zwar sehen wir eine gewaltige Gewichtsteigerung der Ovaria und ein üppiges Anwachsen der Follikel, aber alle sind atretisch und weisen Degeneration der Granulosazellenschicht auf. Es ist wenig oder keine Reaktion der Theca. Bildung von Corpus luteum-Gewebe wird nicht beobachtet.

Das Schwein reagierte auf die Gestylwirkung. 6 Tage nach der Injektion war schönes Corpus luteum-Gewebe ersichtlich, das in seinem Bau dem normalen Corpus luteum sich näherte.

F. C. VAN DER KAAJ und L. P. H. J. DE VINK: DIE WIRKUNG DES GONADOTROPEN AUS SCHWANGEREM STUTENSERUM GEWONNENEN HORMONS BEI VERSCHIEDENEN HAUSTIEREN.



Zusammenfassung von Corpora lutea und Früchte von mit Gestyl behandelten Schafe. Die weissen Punkte stellen Früchte dar, die sich in Resorption befinden.



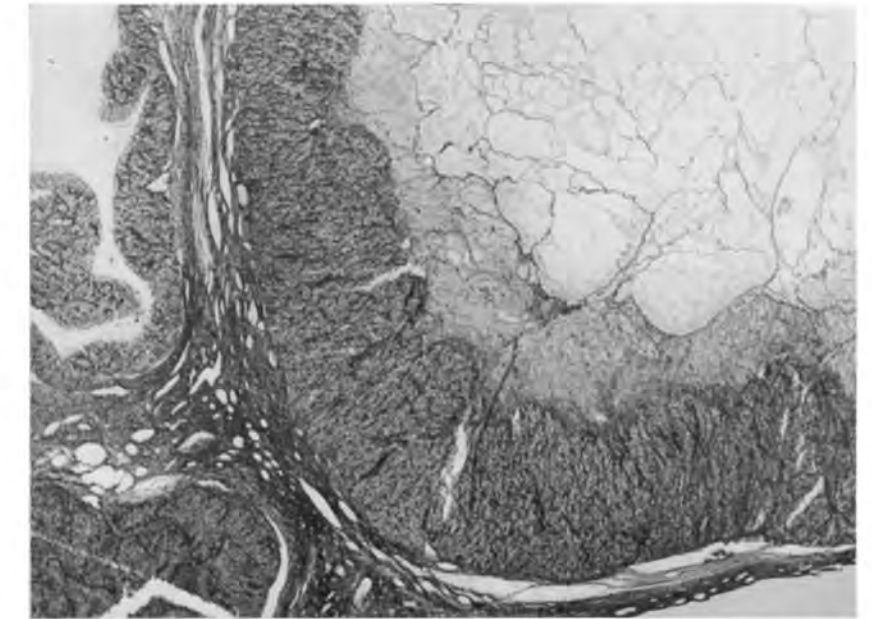
Junges Rind 50. L. Ovarium und r. Ovarium nach 500 R.E.



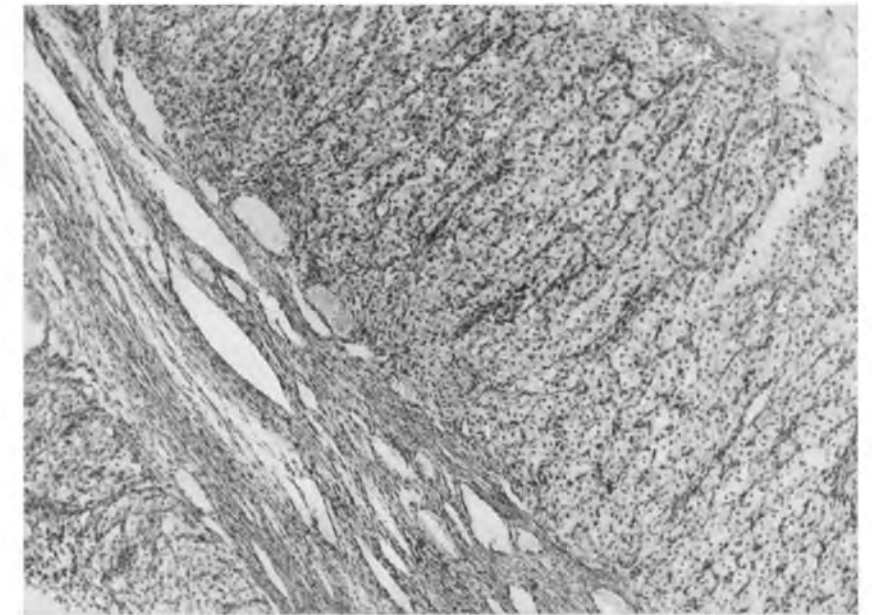
Junges Rind 51. L. Ovarium vor, r. Ovarium nach der Injektion.



Junges Rind 52. L. und r. Ovarium nach 400 R.E. Gestyl.



Schwein. Ovarium nach 200 R.E. Gestyl. 6 Tage nach Injektion. 20 X.



Schwein. Ovarium nach 200 R.E. Gestyl. 6 Tage nach Injektion. 65 X.



# PROCEEDINGS

VOLUME XLIV

No. 7

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: M. W. WOERDEMAN

---

---

## CONTENTS

- ITERSON Jr., G. VAN, and A. D. J. MEEUSE: "The shape of cells in homogeneous plant tissues". I, p. 770.
- BIEZENO, C. B., and J. J. KOCH: "On the elastic behaviour of the so-called "Bourdon" pressure gauge". I, p. 779.
- KLEYN, A. DE: "Lésions partielles du nerf vestibulaire et de ses voies centrales". III, p. 787.
- GERLINGS, P. G., and A. DE KLEYN: "Vestibular nystagmus caused by acoustic stimulation", p. 800.
- LOONSTRA, F.: "Bericht über die Konstruktion und die Fortsetzung von Bewertungen". II. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 806.
- HAANTJES, J.: "Conformal Differential Geometry. Curves in conformal euclidean spaces". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 814.
- VEEN, S. C. VAN: "Annäherungsformeln für das vollständige elliptische Integral erster Art in der Nähe von  $k = 1$ ". III. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 825.
- MEIJER, C. S.: "Eine neue Erweiterung der LAPLACE-Transformation". (Zweite Mitteilung). (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 831.
- RUTGERS, J. G.: "Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL". IV. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 840.
- BAUMANN, C.: "Hemiballism and Biballism". (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS), p. 852.
- SEGAAR, J.: "Der Einfluss von Kohlensäure auf die Atmungsbewegungen von Crustaceen". I. (Communicated by Prof. H. J. JORDAN), p. 860.
- ONG SIAN GWAN: "De l'immunité contre le phosgène. Présence d'une protéine nouvelle dans le poumon intoxiqué par le phosgène". (Deuxième mémoire). (Communicated by Prof. E. GORTER), p. 871.
- 
-

**Botany.** — *The shape of cells in homogeneous plant tissues.* I. By G. VAN  
ITERSON Jr and A. D. J. MEEUSE.

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

1. *Discussion of the problem and historical remarks.*

By homogeneous plant tissue we mean in this paper: a tissue being an assemblage of congruent cells built up in such a way that by parallel shiftings in space the cells may be caused to coalesce. It may also be expressed thus: tissue in which congruent cells are placed in space in the same way. So the cells are not supposed to fill the tissue without leaving any interstices; generally there will be some intercellular spaces. Meantime in this communication we shall exclusively consider tissue without any intercellular spaces or with spaces of very little extension.

Of course it cannot be said *a priori* that there are homogeneous plant tissues, and considering the variety of cellforms it is even to be expected that this will not be the case in a strictly mathematical sense. It will, however, be seen that there are tissues in nature which approach homogeneous tissues.

This possibility has indeed long been assumed by plant anatomists, who were struck by the fact that various uniformly built plant tissues showed a very uniform assemblage of hexagonal cell sections, on longitudinal as well as on transverse sections. As early as 1802, C. F. MIRBEL (27) <sup>1)</sup> pictured a truncated dodecahedron considering this the shape of the cells of which a uniform tissue is a homogeneous assemblage. He had deduced that shape from the fact that on transverse section such tissues show regular hexagons and on longitudinal section extended hexagons. He assumed that that shape comes into being by the cells trying to expand during ontogenesis; he says: "When the cells experience no other resistance than that existing among themselves their horizontal and vertical sections show hexagons resembling the holes in a beehive."

D. G. KIESER (9) thinks in 1818 that MIRBEL has found this cell shape: "as it were unconsciously, not suspecting the truth, while he was drawing the tissues, without recognizing that the necessity of that form is founded in mathematical laws, hence without formulating the law of its construction." Still KIESER arrives at the same cell shape for uniform tissue as MIRBEL did. He starts by saying that really the rhombic dodecahedron is the *original* shape of the cells of plant tissues. Of the spatial bodies being able to fill the space without any interstices (he also enumerates some others which are able to do this) the rhombic dodecahedron approaches

---

<sup>1)</sup> The numbers refer to the literature, mentioned at the end of Part II of this communication.

most the sphere, according to KIESER, and is preferred by the plants as the original shape, because: "the originally round plant cells compress each other mutually", thus assuming a shape deviating the least possible from the sphere.

But KIESER alters his first opinion partially by assuming that originally the cells have not a strictly spherical shape but that of an ellipsoid, so that as a result of the mutual pressure there are formed deformed rhombic dodecahedrons. He further assumes that there are many "modifications" of the original shape, and the one which is obtained by truncation of the deformed rhombic dodecahedron (on the upper and lower side until the height of the body is approximately equal to the breadth) he considers "the shape of cell most frequently occurring in nature." Thus he returned to the shape pictured before by MIRBEL.

Later anatomists have also repeatedly supposed that the rhombic dodecahedron is the ideal cell shape of uniform plant tissues without any intercellular spaces, and I may add that the same has been said of animal tissues (which are hardly discussed in this communication).

Some anatomists, however, have assumed different cell shapes.

P. DUCHARTRE (3) said in 1867 that any cell in a uniform tissue, developing out of round cells, is bounded at the top and at the bottom by another cell and by the sides by 12 other cells, the upper half being placed against 6 cells and the lower half against 6 others, all 12 being placed sideways. He therefore states expressly that the "regular" cell is "a solid body with fourteen faces (tetrakaidecahedron) and not with twelve, as is often said". It will be seen that DUCHARTRE came very near the actual shape. DUCHARTRE too considers mutual pressure the cause of the occurrence of the cell shape which he assumes for uniform tissues. But he also discusses in detail cases in which the cells deviate from the regular shape through unequal growth of the different parts.

## 2. *Mathematical considerations.*

It goes without saying that the problem of the cell shape in homogeneous plant tissues, as defined in the previous section may be discussed purely mathematically.

The crystallographer E. VON FEDOROW has treated the problem how a space can be filled without any interstices by congruent bodies which may be caused to cover each other by parallel shiftings. He found the solution for convex bodies bounded by flat faces. It will be clear that the lateral faces of such bodies must every time be congruent and parallel in pairs. Therefore VON FEDOROW calls such bodies parallelohedrons. He first treated the problem with what parallelohedrons the space may be filled without any interstices in Russian publications which appeared in 1885, 1888 and 1890, but these only became known in Western Europe through his German treatises in 1893 and 1896 (5) (for a discussion of the significance of these treatises see A. E. H. TUTTON "Crystallography" (33)). The bodies

which VON FEDOROW pointed out (on the ground of considerations of possible symmetry of point systems, and of spatial bodies) are identical with, or may be derived from the cube, the straight hexagonal prism, the rhombic dodecahedron, a so-called extended rhombic dodecahedron and a cubo-octahedron. These bodies are pictured in fig. 1. The cubo-octahedron

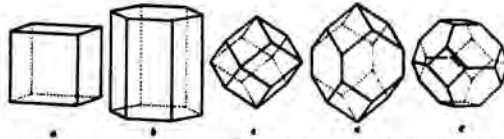


Fig. 1. Five parallel polyhedrons of VON FEDOROW (after A. E. H. TUTTON). The figure *e* represents the "orthic tetrakaidecahedron" of Lord KELVIN.

(a tetrakaidecahedron) pictured here, may be obtained by truncating the corners of a regular octahedron by means of a cube in such a way that the edges of the octahedron are divided into three equal parts by the faces of the cube.

Different proofs may be furnished to show that *these* bodies can fill a space without leaving any interstices, the simplest proofs being those in which projective geometry is applied. A proof for the cubo-octahedron mentioned, a body of special importance for our discussions, may be found in a communication by E. B. MATZKE (25).

The other parallel polyhedrons with which space may be filled by parallel shiftings may be deduced from these five by deformations which VON FEDOROW calls homogeneous deformations (for a precise definition see his treatise of 1896). In order to realize the existence of such parallel polyhedrons it should be remembered that when space is imagined to be filled with one of the five kinds of bodies of figure 1, these bodies by stretching the complex in a certain direction may be deformed in such a way that the corresponding bounding faces of the bodies remain parallel. Through such deformations parallel polyhedrons may be obtained which show less symmetries than the bodies pictured above and which may yet fill the space without any interstices through parallel shifting. In his treatise of 1896 VON FEDOROW pictured many of them, showing the symmetry of all the various crystal systems.

Lord KELVIN (8) in 1894 treated the problem in quite a different way, whereby he did not limit himself to spatial figures bounded by flat faces, nor to convex bodies, but made a general inquiry into the shape of bodies which may fill space without any interstices through parallel shiftings. Lord KELVIN first treats the corresponding problem for a plane, starting from uninterrupted filling of this plane through parallel shifting of a parallelogram. By considering this parallelogram as a combination of two congruent, but reversed triangles, and by shifting these two triangles in such a way with regard to each other that the sides remain parallel, and then connecting the six vertices of the triangles, hexagonal parallelogons may be obtained with which — as may be easily proved by plane geometry — the plane may be filled without any interstices through parallel shiftings.

Those hexagons may be convex or concave and their sides which in pairs must be equal in length and parallel may mutually greatly differ in length. By making a stencil, starting from the hexagonal figure, but deforming it in such a way that when one of the sides is made to bulge, the corresponding parallel side is indented congruently, and by shifting the stencil from one hexagon to the next, circumscribing it each time, homogeneous divisions of the plane may be obtained with various congruent figures with curved sides. KELVIN pictured some remarkable examples of them. A corresponding method Lord KELVIN applied to the space problem, in which he starts from a parallelepipedum, divided into 6 tetrahedrons by four planes, all going through a body diagonal, and each of them also through a different face diagonal. By shifting these tetrahedrons by a purely translational motion and then bringing surfaces (in general these surfaces will be curved) through the vertices (pairs of these surfaces have to be equal and parallel) a body is obtained with which space may be filled homogeneously. By bringing about the shifting of the tetrahedrons in different ways, various convex and also concave bodies may be constructed to which this applies.

It will be clear that these bodies generally possess  $6 \times 4 = 24$  vertices. Lord KELVIN further proves that generally they have 14 lateral faces and that they may be considered as cubo-octahedrons which are identical with, or, by means of extending and shifting or of bulging and indenting the lateral faces, may be derived from the cubo-octahedron pictured in fig. 1e. This latter body Lord KELVIN calls "orthic tetrakaidecahedron". He does not separately mention the hexagonal prism, the rhombic dodecahedron and the extended rhombic dodecahedron and the bodies derived from them as bodies with which space may be homogeneously filled. The hexagonal prism may be considered a special case of the cubo-octahedron which cannot be said of the other two bodies, so far as I can see, and so there is a difference in the results of VON FEDOROW and of Lord KELVIN which has not yet been accounted for.

The orthic tetrakaidecahedron was already known by Lord KELVIN as a result of earlier studies, made when he was still Sir WILLIAM THOMSON (31). He had namely in 1887 put the question what shape soapbubbles would assume when space is filled homogeneously with such bubbles of the same size, flattening each other and forming soap membranes. He had come to the conclusion that they will assume a shape which very nearly approaches that of the orthic tetrakaidecahedron, but yet differs from it (see figure 2). The edges of the spatial configuration, formed by the soap membranes are equally long, but they are not straight, but slightly curved, and the six quadrilateral faces are plane faces, but the eight hexagonal lateral faces are curved surfaces, the curvature of which may be pictured by dividing a regular hexagon into six sections through the three diagonals and alternately slightly pushing a section inwards and the next section as slightly outwards (see figure 2). These deviations from the orthic tetrakaide-



cahedron are necessary, because, owing to the tendency to reduce the total area of the soap membranes to a minimum, in a configuration of soap membranes four edges must always meet in one point and they must meet

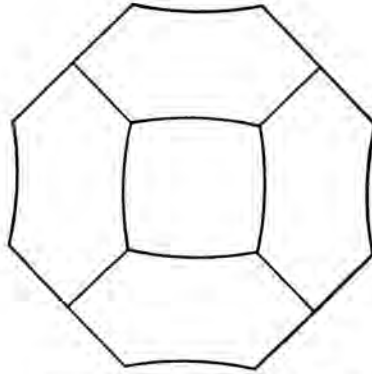


Fig. 2. Projection of the "minimal" tetrakaidecahedron with curved edges, four plane quadrilateral faces and six curved hexagonal faces (here this body is called: the "body of Thomson") (after Sir WILLIAM THOMSON).

there two by two under an angle of  $109^{\circ} 28'$ , and because in such a configuration three soap membranes are to meet on each soap edge, namely two by two under dihedral angles of  $120^{\circ}$ . In a spacefilling with orthic tetrakaidecahedrons these conditions are not fulfilled. Naturally the body with curved edges is one of the space figures which may be derived from the orthic tetrakaidecahedron in the way indicated by Lord KELVIN in 1894 viz. by bulging and indenting corresponding faces. We shall call the body with curved edges, "the body of THOMSON". To illustrate the shape of the quadrilateral flat faces of this body Sir WILLIAM THOMSON immersed a rectangular prism, the base of which was a rectangle with edges of 5.66 cm and 4 cm, and whose height was 5.66 cm in a solution of soap. On emerging from this solution a square was formed in the centre with sides which were curved outwards in the same way as those of the quadrilateral faces of the cubo-octahedron with curved edges (see fig. 3).

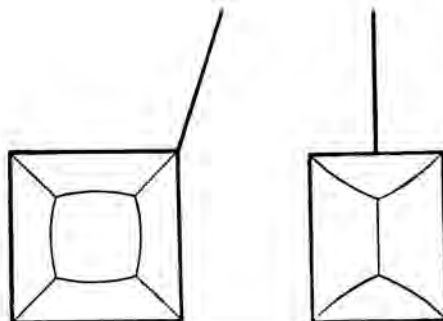


Fig. 3. An experiment with a solution of soap in order to demonstrate a tetragonal face with sides curved as those of the plane quadrilateral faces of the "minimal" tetrakaidecahedron (after Sir WILLIAM THOMSON).

3. *The cell-forms in homogeneous tissues as revealed by recent investigations.*

In his very interesting work "On Growth and Form" (Cambridge 1917) D'ARCY WENTWORTH THOMPSON (32) has discussed the possibility of the rhombic dodecahedron and of the orthic tetrakaidecahedron as the ideal cell form for uniform tissues; the former form he considers the most probable, but he thinks that there is no certainty in this question, in his opinion maceration experiments should decide the matter.

Since then the matter has been decided, though not through maceration experiments. It came owing to a lengthy series of studies, continued during many years by FREDERIC T. LEWIS (10-11-12-13-14-15-16-17-18- and 19) who began them in 1922. For many homogeneous or nearly homogeneous tissues LEWIS has tried to show that the average form of the cells approaches the orthic tetrakaidecahedron, or a figure which may be obtained by extending this spatial figure. This he supposed to apply to plant as well as to animal tissues.

As his first instance LEWIS (10) mentions the pith of the elder (he studied the pith of *Sambucus canadensis*). In order to make himself acquainted with the cell shape he constructed space models of the cell forms from series of sections, mostly from longitudinal sections (he needed about 16 per cell) and he arrived at the conclusion that the average cell form approaches an orthic tetrakaidecahedron, which is placed in such a way that a hexagon is present at the top and hence also at the bottom, so that each of the six broken lateral faces of the body is built up by a rectangular and by a hexagonal face. Many deviations from this fundamental shape were found, which were ascribed to differences in the size of the cells. There were many cells with 13 and with 15 lateral faces, and besides cells with even fewer and with even more lateral faces, but the average number of lateral faces of 63 cells was 13.96 and was therefore very near 14.

Another instance for plant tissue was the pith in the apparent stem of *Juncus effusus*, of which LEWIS (11) showed that it is probable that the typical stellate cells, from which the pith is constructed, originate from juvenile tissue, being an assemblage of orthic tetrakaidecahedrons.

Further instances were furnished by the epidermis of the immature cucumber (*Cucumis sativus*) (13 and 15) and that of the stem of *Tradescantia virginiana* (13), where it is interesting that the cells of the epidermis mentioned first are extended perpendicularly to the surface of the cucumber, whereas those of *Tradescantia virginiana* have their greatest dimensions in the direction of the stem.

Another instance are the cork cells, of which LEWIS (14) showed that they approach the straight hexagonal prisms, placed with their axes perpendicularly to the surfaces of the plant organ (as such they were also often pictured by early plant anatomists). But he rightly remarked that



when carefully observed, these cells are seen not to be exactly such prisms, but that they have a shape intermediate between that of the straight hexagonal prism and that of the cubo-octahedron with plane-faces; they may be considered as orthic tetrakaidecahedrons which have been pulled straight (in a radial direction), after which they have been much shortened (in that same direction).

The most remarkable instance in the plant world, studied by LEWIS (19) in such a way that it compels us to admiration, are the fibre tracheids of *Pinus*, which LEWIS determined with the help of 213 successive transverse sections of the wood of *Pinus strobus*, made for him by JEFFREY. From these sections spatial models of the cells were again deduced. The result was that the cambium cells, from which the tracheids originate, are practically formed and placed at the surface of the wood like the cork cells at the surface of the bark. So the cambium cells, after LEWIS, must be considered as orthic tetrakaidecahedrons, deformed to hexagonal prisms whose axes are placed radially to the stem, which prisms in this case are very flat and whose front and back faces are parallel to the surface of the tree and with a short edge of the prism at the top and at the bottom. This body moreover is much extended in the longitudinal direction of the tree. The cambium cells have the same arrangement as an assemblage of orthic tetrakaidecahedrons and so they each have 16 faces in common with the surrounding cells. When growing out into fibre tracheids the cells curve at the ends, thus giving rise to new contacts, so the mature fibre tracheids touch 18 to 22 other cells.

J. W. MARVIN (23) added one more to these instances: the pith cells of *Eupatorium purpureum* L. from North America, grown in this country as ornamental plant. This botanist made spatial models of no less than 100 cells. The average number of lateral faces was 13.36. There were numerous exceptions from the orthic tetrakaidecahedron (a.o. pentagonal lateral faces were more numerous than hexagonal ones) which MARVIN attributes to the presence of large and small cells by the side of each other.

We shall not quote instances from animal tissues, which are certainly no less interesting.

The senior author first studied the problem of the cell forms in 1912 and 1913, in co-operation with Mr. W. F. GAYMANS, then administrator of a crude sugar factory in Modjokerto (Java). We could state that the pith of sugar cane, where it is uniform in structure, is an assemblage of cells generally approaching a orthic tetrakaidecahedron drawn more or less straight in the longitudinal direction of the stem. This could be directly observed in longitudinal and transverse sections of that pith (see fig. 4). Naturally there are again numerous exceptions; the pithcells are very unequal in size and their regular arrangement is moreover greatly disturbed by the occurrence of the vascular bundles with sklerenchym sheaths of greatly varying dimensions.

Since then the senior author has arrived at a conclusions similar to that of

LEWIS and MARVIN, having recognized the orthic tetrakaidecahedron as the fundamental form of numerous homogeneous plant tissues. For as long as fifteen years he has demonstrated that cell form in microscopy practice, in an object in which it may be recognized almost at once even by an

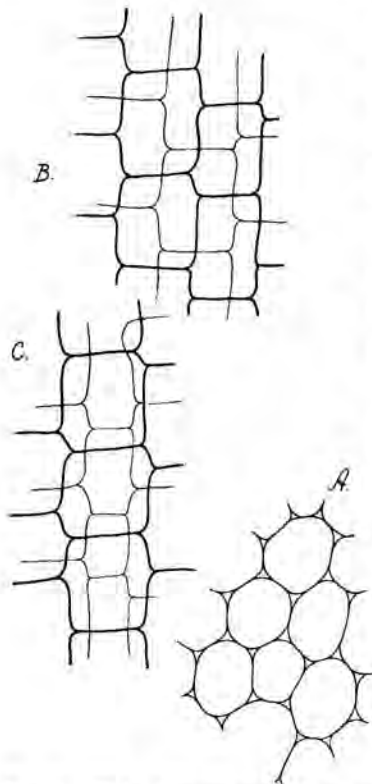


Fig. 4. Pith of sugar cane. A, transverse, B, radial, C, tangential section. Several cells are cubo-octahedrons extended to hexagonal prisms.

unpractised microscopist, namely in the cortical parenchyma of the root tubers of *Asparagus Sprengeri* REGEL, an indoor plant from Japan, generally found to be grown by florists because it furnishes ornamental green throughout the year. When thick transverse sections made of such a tuber, are viewed at about  $1/3$  of the radius, counting from outside, it is seen that the tissue consists of fairly uniform polygonal cells, and in many places it may be observed that numerous cells approach the orthic tetrakaidecahedron. Repeatedly, for instance, a hexagonal lateral face of a cell is seen to be bounded by three tetragonal and by three hexagonal lateral faces (see the plate in Part II).

Longitudinal sections show that the cells are placed above each other in vertical rows and from the transverse sections it is seen that the upper surface and the lower surface of the cell are formed by hexagons. The cells in adjacent vertical rows are not on the same level, but have shifted with regard to each other, as may be expected in homogeneous tissue of cubo-octahedrons.

The structure described here may be especially easily recognized by the fact that the various edges in the tissue are not equally clear. The "broken" edges in a vertical direction are dark in colour and hence strike the eye, the horizontal edges are not so plainly visible. This is caused by the fact that the edges mentioned first are not solid but hollow. In the living tissue they contain air, for at the edge where three vertical cell walls meet an intercellular space is formed. Such spaces continue through the cortical parenchyma, from the base to the top of the root, even where the root is not thickened to a tuber. Where a horizontal wall is bounded by vertical walls there are no intercellular spaces filled with air.

It will be clear that the quadrilateral faces in the tuber are placed obliquely and therefore these faces are seen in great number in sections of the tuber made in an oblique direction (see the plate in Part II).

In the tubers mentioned numerous exceptions to the ideal cell form occur. In the tissue cells with raphids of calcium oxalate are found among others, which are much smaller than the cells described above, which are filled with perfectly transparent cell fluid.

Other, no less fine instances are furnished by the cortical parenchyma of root tubers of *Chlorophytum Sternbergianum* and of *Anthericum* species, by the parenchyma of the pseudo-berry of *Basella alba* and *B. rubra* and by the parenchyma below the upper epidermis near the midrib of *Tradescantia discolor*.

Although it is not unimportant that the cell form discussed may be observed with far less trouble than LEWIS had to take over the determination of that form, we should not — after the numerous detailed treatises of LEWIS — have decided to communicate anything about our earlier observations on this subject, if it were not possible to make some additional remarks.

The most important new observation which may be made on the fine objects mentioned above is, that the edges of the cells are not straight but curved. This is most clear in the edges bounding the plane quadrilateral faces. These edges curve outwards (see the plate) and the curvature is about the same as that of the quadrilateral faces of the "body of THOMSON" (see figure 2). The hexagonal lateral faces of the cells are often bounded by edges which curve inwards. The same details may often be observed in cells which have been isolated by maceration, provided they are afterwards reinforced to a certain extent by a stiffening process — for, owing to their large dimensions, they easily collapse, after being isolated, into irregular sack-shaped bodies — and when they are afterwards stained. When applying this method, the "decision" as to the cell shape is indeed arrived at by the way mentioned by D'ARCY W. THOMPSON.

On the ground of these observations we are convinced that the shape of the cells of homogeneous tissues, which have no, or very small intercellular spaces — as is the case here — is not that of the orthic tetrakaidecahedron, but that of the "body of THOMSON" <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> It is to be regretted that S. T. BOK ("On the shape of froth chambers", these Proceedings 43, 1180—1190, 1940) wrongly ascribes to Sir WILLIAM THOMSON the opinion that in a regularly constructed soap froth the "orthic tetrakaidecahedron" is realized, and that BOK does not mention THOMSON's body with curved edges and partially curved faces. A soap froth in which the latter body is formed will, however, be obtained only when the soap bubbles are stalked up regularly. Our opinion also differs from BOK's in several other assumptions of his, as is clear from the above expositions; we disagree for instance when he says: "The requirements of complete filling of space, namely implies the idea that the froth walls are flat". The polyhedral "yolk granules" which BOK pictures had already been drawn by F. A. POUCHET in 1847; this we take from LEWIS (11), who already mentions the fact which struck BOK, that many of the lateral faces are pentagonal, although LEWIS considers the "orthic tetrakaidecahedron" the ideal form of those "granules".

**Mechanics.** — *On the elastic behaviour of the so-called "Bourdon" pressure gauge. I.* By C. B. BIEZENO and J. J. KOCH.

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

1. *Introduction.* The Bourdon pressure gauge consists of an annular tube of an elliptic or oval cross-section and constant thickness, closed by two meridional planes, which — as a rule — include an angle lying between  $240^\circ$  and  $300^\circ$ . The major axis of symmetry of the cross section is parallel, the minor axis of symmetry perpendicular to the axis of revolution of the pressure gauge. An internal pressure  $p$  will change the angular distance of the terminal planes and consequently the amount of this change can be considered as a measure of this pressure.

Though ample application has been made of the Bourdon pressure gauge, only few attempts have been undertaken to account for its elastic behaviour. It must be admitted that in the periodical "Nature" of 1890 interesting views of GREENHILL<sup>1)</sup> and Lord RAYLEIGH<sup>1)</sup> are to be found, which deal with the mechanical character of the elastic phenomenon, (the discovery of which must be ascribed to mere chance) and with the difficulties of its numerical solution, but the solution itself fails, and is left to the "elasticians". The first important study, we did meet in the literature from 1890 onwards, is a treatise by H. LORENZ<sup>2)</sup>, whose results agree qualitatively with the experimental facts.

However, objections are to be made against the mode of deduction: on one side the flexural stiffness of the wall is neglected in one part of the calculations, so that here the wall is assumed to act solely like a membrane, whereas on the other side, in another part of the treatise in which the flexural rigidity of the wall is brought into action, another phenomenon — occurring with initially curved tubes — is neglected<sup>3)</sup>.

A recent study by G. SCHUBERT<sup>4)</sup> accounts for this latter phenomenon but, only bearing indirectly on the pressure gauge, it does not bring our subject to an end.

The present authors propose herewith a method, which takes into account the above mentioned objections and which enables in a rather simple way the numerical calculation both of the deformation and the stresses of the gauge. It will be seen from the results (see § 5) that

<sup>1)</sup> GREENHILL, *Nature*, **41**, 517 (1890); RAYLEIGH, *Nature*, **42**, 197 (1890).

<sup>2)</sup> *Z. d. V. d. I.*, **54**, 1865 (1910).

<sup>3)</sup> This phenomenon, the so-called "flattening" of the tube has been described by VON KÁRMÁN; see *Z. d. V. d. I.* **55**, 1889 (1911).

<sup>4)</sup> G. SCHUBERT, *Ing. Arch.*, **XII**, 53 (1941).

exceedingly high stresses are caused by relatively low pressures, and that as a rule, the limit of proportionality is greatly surpassed by those pressures for which the pressure gauge is said to be designed. It does therefore no longer surprise that manifold ruptures occur, and that elastic hysteresis and non-proportionality between pressure and reading are frequently observed.

2. *The underlying assumption.* The following calculations are based on the assumption that the displacements and stresses are the same for all meridional cross-sections of the gauge.

In consequence of this assumption it must be understood that the material particles, lying in any such cross-section, move to a plane perpendicular to the center line of the **loaded** tube; for evidently this assertion holds exactly for the particles of the meridional plane of symmetry. Another consequence of the assumption is the similarity of all distorted cross-sections; and in this respect it seems less satisfactory. For it will be seen at once that the closing meridional end-planes practically prevent the end-cross-sections to distort at all. Similarity of all distorted cross-sections only would occur if the gauge would be closed by two flat oval pistons, lacking all elastic stiffness *in* their planes. It must, however, be emphasized that the disturbance caused by the compressive stiffness of the actual closing ends will be restricted to their immediate neighbourhood and therefore will be negligible. Eventually the effect may be taken into account by introducing a smaller effective length of the gauge. Summarizing we find, that we may restrict ourselves to a single element of the gauge lying between two neighbouring cross-sections.

3. *The oval gauge-element.* We denote by  $r$  the radius of the centerline of the gauge,  $2a$  and  $2b$  the length of the axes of symmetry of its cross-sections ( $2a$  relates to the axis, perpendicular to the plane of the centerline of the gauge).  $h$  the thickness of the wall,  $rd\psi$  the length of the element, measured along the centerline,  $p$  the internal pressure.

All calculations relate to one single shape of cross-section. If, however, its dimensions are magnified in the proportion  $\alpha$ , if the wall-thickness  $h$  is replaced by  $\beta h$ , and the radius  $r$  by  $\gamma r$ , all computations to be done in the following paragraphs remain unchanged, and only have to be multiplied by suitable powers of  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$ .

Though in fact the gauge element under discussion has a radius of curvature  $r$ , we confine ourselves provisionally to an element limited by two **parallel** planes at a distance  $rd\psi$ , and investigate the deformation of **this** element if subjected to an internal pressure  $p$  (see fig. 1).

To this end we consider a quarter of the ring, and replace it in a well-known way <sup>5)</sup> by a number of unelastic segments 0—1, 1—2, ... 9—10, of length  $s$ , connected by elastic joints. The coefficient of elasticity  $S$  of

<sup>5)</sup> Comp. f. i. BIEZENO-GRAMMEL, Technische Dynamik 1939, SPRINGER, 172.



these joints amounts to  $s : E^*I$ , except for the endpoints 0 and 10 for which it has only half this value  $\left(E^* = \frac{m^2}{m^2-1} E\right)$ .

From the equilibrium of the quarter of the ring it follows that in the

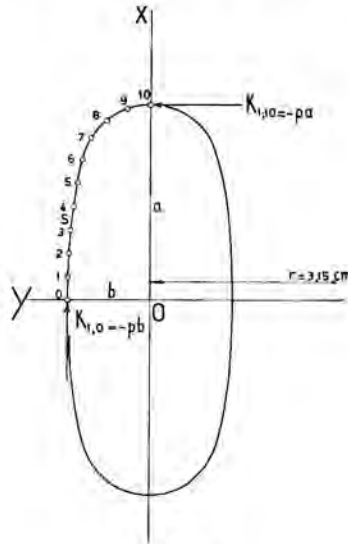


Fig. 1.

cross-sections immediately before the point 0 and immediately behind the point 10 normal forces are required of the magnitude  $-pb$  and  $-pa$ . The bending moment  $M_1^{**}$  in the cross-section 0 is statically undeterminate; its magnitude is defined by the condition that no relative change of angle between the cross-sections 0 and 10 occurs. Table I shows the calculation of  $M_1^{**}$ . The columns 1—3 contain the consecutive numbers and the (1000 times amplified) coordinates  $x$  and  $y$  of the joints; the columns 4 and 5 to the same scale the projections  $\Delta x$  and  $\Delta y$  of the segments 0—1, 1—2, ... 9—10, on the axes  $x$  and  $y$ .

The external load of the ring, caused by the pressure  $p$ , will be concentrated in the elastic joints; consequently a joint ( $i$ ) is loaded by a force  $P_1$  with the components  $P_{1x}$  and  $P_{1y}$

$$P_{1x} = -p \left[ \frac{\Delta y_{i-1,i}}{2} + \frac{\Delta y_{i,i+1}}{2} \right], P_{1y} = p \left[ \frac{\Delta x_{i-1,i}}{2} + \frac{\Delta x_{i,i+1}}{2} \right]$$

in the directions  $x$  and  $y$ . The expressions [...] are to be found in the columns 6a and 7a<sup>6)</sup>.

The results hitherto obtained keep their validity — as already stated — for a ( $a$ -times) enlarged cross-section, provided that all figures in the

<sup>6)</sup> Starting with column 6 all quantities to be represented are provided with an index 1, indicating that we deal with a first step of an iterative process, later on to be explained.

columns 2—6 are multiplied by the factor  $a$ . Therefore the multiplying factors inserted underneath these columns — which for the normal case should have been  $10^{-3}$ , resp.  $10^{-3} p$  — are replaced by  $10^{-3} a$ , resp.  $10^{-3} ap$ .

As a matter of fact the summing up of the columns 6a and 7a leads — except for the mentioned multiplying factor and except for the sign — to the known normal forces  $-pb$  and  $-pa$  in the sections 0 and 10.

Now we give attention to the cross-sections immediately **behind** the joints 0, 1, ... 10, and calculate the components  $K_{1x}$  and  $K_{1y}$  of the total force  $K$  exerted by the lower part of the ring on the upper part. These sections are for the sake of simplicity equally denoted by 0, 1, 2, a.s.o. For the section 0 (just behind the joint 0) these components are (always except for the multiplying factor) —  $\Sigma P_{x1} = -262$  and  $(P_{1y})_0 = 38$ ; (see the first figures of column 8 and 9). From these values we derive the components  $K_{1x}$  and  $K_{1y}$  of the next section (1) by adding to them the values  $P_{1x} = 2$  and  $P_{1y} = 75$ , representing the external load-components of the joint 1. In a similar manner all following figures of the columns 8 and 9 are obtained.

The equilibrium against rotation of segment ( $i$ ) lying between the cross-sections ( $i$ ) and ( $i + 1$ ) — see fig. 2 — requires

$$\Delta M_{1i} = (K_{1x})_i \Delta y - (K_{1y})_i \Delta x.$$

Therefore the differences  $\Delta M_1$  of two consecutive bending moments can

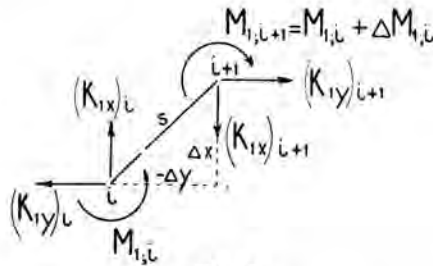


Fig. 2.

be obtained by tabulating  $K_{1x} \cdot \Delta y$  and  $-K_{1y} \cdot \Delta x$  and by adding every two corresponding values. The work is done in the columns 10, 11 and 12. It will be seen that the values to be inserted in these columns have been divided by the factor  $10^2$ ; consequently the multiplying factors underneath the columns have been multiplied by  $10^2$  and therefore are represented by  $10^{-4} a^2 p$  instead of  $10^{-3} ap$ ,  $10^{-3} p$ .

In an obvious way the bending moments  $M_1^*$  can be derived from column 12, on the assumption that the statically undeterminate bending moment  $M_1^{**}$  in the joint 0 be zero (see column 13). In point of fact this moment  $M_1^{**}$  exists and is defined by the statement that no relative rotation occurs



between the sections 0 and 10. As this rotation is represented by

$$\sum_{i=0}^{10} M_i S_i$$

— where  $M_i = M_i^* + M_i^{**}$  stands for the total bending moment — the magnitude of  $M_i^{**}$  can be derived from

$$\sum_i M_i^* S_i + M_1^{**} \sum_i S_i = 0$$

so that

$$M_1^{**} = - \frac{\sum_i M_i^* S_i}{\sum_i S_i},$$

or taking into account that  $S_i = s : E \cdot I$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ) and  $S_i = s : 2E \cdot I$  ( $i = 0$  and  $10$ ),

$$M_1^{**} = \frac{\sum_{i=0}^{10} M_i^* - \frac{1}{2} M_{1,0} - \frac{1}{2} M_{1,10}}{10} = \frac{8026 - 803}{10} = 722,3$$

except for the multiplying factor  $10^{-4} \cdot a^2 p$ .

To avoid decimals the value of  $M_1^{**}$  has been inserted in column (14) alternatively two times as 722 and one time as 723.

The resulting bending moments  $M$  at the joints are given in column (15).

Multiplication of these moments with the corresponding coefficients of elasticity  $S_i$  leads to the relative rotations  $\Delta \varphi_1$  of every two consecutive segments  $s$  (column 16). The absolute rotation  $\varphi_1$  of the segments follows directly from these values <sup>7)</sup> (column 17).

If the displacements of the joints in the direction of the  $y$ -axis are denoted by  $v_1$  it is an easy matter to deduce the difference  $\Delta v_1$  of two consecutive joints from the rotation  $\varphi_1$  of the interjacent segment. It is seen at once from the similarity of the two hatched triangles in fig. 3, that:

$$- \Delta v_1 : s \varphi_1 = \Delta x : s$$

resp.:

$$\Delta v_1 = - \varphi_1 \cdot \Delta x,$$

and the displacements  $v_1$  themselves are readily deduced from these quan-

<sup>7)</sup> Once for all it is left to the reader to control the multiplying factors underneath the columns; some care has to be taken in considering the "scale" effect discussed at the beginning of § 3; a factor  $s$  introduces a coefficient  $a$ ; a factor  $h$  involves a coefficient  $\beta$ , a factor  $I$  accordingly a coefficient  $\beta^3$ ; a factor  $r$  introduces a coefficient  $\gamma$ , a.s.o.

tities  $\Delta v_1$  if we start from the joint 10, the  $v$ -displacement of which is zero (columns 18 and 19).

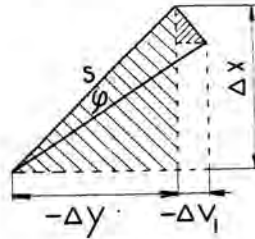


Fig. 3.

Before going on with the explanation of table I, we now have to pay some attention to the question whether the displacements  $v_1$  will perceptibly change their value, if the ring under consideration is no longer prismatic

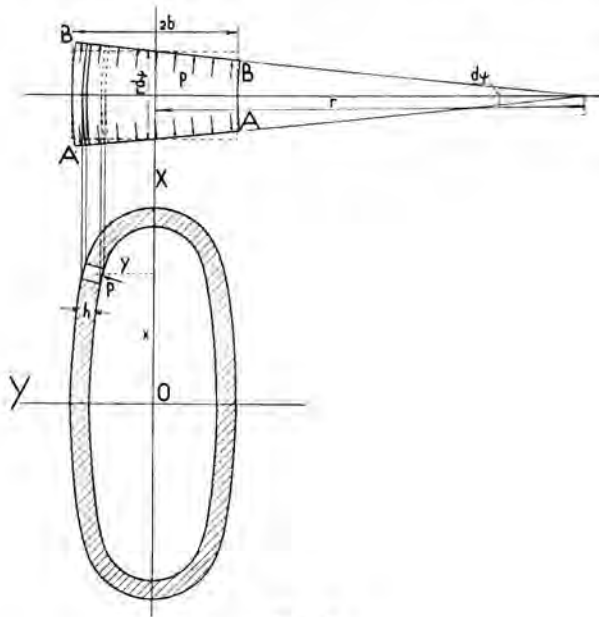


Fig. 4.

but "curved" with a radius  $r$  such as to represent a real gauge-ring lying between two meridional planes including an angle  $d\psi$  (fig. 4).

Such a ring loaded by an internal pressure  $p$  is subject to a resultant force  $dK$  which tends to move it in the  $y$ -direction. If the gauge should be shut by two material meridional planes and again be subjected to an internal pressure  $p$ , it naturally should be in equilibrium. Therefore the just-mentioned force  $dK$  is balanced by the steam pressure on the end-planes. If  $O$  denotes the surface of such an endplane, and  $L$  its circumference, the tangential normal stress  $\sigma_t$ , which has to be introduced in the



side-planes of the open gauge ring to maintain the required equilibrium, follows from the equation

$$\sigma_t \cdot Lh = pO; \quad \sigma_t = p \frac{O}{Lh}.$$

The internal excess-pressure, occurring at the height  $x$ , amounts to

$$\frac{p(r+y)d\psi - prd\psi}{rd\psi} = \frac{py}{r}$$

and is normally directed to the wall. The tangential stresses  $\sigma_t$  at the same height result in a pressure  $p'$

$$p' = \frac{\sigma_t h d\psi}{rd\psi} = \frac{\sigma_t h}{r} = \frac{pO}{Lr}$$

in the direction of the negative  $y$ -axis.

Therefore the curved gauge-ring distinguishes itself from the straight ring by an extra load system, which is represented in fig. 5, and the

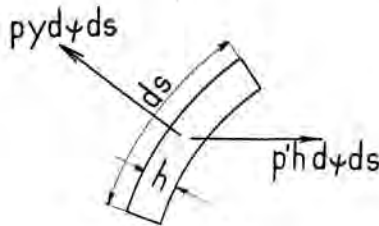


Fig. 5.

question to be solved is, whether this loadsystem affects noticeably or not the displacements  $v_1$  belonging to the straight ring.

The answer can be obtained by calculating the *extra*-displacements  $v_1$  along the same line as the primary displacements  $v_1$ . To this end the external forces  $P'_{1x}$  and  $P'_{1y}$  produced by the extra loadsystem must be calculated; they are represented in the columns 6b and 7b of table I, and it is seen at once, that the influence of these forces can be neglected.

It now remains to test whether the displacements  $v_1$  are compatible or not with the requirement, that the material points of the end-cross-sections  $V_1$  and  $V_2$  of the gauge ring must remove to other planes  $V'_1$  and  $V'_2$ , the position of which may be defined by two quantities  $\epsilon_0$  and  $\omega_0$ , representing respectively the specific elongation of the non-material centerline of the gauge, and the specific change of angle between the planes  $V_1$  and  $V_2$ . Obviously the requirement is not fulfilled and therefore an extra system of stresses must be introduced in the side-planes of the ring to produce the real state of strain. This system of stresses will be determined in the next paragraph.

*To be continued.*

**Medicine.** — *Lésions partielles du nerf vestibulaire et de ses voies centrales.* III. Par A. DE KLEYN.

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

Il n'est pas de mon intention de traiter cette question en long et en large et de dissenter la littérature si vaste à ce sujet <sup>1)</sup>. Ce rapport est simplement une analyse plus précise d'une question qui à l'heure actuelle a été rarement l'objet d'une étude approfondie. Je garde sous silence les rapports de nombreux auteurs, qui ont observé des lésions partielles du nerf vestibulaire se traduisant soit par la présence d'une épreuve calorique et l'absence simultanée de l'épreuve rotatoire, ou inversement; soit encore par la présence simultanée d'un nystagmus provoqué et l'absence de tout signe de l'indication et soit enfin par la présence d'une certaine excitabilité du labyrinthe constatée par l'épreuve de l'indication sans autre trace constatable de nystagmus.

Le but de ce rapport est une étude plus détaillée de quelques lésions partielles du nerf vestibulaire, concernant:

- A. Les réactions d'adaptation statique.
- B. Les positions compensatrices des yeux.
- C. Le nystagmus horizontal.
- D. Le nystagmus rotatoire.
- E. Le nystagmus vertical.

*A. Les réactions d'adaptation statique.*

Certains rapports ont déjà signalé quelques exemples où les réactions d'adaptation statique furent absentes et où toutes les autres réactions vestibulaires furent présentes <sup>2)</sup>, où inversement <sup>3)</sup>. Ces exemples ne nous semblent pas si rares à condition que tout examen vestibulaire se complète par la recherche des réactions d'adaptation statique.

---

<sup>1)</sup> E.a. AUBRY et OMBRÉDANNE, *Etude oto-neurologique et chirurgicale du vertigo*, Masson 1937.

BALDENWECK, L., *Revue d'oto-neuro-oculistique* 5, 401 (1927).

BARRÉ, M. J. A., *Confinia neurologica*, 1, 49 et 128 (1938); *Revue d'oto-neuro-ocul.*, 16, 419 (1938).

GRAHE, R., *Hirn und Ohr*, Thieme 1932.

GÜTTICH, A., *Ztschr. f. Hals uws. heilk.*, 36, 78 (1934); *Ztschr. f. d. ges. Neurol. und Psych.*, 165, 148 (1939).

JONES, I. R., *Equilibrium and vertigo*, Lippencott, 1918.

KLESTADT, W., *Handbuch der Neurologie*, Bnd IV., Springer 1936.

MAYBAUM, W., *Annals of Otol. Rhin. and Laryng.*, 48, 484 (1939).

ROGER, H., *Revue d'oto-neuro-ocul.*, 5, 470 (1927).

<sup>2)</sup> RADEMAKER, G. et GARCIN, R., *Revue Neurologique* 4, (April 1932) et 5, (Nov. 1933).

RADEMAKER, G., *Réactions labyrinthiques et équilibre*, Masson Paris 1935.

<sup>3)</sup> KLEYN, A. DE und VERSTEEGH, C., *Acta Oto-Laryng.* 24, 34 (1936).

Depuis le rapport, publié en 1936, j'ai eu l'occasion d'observer sept cas de ce genre. Dans quatre cas les réactions d'adaptation furent nettement présentes, et les autres réactions vestibulaires absentes, ou à peu près. Dans les trois autres cas toutes les réactions vestibulaires furent présentes sans trouver quelques traces des réactions d'adaptation statique.

Voici un exemple de la première série.

1. *Présence des réactions d'adaptation statique et absence de toute réaction vestibulaire.*

Monsieur S., âgé de 29 ans (syphilitique congénital) fut décrit dans un rapport antérieur<sup>4)</sup> avec images cinématographiques.

Examen clinique:

*Audition:* surdité totale bilatérale.

*Examen vestibulaire:* Epreuve calorique (eau chaude et froide) exécutée avec des quantités d'eau différentes et croissantes:

Absence de nystagmus; absence de l'indication réactionnelle.

*Epreuve rotatoire* (disque électrique): Absence de tout nystagmus postrotatoire horizontal, vertical et rotatoire. Absence de toute épreuve de l'indication réactionnelle postrotatoire. Aucune tendance à la chute, aucune sensation subjective de vertige.

*Epreuve galvanique:* pas de nystagmus, aucune tendance à la chute.

*Réactions d'adaptation statique:* présence (voir planches cinématographiques: Acta Oto-Laryngologica loco cit.).

Un des 4 cas non-publiés était un hérédosyphilitique. Deux cas souffraient du syndrome de *Ménière* et ne présentaient aucune anomalie interne et neurologique. Un de ces cas était l'histoire d'un traumatisé. Le quatrième et dernier cas fera l'objet d'une description détaillée en page 790.

Voici un exemple de la deuxième catégorie:

2. *Absence des réactions d'adaptation statique et présence de toutes les réactions vestibulaires.*

Mme X, femme âgée de 35 ans, présentant un syndrome de *Ménière*, souffrait de vertiges rotatoires, vomissements etc.

*Examen interne:* normal.

*Audition:* normale.

*Examen vestibulaire:* *Troubles spontanés:* pas de nystagmus spontané, pas de nystagmus de position. Pas de réaction de l'indication spontanée. Un nystagmus rotatoire violent apparaît dès que la tête se fléchissait en arrière en se tournant vers la gauche.

*Epreuve rotatoire:* lévogyre et dextrogyre: normale.

Réaction de l'indication réactionnelle: normale et typique.

*Epreuve calorique:* normale (exécutée avec l'eau chaude et l'eau froide), le labyrinthe gauche semble un peu plus excitable.

*Réactions d'adaptation statique:* absence totale.

L'excitation brusque et rapide dans l'axe bitemporal et dans l'axe longitudinal provoque la chute de la malade.

Dans le deuxième cas on trouvait également le syndrome de *Ménière* mais sans aucune anomalie interne et neurologique. Le troisième cas était probablement une syringobulbie de la région du C<sup>II</sup>.

Nous aurions bien pu mettre ces cas en parallèle avec les observations

<sup>4)</sup> KLEYN, A. DE und VERSTEEGH, C., Acta Oto-laryngologica, 24, 34 (1936).



décrites plus haut qui présentaient une absence des réactions nystagmiques et la présence du signe de l'indication réactionnelle. Ceci nous aurait peut-être laissé prévoir que les réactions d'adaptation statique, tout comme l'épreuve de l'indication réactionnelle, seraient des réactions types des extrémités et seraient donc toujours simultanément présentes ou absentes. D'après les deux cas rapportés plus haut, cette hypothèse est fautive car nous pouvions observer dans le premier exemple la présence des réactions d'adaptation statique et l'absence totale de tout signe de l'indication réactionnelle et dans le second exemple la présence du signe de l'indication réactionnelle et l'absence simultanée des réactions d'adaptation statique.

Nous pouvons donc admettre en conclusion que les réactions d'adaptation statique sont des réflexes tout différents des autres réflexes labyrinthaires ou en d'autres termes sont des réflexes qui ne suivent pas les mêmes voies dans le système nerveux central.

### *B. Les positions compensatrices des yeux.*

Nous connaissons à l'heure actuelle très peu au sujet de la présence et de l'absence isolée de ce réflexe parce que sa recherche est de très longue durée et très compliquée et par conséquent rarement exécutée lors d'un examen clinique. D'autre part, presque toutes les méthodes connues jusqu'à présent n'éliminent pas avec la certitude présumée les réflexes d'origine cervicale et peuvent ainsi fausser sérieusement les conclusions. Les difficultés mentionnées étaient la cause que le nombre d'observations publiées par VERSTEEGH et moi-même étaient peu nombreuses, non obstant l'existence d'une méthode publiée par nous<sup>5)</sup>, où l'exclusion de tout réflexe cervical nous semble certaine.

Cette exclusion est cependant indispensable, car elle nous a permis d'observer chez des labyrinthectomisés l'apparition possible ou pas des positions compensatrices des yeux par l'élimination de ces réflexes cervicaux<sup>6)</sup>.

Il nous a semblé dans ces quelques rares observations que, tout comme les réactions d'adaptation statique, les positions compensatrices des yeux peuvent isolément manquer ou être présentes et sont donc considérées

<sup>5)</sup> KLEYN, A. DE and VERSTEEGH, C., Acta oto-laryngologica, 6, 170 (1923); Jnl. of Laryng. and Otol., 39, 686 (1924).

<sup>6)</sup> Voir aussi page 549: comme rapporté dans ce passage, KOMPAJENETZ signale avoir observé que parmi les sourds-muets les positions compensatrices des yeux peuvent parfois être absentes et les autres réflexes présents et que inversement dans d'autres cas il a pu constater une absence totale des réactions réflexes caloriques galvaniques et post-rotatoires et la présence simultanée des positions compensatrices. Les observations de KOMPAJENETZ ne sont pas probantes car il a négligé dans ses examens l'exclusion certaine des réflexes cervicaux. (voir aussi KOMPAGNÉETZ, S., Acta Oto-laryng., 21, 529 (1934) et BORRIES, Monatschr. f. Ohrenh., 56, 30 (1922). BORRIES obtenait encore des réactions caloriques en absence de tout réflexe post-rotatoire et des positions compensatrices. Ces observations étaient également peu probantes pour ce que l'auteur n'avait pas évité d'une façon certaine les réflexes cervicaux et recherchait les réactions caloriques seulement par l'eau froide).



comme une réaction isolée de l'appareil vestibulaire. Quelques exemples peuvent prouver cette manière de voir.

1. *Présence des positions compensatrices des yeux et absence de tout réflexe nystagmique.*

V.B., garçon de huit ans.

Anamnèse en date du 1—3—1924: l'enfant ayant contracté une diphthérie deux ans passés, souffre depuis lors d'une instabilité à marche progressive, localisée dans les membres inférieurs. Il tombe de temps en temps dans une direction bien déterminée lorsqu'il entre dans une chambre. Signalons cependant que l'enfant était sujet à des accès lipothymiques irréguliers et que dans la famille du côté de la mère nous retrouvons un cas d'épilepsie.

*Examen interne et neurologique:* normaux.

*Examen sérologique:* B.W. négatif (dans le liquide céphalorachidien). Toutes les autres réactions sérologiques sont normales.

*Examen radiologique:* Os temporal (en incidence de *Stenvers*): normal.

*Audition:* voix chuchotée: normale (des deux côtés), Tympan normaux.

*Examen rhinologique:* nez et sinus normaux.

*Examen vestibulaire:* *Troubles spontanés:* Pas de nystagmus spontané. Seulement: Présence d'un nystagmus battant vers la droite, lors du regard dirigé vers la droite. Pas de nystagmus de position. Absence de tout signe de l'indication spontanée (l'épreuve de l'indication spontanée du bras gauche se dirigeait d'une façon inconstante vers l'extérieur). L'épreuve de la démarche montrait d'une façon inconstante une déviation vers la gauche ou vers la droite.

Aucune réaction ne parvenait à déclencher un nystagmus.

*Epreuve calorique* (chaude et froide): pas de nystagmus.

*Epreuve galvanique:* absence totale de nystagmus.

*Epreuve rotatoire* (dextrogyre et lévogyre): pas de nystagmus postrotatoire horizontal, vertical et rotatoire.

Le signe de l'indication réactionnelle se présente seulement lors de l'épreuve calorique du labyrinthe droit. Il faut remarquer l'absence de toute sensation subjective de vertige pendant toutes les épreuves labyrinthiques.

*Les positions compensatrices des yeux apparaissent nettement dans les deux positions laterales, droite et gauche.* Nous trouvons une rotation de 10° du globe oculaire en position latérale droite et une rotation de 6° en position latérale gauche.

En date du 25—V—1934 donc dix ans plus tard, j'ai eu l'occasion de réexaminer cet adolescent âgé maintenant de 18 ans. Vers ce moment, il a présenté quelques accès de vertiges. Le tableau clinique antérieur était cependant resté inchangé à l'exception d'une surdité totale de l'oreille droite qui s'était installée depuis deux mois. *Les réactions d'adaptation statique étaient intactes* (Film).

Le 20—10—1939 (cinq ans après), notre malade nous confirme une santé parfaite, à tel point qu'il lui est possible de participer à des compétitions sportives (football). Aucune épreuve cependant ne peut déclencher une trace de nystagmus. Les réactions d'adaptation statique sont restées normales et inchangées

Remarquons donc, que l'examen de ce garçon chez qui une souffrance nerveuse centrale doit être admise, nous révèle une réaction compensatrice des yeux très normale, une absence totale de tout nystagmus réactionnel, des réactions d'adaptation statique normales, et la présence d'une épreuve de l'indication réactionnelle d'origine monolabyrinthique.

*Un point intéressant dans cette observation se retrouve dans la présence et dans l'absence simultanée de deux réflexes labyrinthiques oculaires.*

Ceci nous amène donc à admettre la présence de deux voies intracérébrales complètement différentes au point de vue anatomique.

2. *Absence des positions compensatrices des yeux dans une des positions latérales et présence de toutes les formes de nystagmus.*

Observation, M.C., homme, âgé de 48 ans<sup>7)</sup>.

Le malade ressentit avant trois semaines, une douleur localisée dans les deux oreilles mais plus prononcée à gauche et accompagnée d'une certaine instabilité dans sa marche avec déviation vers la droite et d'une sensation ininterrompue de vertige. La même nuit une otorrhée apparaît à l'oreille gauche et deux jours plus tard à l'oreille droite. Une sensation vertigineuse et un état nauséux survenant spécialement lors de chaque mouvement de la tête ne quitte pas notre malade.

*Examen interne:* normal.

*Examen neurologique:* Les réflexes cornéens et abdominaux sont moins vifs à gauche qu'à droite. La sensibilité du côté gauche semble un peu troublée.

*Audition:* oreille droite: normale, oreille gauche: voix chuchotée entendue à 30 cm. Examen aux diapasons: surdité typique labyrinthique.

*Examen radiologique* (en incidence de STENVERS) normal.

*Examen vestibulaire: Troubles spontanés:* pas de nystagmus spontané, pas de nystagmus de position. Absence du signe de l'indication spontanée.

*Epreuve calorique:* excitabilité normale des deux labyrinthes avec le signe typique de l'indication réactionnelle.

*Epreuve rotatoire:* lévogyre et dextrogyre: normale.

Le nystagmus post-rotatoire est de même durée avec le signe de l'indication réactionnelle typique. *Les positions compensatrices des yeux sont absentes en position latérale gauche de la tête (seulement  $-1^\circ$ ) et présentes en position latérale droite ( $13^\circ$ ).*

Nous trouvons dans ce cas, concernant le labyrinthe gauche, une divergence entre les positions compensatrices des yeux et les autres réflexes labyrinthiques. Une certitude absolue concernant l'origine centrale ou périphérique n'a pu être démontrée. Ce tableau clinique est trouvé lors d'une otite. Autrefois VERSTEEGH et moi-même avons admis l'existence d'une lésion dans la partie inférieure du labyrinthe périphérique, en admettant qu'une lésion de la cochlée expliquerait d'une part les troubles auditifs tandis que d'autre part les troubles des positions compensatrices des yeux seraient provoquées par une lésion sacculaire. Tous les autres réflexes seraient normaux par l'intégrité de la partie supérieure du labyrinthe périphérique. Cette interprétation fut reconnue fautive le jour qu'on put démontrer en physiologie que le saccule chez les mammifères ne possédait aucune fonction vestibulaire<sup>8)</sup>. En admettant l'existence d'une lésion périphérique les positions compensatrices des yeux trouveraient dans ces conditions leurs origines dans l'utricule, les troubles auditifs dans les cochlées et les autres réflexes vestibulaires, normaux dans ce cas, dans l'appareil sémicirculaire.

Il n'est cependant pas tout à fait exclus que la lésion pourrait trouver une cause centrale, et que dans ce cas aussi, les voies intra-cérébrales des différents réflexes vestibulaires ne suivaient pas la même route; une lésion

<sup>7)</sup> Déjà publié antérieurement: Jnl. of Laryng. and Otol., 39, 686 (1924).

<sup>8)</sup> VERSTEEGH, C., Acta Oto-laryng., 11, 393 (1927).

centrale bien localisée serait la cause de la divergence trouvée entre ces deux réflexes labyrinthiques. Aussi les petits troubles neurologiques, observés chez ce malade, seraient peut-être la signature d'une lésion localisée dans le système nerveux central.

C. *Réactions isolées des canaux horizontaux.*

1. *Présence de la fonction réflexe des canaux horizontaux et absence simultanée de la fonction réflexe des canaux verticaux.*

Parmi ce groupe de malades on retrouve des cas qui présentent le fameux symptôme d'EAGLETON.

EAGLETON<sup>9)</sup> revient en 1912 le grand mérite d'avoir observé et signalé plusieurs fois la présence isolée des réflexes partant des canaux horizontaux et l'absence simultanée des réflexes sémicirculaires verticaux, spécialement dans des processus pathologiques localisés dans la fosse cérébelleuse. De nombreuses longues épreuves caloriques froides des labyrinthes avaient fait naître cette conclusion. Cette épreuve calorique froide se faisait de la manière suivante: Par l'injection d'eau froide dans le conduit auditif externe, on déclenchait un nystagmus rotatoire lorsque la tête était fléchie en avant d'environ 30° et un nystagmus horizontal lorsque la tête est fléchie en arrière d'environ 60°. Le fonctionnement normal des canaux verticaux serait traduit par l'apparition d'un nystagmus rotatoire et le fonctionnement normal des canaux horizontaux par l'apparition d'un nystagmus horizontal. Le même principe s'applique à quelques variantes de cette méthode d'examen e.a. en fléchissant la tête sur l'épaule du côté non injecté (position III de BRÜNINGS, position II de BARRÉ).

Les auteurs américains<sup>10)</sup> rattachent à ce symptôme une grande valeur localisatrice, tandis que BARRÉ, BALDENWECK, GRAHE, NYLÉN<sup>11)</sup> et d'autres encore admettent ce symptôme comme pathognomique d'une affection centrale, mais très peu important concernant la localisation exacte de ces affections.

AUBRY et CAUSSÉ<sup>12)</sup> ont remarqué à juste titre que pour interroger la fonction des canaux verticaux, la méthode de l'épreuve calorique est très incomplète pour y rattacher une certaine importance et devrait être complétée par une épreuve rotatoire (nystagmus post-rotatoire gyrotatoire et vertical) et par une épreuve galvanique. Par les publications on peut observer qu'il est rare de trouver des rapports dans lesquels sont mentionnées les différentes formes du nystagmus post-rotatoire. Ceci trouve son origine dans le fait que la plupart des cliniques ne possèdent pas une table tournante actionnée par une force matrice (électrique). Les examens exécutés autrement (chaise tournante) obligent les malades de placer la

<sup>9)</sup> e.a. EAGLETON, *Laryngoscope*, **33**, 483 (1923).

<sup>10)</sup> JONES, loc. cit.; WISHART, D. E. S., *Journ. of Lar. and Otol.*, **38**, 109 (1923).  
MAYBAUM, *Annals of Otol. rhin. and Laryng.*, **48**, 484 (1939).

<sup>11)</sup> NYLÉN, C. O., *Acta Oto-laryng.*, Supplement XIII, 1931.

<sup>12)</sup> AUBRY, M. et CAUSSÉ, R., *Ann. d'Otol. laryng.*, **1**, 1331 (1931).

tête dans les différentes positions dans l'espace (en avant, en arrière et sur le côté). Cette manière d'examiner est très pénible pour les grands affectés du système nerveux central et laissent toujours des possibilités de voir apparaître des réflexes cervicaux produits par ces différentes flexions de la tête sur le cou.

AUBRY et CAUSSÉ<sup>13)</sup> résolurent le problème en plaçant un brancard sur un disque tournant. Un examen en position assise, en décubitus dorsal et sur le côté est ainsi très bien supporté par les grands malades du fait que la roue tournante est activée par un moteur électrique empêchant toute accélération anormale de la vitesse de rotation. Depuis 1929 tous nos malades étaient examinés de cette manière.

Dans les dernières années nous avons encore perfectionné cette méthode à la clinique d'Amsterdam. Le brancard est fixé sur la roue de cette façon que le centre du disque tournant passe exactement par la tête du malade ce qui annule toute force centrifuge qui aurait pu se développer pendant la rotation et influencer ainsi peut-être nos examens.

La méthode d'examen d'AUBRY et CAUSSÉ possède donc deux imperfections, parce que, d'après les photos publiées dans leur rapport, 1<sup>o</sup>, le brancard est placé simplement sur une chaise tournante, laissant la tête sous l'influence des forces centrifuges, et 2<sup>o</sup>, les malades sont couchés sur le dos, la tête tournée sur le côté, pour contrôler le nystagmus vertical post-rotatoire. Cette position laisse toujours des possibilités de déclencher des réflexes cervicaux. Afin de les éliminer avec toute la certitude tout le malade doit prendre la position couchée sur le côté, la tête étant alors dans un axe parallèle au tronc.

Nous avons observé jusqu'à l'heure actuelle trois cas où le nystagmus horizontal était présent et où le nystagmus post-rotatoire gyrotaire et vertical étaient absents. Ce fait ne s'accorde pas avec les observations d'AUBRY et CAUSSÉ, disant „Nous pouvons dire qu'une longue pratique de ces épreuves nous a montré, que le trouble qui frappe la réflectivité des canaux verticaux, touche exclusivement le nystagmus rotatoire, alors que le nystagmus vertical est parfaitement normal". Ces auteurs signalent d'ailleurs n'avoir observé jusqu'à présent aucun cas où la fonction des canaux verticaux fut entièrement absente<sup>14)</sup>.

Le premier cas des trois était une personne (âgée de 45) syphilitique à Bordet-Wassermann positif dans le sang et négatif dans le liquide céphalo-rachidien. L'examen interne et neurologique furent normaux. Le second cas était une femme, âgée de 47 ans, souffrante d'une atrophie olivoponto-cérébelleuse.

Le troisième cas était une femme âgée de 34 ans.

Transférée dans la clinique neurologique cette personne présentait de l'hérédosyphilis.

<sup>13)</sup> loc. cit., voir aussi: KLEYN, A. DE et VERSTEEGH, C., Dtsch. Ztschr. f. Nervenheilkunde, 132, 157 (1933).

<sup>14)</sup> Voir aussi AUBRY, M., ROBIN, V. et MOLLARET, P., Syndrome vestibulaire central chez un chien, Annales d'Oto-laryng. 1213 (1933).

A l'âge de 14 ans, elle avait souffert d'une kératite neuro-paralytique. L'acuité auditive avait diminué progressivement et un état vertigineux avait appar  les derniers temps.

*Examen sérologique:* Sang: *Bordet-Wassermann* + (0,6); *Sachs G orgi* + (0,6), Kahn +. Liquide céphalo-rachidien: *Bordet Wassermann*: négatif, Absence de cellules.

*Audition:* oreille droite voix chuchotée: entendue   1½ mètres, oreille gauche: voix chuchotée: entendue   40 centimètres. Des deux côtés: surdité type labyrinthique. Tympan normaux. *Examen rhinologique et laryngologique:* normal.

*Examen vestibulaire:*

*Troubles spontanés:* en regard direct et vers la gauche: faible nystagmus battant vers la gauche; en regard vers le haut; vers le bas et vers la droite: pas de nystagmus. En position latérale gauche de la tête ou en position latérale gauche de tout le corps de la malade appar it un nystagmus typique battant vers la gauche.

En position latérale droite de la tête ou du corps: pas de nystagmus. Pas de signe de l'indication spontanée.

*Epreuve calorique (froide et chaude):* Hyperexcitabilité des deux labyrinthes. Pas de signe de l'indication réactionnelle. Une injection d'eau en différentes positions de la malade ne déclenchait aucun nystagmus rotatoire, mais faisait apparaître, le malade placé en décubitus dorsal, un nystagmus horizontal violent après avoir excité le labyrinthe droit ou gauche.

*Epreuve rotatoire.*

En position assise: sens dextrogyre: présence d'un nystagmus post-rotatoire horizontal typique, battant vers la gauche, durée 18", sens lévogyre: présence d'un nystagmus post-rotatoire horizontal typique battant vers la droite, durée 15".

En décubitus dorsal et latéral: pas de nystagmus post-rotatoire vertical et rotatoire.

*Epreuve galvanique:*

Oreille droite: Cathode conduit auditif externe (anode main droite) nystagmus horizontal battant vers la droite à 2½ milliampère.

Anode conduit auditif externe (cathode main droite): nystagmus horizontal battant vers la gauche à 1¼ milliampère.

Oreille gauche: cathode conduit auditif externe (anode main gauche) nystagmus horizontal battant vers la gauche à 1¼ milliampère.

Anode conduit auditif externe (cathode main gauche): nystagmus horizontal battant vers la droite à 1½ milliampère.

*Réactions d'adaptation statique:* les réactions n'étaient pas totalement absentes mais très sérieusement troubl es.

Dans ce cas on pouvait observer que toutes les épreuves qui interrogeaient la fonction des canaux sémicirculaires verticaux étaient totalement absentes. Les épreuves interrogeant la fonction des canaux horizontaux étaient présentes et normales.

2. *Absence de fonction des canaux sémicirculaires horizontaux et présence simultanée de la fonction des canaux sémicirculaires verticaux.*

Observation: relatée déjà antérieurement.

Une jeune fille ag e de 7 ans, souffrait, après avoir contracté une coqueluche et une infection grippale, de crises de „petit mal”. On peut constater à l'examen de la malade une très légère excitabilité des canaux horizontaux et une fonction très normale des canaux sémicirculaires verticaux (faits cliniques constatés par l'épreuve rotatoire et calorique)<sup>15)</sup>.

<sup>15)</sup> Travail dédié au Professeur V. I. VOYATCHEK Editions d'Etat. Publications biologiques et médicales de Léningrad, 1936.



FISCHER<sup>16)</sup> constata chez une syphilitique non-obstant une inexcitabilité calorique totale et l'absence d'un nystagmus horizontal post-rotatoire, la présence d'un nystagmus post-rotatoire vertical et rotatoire normal.

Deux cas analogues ont encore été observés depuis lors.

Le premier cas est une observation d'un jeune homme âgé de 24 ans. Le début de l'histoire datait depuis 3 semaines environ et avait commencé par des crises de vertige accompagnées de vomissements multiples et de bourdonnements dans l'oreille droite. Le vertige était du type rotatoire dans les sens des aiguilles d'une montre. En tout s'étaient présentés dès le début six crises et le malade semblait pour le reste être en parfaite santé.

*Examen clinique*

*Audition:* voix chuchotée: oreille droite entendue à 4½ mètres, oreille gauche entendue à 5 mètres. On observe une surdité légère du type labyrinthique. Tympan normaux.

*Examen rhinologique et laryngologique:* normal. *Urine:* normal.

*Examen sérologique:* sang: *Bordet-Wassermann* négatif. *Sachs-Gèorgi* négatif.

*Examen vestibulaire:* Troubles spontanés: pas de nystagmus spontané, pas de signe de l'indication spontanée.

*Epreuve calorique* (la malade étant en décubitus dorsal). Des quantités d'eau croissantes de 5 cc. à 75 cc. ne déclenchent aucun nystagmus, même pas en position extrême du regard, vers la direction présumée de la phase rapide.

*Epreuve rotatoire.*

En position assise: sens dextrogyre: une secousse nystagmique horizontale post-rotatoire était observée, sens lévogyre: trois secousses nystagmiques horizontales post-rotatoires.

En décubitus latéral: nystagmus post-rotatoire vertical.

sens dextrogyre: 23 secousses en 13"; sens lévogyre: 19 secousses en 13".

En décubitus dorsal (nystagmus post-rot. rotatoire)

sens dextrogyre: 24 secousses en 12"; sens lévogyre: 18 secousses en 10".

Deux semaines après l'examen, le patient nous revenait et confirmait la disparition totale de ses plaintes. Depuis lors il n'a plus jamais été revu ce qui nous a empêché de compléter notre examen vestibulaire et de posséder un rapport neurologique détaillé.

Le deuxième cas est une observation d'un garçonnet âgé de 8 ans, atteint de surdité congénitale, ce garçon présentait une surdité absolument totale de l'oreille droite et quasi totale à gauche où la voix hautement parlée fut entendue encore à 50 cm. de distance.

*Examen vestibulaire:*

*Epreuve rotatoire:* sens dextrogyre et lévogyre: absence d'un nystagmus post-rotatoire horizontal. Présence d'un nystagmus post-rotatoire vertical et rotatoire.

*Epreuve calorique:* (en décubitus dorsal):

labyrinthe droit: inexcitabilité totale; labyrinthe gauche: réactions douteuses.

L'épreuve calorique en position assise n'a pas été faite.

*Examen neurologique et interne:* normal.

Je signale à cette occasion encore une observation faite chez une femme, âgée de 43 ans, et souffrante de crises de vertige. Les examens neurologique et interne ne dévoilaient aucune anomalie. L'examen radiographique des pyramides pétreuses était normal. *Par l'épreuve calorique* exécuté en décubitus dorsal, *était déclenché un nystagmus horizontal* réactionnel des deux côtés accompagné d'une déviation réactionnelle typique. *Par l'épreuve rotatoire ne se déclenchait par contre aucun nystagmus horizontal post-*

<sup>16)</sup> FISCHER, J., Monatschr. f. Ohrenheilk., 69, 613 (1935).



rotatoire mais bien un nystagmus rotatoire et vertical post-rotatoire. (Nystagmus rotatoire après rotation dextrogyre, durée 11", lévogyre durée 13". Nystagmus vertical après rotation dextrogyre durée 15", lévogyre 14".)

#### D. Nystagmus rotatoire réactionnel.

##### 1. Absence isolée du nystagmus rotatoire réactionnel.

Les rapports des auteurs français signalent bien souvent que la constatation de l'absence isolée d'un nystagmus rotatoire est très souvent observée dans les affections du système nerveux central. Plus spécialement est confirmé cette thèse dans le rapport de AUBRY et CAUSSÉ. Pour ma part j'ai pu observer personnellement plusieurs cas analogues. Il me semble cependant qu'au cours des examens vestibulaires de ces cas l'absence isolée du nystagmus rotatoire réactionnel post-rotatoire n'est pas totale comme il a semblé à première vue car dans plusieurs cas l'accélération de la vitesse de rotation déclenchait encore à ce moment un nystagmus rotatoire invisible à des vitesses moyennes ou basses. Cette constatation n'empêche pas pourtant de confirmer l'absence d'un nystagmus post-rotatoire réactionnel constaté à des vitesses moyennes de rotation qui est la méthode type d'examen pour les malades souffrant du système nerveux central<sup>17</sup>).

Un cas seulement sera rapporté où la forme rotatoire du nystagmus calorique manquait aussi.

*Observation:* Une jeune fille, âgée de 15 ans, présentait des troubles neurologiques, localisés dans le lobe frontal gauche (examinée par le Professeur BROUWER). Ces troubles étaient survenus chez l'enfant après un trauma obstétrical lors de sa naissance. Les symptômes principaux étaient: de l'ataxie du bras droit, des troubles de la parole et de l'arriération. Deux périodes d'aphasie de courte durée ont pu être constatées. L'enfant souffrait de fortes céphalées et présentait depuis deux mois des crises de vertige, accompagnées d'une sensation subjective de déplacement de l'entourage. Il n'y avait aucun état nauséux pendant ou après les crises. Quelques troubles vagues visuels étaient présentes pendant les crises.

*Audition:* normale. Voix chuchotée entendue à la distance normale.

*Examen rhinologique:* déviation de la cloison nasale vers la droite.

*Examen vestibulaire:*

Troubles spontanés: Nystagmus battant vers le haut, le regard dirigé vers le haut. Nystagmus pendulaire, le regard fixé vers le bas. Pas de nystagmus spontané en regard direct, en regard latéral vers la droite ou vers la gauche. Pas de déviation spontanée.

*Epreuve calorique:* Injection de 5 cc d'eau à 35° dans les conduits externes des deux oreilles déclenchait un nystagmus typique avec le signe typique de l'indication réactionnelle. Seul le labyrinthe droit était manifestement excitable par l'eau chaude.

Il était impossible de déclencher un nystagmus rotatoire calorique bien que la tête fût placée dans les différentes positions dans l'espace et que des fortes quantités d'eau furent employées (75 cc. de 20 à 22°). Cette quantité d'eau après injection en décubitus dorsal déclenchait un violent nystagmus horizontal.

<sup>17</sup>) Les malades sont tournés les dernières années à la clinique universitaire d'Amsterdam à une vitesse de 10 tours en 50 secondes. Dans des cas exceptionnels sont employées des vitesses plus grandes.

*Epreuve rotatoire:*

En position assise (nystagmus post-rotat. horizontal):

10 tours lévogyres (32"): nystagmus postrotatoire battant vers la droite, durée 21".

10 tours dextrogyres (32"): nystagmus postrotatoire battant vers la gauche, durée 18".

En décubitus latéral droit (nystagmus post-rotat. vertical):

10 tours lévogyres (32"): nystagmus postrotatoire, battant vers le haut, durée 23".

10 tours dextrogyres (32"): nystagmus postrotatoire, battant vers le bas, durée 23".

En décubitus dorsal (nystagmus post-rotat. rotatoire): absence totale de nystagmus.

Rechercher la présence des positions compensatrices rotatoires des yeux serait très important dans l'avenir. Cet examen, me semble, a toujours été négligé. Si par exemple nous avons pu constater la présence des positions compensatrices des yeux dans notre cas, nous aurions sûrement pu confirmer la possibilité des mouvements rotatoires des yeux.

2. *Présence électorale du nystagmus rotatoire, absence de toutes les autres formes de nystagmus.* Des cas de ce genre nous sont à l'heure actuelle inconnus et aucune publication n'en fait allusion.

Je n'en ai jamais observé personnellement.

*E. Réactions isolées du nystagmus vertical.*

1. *Présence du nystagmus vertical et absence simultanée du nystagmus horizontal et rotatoire.*

Ces observations ne me sont pas connues dans la littérature. J'ai pu observer personnellement un de ces cas typiques et un autre encore où le nystagmus vertical était beaucoup plus prononcé (durée et amplitude) que le nystagmus horizontal et rotatoire, mais non totalement absent (Jeune fille âgée de 11 ans présentant une surdité totale d'une oreille provoquée par une parotidite).

Voici le cas bien typique:

Observation: Un garçon, âgé de 6 ans, était devenu, avant 4 ans, totalement sourd de l'oreille gauche, victime d'un traumatisme un peu spécial. Un matin sa petite soeur jouant avec une aiguille à tricoter, avait laissé tomber celle-ci sur le sol. L'aiguille était restée droite fixée dans une rainure du plancher. En voulant prendre celle-ci, le petit garçon trébuchait et tombait avec l'oreille gauche sur l'aiguille qui s'était solidement fixée dans l'oreille. Avec force, l'extraction devait se faire.

De l'oreille gauche suintait un liquide sanguinolent et on pouvait observer un nystagmus spontané horizontal rotatoire battant vers la droite en regard direct. Tendances nettes à la chute du corps vers la gauche, la tête étant droite par rapport au tronc. Tendances à la chute vers l'avant la tête étant tournée vers l'épaule droite. Sans aucun doute on pouvait confirmer la perte totale du labyrinthe gauche.

Quatre ans plus tard, il y avait toujours une surdité complète de l'oreille gauche, une absence totale de troubles spontanés vestibulaires (nystagmus spontané, nystagmus de position et signe de l'indication spontanée).

*Epreuve calorique:*

labyrinthe gauche: inexcitabilité.

Labyrinthe droit: réactions normales. Une injection d'eau froide déclenchait un nystagmus horizontal battant vers la gauche, le malade placé en décubitus dorsal qui se transformait instantanément en un nystagmus horizontal rotatoire battant vers la gauche lorsque le malade s'était placé en décubitus ventral.

*Epreuve rotatoire:* Cette épreuve nous donnait cependant quelques données intéressantes.

La rotation dextrogyre et lévogyre ne déclenchait pas de nystagmus post-rotatoire horizontal et rotatoire.

L'épreuve de l'indication réactionnelle était normale et le nystagmus post-rotatoire vertical présent:

L'épreuve rotatoire dextrogyre (malade placé en décubitus latéral droit) déclenchait un nystagmus post-rotatoire battant vers le bas (16 secousses en 8").

L'épreuve rotatoire lévogyre (malade placé en décubitus latéral droit) déclenchait un nystagmus post-rotatoire faible mais net, battant vers le haut.

Réaction d'adaptation statique: symétriques et vives.

Ce cas est d'une interprétation très difficile. Un premier fait à signaler est la possibilité de déclencher un nystagmus horizontal par l'excitation calorique du labyrinthe droit et non par l'excitation rotatoire. Un second fait est la présence d'anomalies vestibulaires du labyrinthe droit, après une destruction totale et traumatique du labyrinthe gauche. Jamais n'a été constaté antérieurement un signe pathologique ou une anomalie vestibulaire du système nerveux central chez cet enfant, capables d'interpréter ces réactions vestibulaires anormales de l'oreille interne droite. On peut admettre, qu'après la blessure de l'oreille interne s'est installé un état de méningisme banal qui serait la cause de certaines lésions survenues à droite.

2. *Absence du nystagmus vertical, présence du nystagmus horizontal et rotatoire.*

Ces cas sont inconnus à l'heure actuelle et la littérature n'en signale aucun. J'ai pu observer cependant un cas qui, à l'exception du nystagmus vertical battant vers le haut, présentait toutes les autres réactions vestibulaires.

*Observation:* Homme âgé de 48 ans fut admis à la clinique souffrant depuis une semaine de crises de vertige accompagnées d'une sensation subjective de rotation vers la gauche de l'entourage et d'une sensation subjective de chute vers la droite. Un état nauséux sans vomissements et sans perte de connaissance complétait le tableau de ses crises.

*Audition:* Légère surdité labyrinthique bilatérale. Voix chuchotée: oreille droite; entendue à 1½ mètres, oreille gauche; entendue à 50 cm. Tympan partiellement calcifiés.

*Examen rhinologique et laryngologique:* normal. Simple déviation de la cloison nasale vers la droite.

*Examen interne:* normale.

*Examen sérologique:* BORDET-WASSERMANN négatif, SACHS GEORGI négatif.

*Examen vestibulaire:* Pas de nystagmus spontané, pas de signe de l'indication spontanée, présence d'un nystagmus de position horizontal-rotatoire battant vers la gauche, le malade en décubitus dorsal, tête tournée vers la gauche. Pas de nystagmus de position le malade placé en décubitus latéral gauche, tête placée symétriquement dans l'axe du tronc. (Nystagmus provoqué par la simple rotation de la tête vis à vis du cou et du tronc.)

*Epreuve calorique:* excitabilité normale des deux côtés.

*Epreuve rotatoire:*

en position assise (nystagmus post-rotat. horizontal)

10 tours dextrogyres: nystagmus post-rotatoire horizontal battant vers la gauche, durée 28".

10 tours lévogyres: nystagmus post-rotatoire horizontal battant vers la droite, durée 26".  
en décubitus dorsal (nystagmus post-rotat. rotatoire)

10 tours dextrogyres: nystagmus post-rotatoire gyrateur battant vers la droite, durée 13".

10 tours lévogyres: nystagmus post-rotatoire gyrotoire battant vers la gauche, durée 16".

En décubitus latéral droit (nystagmus post-rotat. vertical)

10 tours dextrogyres: nystagmus post-rotatoire vertical battant vers le bas, durée 15".

10 tours lévogyres: absence totale de nystagmus.

Position latérale droite donne une rotation compensatrice des yeux de 7°.

Position latérale gauche donne une rotation compensatrice des yeux de 3°.

#### RÉSUMÉ.

Ces observations démontrent que les lésions partielles du nerf vestibulaire sont plus nombreuses comparativement au nombre rapporté dans la littérature. Bien que déjà des exemples multiples concernant l'absence ou la présence isolée des réactions d'adaptation statique y soient signalées, il nous a semblé que le signe de l'indication réactionnelle peut seulement manquer avec présence simultanée et typique des réactions de l'adaptation statique ou inversement. Cette constatation confirme clairement qu'il n'existe aucun rapport direct entre ces deux types de réflexes. Un fait analogue concernant les positions compensatrices des yeux se retrouve aussi car elles peuvent être absentes totalement ou presque entièrement dans ces cas où toutes les formes du nystagmus sont nettement présentes. La même constatation se retrouve aussi concernant les réflexes déclenchés dans les canaux semicirculaires horizontaux d'une part et concernant les réflexes partant des canaux semicirculaires verticaux d'autre part.

Tous ces faits, constatés lors de nos examens semblent devoir montrer l'existence de voies nerveuses intra-cérébrales différentes et déterminées pour chaque type de réflexe de telle sorte que l'influx nerveux réflexe déclenché soit par la recherche des positions compensatrices des yeux ou des réactions de l'adaptation statique, soit déclenché par l'interrogatoire isolé des canaux horizontaux ou verticaux passe par une voie intra-cérébrale propre à lui.

Cette spécialisation semble encore exister davantage car on a pu observer des cas où la forme rotatoire du nystagmus fut seulement absente et où la forme verticale fut absente dans une direction. Très typique est un cas observé où le nystagmus vertical battant vers le haut était la seule forme absente de toutes les formes nystagmiques post-rotatoires. Un grand nombre d'examens vestibulaires précis, exécutés chez des malades neuropathiques, sont encore de la plus haute nécessité afin de pouvoir connaître anatomiquement les différentes voies suivies par ces influx nerveux réflexes, et afin de pouvoir ainsi servir précieusement la neurologie dans son diagnostic de localisation.

**Medicine.** — *Vestibular nystagmus caused by acoustic stimulation.* By  
P. G. GERLINGS and A. DE KLEYN.

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

In 1803 ERASMUS DARWIN, in his "Zoonomia or the laws of organic life" mentioned an audible vertigo "as is known by the battement or undulations of sounds in the ear". After that many publications on vertigo, caused by more or less determined acoustic stimuli, appeared. BORRIES<sup>1</sup>), however, with good reason pointed to the fact that different persons often state very different sensations of their vertigo; from literature too it remains mostly unestablished whether these sensations are of vestibular origin.

We therefore chose for this communication the title "Vestibular nystagmus caused by acoustic stimulation" on purpose as we have the intention to discuss only those cases in which a vestibular reflex was indeed caused by acoustic stimuli.

The first paper about this affection, not a very supporting one, however, is found in the Arch. of Ohrenheilkunde 1881 (vol. 17, page 181). Here BÜRKNER, giving the report of his out-patient department in Göttingen communicated (case 9): "In einem Fall von langjähriger rechtseitiger Mittelohreiterung, der ein zwanzigjähriges Mädchen betraf, fiel mir, zuerst bei der Einführung des Ohrtrichters, später auch beim Spritzen auf, dass regelmäßig bei diesen Masznahmen Nystagmus der Augen eintrat. Eine genaue Untersuchung ergab schliesslich, dass sogar die Anstrengung des kranken Ohres bei den Hörprüfungen jedesmal zum Nystagmus führte. Die Kranke selbst merkte von den Bewegungen der Augäpfel nichts, die in der Augenklinik vorgenommene Untersuchung der Augen ergab nur negative Resultate".

In this case, however, it is very doubtful whether strictly speaking an acoustic reflex was present. We have the impression that this patient showed a so-called "readiness for nystagmus", which accounted for the fact that a nystagmus occurred after various sensible stimuli whatever the nature of these stimuli was. BÜRKNER emphasized the fact that not only after acoustic stimulation, but also after inserting an ear-tube or after syringing the ear, this nystagmus developed.

URBANTSCHITSCH, in his "Lehrbuch der Ohrenheilkunde" 1901, wrote that sometimes he had been able to elicit a nystagmus by acoustic stimulation. Textually he wrote: "Nystagmus fand ich wiederholt durch akustische Einwirkungen ausgelöst vor, zuweilen durch bestimmte Schall-

<sup>1</sup>) BORRIES, G. V. TH., Monatschr. f. Ohrenheilk., 57, 547 (1923).



einwirkungen oder durch einen bestimmten Ton". In later publications, a.o. in another edition of his book (1910)<sup>2)</sup> he only refers to the above-mentioned phrase of 1901, without any statement in which way his investigations were performed, on which tones his patients with nystagmus reacted and which form of nystagmus developed after the acoustic stimulation.

Nor do the symptoms observed by BÁRÁNY<sup>3)</sup> and SCHWARTZ in their patient belong to the purely acoustic reflexes. These investigators were able to elicit a non-vestibular undulating nystagmus by placing a (strongly) vibrating tuning-fork on the mastoid of the patient. It also appears from this communication that in this hysterica the same nystagmus could be elicited in another way, e.g. when the patient closed her eyes and BÁRÁNY himself tried to lift the upper eye-lid (test of STRANSKY). BÁRÁNY intended to write an extensive publication of this case. However, we could not find in literature a paper with more exact details.

RUTTIN<sup>4)</sup> published an important paper about two of his patients (1915). Both were suffering from a congenital lues and showed the so-called fistula-symptom of HENNEBERT, i.e. a nystagmus developing sometimes in patients with congenital lues, after changing the air-pressure in the auditory canal and middle ear by compression or aspiration.

Pronouncing the letter *M* and *N* one patient developed a dizziness and only a slight nystagmus; the other patient, however, showed a marked nystagmus.

RUTTIN attributed this nystagmus to an increased pressure, developing in the middle ear when pronouncing the letters *M* and *N* by which secondary the fistula symptom should be elicited. BORRIES<sup>5)</sup> rightly held that at the same time an acoustic stimulation may have played a part. This supposition is the more acceptable after the well-known experiments of TULLIO<sup>6)</sup> which were confirmed and extended by many other investigators (f.i. JELLINEK<sup>7)</sup>, HUIZINGA<sup>8)</sup>, BENJAMINS<sup>9)</sup>). TULLIO could elicit a nystagmus and body-reflexes in some animals (a.o. pigeons and rabbits)

<sup>2)</sup> URBANTSCHITSCH, Lehrbuch d. Ohrenheilkunde, 106 (1901); 487 (1910). Nor are any convincing observations reported in his extensive communication (Ztschr. f. Ohrenheilk., 31, 234 (1897)). „Ueber Störungen des Gleichgewichtes und Scheinbewegungen“.

<sup>3)</sup> BÁRÁNY, Monatschr. f. Ohrenheilk., 42, 667 (1908).

<sup>4)</sup> RUTTIN, Monatschr. f. Ohrenheilk., 40, 267 (1915).

<sup>5)</sup> BORRIES, C. V. Th., Monatschr. f. Ohrenheilk., 57, 547 (1923).

<sup>6)</sup> TULLIO, P., Das Ohr und die Entstehung der Sprache und Schrift (Urban und Schwarzenberg, Berlin—Wien, 1929).

<sup>7)</sup> JELLINEK, Monatschr. f. Ohrenheilk., 62, 241 (1928).

<sup>8)</sup> HUIZINGA, Verslagen Ned. Keel-, Neus-, Oorheelkundige Vereeniging, Mei 1934, Mei 1936 en Mei 1938. (Ned. tijdschr. v. Geneesk. 79, 1319 (1935); 81, 1083 (1937); 83, 2389 (1939).

Pflügers Arch., 234 665 (1934).

<sup>9)</sup> BENJAMINS, Verslagen Ned. Keel-, Neus-, Oorheelkundige Vereeniging, Nov. 1936 en Nov. 1938 (Ned. tijdschr. v. Geneesk., 81, 2557 (1937) en 83, 3646 (1939).



by delivering very hard tones directly to the ears. However, as in these tests tactile stimulations may play a part<sup>10)</sup> other examinations are of more importance. In these tests, after making a fistula in one of the semi-circular canals a marked nystagmus developed when less distinct tones were produced at a distance. TULLIO held that under these circumstances the acoustic waves radiate to the endolymph in the semi-circular canals and in this way should stimulate the cristae without intervention of cochlear reflexes.

One must assume then that under normal circumstances i.e. when a fistula is absent, the ordinary sounds only penetrate to the cochlea and not in a sufficient intensity to the cristae, because the sound-waves are already deadened before reaching the cristae. After making a fistula in the semi-circular canal a penetration to the cristae is possible because with this new opening a turning-aside is obtained which can be compared with the foramen rotundum in the cochlear system (HUIZINGA).

In the experiments of TULLIO it is quite or nearly impossible to elicit the vestibular symptoms by the influence of a sound when the cochlea has been destroyed before. This was the reason why many investigators thought that the cochlear reflexes should play the principal if not the only part. HUIZINGA, however, could refute this conception in performing very exact experiments on pigeons. When destroying the cochlea without impairment of the conducting apparatus, tympanic membrane or columella, the reflexes of TULLIO appeared to be impaired to a small degree by this operation. HUIZINGA, with good reason, now thought, that the above-mentioned disturbances, found by other investigators after removal of the cochlea, must be attributed to a simultaneous lesion of the tympanic membrane and the ossicles. To sum up, it seems very probable that the vertigo and the nystagmus, developing in the patients (with a fistula symptom) of RUTTIN, when pronouncing the *M* and *N*, are also due to acoustic reflexes.

The same holds true for the patient of BENJAMINS<sup>11)</sup> in which case also a fistula symptom and the reactions of TULLIO were present. These disappeared after a radical middle ear operation by which the transmission apparatus for the sound was also removed. This completely agrees with the above-mentioned experiments of HUIZINGA.

More difficult to explain are the vestibular symptoms caused by sound-stimulations, developing in patients without fistula symptom and in whom

---

<sup>10)</sup> The same holds true for the eye-movements observed by FRÖSCHELS, (Monatschr. f. Ohrenheilk., 60, 883 (1926) and 61, 776 (1927) after delivering the tones of the harmonica of URBANTSCHITSCH by means of an otoscope directly into the auditory canals of deaf-mutes. There remains a doubt as to whether in these cases a vestibular symptom was present. For FRÖSCHELS states that in one child the labyrinth could not be stimulated calorically and on turning. Another patient, examined when a caloric and a turning nystagmus were present, showed both forms of eye-movements, the one developing independently of the other.

<sup>11)</sup> Loco cit. S. also QUIX, F. H., L'oto-rhino-laryngologie intern. 21. Juillet 1933.

complete absence of other acoustic and vestibular disturbances exist. BENJAMINS reported a typical observation <sup>11</sup>).

This patient, 28 years of age, developed a dizziness as soon as a certain noise was produced. Acoustic, vestibular, internal and neurological examinations revealed no disturbances: only the vertical semi-circular canals were more difficult to stimulate than the horizontal ones. The serological reactions for lues were negative. Only in the region of 1600—3000 V.D. a vestibular reaction developed at an intensity of 84—98 decibel. This reaction consisted of a vertical nystagmus (the direction was not indicated by BENJAMINS). BENJAMINS pointed to the fact that the marked reactions developed with sounds in the resonance region of the external auditory canal (2500—3000 V.D.).

It was evidently difficult for BENJAMINS to explain these symptoms. He interpreted them as TULLIO-reactions and looked for another explanation as the patient showed no fistula symptom. He thought that this was found if one assumed that an air-bubble had entered the perilymphe. BENJAMINS writes "it is not only theoretically but also experimentally established. HUIZINGA <sup>12</sup>) found in his experiments that when an air-bubble had entered the fistula canal and when afterwards this fistula was blocked with wax, the reaction of TULLIO remained present, whereas occlusion without air in the canal made the reaction disappear. It remains a matter of dispute how this air-bubble has developed in this patient".

The explanation of BENJAMINS, however, is a very hypothetic one. Not only is it obscure to us how the air-bubble has developed, but also that the patient had had his complaints for rather a long time: the air-bubble should be resorbed after a short time!

BENJAMINS probably made his hypothesis under the impression that the symptoms shown by his patient only could be TULLIO-reactions. However, this is not necessary. Besides the reflexes of TULLIO other reflexes exist which exert influence directly from the cochlea upon the vestibular region.

Our experiments, not published up to now showed that on registering a vestibular nystagmus in rabbits by the TOPOLANSKI-BARTELS method, this nystagmus can be influenced by different sound-stimuli which change the size and velocity of the nystagmus.

Considering these facts it seems more probable that in the above-mentioned case of BENJAMINS the dizziness and nystagmus of his patient were elicited by direct cochlear reflexes and must not be considered to be TULLIO-reactions.

This could be confirmed by an observation made by us. This patient showed the same symptoms as the patient of BENJAMINS. It is hardly to be believed that here too an air-bubble in the perilymphe was present, the more so as above-mentioned explanation is more obvious and acceptable.

<sup>12</sup>) Loco cit.

Miss S., 35 years of age, told that in pronouncing the letter *N*, she became dizzy. This was especially the case if she looked to the left at the same time.

Extensive acoustic and vestibular examination showed no disturbances. The whispering voice was normal at either side. The fistula symptom could not be elicited. Spontaneous nystagmus in different lookings and the different forms of position nystagmus were completely absent.

Examination of the horizontal and vertical optocinetic nystagmus gave normal results both for the cortical and subcortical forms in all directions. The horizontal and rotatory turning nystagmus were, after turning to the right and to the left, normal and of equal duration. The vertical turning nystagmus downward was more marked than the one upward (19 X turning to the right in right lateral position: vertical after-nystagmus upward: 11 movements in 8"; 10 X turning to the left: vertical after nystagmus downward: 38 movements in 13"). Stimulation of both the labyrinths with cold and warm water was equal and normal.

The tilting reactions of RADEMAKER and GARCIN around the bitemporal and longitudinal axis were not disturbed. Pronouncing the letter *N*, especially when pronouncing the Dutch word „Niemand“ accentuating the *N* and on looking to the left, a rotatory nystagmus appeared; sometimes a deviation of the eyes upward was seen. Once a nystagmus consisting of both components, directed with its quick component downward, could be noticed. After provoking different tones by the audiometer, with the patient at a distance of about a metre from this instrument, to exclude tactile influence by the air, eye-movements also developed. These eye-movements appeared when the tone sounded or when the tone was interrupted.

The protocol is as follows:

Tuning fork, 64 vibr.: no eye-movements.

Audiometer, 128 vibr.: „ „ „

512 vibr.: „ „ „

1024 vibr.: on looking to the left a marked vertical nystagmus with its quick component upward developed when the tone was sounded or interrupted; looking forward also caused marked nystagmus movements upward.

2048 vibr.: sounding and interrupting of this tone caused a nystagmus movement upward which only lasted a short time more pronounced on looking downward. Sometimes quick movements of the head in the saggital region developed.

4096 vibr.: same as in 2048 vibr.

It is remarkable that penetration of the acoustic stimulation into the tuba (pronouncing the *N*) caused a nystagmus partly directed vertically downward, whereas the opposite direction of the nystagmus was seen if the auditory canal served as an acoustic conduction.

The patient herself recognized the eye-movements which developed: she indicated the rotatory movements as lateral, the vertical ones as movements in the vertical region.

The brother of the patient stated that he also became dizzy and lost his equilibrium when marked and low tones sounded.

Up to now we were not able to examine this patient.

Summarizing we see that:

1. Acoustic stimulation can elicit vestibular symptoms, e.g. a nystagmus, in certain patients.
2. The acoustic stimulation propagates directly to the cristae if a fistula is present in one of the semi-circular canals. This could be demonstrated

experimentally by TULLIO, JELLINEK, and HUIZINGA; in man this phenomenon was reported by BENJAMINS.

3. Acoustic reflexes can cause a nystagmus from the cochlea upon the vestibular system. This was experimentally proved in rabbits; the symptoms found in two patients without fistulae and with normal hearing (one patient of BENJAMINS and one patient in our clinic), could be explained in the best way by these facts.

The explanation of BENJAMINS of the symptoms found in his patient, did not prove to be a convincing one.

---

**Mathematics.** — *Bericht über die Konstruktion und die Fortsetzung von Bewertungen.* II. By F. LOONSTRA. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

§ 5. Es ist demnach begreiflich, dass die weiteren Abhandlungen der Bewertungstheorie sich im wesentlichen auf die nicht-archimedischen Bewertungen beschränken. Im Jahre 1924 erscheint von K. RYCHLIK eine Arbeit in J. f. d. r. u. ang. Math. 153 „Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper“. Er beschäftigt sich auch mit der Frage: Kann man eine algebraische Erweiterung eines bewerteten Körpers  $K$  so bewerten, dass die Bewertung des Körpers  $K$  erhalten bleibt? Es ist also dieselbe Frage, mit der KÜRSCHÁK sich beschäftigte. Es wurde von KÜRSCHÁK die Meinung geäußert, man könne im Falle der nicht-archimedischen Bewertung den Satz leichter beweisen durch eine Methode, welche derjenigen von HENSEL für die algebraischen Erweiterungen des Körpers  $K(p)$  nachgebildet ist. Das hat RYCHLIK in seiner Abhandlung versucht. Er beschränkt sich auf Grund der Arbeit von OSTROWSKI auf die nicht-archimedischen Bewertungen. Damit ist dann der allgemeine Fall erledigt. Endlich beweist RYCHLIK, wieder durch Verallgemeinerung des von HENSEL angewandten Verfahrens, dass der derivierte Körper  $K'$  eines algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körpers  $K$  selbst algebraisch abgeschlossen ist. Daraus folgt dann, dass man jeden bewerteten Körper zu einem vollständigen bewerteten algebraisch abgeschlossenen Körper erweitern kann.

Wir werden  $\alpha$  ein ganzes algebraisches Element in bezug auf einen bewerteten Körper  $K$  nennen, wenn es wenigstens einer Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

mit ganzen Koeffizienten aus  $K$  genügt.

Um  $|1 + \alpha| \leq 1$  für  $|\alpha| < 1$  zu beweisen, macht RYCHLIK die Annahme, dass  $K$  vollständig sei. Genügt dann  $\alpha$  einer in  $K$  irreduziblen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

so folgt aus  $|\alpha| \leq 1$ , d.h.

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq 1,$$

dass  $|a_n| \leq 1$ , so dass  $a_n$  ein ganzes Element aus  $K$  ist. Es ist also  $\alpha$  auch ganz auf Grund des Satzes: Das Element  $\alpha$ , welches im bewerteten vollständigen Körper  $K$  der irreduziblen Gleichung  $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  genügt, ist dann und nur dann ganz, wenn das Glied  $a_n$  in  $K$  ganz ist

(§ 15 der RYCHLIKSchen Abhandlung). Es sind dann ebenso die Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  ganz, d.h.  $|a_1| \leq 1, \dots, |a_{n-1}| \leq 1$ .  $1 + a$  genügt der in  $K$  irreduziblen Gleichung  $f(x-1) = 0$ , so dasz  $|1 + a| = |f(-1)|^{\frac{1}{n}}$ . Es ist aber  $f(-1) = (-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + \dots + a_n$ , also, weil die  $a_1, \dots, a_{n-1}$  ganz sind:  $|f(-1)| \leq 1$ , also  $|1 + a| \leq 1$ .

Den Beweis, dasz der derivierte Körper  $K'$  eines algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körpers wieder algebraisch abgeschlossen ist, haben wir oben mitgeteilt.

§ 6. Im Jahre 1934 erscheint in der Mathematischen Zeitschrift 39 (1934) eine umfangreiche Abhandlung von A. OSTROWSKI: „Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper“, in der ausschliesslich die nicht-archimedische Bewertung erörtert wird. Wir beschränken uns auf die für die Bewertungstheorie wichtigsten Paragraphen. Es wird in § 4 die Aufgabe behandelt, sämtliche Bewertungen einer algebraischen Erweiterung eines vorgegebenen bewerteten Körpers aufzustellen. Ein Teil dieser Ergebnisse war schon von KRULL und DEURING gefunden worden (W. KRULL, Ein Satz über primäre Integritätsbereiche; Math. Ann. 103 (1930); M. DEURING, Verzweigungstheorie bewerteter Körper; Math. Ann. 105 (1931)).

Bevor wir mit der Aufstellung sämtlicher Bewertungen anfangen, weisen wir darauf hin, dasz KÜRSCHÁK für die Bewertung algebraischer Erweiterungen den Grundkörper mittels der Fundamentalfolgen zu einer kleinsten vollständigen Erweiterung ausbreiten musste. OSTROWSKI führt den Begriff des relativ vollständigen Körpers ein, der dadurch charakterisiert ist, dasz für Polynome mit Koeffizienten aus diesem Körper ein gewisser Reduzibilitätssatz gilt. Er zeigt, dasz es für die Bewertungsmöglichkeit algebraischer Erweiterungen eines Körpers  $K'$  hinreichend ist, dasz  $K'$  relativ vollständig ist.

Sind in einem bewerteten Körper  $K'$  zwei Elemente  $a$  und  $b$  so beschaffen, dasz  $|a - b| < 1$ , so sagen wir, dasz  $a$  kongruent  $b$  im Körper  $K'$  ist:  $a \equiv b (K')$ . Ebenso bezeichnen wir zwei Polynome mit Koeffizienten aus einem bewerteten Körper  $K'$ , deren Differenz lauter Koeffizienten  $c_i = a_i - b_i$  mit  $|c_i| < 1$  besitzt, als kongruent im Körper  $K'$ . OSTROWSKI beweist zunächst (§ 2) das Fundamentallemma für vollständige bewertete Körper:

Hat die Funktion  $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  ganze Koeffizienten aus einem vollständigen bewerteten Körper  $K'$ , und gilt in  $K'$  für  $n > m > 0$ .

$$f(x) \equiv x^m + a_{n-m-1} x^{m+1} + \dots + a_0 x^n (K'),$$

so ist das Polynom  $f(x)$  in  $K'$  reduzibel und lässt sich als Produkt  $f_1(x)f_2(x)$  von zwei Polynomen

$$f_1(x) = x^m + \dots, f_2(x) = a_0 x^{n-m} + \dots$$



mit Koeffizienten aus  $K'$  und den Graden  $m, n-m$  darstellen. Den Beweis unterlassen wir.

Es sei nun  $K'$  ein bewerteter Körper. Wir nennen  $K'$  relativ vollständig, falls jedes Polynom  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  mit ganzen Koeffizienten aus  $K''$  (d.h.  $|a_i| \leq 1$ ), für das

$$f(x) \equiv a_0 x^n + \dots + a_{n-m-1} x^{m+1} + x^m \quad (K')$$

gilt, mit  $n > m > 0$ , in  $K'$  reduzibel ist.

Man kann die Behauptung des Fundamentallemmas dahin zusammenfassen, dass ein vollständiger Körper auch relativ vollständig ist. Aus der Definitionseigenschaft der relativ vollständigen Körper folgt:

Ist  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $a_n \neq 0$ , ein in einem relativ vollständigen bewerteten Körper irreduzibles Polynom mit Koeffizienten aus  $K'$ , so gilt:

$$|a_\nu| \leq \max(|a_0|, |a_n|), \quad 0 < \nu < n.$$

Denn ist diese Ungleichheit nicht erfüllt, und ist  $M = \max_{0 \leq \nu \leq n} |a_\nu|$  gesetzt,  $|a_0| < M$ ,  $|a_n| < M$ , und ist  $m$  der grösste Index  $\nu$ , für den  $|a_\nu| = M$  ist, so folgt, dass in  $K'$

$$\frac{f(x)}{a_m} \equiv x^{n-m} + bx^{n-m+1} + \dots \quad (K')$$

ist, mit  $0 < m < n$ , so dass  $f(x)$  in  $K'$  reduzibel sein muss.

Wir können nun die Bewertungsvorschrift geben für algebraische Erweiterungen relativ vollständiger Körper. Um eine algebraische Erweiterung  $Q$  eines relativ vollständigen bewerteten Körpers  $K'$  zu bewerten, genügt es, eine in bezug auf  $K'$  normale algebraische Erweiterung von  $Q$  zu bewerten. Wir setzen daher  $Q$  als normal voraus. Sei  $\alpha$  aus  $Q$  und

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

die in  $K'$  irreduzible Gleichung, der  $\alpha$  genügt. Wir bekommen eine Bewertung von  $Q$ , wenn wir die Zahl  $|a_n|^{1/n}$  als die Bewertung von  $\alpha$  festsetzen.

Diese Definition ist eindeutig und dabei behalten die Grössen von  $K'$  ihre Bewertung bei. Wir beweisen hier, dass die Bewertungsvorschrift nur die obengenannte sein kann.

Sei nämlich

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2)$$

eine in einem relativ vollständigen bewerteten Körper  $K'$  irreduzible Gleichung mit Koeffizienten aus diesem Körper, dann gilt allgemein

$$|a_i| \leq |a_n|^{i/n}.$$

Sind nämlich  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  die Wurzeln von (2), so ist ja  $a_i$  als die  $i$ -te elementarsymmetrische Funktion von  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  eine Summe von Produkten aus diesen  $n$  Größen mit je  $i$  Faktoren; jedes Produkt hat also die Bewertung  $|a_n|^{\frac{i}{n}}$ ; die Bewertung der Summe kann also  $|a_n|^{\frac{i}{n}}$  nicht überschreiten. Hieraus ergibt sich sofort die Einzigkeit der Bewertungsvorschrift: genügt nämlich  $\alpha$  der Gleichung (2), so kann  $|\alpha|$  nicht grösser  $|a_n|^{\frac{i}{n}}$  sein, da sonst wegen  $|a_i| \leq |a_n|^{\frac{i}{n}}$  für jedes  $\nu > 0$

$$|a_\nu \alpha^{n-\nu}| \leq |\alpha|^{n-\nu} \cdot |a_n|^{\frac{\nu}{n}} < |\alpha|^n$$

wäre, so dass die Summe  $\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n$  nicht verschwinden kann, da ja ihre Bewertung gleich der Bewertung von  $\alpha^n \neq 0$  wäre. Aus  $|\alpha| < |a_n|^{\frac{i}{n}}$  würde ganz analog für jedes  $\nu < n$  folgen, dass die Summe

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n$$

wiederum nicht verschwinden könnte.

In § 4 seiner Abhandlung behandelt OSTROWSKI nun die Aufgabe, sämtliche Bewertungen einer algebraischen Erweiterung  $Q$  eines vorgegebenen Körpers  $K'$  aufzustellen, und zwar, indem er zunächst alle Bewertungen der kleinsten zugehörigen normalen Erweiterungen aufstellt und sodann von da aus alle Bewertungen der Unterkörper dieser normalen Erweiterung aufsucht.

Wir geben den Inhalt kurz wieder.

Es sei  $K$  ein (nicht notwendig vollständiger) bewerteter Körper,  $\bar{K}$  der derivierte Körper von  $K$ , und  $\mathfrak{N}$  eine normale algebraische Erweiterung von  $K$ . Bilden wir den von  $\mathfrak{N}$  und  $\bar{K}$  erzeugten Körper  $K^*$ .

Bewertet man nun  $\bar{K}$  (siehe § 2), so ist  $K^*$  zu bewerten, weil  $K^*$  eine algebraische Erweiterung des vollständigen Körpers  $\bar{K}$  ist. Aber es ist dann  $\mathfrak{N} < K^*$  auch bewertet.  $\mathfrak{N}$  lässt sich also bewerten.

Es sei umgekehrt  $\mathfrak{N}$  auf zwei verschiedene Arten bewertet: wir bezeichnen sie mit  $\mathfrak{N}'$  und  $\mathfrak{N}''$ . Es seien  $\bar{\mathfrak{N}}'$  und  $\bar{\mathfrak{N}}''$  die derivierten Körper; sie enthalten  $\bar{K}$ . Der vor  $\bar{K}$  und  $\mathfrak{N}$  erzeugte Teilkörper  $L = [\bar{K}, \mathfrak{N}]$  ist in beiden Fällen derselbe Körper  $K^*$ , wenn man die Bewertung vernachlässigt. Weil  $L$  eine normale Erweiterung des vollständigen Körpers  $\bar{K}$  ist, stimmen die Teilkörper  $L' = [\bar{K}, \mathfrak{N}']$  und  $L'' = [\bar{K}, \mathfrak{N}'']$  überein, wegen der Einzigkeit der Bewertungsvorschrift. Also sind die Bewertungen von  $L'$  und  $L''$  einander gleich, also auch diejenigen von  $\mathfrak{N}'$  und  $\mathfrak{N}''$ .

Sei nun  $Q$  eine beliebige algebraische Erweiterung des bewerteten Körpers  $K'$ ; bewertet man nun  $\mathfrak{N}$ , so ist damit eine Bewertung von  $Q$  gegeben: Jede algebraische Erweiterung  $Q$  eines bewerteten Körpers kann bewertet werden. Wir können sogar das Resultat folgendermassen formulieren: *Ist  $Q$  eine algebraische Erweiterung von  $K'$  und  $\mathfrak{N}'$  eine irgendwie bewertete*

algebraische Erweiterung von  $Q$ , die normal in bezug auf  $K'$  ist, so erhält man sämtliche Bewertungen von  $Q$ , indem man die zu  $Q$  isomorphen Unterkörper von  $\mathfrak{N}'$  bildet ( $Q$  selbst eingeschlossen) und den Elementen von  $Q$  die Bewertungen ihrer Bilder als Bewertungen zuordnet.

Damit beherrschen wir die Bewertungen algebraischer Erweiterungen.

Da jede Erweiterung eines Körpers durch eine Folge von einfachen algebraischen und transzendenten Erweiterungen erfolgen kann und wir die algebraischen Erweiterungen nunmehr vollständig beherrschen, wird es sich nur noch darum handeln, alle Bewertungen einer einfach transzendenten Erweiterung  $K'$  von  $K$  aufzustellen, bei denen die Bewertung von  $K$  unverändert bleibt.

§ 7. OSTROWSKI behandelt die Aufgabe, den Bewertungstypus einer bewerteten transzendenten Erweiterung  $L'$  konstruktiv zu erfassen, in der Weise, dass er zunächst einen auf einfache Weise bewerteten Unterkörper  $K'$  von  $L'$  nachweist und damit die Aufgabe darauf zurückführt, alle Bewertungen einer einfachen transzendenten Erweiterung eines bewerteten Körpers  $K'$  zu finden, bei denen die Bewertung von  $K'$  fest bleibt.

Der Primkörper von  $L'$  ist zu dem Körper  $R'$  der rationalen Zahlen, oder im Falle der Primzahlcharakteristik  $p$  zu dem endlichen Körper  $P'_p$  der Restklassen mod  $p$  isomorph.  $P$  ist immer trivial bewertet, denn es ist die  $(p-1)$ -te Potenz jedes von 0 verschiedenen Elements gleich 1. Ist  $R'$  nicht-trivial bewertet, so ist in diesem Falle die Bewertung von  $R'$  eine mit Hilfe der Primzahl  $p$  erzeugte  $p$ -adische Bewertung. (Die archimedische Bewertung bleibt hier ausser Betracht.)

Ist  $L'$  nicht-trivial, der Primkörper trivial bewertet, so gibt es in  $L'$  ein von 0 verschiedenes Element  $x$ , also auch ein Element  $x$  mit der Eigenschaft  $|x| < (|x| \neq 0, |x| \neq 1)$ . (Eventuell müssen wir  $x$  durch  $\frac{1}{x}$  ersetzen.) Dann kann als  $K'$  der aus dem Primkörper  $P'$  durch Adjunktion von  $x$  erzeugte Körper  $P'(x)$  genommen werden. Und zwar ist jedes Element von  $P'(x)$

$$a = x^k \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

wo  $f_1(x), f_2(x)$  Polynome in  $x$  mit Koeffizienten aus  $P'$ , für die  $f_1(0) \neq 0, f_2(0) \neq 0$  und  $k$  eine ganze rationale Zahl ist. Dann ist  $|a| = |x|^k$ , denn  $|f_1(x)| = \max(|a_0|, |a_1 x|, \dots, |a_n x^n|) = 1$  und ebenso  $|f_2(x)| = 1$ .

Wir kommen nun zum letzten Teil unserer Betrachtungen.

Wir zeigen, dass man bei nicht-trivialer Bewertung des Primkörpers mit Hilfe der sogenannten pseudokonvergenten Folgen alle einfachen bewerteten Erweiterungen eines bewerteten Körpers erhält.

Wir nennen eine unendliche Folge  $\{a_i\}$  von Elementen eines vollständigen bewerteten Körpers  $K'$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

pseudokonvergent, wenn für alle  $n \geq n_0$  entweder durchweg

$$|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$$

oder durchweg

$$|a_{n+1} - a_n| = 0.$$

Man nennt  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n|$  die Breite der pseudokonvergenten Folge.

Ist die Breite 0, so folgt leicht, dass die Folge (1) konvergent ist. Umgekehrt ist eine konvergente Folge eine pseudokonvergente und ihre Breite ist 0. Ausserdem zeigt man einfach im Falle, dass (1) eine pseudokonvergente Folge darstellt, dass die Folge  $\{|a_i|\}$  konvergiert und zwar so, dass für  $i \geq n_0$  entweder durchweg  $|a_{i+1}| = |a_i|$  oder (für  $i \geq n_0$ ) durchweg  $|a_{i+1}| < |a_i|$ .

Im ersten Falle nennt OSTROWSKI die pseudokonvergente Folge von der ersten Art, im zweiten Falle von der zweiten Art.

Gilt die Ungleichheit  $|a_{n+1} - a_n| = 0$  für  $n = n_0, n_0 + 1, \dots$  so ist selbstverständlich für  $i \geq n_0$  durchweg  $|a_{i+1}| = |a_i|$ .

Im zweiten Fall zeigt man mit Hilfe der Gleichheit  $|a - b| = |a|$  für  $|a| > |b|$  einfach, dass  $|a_{n-1}| > |a_n| > |a_{n+1}|$ , also konvergiert die Folge  $\{|a_i|\}$ .

Ist (1) eine pseudokonvergente Folge aus einem vollständigen bewerteten Körper  $K'$  und ist  $f(x)$  ein Polynom in  $x$  mit Koeffizienten aus  $K'$ , so hat die Folge

$$|f(a_1)|, |f(a_2)|, \dots, |f(a_i)|, \dots$$

einen bestimmten Limes. Ist nämlich  $L'$  eine kleinste algebraische Erweiterung von  $K'$ , in der  $f(x)$  in lauter Linearfaktoren zerfällt, also

$$f(x) = c(x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_n), \quad |c| > 0.$$

Man sieht dann, dass jede der  $n$  Folgen

$$a_1 - a_\nu, a_2 - a_\nu, \dots, a_i - a_\nu, \dots \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

pseudokonvergent ist, und es hat also jede der  $n$  Folgen  $\{|a_i - a_\nu|\}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) einen Limes, und dasselbe gilt auch von  $\{|f(a_i)|\}$ , denn

$$|f(a_i)| = |c| |a_i - a_1| |a_i - a_2| \cdots |a_i - a_n|.$$

Dieser Limes ist  $\neq 0$ , sobald man voraussetzt, dass  $\lim a_i$  nicht existiert oder wenigstens nicht algebraisch ist.

Betrachten wir nun den Körper  $K'(z)$  aller rationalen Funktionen  $r(z)$  in  $z$  mit Koeffizienten aus  $K'$ , so folgt aus der Möglichkeit,  $r(x)$  als Quotienten zweier Polynome in  $x$   $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  mit Koeffizienten aus  $K'$  darzustellen, dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r(a_i) = \frac{\lim_{i \rightarrow \infty} |f_1(a_i)|}{\lim_{i \rightarrow \infty} |f_2(a_i)|}$$

existiert und von 0 verschieden ist, solange  $r(x)$  nicht identisch verschwindet. Ordnen wir also jedem Element  $r(z)$  dieses Körpers die Zahl  $\lim_{i \rightarrow \infty} |r(a_i)|$  als Bewertung zu, worin

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

eine feste pseudokonvergente Folge aus  $K'$  (und falls sie konvergent ist, keinen in bezug auf  $K'$  algebraischen Limes besitzt), so erhalten wir einen bewerteten Körper  $K'(z)$ , der  $K'$  als Unterkörper und  $z$  als ein in bezug auf  $K'$  transzendentes Element enthält. Ist  $\{a_i\}$  eine konvergente Folge, so ist  $z$  im obigen Körper  $K'(z)$  der Limes von  $\{a_i\}$ , da

$$|z - a_i| = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - a_i|, \lim_{i \rightarrow \infty} |z - a_i| = \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - a_i| = 0,$$

weil die Breite einer konvergenten Folge gleich 0 ist.

Man kann diese Bewertungsmethode noch etwas verallgemeinern. Es sei  $L'$  eine bewertete Erweiterung von  $K'$ , es sei  $\{a_i\}$  eine aus in  $L'$  liegenden in bezug auf  $K'$  algebraischen Elementen gebildete pseudokonvergente Folge. Man führe eine Unbestimmte  $z$  ein und bewerte jedes Element  $r(z)$  des Körpers  $L'(z)$  durch  $\lim_{i \rightarrow \infty} |r(a_i)|$ . Der im so erhaltenen bewerteten

Körper  $L'(z)$  liegende Unterkörper  $K'(z)$  stellt dann eine einfache bewertete Erweiterung von  $K'$  dar. OSTROWSKI zeigt nun, dass er auf diesem Wege alle einfachen bewerteten Erweiterungen eines bewerteten Körpers erhält. Dazu untersucht er erst die Bewertungsmethode etwas näher.

Sei  $a_i$  eine pseudokonvergente Folge von über  $K$  algebraischen Elementen aus  $L'$ . Dann heisst  $z$  Pseudolimes der Folge  $a_i$ , wenn das Folgende gilt: Für jedes Element  $r(z)$  von  $K'(z)$ , wo  $r(x)$  rational in  $x$  mit Koeffizienten als  $K'$  ist, ist die Bewertung gleich dem Wert von  $\lim_{i \rightarrow \infty} |r(a_i)|$ .

Man erhält sofort, dass  $|z| = \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i|$ .

Ist die Folge  $\{a_i\}$  konvergent, so ist  $z$  der Limes von  $\{a_i\}$ . Der Limesbegriff ist also ein Spezialfall des Begriffes des Pseudolimes.

Es besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Limes und dem Pseudolimes, da in einem bewerteten Körper auch mehrere Pseudolimes einer pseudokonvergenten Folge in bezug auf einen bestimmten Unterkörper vorkommen können. Andererseits gilt noch:

Es sei in einer bewerteten Erweiterung  $L'$  eines Körpers  $K'$   $z$  ein Pseudolimes in bezug auf  $K'$  einer pseudokonvergenten Folge  $\{a_i\}$  von in bezug auf  $K'$  algebraischen Elementen aus  $L'$ . Es sei  $M'$  eine in  $L'$  liegende algebraische Erweiterung von  $K'$ . Dann ist  $z$  auch in bezug auf  $M'$  ein Pseudolimes von  $\{a_i\}$ .

Durch den Satz, dass jede einfache Erweiterung eines bewerteten Körpers  $K'$  durch Adjunktion eines Pseudolimes einer aus in bezug auf  $K'$  algebraischen Elementen gebildeten pseudokonvergenten Folge bewirkt

wird, ist die allgemeinste Lösung der Aufgabe gegeben, eine einfache Erweiterung eines bewerteten Körpers zu bewerten. Ist diese einfache Erweiterung transzendent, so dürfen offenbar nichtkonvergente pseudo-konvergente Folgen benutzt werden, oder aber solche konvergente Folgen, deren Limes in bezug auf  $K'$  transzendent ist. Ist uns nun eine ganz beliebige Erweiterung  $L'$  eines bewerteten Körpers  $K'$  gegeben, so können wir einen solchen Unterkörper  $T'$  von  $L'$  finden, dasz  $L'$  eine rein algebraische Erweiterung von  $T'$  ist, während  $T'$  aus  $K'$  durch Adjunktion einer Menge  $N$  in bezug auf  $K'$  transzendenter Elemente von  $L'$  entsteht, wobei die Elemente von  $N$  die Eigenschaft besitzen, in bezug auf  $K'$  algebraisch unabhängig zu sein, d.h. dasz kein nicht identisch verschwindendes Polynom in endlichvielen Variablen mit Koeffizienten aus  $K'$  existiert, das durch Substitution von Elementen von  $N$  annulliert werden kann.

Man kann  $T'$  nun auffassen als das Resultat einer wohlgeordneten Folge einfacher transzendenter Erweiterungen, und daher ist die Frage nach der Bewertung von  $T'$  durch die Entwicklungen auch gelöst.

Die Frage nach allen Bewertungen der algebraischen Erweiterung  $L'$  von  $T'$  wurde schon früher gelöst.

---



**Mathematics.** — *Conformal Differential Geometry. Curves in conformal euclidean spaces.* By J. HAANTJES. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

*Introduction.*

The purpose of this paper is to develop the differential geometry of curves in a conformal euclidean space  $R_n$  of dimension  $n > 2$ , in particular to obtain the intrinsic equations of a curve, which determine the curve up to a conformal pointtransformation in  $R_n$ , and the analogue of the Frenet-Serret formulas.

As to the method employed in this note, no polyspherical coordinates are introduced, by which the conformal transformations can be brought in a linear form. BLASCHKE <sup>1)</sup> and others have treated the problem for  $R_2$  and  $R_3$  in that way looking upon a curve as a particular system of  $\infty^1$  spheres. Our method on the other hand is based upon the well-known fact, again proved in § 1, that the conformal properties are those properties, which are unaffected by a conformal transformation of the fundamental tensor:

$$a'_{\lambda\kappa} = \sigma^2 a_{\lambda\kappa} \dots \dots \dots (1)$$

with  $\sigma$  satisfying the differential equation

$$\nabla_\nu s_\mu = s_\nu s_\mu - \frac{1}{2} a_{\mu\nu} s_\lambda s^\lambda, \quad s_\mu = \partial_\mu \log \sigma \dots \dots \dots (2)$$

Although in ordinary differential geometry the extension to RIEMANNIAN spaces raises no essential difficulty as to the geometry of curves, it is not the case in conformal differential geometry, owing to the fact that in curved spaces a conformal property is defined as a property which is unaffected by a conformal transformation of the fundamental tensor:  $a'_{\lambda\kappa} = \sigma^2 a_{\lambda\kappa}$ ,  $\sigma$  being an *arbitrarily chosen* function of the coordinates. In curved spaces it is impossible to impose on  $\sigma$  the condition (2), this equation being not completely integrable. This essential difference between the conformal geometry of flat spaces and curved spaces is the reason why we restrict ourselves in this paper to flat spaces.

I hope to treat the case  $n = 2$  in a later communication.

§ 1. *Preliminaries.*

Let  $a_{\lambda\kappa}$  be the fundamental tensor of an  $n$ -dimensional flat space  $R_n$ , in which the coordinates are denoted by  $x^\kappa$ . We may of course assume

---

<sup>1)</sup> W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie III, Springer, Berlin.

that the coordinate system is a rectangular Cartesian one, but we will not confine ourselves to these systems. The transformation

$$y^r = f^r(x^i) \dots \dots \dots (3)$$

is a conformal pointtransformation if

$$a_{\lambda\kappa}(y) \frac{\partial y^r}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^s}{\partial x^\nu} = \sigma^2 a_{\mu\nu}(x) \dots \dots \dots (4)$$

Suppose that in the region considered the transformation (3) is reversible. So we have

$$x^r = F^r(y^i) \dots \dots \dots (5)$$

We now pass to another coordinate system ( $\kappa'$ ) by the transformation

$$x^{r'} = F^{r'}(x^i) \dots \dots \dots (6)$$

where the functions  $F^{r'}$  are identical with  $F^r$ . Then the coordinates of the point  $y^r$  with respect to the system ( $\kappa'$ ) are from (6) and (5)

$$y^{r'} = F^{r'}(y^i) = x^r \dots \dots \dots (7)$$

and the components of the fundamental tensor at the point  $y^r$  with respect to ( $\kappa'$ ) are by (4)

$$a_{\lambda'\kappa'}(y) = \sigma^2 a_{\lambda\kappa} \dots \dots \dots (8)$$

Therefore if the pointtransformation (3) and the coordinate transformation (6) are carried out together each point keeps its own coordinates as a result of which the equations of transformed curves and surfaces remain the same. But from (8) we see that the fundamental tensor has become a factor  $\sigma^2$ . Now the space is assumed to be flat. Then the curvature affiner defined by

$$K_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa} = 2 \partial_{[\nu} \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu] \lambda \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu \lambda \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu] \lambda \right\} \dots \dots \dots (9)$$

will vanish both for  $a_{\lambda\kappa}$  and  $\sigma^2 a_{\lambda\kappa}$ . This leads for  $n > 2$  to the following equation for  $\sigma$  <sup>2)</sup>

$$\nabla_\mu s_\lambda = s_\mu s_\lambda - \frac{1}{2} a_{\mu\lambda} s_\rho s^\rho, \quad (s_\mu = \partial_\mu \log \sigma) \dots \dots \dots (10)$$

where the covariant differentiation is taken with respect to  $a_{\lambda\kappa}$ . Therefore, if the coordinates are rectangular Cartesian,  $\nabla_\mu$  is identical with  $\partial_\mu$ .

Conversely, to every solution  $\sigma$  of (10) a conformal pointtransformation can be found, such that this transformation creates this special  $\sigma$  <sup>3)</sup>.

*We thus have the result that in order to find the conformal properties of curves, surfaces etc., one may as well determine the properties which*

<sup>2)</sup> Cf. SCHOUTEN-STRIJK, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, (Noordhoff 1938), p. 205. In this book our factor  $\sigma^2$  is denoted by  $\sigma$ .  
<sup>3)</sup> SCHOUTEN-STRIJK, Einführung II, p. 205.

are invariant under a conformal transformation of the fundamental tensor  $a'_{\lambda\kappa} = \sigma^2 a_{\lambda\kappa}$ ,  $\sigma$  satisfying the equation (10).

The equation (10) is completely integrable. There exists also only one solution for which  $s_\lambda$  and  $\sigma$  have given values  $(s_\lambda)_0$  and  $\sigma_0$  at a given point  $x_0^\kappa$ .

The CHRISTOFFEL-symbols computed from the tensor  $a'_{\lambda\kappa}$  are connected with the CHRISTOFFEL-symbols belonging to  $a_{\lambda\kappa}$  by the formulas

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} + A_\mu^\kappa s_\lambda + A_\lambda^\kappa s_\mu - a_{\mu\lambda} s^\kappa, \quad \dots \quad (11)$$

where  $A_i^j$  is the unit affiner.

§ 2. *The conformal parameter and the conformal orthogonal ennuple.*

Let a curve be given by the equation

$$x^\kappa = x^\kappa(t), \quad \dots \quad (12)$$

$t$  being a scalar parameter. The arc-lengths with respect to  $a_{\lambda\kappa}$  and  $a'_{\lambda\kappa}$  will be denoted by  $s$  and  $s'$ , the corresponding covariant derivatives along the curve by  $\delta/ds$  and  $\delta'/ds'$  respectively. (These covariant derivatives are identical with the ordinary derivatives with respect to euclidean coordinate systems belonging to the corresponding fundamental tensor). If  $p^\kappa$  is a contravariant vector we have from (11)

$$\frac{\delta' p^\kappa}{ds'} = \sigma^{-1} \left\{ \frac{\delta p^\kappa}{ds} + \left( s_\mu \frac{dx^\mu}{ds} \right) p^\kappa + (s_\mu p^\mu) \frac{dx^\kappa}{ds} - a_{\mu\lambda} p^\mu \frac{dx^\lambda}{ds} s^\kappa \right\}. \quad (13)$$

We now consider the vectors

$$i^\kappa = \frac{dx^\kappa}{ds}, \quad q^\kappa = \frac{\delta i^\kappa}{ds}, \quad r^\kappa = \frac{\delta^2 i^\kappa}{ds^2}, \quad \dots \quad (14)$$

It may be shown by direct calculation using (10) and (13) that these vectors transform under a conformal transformation (1) of the  $a_{\lambda\kappa}$  in the following way

$$\left. \begin{aligned} a) \quad i'^\kappa &= \sigma^{-1} i^\kappa \\ b) \quad q'^\kappa &= \sigma^{-2} \{ q^\kappa + (s_\mu i^\mu) i^\kappa - s^\kappa \} \\ c) \quad r'^\kappa &= \sigma^{-3} [ r^\kappa + \{ 2 s_\mu q^\mu + (s_\mu i^\mu)^2 - s_\lambda s^\lambda \} i^\kappa ]. \end{aligned} \right\} \dots \quad (15)$$

From this we see that the two-direction determined by the osculating plane is not conformal invariant in contrast with the two-direction (local plane) determined by  $i^\kappa$  and  $r^\kappa$  (thus for a euclidean system by  $\dot{x}^\kappa$  and  $\ddot{x}^\kappa$ ). This local plane, which shall be called *conformal osculating plane*, is unique except when  $i^\kappa$  and  $r^\kappa$  have the same direction. If this happens at every point of the curve, the curve is a circle. We therefore for the present exclude the circles.

The vector defined by

$$v^x = r^x + a_{\mu\nu} q^\mu q^\nu i^x \dots \dots \dots (16)$$

lies in the conformal osculating plane and is normal to  $i^x$  as may be shown by multiplication by  $i^x$ . The transformation of  $v^x$  follows from (15)

$$v'^x = \sigma^{-3} v^x. \dots \dots \dots (17)$$

From  $v^x$  can be derived a scalar, which is multiplied by a power of  $\sigma$  under the transformation (1), namely

$$\varrho = \sqrt{a_{\lambda\lambda} v^\lambda v^\lambda}; \quad \varrho' = \sigma^{-2} \varrho. \dots \dots \dots (18)$$

This scalar enables us to define on the curve a parameter  $\tau$  invariant under conformal transformations

$$\tau = \int \sqrt{\varrho} ds + c \quad (c \text{ constant}). \dots \dots \dots (19)$$

This parameter is called the *conformal parameter* or the *inversion-length*<sup>4)</sup> of the curve. It is as follows from the definition of  $\varrho$  of the *third order*.

Let us now turn to the orthogonal ennuple. The question is to complete the directions of  $i^x$  and  $v^x$  to a system of  $n$  mutually orthogonal directions, which are conformal invariant.

Consider a unit vector-field  $p^x$  along the curve normal to  $i^x$ . Then the transformation of  $p^x$  under a conformal transformation is

$$p'^x = \sigma^{-1} p^x. \dots \dots \dots (20)$$

From this relation and (13) follows at once the transformation of the covariant derivative of  $p^x$ :

$$\frac{\delta' p'^x}{ds'} = \sigma^{-2} \left\{ \frac{\delta p^x}{ds} + (s_\mu p^\mu) i^x \right\} \dots \dots \dots (21)$$

So we see that the local plane determined by  $\frac{\delta p^x}{ds}$  and  $i^x$  is a conformal invariant plane and therefore the direction in this plane normal to  $i^x$  will be a conformal invariant direction. It is easy to see that this direction is determined by the vector

$$\frac{\delta p^i}{ds} (A_i^x - i^x i_i) = \frac{\delta p^x}{ds} - \left( i_i \frac{\delta p^i}{ds} \right) i^x. \dots \dots \dots (22)$$

Now  $p^x$  is supposed to be a unit vector. So  $\frac{\delta p^x}{ds}$  and with it the vector (22) are orthogonal to  $p^x$ .

<sup>4)</sup> H. LIEBMANN, Beiträge zur Inversionsgeometrie der Kurven, Münchner Berichte (1923).

Let us apply this result to the unit vector  $i^x$  in the direction of  $v^x$

$$i^x = \rho^{-1} v^x. \dots \dots \dots (23)$$

We get

$$\frac{\delta i^x}{ds} (A^x - i^x i_x) = \rho_2 i^x \dots \dots \dots (24)$$

where  $i^y$  is a unit vector normal to  $i^x$  and  $i^z$ . The algebraic sign of  $\rho_2$  is not determined by the latter equation, but we may choose  $i^z$  so as to make  $\rho_2$  positive. If  $\rho_2 \neq 0$  the same operator can be applied to  $i^z$ .

In doing so we obtain

$$\frac{\delta i^z}{ds} (A^z - i^z i_z) = -\rho_2 i^x + \rho_3 i^y, \dots \dots \dots (25)$$

where again  $\rho_3$  is chosen to be non-negative. This equation defines a unit vector  $i^y$  normal to  $i^x$ ,  $i^z$  and  $i^z$ , as may be seen by multiplying (25) by  $i_x$ ,  $i_x$  and  $i_z$  respectively. We have f. i.

$$\frac{\delta i^z}{ds} (A^z - i^z i_z) i_x = -i_x \frac{\delta i^z}{ds} = -\rho_2 \dots \dots \dots (26)$$

Proceeding in this way we get (if none of the quantities  $\rho_2, \rho_3, \dots$  appears to be zero)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta i^x}{ds} (A^x - i^x i_x) &= -\rho_3 i^z + \rho_4 i^y \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\delta i^z}{ds} (A^z - i^z i_z) &= -\rho_{n-1} i^y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

If  $\rho_j$  vanishes the set of equations breaks off with  $\frac{\delta i^j}{ds}$ . The directions of the vectors  $i^2, i^3, \dots, i^n$  are as we have seen conformal invariant. Together they form at each point of the curve what is called the *conformal orthogonal ennuple*.

It may be noted that the quantities  $\rho_2, \rho_3, \dots$  are not conformal invariant. In fact we have from (25), (26) and (27)

$$\rho_i = \sigma^{-1} \rho_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) \dots \dots \dots (28)$$

But this states that the quantities

$$h_i = \varrho^{-1} \varrho_i \dots \dots \dots (29)$$

are  $n-2$  conformal invariants of the curve. Since the vectors  $\tilde{i}^2, \tilde{i}^3, \dots$  are unit vectors it is clear that the vectors defined by

$$j^i = \varrho^{-1} \tilde{i}^i = \frac{dx^i}{d\tau}; \quad \tilde{j}^i = \varrho^{-1} \tilde{i}^i \quad (i = 2, \dots, n) \dots (30)$$

form a system of  $n$  mutually orthogonal conformal invariant vectors all of the same length.

§ 3. *The conformal covariant derivative along the curve.*

We have hitherto used the covariant derivative belonging to the metric  $a_{\lambda\kappa}$ . As has been pointed out in § 1 this derivative is not invariant under conformal transformations, the CHRISTOFFEL-symbols transforming in a way given by (11). If, however, we have the disposal of a covariant vector  $Q_\mu$ , which transforms as follows

$$Q'_\mu = Q_\mu - s_\mu \dots \dots \dots (31)$$

the quantities

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} + Q_\mu A_\lambda^\kappa + Q_\lambda A_\mu^\kappa - a_{\mu\lambda} Q^\kappa \dots \dots \dots (32)$$

are conformal invariant as a consequence of (11) and (31). They can be used as parameters of a conformal connection.

It may be noted that the parameters  $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$  only define a covariant derivative along the curve if  $Q_\mu$  is a function on the curve. It is of course necessary in this case to use the invariant parameter  $\tau$  in order to obtain conformal invariant derivatives.

Now it can be shown at once from (1), (15. b) and (18) that the  $Q_\mu$  defined by

$$Q_\mu = a_{\mu\lambda} \left\{ \frac{\delta \tilde{i}^\lambda}{d s} + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{d s} \log \varrho \right) \tilde{i}^\lambda \right\} = \frac{\delta i_\mu}{d s} + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{d s} \log \varrho \right) i_\mu \quad (33)$$

transforms under conformal transformations in the right way. The covariant derivative along the curve defined by (32) and (33) will be denoted by  $D_\tau$ . It is a conformal invariant derivative. We have f.i.

$$\begin{aligned} D_\tau j^i &= \varrho^{-1} \left\{ \frac{\delta \tilde{i}^i}{d s} - \frac{1}{2} \left( \frac{d}{d s} \log \varrho \right) \tilde{i}^i + 2 (Q_\mu \tilde{i}^\mu) \tilde{i}^i - Q^i \right\} \\ &= \varrho^{-1} \left\{ \frac{\delta \tilde{i}^i}{d s} + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{d s} \log \varrho \right) \tilde{i}^i - Q^i \right\} = 0. \quad 5) \end{aligned} \quad (34)$$

5) Conversely the  $Q_\mu$  may be defined by the assumption  $D_\tau j^\mu = 0$ . It may be remarked that this covariant derivative is not commutative with the process of raising and lowering of indices defined by the tensor  $a_{\lambda\kappa}$  because of  $D_\tau a_{\lambda\kappa} = -2 (Q_\mu \tilde{i}^\mu) a_{\lambda\kappa} \neq 0$ . The processes are commutative if for the raising and lowering of indices is used the conformal invariant tensor  $b_{\lambda\kappa} = \varrho a_{\lambda\kappa}$ .



The transformation of  $Q_\mu$  under conformal transformations is given by (31). Now it lies on the surface to inquire whether it is possible to find a conformal transformation such that  $Q'_\mu$  becomes zero. From (10) we derive as a necessary and sufficient condition the vanishing of

$$\frac{\delta Q_\lambda}{ds} - (i^\mu Q_\mu) Q_\lambda + \frac{1}{2} i_\lambda Q_\mu Q^\mu. \dots (35)$$

But from the definition of  $Q_\lambda$  we derive by a small calculation

$$\frac{\delta Q_\lambda}{ds} - (i^\mu Q_\mu) Q_\lambda + \frac{1}{2} i_\lambda Q_\mu Q^\mu = \varrho \left( \frac{1}{2} i_\lambda + h_1 i_\lambda \right) \dots (36)$$

where

$$h_1 = \frac{1}{2\varrho} \left\{ \frac{d^2}{ds^2} \log \varrho - \frac{1}{4} \frac{d}{ds} \log \varrho - \frac{\delta i_\mu}{ds} \frac{\delta i^\mu}{ds} \right\} \dots (37)$$

So we see that the expression (35) is different from zero. It may be shown by direct calculation from (15, b) and (18) that the quantity  $h_1$  is a conformal invariant of the curve.

If the covariant derivative defined by (32) is used, the equation (36) can be written as follows

$$D_\tau Q_\lambda + j^\mu Q_\mu Q_\lambda - \frac{1}{2} j_\lambda Q_\mu Q^\mu = \varrho a_{\lambda\tau} \left( j^\tau + h_1 j^\tau \right) \dots (38)$$

§ 4. The "Frenet-Serret" formulas.

We return to the equations (24), (25) and (27). This set of equations may be written in a form involving the conformal covariant derivative.

Let  $p^\tau$  be a unit vector normal to  $i^\tau$ . Then  $\varrho^{-1} p^\tau$  is conformal invariant. From (32) and (33) we get

$$D_\tau (\varrho^{-1} p^\tau) = \varrho^{-1} \left\{ \frac{\delta p^\tau}{ds} + (Q_\mu p^\mu) i^\tau \right\} \dots (39)$$

Moreover since (comp. footnote 5)

$$D_\tau a_{\lambda\tau} = -2 (Q_\mu j^\mu) a_{\lambda\tau} \dots (40)$$

we have as a consequence of (34)

$$i_\tau D_\tau (\varrho^{-1} p^\tau) = 0 \dots (41)$$

From (39) and (41) it follows that the vector (39) apart from a factor  $\varrho^{-1}$  is equal to the component of  $\frac{\delta p^\tau}{ds}$  normal to  $i^\tau$ .

Applying this result to the set of equations (24), (25) and (27) we have from (29) and (30)

$$\left. \begin{aligned} D_\tau j^\tau_2 &= h_2 j^\tau_3 \\ D_\tau j^\tau_3 &= -h_2 j^\tau_2 + h_3 j^\tau_4 \\ \dots &\dots \\ D_\tau j^\tau_n &= -h_{n-1} j^\tau_{n-1} \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

These equations together with the equations (34) and (38):

$$\left. \begin{aligned} D_\tau j^\lambda &= 0 \quad ; \quad j^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\tau} \\ D_\tau Q_\lambda + (j^\mu Q_\mu) Q_\lambda - \frac{1}{2} j^\lambda Q_\mu Q^\mu &= \frac{a_{\lambda\lambda} (h_1 j^1 + j_2^2)}{a_{\mu\nu} j^\mu j^\nu} \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

will be called the conformal "Frenet-Serret" formulas.

§ 5. The intrinsic equations of the curve.

In this section we shall show, that the curve is determined, to within conformal representations, by the expressions  $h_1, \dots, h_{n-1}$  in terms of the conformal parameter  $\tau$ .

When we substitute the expressions for  $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$  in the Frenet-Serret formulas, a system is obtained of  $N = n(n + 2)$  differential equations of the form

$$\frac{d}{d\tau} a_x = F_x(a_1, \dots, a_N, \tau), \quad (x = 1, \dots, N) \dots (44)$$

where the  $a_x$  represent the  $N$  unknown quantities

$$x^\lambda, Q_\lambda, j_1^\lambda, j_2^\lambda, \dots, j_n^\lambda. \dots (45)$$

We know that a system (44) admits a unique set of solutions, whose values for  $\tau = 0$  are given arbitrarily. These values are chosen so that the vectors  $j_1^\lambda = j_1^\lambda, j_2^\lambda, \dots, j_n^\lambda$  for  $\tau = 0$  are mutually orthogonal and all have the same length  $a_0$ . From (42) and (43) it follows

$$\frac{d}{d\tau} \left( a_{\lambda\lambda} j_a^\lambda j_b^\lambda \right) = D_\tau \left( a_{\lambda\lambda} j_a^\lambda j_b^\lambda \right) \left\{ \begin{aligned} &= 0 \quad (a \neq b) \quad (a, b = 1, \dots, n) \\ &= -2(Q_\mu j^\mu) a_{\lambda\lambda} j_a^\lambda j_b^\lambda \quad (b = a) \end{aligned} \right. (46)$$

which proves that for all values of  $\tau$  the solutions  $j^\lambda$  are mutually orthogonal and have the same length  $a$ . Furthermore it has to be shown that this system of orthogonal vectors is identical with the conformal ennuple of the curve given by the solution

$$x^\lambda = x^\lambda(\tau). \dots (47)$$

From the definition of conformal invariant ennuple (§ 2) and our system of differential equations (42) and (43) it is easy to see that this will be the case if the parameter  $\tau$  in (47) is the conformal parameter of the curve.

In order to prove that  $\tau$  is indeed the conformal parameter we introduce the arc-length  $s$  defined by the fundamental tensor  $a_{\lambda\kappa}$ . Since

$$a_{\lambda\kappa} j^\lambda j^\kappa = a_{\lambda\kappa} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\kappa}{d\tau} = a^2, \dots (48)$$

$\tau$  and  $s$  are connected by the equation

$$d\tau = \alpha^{-1} ds. \dots \dots \dots (49)$$

Then equation (43) may be written as follows

$$\left. \begin{aligned} a) \quad \frac{\delta}{ds} i^\nu &= Q^\nu - 2(Q_\mu i^\mu) i^\nu - \left(\frac{d}{ds} \log \alpha\right) i^\nu, & \left(i^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}\right) \\ b) \quad \frac{\delta}{ds} Q_\lambda &= (Q_\mu i^\mu) Q_\lambda - \frac{1}{2} i_\lambda Q^\nu Q_\nu + \alpha^{-2} (h_1 i_\lambda + i_\lambda), & (i_\lambda = \alpha^{-1} j_\lambda) \end{aligned} \right\} (50)$$

where  $i^\nu$  is a unit vector. Multiplying (50.a) by  $i_\nu$  we get

$$Q_\mu i^\mu = -\frac{d}{ds} \log \alpha. \dots \dots \dots (51)$$

Using the relations (50.b) and (51) it may be shown by direct calculation from (50.a) that

$$\frac{\delta^2}{ds^2} i^\nu + a_{\lambda\mu} \frac{\delta i^\mu}{ds} \frac{\delta i^\lambda}{ds} i^\nu = \alpha^{-2} i^\nu. \dots \dots \dots (52)$$

So the vector  $v^\nu$  (comp. (16)) belonging to the curve (47) is equal to  $\alpha^{-2} i^\nu$  from which it follows by (18) that

$$\varrho = \alpha^{-2}. \dots \dots \dots (53)$$

A comparison between (19) and (49) then shows that the parameter  $\tau$  is indeed the conformal invariant parameter.

The values of  $Q_\mu$  and  $\alpha$  for  $\tau=0$  may be chosen arbitrarily. The question arises what happens if we choose for these quantities other values. It is always possible to express the new values in terms of the old ones in the following form

$$(\bar{Q}_\mu)_0 = \sigma_0 (Q_\mu)_0 + (s_\mu)_0 \quad ; \quad \bar{\alpha}_0 = \sigma_0^{-1} \alpha_0 \quad \text{or} \quad (\bar{j}^\nu)_0 = \sigma_0^{-1} (j^\nu)_0. \dots (54)$$

Generally these values will lead to another solution for  $x^\nu$  and therefore to another curve. In the following it will be shown that this latter curve, obtained with the initial values (54), is a conformal representation of the curve (47).

Suppose that the coordinate system  $(\kappa)$  is euclidean with respect to the fundamental tensor  $a_{\lambda\kappa}$ . The  $(s_\mu)_0$  and  $\sigma_0$  in (54) determine a function  $\sigma$ , namely the unique solution of the differential equation (10) for which  $s_\mu$  and  $\sigma$  have the values  $(s_\mu)_0$  and  $\sigma_0$  at the point  $x_0^\nu$  ( $\tau=0$ ). We now pass to the coordinate system  $(\kappa')$  which is euclidean with respect to  $\sigma^2 a_{\lambda\kappa}$  and whose directions of the coordinate lines at  $x_0^\nu$  coincide with the directions of the coordinate lines of the system  $(\kappa)$ . So we have

$$a_{\lambda'\kappa'} = \sigma^{-2} \delta_{\lambda'\kappa'} \quad \left\{ \begin{aligned} &= 0, \quad \lambda' \neq \kappa' \\ &= \sigma^{-2}, \quad \lambda' = \kappa' \end{aligned} \right. \dots \dots \dots (55)$$

$$(A_{\nu'}^{\nu'})_0 = \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\right)_0 = \sigma_0 \delta_{\nu'}^\nu. \dots \dots \dots (56)$$

It may be noted that the transformation

$$x^{\mu'} = x^{\mu} (x^{\lambda}) \dots \dots \dots (57)$$

is a conformal coordinate transformation.

By (55) the CHRISTOFFEL-symbols of  $a_{\lambda\mu}$  with respect to the system  $(x')$  are

$$\left\{ \begin{matrix} x' \\ \mu' \lambda' \end{matrix} \right\} = -s_{\mu'} A_{\lambda'}^{\mu'} - s_{\lambda'} \bar{A}_{\mu'}^{\lambda'} + s^{\mu'} a_{\mu' \lambda'} \dots \dots \dots (58)$$

where  $s_{\mu'}$ , as a consequence of (10) satisfies the equation

$$\partial_{\nu'} s_{\mu'} + s_{\nu'} s_{\mu'} - \frac{1}{2} a_{\nu' \mu'} s_{\rho'} s^{\rho'} = 0 \dots \dots \dots (59)$$

The parameters of the conformal connection are therefore from (32)

$$I_{\mu' \lambda'}^{\nu'} = (Q_{\mu'} - s_{\mu'}) A_{\lambda'}^{\nu'} + (Q_{\lambda'} - s_{\lambda'}) \bar{A}_{\mu'}^{\nu'} - (Q^{\nu'} - s^{\nu'}) a_{\mu' \lambda'} \dots \dots (60)$$

From this we see that the equations (42) written with respect to  $(x')$  can be obtained from the same equations with respect to  $(x)$  by replacing  $Q_{\mu}$  by  $Q_{\mu'} - s_{\mu'}$ . The same is true for the first equation (43). We proceed to show that the same can be said of the second equation (43):

$$\frac{dQ_{\lambda}}{dt} - (j^{\mu} Q_{\mu}) Q_{\lambda} + \frac{1}{2} j_{\lambda} Q_{\mu} Q^{\mu} = \frac{a_{\lambda\kappa} (h_{\kappa} j^{\kappa} + j^{\kappa})}{a_{\mu\nu} j^{\mu} j^{\nu}} \dots \dots (61)$$

With respect to the system  $(x')$  the left hand side of this equation runs as follows

$$\frac{dQ_{\lambda'}}{dt} - I_{\mu' \lambda'}^{\nu'} Q_{\nu'} j^{\mu'} + (j^{\mu'} Q_{\mu'}) Q_{\lambda'} - \frac{1}{2} j_{\lambda'} Q_{\mu'} Q^{\mu'} \dots \dots (62)$$

As a consequence of (59) and (60) this expression may be written in the form

$$\frac{d(Q_{\lambda'} - s_{\lambda'})}{dt} - j^{\mu'} (Q_{\mu'} - s_{\mu'}) (Q_{\lambda'} - s_{\lambda'}) + \frac{1}{2} j_{\lambda'} (Q_{\mu'} - s_{\mu'}) (Q^{\mu'} - s^{\mu'}) \dots (63)$$

which is the same expression in  $Q_{\mu'} - s_{\mu'}$  as the left hand side of (61) is in  $Q_{\mu}$ .

The initial values of the vectors  $\frac{j^{\lambda'}}{a}$  and  $Q_{\mu'} - s_{\mu'}$ , are by (54) and (56)

$$\left. \begin{matrix} \frac{j^{\lambda'}}{a} : & \sigma_0 (\bar{j}^{\lambda'})_0 = (\frac{j^{\lambda'}}{a})_0 \\ Q_{\mu'} - s_{\mu'} : & \sigma_0^{-1} (\bar{Q}_{\mu} - s_{\mu})_0 = (Q_{\mu'})_0 \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (64)$$

Therefore, the Frenet-Serret formulas (42) and (43) written with respect to the coordinate system  $(x')$  can be obtained from the system with respect to  $(x)$  by replacing  $Q_{\mu}$  by  $Q_{\mu'} - s_{\mu'}$ . In the second case we have chosen the system  $(x')$  so as to obtain the same initial values

for  $j'_a$  and  $Q_{\mu'} - s_{\mu'}$  as we had in the first case for  $j_a$  and  $Q_{\mu}$ . But then the solution  $x^{\mu'}(\tau)$  will be the same function of  $\tau$  as our original solution  $x^{\mu}(\tau)$ . Since the transformation (57) is a conformal one the curve

$$x^{\mu'} = x^{\mu}(\tau) \dots \dots \dots (65)$$

is therefore a conformal representation of the curve (47).

From this it follows that a curve is determined to within conformal representations by the expressions for the conformal invariants  $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$  in terms of the conformal parameter. So the equations of a curve may be written in the form

$$h_1 = h_1(\tau), h_2 = h_2(\tau), \dots, h_{n-1} = h_{n-1}(\tau), \dots \dots (66)$$

They are called *its intrinsic equations*.

**Mathematics.** — *Annäherungsformeln für das vollständige elliptische Integral erster Art in der Nähe von  $k=1$ . III. Von S. C. VAN VEEN.*  
(Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of June 28, 1941)

Bekanntlich liefert die Theorie der Theta-funktionen ein ausserordentlich schnell konvergentes Verfahren zur Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale erster Art.<sup>1)</sup> Merkwürdigerweise hat man, soviel mir bekannt ist, selten versucht, dieses Rechnungsverfahren zu einer scharfen Annäherungsformel zur Berechnung von  $K(k)$  für Werte von  $k$  in der Nähe von 1 auszubilden, obgleich es dazu vorzüglich geeignet ist. Ohne Schwierigkeit ergibt sich dann die in diesem Gebiet sehr genaue Approximationsformel

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \approx \frac{2}{(1+\sqrt{k})^2} \log 2 \left( \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right). \quad (1)$$

Man findet, soviel ich weiss, diese sehr genaue und einfache Formel in dieser Weise nur abgeleitet in: POINCARÉ, *Leçons de mécanique céleste*, T II, 1re Partie, p. 64 (in leicht geänderter Form)<sup>2)</sup>.

Zweck dieser Mitteilung ist: eine elementare Ableitung von (1) zu geben, ohne Verwendung der Theta-reihen, nur mittels der LANDEN'schen Transformation, mit genauer Abschätzung des Fehlers. Genauer gesagt, ich werde den folgenden Satz beweisen:

**Satz:** Für reelles  $k$  ( $0 \leq k < 1$ ) ist

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{(1+\sqrt{k})^2} \log 2 \left( \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right) + \\ & + \frac{1}{4(1+\sqrt{k})^2} \left( \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \right)^4 \left\{ 2 \log 2 \left( \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right) - 1 + \frac{11}{8} \theta \left( \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} (2)$$

mit  $|\theta| < 1$ .

<sup>1)</sup> Vgl. z.B. WHITTHAKER-WATSON, *Modern Analysis*, 2nd Ed. N<sup>o</sup>. 21. 8. Ausgedehnte Rechenvorschriften dazu werden gegeben in SCHWARZ-WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen*; 2te Ausg. Berlin 1893 (insbes. N<sup>o</sup>. 45 und N<sup>o</sup>. 49).

<sup>2)</sup> SCHWARZ-WEIERSTRASS gibt unter Verwendung elliptischer Funktionen die vollständige Entwicklung, von der (1) das Hauptglied bildet (l.c. N<sup>o</sup>. 49, Formel (1)).



*Beweis:* Im Folgenden bedeuten die Zahlen  $\xi_1, \xi_2, \dots$

Zahlen mit  $0 \leq \xi_k \leq 1$ .

Ebenso die Zahlen  $\theta$  mit  $|\theta_k| < 1$ .

Wir wenden auf

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

zweimal hintereinander die LANDEN'sche Transformation an (vgl. Mitt. I, Hilfssatz 1, Proc. XLIV, 5; S. 607).

Einmalige Anwendung liefert

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{1+k} \int_0^{\beta} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{4k}{(1+k)^2} \sin^2 \omega}} \quad \text{mit } \operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}$$

Wiederholte Anwendung gibt

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{2}{1+k} \cdot \frac{2}{1 + \frac{2\sqrt{k}}{1+k}} \int_0^{\beta_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{4\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)}{\left(1 + \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^2} \sin^2 \psi}} = \\ &= \frac{4}{(1+\sqrt{k})^2} \int_0^{\beta_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{8\sqrt{k}(1+k)}{(1+\sqrt{k})^4} \sin^2 \psi}} \\ &= \frac{4}{(1+\sqrt{k})^2} \int_0^{\beta_1} \frac{d\psi}{\cos \psi \sqrt{1 + \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4 \operatorname{tg}^2 \psi}} \end{aligned} \quad \dots \quad (3)$$

mit

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sin 2\psi}{\frac{2\sqrt{k}}{1+k} + \cos 2\psi} \left( > \frac{\sin 2\psi}{1 + \cos 2\psi} = \operatorname{tg} \psi \right),$$

also

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin 2\beta_1}{\frac{2\sqrt{k}}{1+k} + \cos 2\beta_1} \dots \dots \dots (4)$$

Setzt man

$$\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} = 2q^2 \quad (0 < 2q^2 \leq 1), \quad \dots \dots \dots (5)$$

so findet man

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} = \frac{\sqrt{1+4q^4}}{2q}, \quad \dots \dots \dots (6)$$

Aus (4), (5) und (6) folgt

$$\frac{1}{2q\sqrt{1+4q^4}} = \frac{2 \sin \beta_1 \cos \beta_1}{2 \cos^2 \beta_1 - 8q^3 \sin^2 \beta_1} = \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{1 - 4q^4 \operatorname{tg}^2 \beta_1},$$

also

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{-2q\sqrt{1+4q^4} + \sqrt{4q^2 + 16q^4 + 16q^6}}{8q^4} = \left. \begin{aligned} &= \frac{1 + 2q^2 - \sqrt{1+4q^4}}{4q^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$

(nur die positive Lösung genügt wegen  $0 < \beta_1 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ).

Der Hauptpunkt dieser Ableitung ist, dass  $\operatorname{tg} \beta_1$  für kleine Werte von  $q$  (also für  $k$  in der Nähe von 1) sehr einfach und genau approximiert werden kann.

Man findet wegen (7)

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{2q^2 - 2q^4 + 2q^8 - 4\xi_1 q^{12}}{4q^3} = \frac{1-q^2}{2q} + h \quad \dots \dots (8)$$

mit

$$h = \frac{1}{2} q^5 - \xi_1 q^9 = \frac{1}{2} \xi_2 q^5 \quad \dots \dots \dots (9)$$

Setzt man weiter in (3)

$$\operatorname{tg} \psi = z, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = z_1 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{1-q^2}{2q} = z_2 \quad (\text{also } z_1 = z_2 + h), \quad \dots \dots (10)$$

so ist

$$K(k) = \frac{4}{(1+\sqrt{k})^2} \int_0^{z_2+h} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+16q^8 z^2)}} = \frac{4}{(1+\sqrt{k})^2} F(z_2+h) = \left. \begin{aligned} &= \frac{4}{(1+\sqrt{k})^2} \left\{ \int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+16q^8 z^2)}} + \frac{h}{\sqrt{(1+z_2^2)(1+16q^8 z_2^2)}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^2 z_3}{2\sqrt{(1+z_3^2)(1+16q^8 z_3^2)}} \left( \frac{1}{1+z_3^2} + \frac{16q^8}{1+16q^8 z_3^2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} (11)$$

mit  $z_2 \equiv z_3 \equiv z_1$ . Man hat

$$\frac{1}{\sqrt{(1+z_2^2)(1+16q^8z_2^2)}} = \frac{2q}{(1+q^2)\sqrt{1+4q^6(1-q^2)}} = 2q(1-q^2+q^4-3\xi_3q^6) = \left. \begin{aligned} &= 2q(1-q^2+q^4-\frac{3}{2}\xi_4q^4) \end{aligned} \right\} (12)$$

und

$$0 < \frac{z_3}{\sqrt{(1+z_3^2)(1+16q^8z_3^2)}} \left( \frac{1}{1+z_3^2} + \frac{16q^8}{1+16q^8z_3^2} \right) < \left. \begin{aligned} &< \frac{z_3}{\sqrt{1+z_3^2}}(1+1) < 2 \end{aligned} \right\} (13)$$

Aus (9), (11), (12) und (13) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{(1+\sqrt{k})^2}{4} K(k) &= \int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+16q^8z^2)}} + 2hq(1-q^2+q^4) - 3hq^5\xi_4 - h^2\xi_5 \\ &= \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+16q^8z^2)}} + q^6(1-q^2) + q^{10}(1-2\xi_6 - \frac{3}{2}\xi_7 - \frac{1}{4}\xi_8) \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+16q^8z^2)}} = \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} - 8q^8 \int_0^{z_1} \frac{z^2 dz}{\sqrt{1+z^2}} + \\ + 96q^{16}\xi_9 \int_0^{z_1} \frac{z^4 dz}{\sqrt{1+z^2}};$$

$$\int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \log(z_2 + \sqrt{z_2^2+1}) = \log \frac{1}{q};$$

$$\int_0^{z_1} \frac{z^2 dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{z_1^2}{2} \sqrt{1+z_1^2} - \frac{1}{2} \log(z_1 + \sqrt{z_1^2+1}) = \frac{1-q^4}{8q^2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{q}$$

und

$$0 < \int_0^{z_1} \frac{z^4 dz}{\sqrt{1+z^2}} < \int_0^{z_1} z^3 dz = \frac{z_1^4}{4} < \frac{1}{64q^4} < \frac{1}{128q^6}.$$

Man findet also

$$\int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+16q^8z^2)}} = (1+4q^8) \log \frac{1}{q} - q^6(1-q^4) + \frac{3}{4}q^{10}\xi_{10}. \quad (15)$$

Wegen (9), (14) und (15) findet man endlich

$$\left. \begin{aligned} \frac{(1+\sqrt{k})^2}{4} K(k) &= (1+4q^8) \log \frac{1}{q} - q^8(1-q^2) + q^{10}(1-2\xi_6 - \frac{3}{2}\xi_7 - \frac{1}{4}\xi_8 + \frac{3}{4}\xi_{10}) \\ &= (1+4q^8) \log \frac{1}{q} - q^8 + q^{10}(2-2\xi_6 - \frac{3}{2}\xi_7 - \frac{1}{4}\xi_8 + \frac{3}{4}\xi_{10}) \\ &= (1+4q^8) \log \frac{1}{q} - q^8 + Aq^{10} \end{aligned} \right\} (16)$$

mit

$$-1\frac{3}{4} < A < 2\frac{3}{4}.$$

und

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{2}{(1+\sqrt{k})^2} \log 2 \left( \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right) + \\ &+ \frac{1}{4(1+\sqrt{k})^2} \left( \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \right)^4 \left\{ 2 \log 2 \left( \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right) - 1 + \frac{A}{2} \left( \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

w. z. b. w.

*Zahlenbeispiel:* Wie aus (2) hervorgeht, ist die Approximationsformel (1) sehr genau in der Nähe von  $k=1$ . Für  $k=1-\varepsilon$  ist der Fehler  $\sim \frac{-\varepsilon^4 \log \varepsilon}{2048}$ . Die Formel (1) ist auch noch sehr gut brauchbar in Fällen, wo  $k$  nicht in der Nähe von 1 liegt, wie aus dem folgenden Beispiel erhellt:

Das vollständige lemniscatische Integral hat den Wert

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1,3110287771$$

nach STIRLING und GAUSS (vgl. GAUSS, Werke III, S. 150 und S. 413).

Weiter ist:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2-\cos^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Setzt man

$$\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,84089641,$$

so ist

$$\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} = 0,08642724$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{(1 + \sqrt{k})^2} \log 2 \left( \frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \right) = 1,3110136.$$

Die Schranken des Fehlers in (2) sind somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4(1 + \sqrt{k})^2} \left( \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^4 \left\{ 2 \log 2 \left( \frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \right) - \right. \\ \left. - 1 - \frac{11}{8} \left( \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right) \right\} = 0,00001502 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4(1 + \sqrt{k})^2} \left( \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^4 \left\{ 2 \log 2 \left( \frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \right) - \right. \\ \left. - 1 + \frac{11}{8} \left( \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right) \right\} = 0,00001574. \end{aligned}$$

Also ist

$$1,3110286 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < 1,3110293.$$

**Mathematics.** — *Eine neue Erweiterung der LAPLACE-Transformation.*  
 (Zweite Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof.  
 J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

**Hilfssatz 8.** *Es sei  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $\beta > 0$  und  $k < 1$ . Ich betrachte das Integral*

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) R_{k, m+\frac{1}{2}}(ys) s^{-\frac{1}{2}} ds. \quad \dots \quad (37)$$

**Behauptungen:**

$$I = 0 \text{ für } x < y.$$

$$I = \pi i x^{\frac{1}{2}} \text{ für } x = y.$$

$$I = 2\pi i x^{m+\frac{1}{2}} y^{-m} \text{ für } x > y.$$

**Beweis.** Aus (26), (27) und (28) folgt, dass das Integral

$$\int_{\beta - \infty i}^{\beta + \infty i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) R_{k, m+\frac{1}{2}}(ys) s^{-\frac{1}{2}} ds \quad \dots \quad (38)$$

konvergiert für  $x \neq y$ , aber divergiert für  $x = y$ . Der Integrand in (38) ist analytisch auf der rechten Seite des Integrationsweges; hieraus geht hervor, mit Rücksicht auf (26), (27) und (28), dass das Integral (38) verschwindet, falls  $x < y$  ist, womit die erste Behauptung des Hilfssatzes bewiesen ist.

Aus (26), (27) und (28) ergibt sich ferner, dass das Integral (38) mit  $x = y$  zwar divergiert, der Hauptwert (37) mit  $x = y$  aber existiert, und dass dieser Hauptwert denselben Wert besitzt wie

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} e^{xs} (xs)^{\frac{1}{2}-k} e^{-ys} (ys)^k s^{-\frac{1}{2}} ds,$$

so dass dieser Hauptwert gleich  $\pi i x^{\frac{1}{2}}$  ist; hiermit ist auch die zweite Behauptung bewiesen.

Die dritte Behauptung folgt unmittelbar aus Hilfssatz 7, weil die Integrale

$$\int_{\lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) R_{k, m+\frac{1}{2}}(ys) s^{-\frac{1}{2}} ds \quad \text{und} \quad \int_{-\lambda i}^{\beta - \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) R_{k, m+\frac{1}{2}}(ys) s^{-\frac{1}{2}} ds$$

nach Null streben für  $\lambda \rightarrow \infty$ .



**Hilfssatz 9.** Ist  $0 < \delta < x$ ,  $\beta > 0$  und  $k < 1$ , so gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) s^{-1} ds \int_x^{x+\delta} R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) t^{m-\frac{1}{2}} dt = \pi i x^{m+\frac{1}{2}} \quad (39)$$

und

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) s^{-1} ds \int_{x-\delta}^x R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) t^{m-\frac{1}{2}} dt = \pi i x^{m+\frac{1}{2}}, \quad (40)$$

**Beweis.** Wegen (20) hat man

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) s^{-1} ds \int_a^b R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) t^{m-\frac{1}{2}} dt \\ &= a^m \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) R_{k, m+\frac{1}{2}}(as) s^{-\frac{1}{2}} ds \\ & \quad - b^m \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) R_{k, m+\frac{1}{2}}(bs) s^{-\frac{1}{2}} ds. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Beziehung kann sowohl für  $a = x$  und  $b = x + \delta$ , wie für  $a = x - \delta$  und  $b = x$  mittels Hilfssatz 8 berechnet werden; das Ergebnis wird in beiden Fällen  $\pi i x^{m+\frac{1}{2}}$ .

**Hilfssatz 10.** Ist  $0 < c \leq a$ ,  $\mu \geq 0$  und  $n < -1$ , so hat man

$$\left| \int_{\alpha - \mu i}^{\alpha} e^{-\zeta} \zeta^n d\zeta \right| < L, \quad \left| \int_{\alpha}^{\alpha + \mu i} e^{-\zeta} \zeta^n d\zeta \right| < L,$$

wo  $L$  nicht von  $a$  und  $\mu$ , also nur von  $c$  und  $n$  abhängt.

**Beweis.** Wegen  $|e^{-\zeta}| \leq e^{-c} < 1$  ist jedes der zwei betrachteten Integrale absolut genommen kleiner als

$$\int_{\alpha - \infty i}^{\alpha + \infty i} |\zeta|^n |d\zeta| \equiv \int_{c - \infty i}^{c + \infty i} |\zeta|^n |d\zeta|.$$

**Hilfssatz 11.** Ist  $0 < a < d$  und  $\mu \geq 0$ , so hat man

$$\left| \int_{\alpha - \mu i}^{\alpha + \mu i} \frac{e^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} \right| < M, \quad \left| \int_{\alpha - \mu i}^{\alpha + \mu i} \frac{e^{\zeta} d\zeta}{\zeta} \right| < M, \quad \dots \quad (41)$$

wo  $M$  nicht von  $a$  und  $\mu$ , also nur von  $d$  abhängt.

**Beweis**<sup>20)</sup>. Man hat (ich setze  $\zeta = a + iy$ )

$$\begin{aligned} \int_{\alpha-\mu i}^{\alpha+\mu i} \frac{e^{-\zeta} d\zeta}{\zeta} &= i e^{-\alpha} \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\cos y - i \sin y}{a + iy} dy \\ &= i e^{-\alpha} \int_{-\mu}^{\mu} \frac{a \cos y - y \sin y - iy \cos y - ia \sin y}{a^2 + y^2} dy \\ &= 2i e^{-\alpha} \int_0^{\mu} \frac{a \cos y - y \sin y}{a^2 + y^2} dy = 2i a e^{-\alpha} \int_0^{\mu} \frac{\cos y}{a^2 + y^2} dy \\ &\quad + 2i a^2 e^{-\alpha} \int_0^{\mu} \frac{\sin y}{y(a^2 + y^2)} dy - 2i e^{-\alpha} \int_0^{\mu} \frac{\sin y}{y} dy. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\left| a \int_0^{\mu} \frac{\cos y}{a^2 + y^2} dy \right| < a \int_0^{\infty} \frac{dy}{a^2 + y^2} = \frac{1}{2} \pi$$

und

$$\left| a^2 \int_0^{\mu} \frac{\sin y}{y(a^2 + y^2)} dy \right| < a^2 \int_0^{\infty} \frac{dy}{a^2 + y^2} = \frac{1}{2} a \pi;$$

ferner ist  $\int_0^{\mu} \frac{\sin y}{y} dy$  beschränkt, da  $\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy$  existiert.

Hiermit ist die erste der Formeln (41) bewiesen. Ganz analog liefert man den Beweis der zweiten Formel.

### § 5. Beweis von Satz 1.

Benutzt man die Bezeichnungen (14) und (15), so bekommt die zu beweisende Formel (2) die Gestalt

$$F(x+0) + F(x-0) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs)(xs)^{k-\frac{1}{2}} ds \int_0^{\infty} R_{k+\frac{1}{2}, m}(st)(st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt.$$

Ich zerlege den Beweis dieser Beziehung in drei Teile:

<sup>20)</sup> Hilfssatz 11 kommt als Hilfssatz 5 vor in meiner Arbeit [6]. Der jetzige Beweis ist einfacher und elementarer als der damalige.

Erster Teil. Für hinreichend kleine positive Werte von  $\delta$  ( $0 < \delta < x$ ) gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) (xs)^{k-\frac{1}{2}} ds \int_x^{x+\delta} R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt = \pi i F(x+0) \quad (42)$$

und

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) (xs)^{k-\frac{1}{2}} ds \int_{x-\delta}^x R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt = \pi i F(x-0). \quad (43)$$

Zweiter Teil. Ist  $0 < \delta < x$ , so gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) (xs)^{k-\frac{1}{2}} ds \int_0^{x-\delta} R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt = 0. \quad (44)$$

Dritter Teil. Ist  $\delta > 0$ , so gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) (xs)^{k-\frac{1}{2}} ds \int_{x+\delta}^{\infty} R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt = 0. \quad (45)$$

Beweis von (42) und (43). Die Funktion  $F(t)$ , und also auch  $t^{-k-m} F(t)$  ist von beschränkter Variation in der Umgebung des Punktes  $t=x$ . Für hinreichend kleine positive Werte von  $\tau$  gilt daher im Intervall  $x < t \leq x + \tau$

$$t^{-k-m} F(t) = x^{-k-m} F(x+0) + \varphi_1(t) - \varphi_2(t), \quad \dots \quad (46)$$

und ebenso im Intervall  $x - \tau \leq t < x$

$$t^{-k-m} F(t) = x^{-k-m} F(x-0) + \psi_1(t) - \psi_2(t); \quad \dots \quad (47)$$

hierin bezeichnen  $\varphi_1(t)$  und  $\varphi_2(t)$  monoton zunehmende Funktionen mit  $\lim_{t \rightarrow x} \varphi_1(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow x} \varphi_2(t) = 0$ , während  $\psi_1(t)$  und  $\psi_2(t)$  monoton abnehmende Funktionen mit  $\lim_{t \rightarrow x} \psi_1(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow x} \psi_2(t) = 0$  bedeuten.

Zu jedem positiven  $\varepsilon$  kann man nun ein  $\delta$  mit  $0 < \delta \leq \tau$  so wählen, dass

$$\varphi_1(x+\delta) < \varepsilon, \varphi_2(x+\delta) < \varepsilon, \psi_1(x-\delta) < \varepsilon, \psi_2(x-\delta) < \varepsilon \quad \dots \quad (48)$$

ist.

Ferner hat man wegen (46)

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} N_{k-\frac{1}{2},m}(xs) (xs)^{k-1} ds \int_x^{x+\delta} R_{k+\frac{1}{2},m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt \\
 &= x^{-m-\frac{1}{2}} F(x+0) \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} N_{k-\frac{1}{2},m}(xs) s^{-1} ds \int_x^{x+\delta} R_{k+\frac{1}{2},m}(st) t^{m-\frac{1}{2}} dt \\
 &+ x^{k-\frac{1}{2}} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} N_{k-\frac{1}{2},m}(xs) s^{-1} ds \int_x^{x+\delta} R_{k+\frac{1}{2},m}(st) \{\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\} t^{m-\frac{1}{2}} dt.
 \end{aligned} \right\} (49)$$

Für das auf der rechten Seite dieser Beziehung stehende Integral mit  $\varphi_1(t)$  gilt mit Rücksicht auf den zweiten Mittelwertsatz <sup>21)</sup>

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} N_{k-\frac{1}{2},m}(xs) s^{-1} ds \int_x^{x+\delta} R_{k+\frac{1}{2},m}(st) \varphi_1(t) t^{m-\frac{1}{2}} dt \\
 &= \int_x^{x+\delta} \varphi_1(t) t^{m-\frac{1}{2}} dt \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} N_{k-\frac{1}{2},m}(xs) R_{k+\frac{1}{2},m}(st) s^{-1} ds \\
 &= \varphi_1(x+\delta) \int_{\eta}^{x+\delta} t^{m-\frac{1}{2}} dt \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} N_{k-\frac{1}{2},m}(xs) R_{k+\frac{1}{2},m}(st) s^{-1} ds \\
 & \hspace{15em} (\text{wo } x < \eta < x + \delta) \\
 &= \varphi_1(x+\delta) \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} N_{k-\frac{1}{2},m}(xs) s^{-1} ds \int_{\eta}^{x+\delta} R_{k+\frac{1}{2},m}(st) t^{m-\frac{1}{2}} dt \\
 &= \varphi_1(x+\delta) \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} N_{k-\frac{1}{2},m}(xs) [\eta^m R_{k,m+\frac{1}{2}}(\eta s) - (x+\delta)^m R_{k,m+\frac{1}{2}}\{(x+\delta)s\}] s^{-1} ds
 \end{aligned} \right\} (50)$$

wegen (20).

Das in (49) auftretende Integral mit  $\varphi_2(t)$  kann in ähnlicher Weise reduziert werden.

Nun strebt der erste Ausdruck auf der rechten Seite von (49) gegen  $\pi i F(x+0)$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  (siehe (39)). Um Beziehung (42) zu beweisen, brauche ich also nur zu zeigen, dass die auf der rechten Seite von (49)

<sup>21)</sup> Das Integral  $\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} N_{k-\frac{1}{2},m}(xs) R_{k+\frac{1}{2},m}(st) s^{-1} ds$  ist rein imaginär.

vorkommenden Integrale mit  $\varphi_1(t)$  und  $\varphi_2(t)$  beliebig klein gemacht werden können. Ich darf mich hierbei auf das Integral mit  $\varphi_1(t)$  beschränken.

Da  $\varphi_1(x + \delta) < \varepsilon$  ist für hinreichend kleine positive Werte von  $\delta$  (siehe (48)), folgt aus (50), dass ich nur zu zeigen brauche, dass das Integral

$$\int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) R_{k, m+\frac{1}{2}}(\eta s) s^{-1} ds \dots \dots \dots (51)$$

beschränkt ist für alle positive Werte von  $\lambda$  und für  $x < \eta \equiv x + \delta$ , wobei  $\eta$  von  $\lambda$  abhängig sein darf. Aus (26), (27) und (28) ergibt sich endlich, dass ich statt das Integral (51) nur die Integrale

$$\int_{\beta - \lambda i}^{\beta} e^{-\eta s} s^{2k-2} ds, \quad \int_{\beta}^{\beta + \lambda i} e^{-\eta s} s^{2k-2} ds, \quad \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} \frac{e^{(x-\eta)s} ds}{s},$$

also die Integrale

$$\int_{\eta(\beta - \lambda i)}^{\eta\beta} e^{-\zeta} \zeta^{2k-2} d\zeta, \quad \int_{\eta\beta}^{\eta(\beta + \lambda i)} e^{-\zeta} \zeta^{2k-2} d\zeta, \quad \int_{(\eta-x)(\beta - \lambda i)}^{(\eta-x)(\beta + \lambda i)} \frac{e^{-\zeta} d\zeta}{\zeta}$$

zu untersuchen brauche, und diese Integrale sind beschränkt, wie unmittelbar aus den Hilfssätzen 10 und 11 hervorgeht.

Hiermit ist der Beweis von (42) geliefert.

Genau so folgt (43) aus (47) und (40).

**Beweis von (44).** Aus (23) geht hervor

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) (xs)^{k-\frac{1}{2}} ds \int_0^{x-\delta} R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt \\ & = x^{k-\frac{1}{2}} \int_0^{x-\delta} F(t) t^{-k-\frac{1}{2}} dt \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) s^{-1} ds = U_1 + U_2 - U_3 - U_4, \end{aligned} \right\} (52)$$

worin

$$U_1 = x^k (\beta + \lambda i)^{-\frac{1}{2}} N_{k, m-\frac{1}{2}} \{(\beta + \lambda i) x\} \int_0^{x-\delta} \frac{R_{k+\frac{1}{2}, m} \{(\beta + \lambda i) t\} F(t) t^{-k-\frac{1}{2}} dt}{x-t} \quad (53)$$

und

$$U_2 = -(k+m) x^{k-\frac{1}{2}} (\beta + \lambda i)^{-\frac{1}{2}} N_{k+\frac{1}{2}, m} \{(\beta + \lambda i) x\} \int_0^{x-\delta} \frac{R_{k, m-\frac{1}{2}} \{(\beta + \lambda i) t\} F(t) t^{-k} dt}{x-t},$$

während  $U_3$  und  $U_4$  die entsprechenden Ausdrücke mit  $\beta - \lambda i$  statt  $\beta + \lambda i$  bezeichnen.

Ich untersuche jetzt das Verhalten des Integrals

$$\left\{ \int_0^{\lambda^{-1}} + \int_{\lambda^{-1}}^{x-\delta} \right\} \frac{R_{k+\frac{1}{2}, m} \{(\beta + \lambda i) t\} F(t) t^{-k-\frac{1}{2}} dt}{x-t}, \dots (54)$$

falls  $\lambda$  nach  $\infty$  strebt.

Für das Integral von 0 bis  $\lambda^{-1}$  findet man wegen (15) und (4)

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda^{-1}} \frac{R_{k+\frac{1}{2}, m} \{(\beta + \lambda i) t\} F(t) t^{-k-\frac{1}{2}} dt}{x-t} &= O \left\{ \lambda^{k+m} \int_0^{\lambda^{-1}} |F(t)| t^{-k+m} dt \right\} \\ &+ O \left\{ \lambda^{k-m} \int_0^{\lambda^{-1}} |F(t)| t^{-k-m} dt \right\} = O \left\{ \lambda^{k+\frac{1}{2}} \int_0^{\lambda^{-1}} |F(t)| dt \right\} = o(\lambda^{k+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Ist  $t \cong \lambda^{-1}$ , so benutze ich (man vergl. (26))

$$R_{k+\frac{1}{2}, m} \{(\beta + \lambda i) t\} = (\beta + \lambda i)^{k+\frac{1}{2}} t^{k+\frac{1}{2}} e^{-(\beta + \lambda i)t} + O\{(\lambda t)^{k-\frac{1}{2}}\};$$

für das in (54) stehende Integral von  $\lambda^{-1}$  bis  $x-\delta$  gilt daher <sup>22)</sup>

$$\begin{aligned} &\int_{\lambda^{-1}}^{x-\delta} \frac{R_{k+\frac{1}{2}, m} \{(\beta + \lambda i) t\} F(t) t^{-k-\frac{1}{2}} dt}{x-t} \\ &= (\beta + \lambda i)^{k+\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{x-\delta} - \int_0^{\lambda^{-1}} \right\} \frac{e^{-\beta t} F(t) e^{-i \lambda t} dt}{x-t} \\ &+ O \left\{ \lambda^{k-\frac{1}{2}} \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda^{-1}} |F(t)| t^{-1} dt \right\} + O \left\{ \lambda^{k-\frac{1}{2}} \int_{\lambda^{-1}}^{x-\delta} |F(t)| t^{-1} dt \right\} \\ &= o(\lambda^{k+\frac{1}{2}}) + O \left\{ \lambda^{k+\frac{1}{2}} \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda^{-1}} |F(t)| dt \right\} + O \left\{ \lambda^k \int_{\lambda^{-1}}^{x-\delta} |F(t)| dt \right\} = o(\lambda^{k+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Die beiden in (54) vorkommenden Integrale sind also  $o(\lambda^{k+\frac{1}{2}})$ . Aus (28) folgt aber, dass

$$(\beta + \lambda i)^{-\frac{1}{2}} N_{k, m-\frac{1}{2}} \{(\beta + \lambda i) x\} = O(\lambda^{-k-\frac{1}{2}}) + O(\lambda^{k-\frac{1}{2}}) \dots (55)$$

ist; der durch (53) definierte Ausdruck  $U_1$  ist daher  $o(1) + o(\lambda^{2k}) = o(1)$ , da  $k \cong 0$  ist. Für  $\lambda \rightarrow \infty$  konvergiert  $U_1$  also gegen Null.

<sup>22)</sup> Das Integral  $\int_0^{x-\delta} \frac{e^{-\beta t} F(t) e^{-i \lambda t} dt}{x-t}$  strebt nach Null für  $\lambda \rightarrow \infty$  wegen des



Auf dieselbe Weise zeigt man, dass auch  $U_2$ ,  $U_3$  und  $U_4$  nach Null streben für  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Hiermit ist der Beweis von (44) geliefert (siehe (52)).

Beweis von (45). Im wiederholten Integral

$$\int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) (xs)^{k-\frac{1}{2}} ds \int_{x+\delta}^{\infty} R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt \quad (56)$$

darf man die Reihenfolge der Integrationen umkehren. Ist  $k \equiv m \equiv -k$ ,  $t > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $y$  reell und  $s = \beta + iy$ , so gilt nämlich <sup>23)</sup>

$$|R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}}| \leq e^{-\beta t} \dots \dots \dots (57)$$

Hieraus und aus der zweiten Voraussetzung von Satz 1 geht hervor, dass das innere Integral in (56) gleichmässig in  $s$  konvergiert, so dass die Vertauschung der Integrationsfolge gestattet ist. Mit Rücksicht auf (23) bekommt man also (man vergl. auch (52))

$$\int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(xs) (xs)^{k-\frac{1}{2}} ds \int_{x+\delta}^{\infty} R_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt = V_1 + V_2 - V_3 - V_4,$$

worin

$$V_1 = x^k (\beta + \lambda i)^{-\frac{1}{2}} N_{k, m-\frac{1}{2}} \{(\beta + \lambda i) x\} \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{R_{k+\frac{1}{2}, m} \{(\beta + \lambda i) t\} F(t) t^{-k-\frac{1}{2}} dt}{x-t}$$

und

$$V_2 = -(k+m) x^{k-\frac{1}{2}} (\beta + \lambda i)^{-\frac{1}{2}} N_{k+\frac{1}{2}, m} \{(\beta + \lambda i) x\} \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{R_{k, m-\frac{1}{2}} \{(\beta + \lambda i) t\} F(t) t^{-k} dt}{x-t},$$

während  $V_3$  und  $V_4$  die entsprechenden Ausdrücke mit  $\beta - \lambda i$  statt  $\beta + \lambda i$  bezeichnen.

Nun folgt aus (26) für  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\int_{x+\delta}^{\infty} \frac{R_{k+\frac{1}{2}, m} \{(\beta + \lambda i) t\} F(t) t^{-k-\frac{1}{2}} dt}{x-t} = (\beta + \lambda i)^{k+\frac{1}{2}} \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{e^{-\beta t} F(t) e^{-i\lambda t} dt}{x-t} + O \left\{ \lambda^{k-\frac{1}{2}} \int_{x+\delta}^{\infty} e^{-\beta t} |F(t)| t^{-1} dt \right\} = o(\lambda^{k+\frac{1}{2}})$$

wegen des RIEMANN-LEBESGUESchen Lemmas.

<sup>23)</sup> (57) folgt aus (15) und Formel (A) von Fussnote \*).

Mit Rücksicht auf (55) gilt daher für  $V_1$ , ebenso wie für  $U_1$ ,

$$V_1 = \{O(\lambda^{-k-1}) + O(\lambda^{k-1})\} o(\lambda^{k+1}) = o(1),$$

so dass  $V_1$  nach Null strebt.

Genau so zeigt man, dass  $V_2$ ,  $V_3$  und  $V_4$  gegen Null konvergieren für  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Hiermit ist auch (45) bewiesen.

### § 6. Beweis von Satz 2.

Zur Vereinfachung der Bezeichnungen benutze ich die Abkürzungen (14) und (15).

Aus der zweiten Voraussetzung geht hervor, mit Rücksicht auf (26), (27) und (28), dass man im wiederholten Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty R_{k+\frac{1}{2}, m}(st)(st)^{-k-\frac{1}{2}} dt \int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} N_{k-\frac{1}{2}, m}(tz)(tz)^{k-\frac{1}{2}} f(z) dz$$

die Integrationsfolge vertauschen darf. Dieses Integral ist also gleich

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} f(z) dz \int_0^\infty R_{k+\frac{1}{2}, m}(st)(st)^{-k-\frac{1}{2}} N_{k-\frac{1}{2}, m}(tz)(tz)^{k-\frac{1}{2}} dt \\ = \frac{s^{-k-m}}{2\pi i} \int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} \frac{f(z) z^{k+m} dz}{s-z} \end{aligned} \right\} \dots (58)$$

wegen (29).

Nun besitzt das Integral

$$\frac{s^{-k-m}}{2\pi i} \left\{ \int_{\beta-\alpha i}^{\alpha-\alpha i} + \int_{\alpha-\alpha i}^{\alpha+\alpha i} + \int_{\alpha+\alpha i}^{\beta+\alpha i} + \int_{\beta+\alpha i}^{\beta-\alpha i} \right\} \frac{f(z) z^{k+m} dz}{z-s}$$

infolge des CAUCHYSCHEN Satzes für hinreichend grosses  $\alpha$  den Wert  $f(s)$ . Man kann aber leicht zeigen<sup>24)</sup> unter Benutzung der Voraussetzungen 3 und 4, dass die hierin vorkommenden Integrale von  $\beta-\alpha i$  bis  $\alpha-\alpha i$ , von  $\alpha-\alpha i$  bis  $\alpha+\alpha i$  und von  $\alpha+\alpha i$  bis  $\beta+\alpha i$  nach Null streben für  $\alpha \rightarrow \infty$ . Die rechte Seite von (58) ist daher gleich  $f(s)$ , womit Satz 2 bewiesen ist.

<sup>24)</sup> Man vergl. einen analogen Beweis bei CHURCHILL, [1], 570—571 und DOETSCH, [3], 127—128.

**Mathematics.** — *Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL. IV.* By J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

Multiplions les deux membres de (209) par  $\sin x$  resp.  $\cos x$  et ceux de (216) par  $\cos x$  resp.  $\sin x$ , alors nous trouvons par soustraction resp. addition des membres correspondants :

$$\int_0^x \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} da = \frac{\pi x}{2} \{ \sin x I_0(x) - \cos x I_1(x) \}, \quad (229)$$

$$\int_0^x \cos 2a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} da = \frac{\pi x}{2} \{ \cos x I_0(x) + \sin x I_1(x) \}, \quad (230)$$

En faisant de même à l'égard de (201) et (202), ainsi de (203) et (204), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \{ (2n+1) \sin x I_{2n+1}(x) - (2n+3) \cos x I_{2n+2}(x) \} = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} da = \frac{x}{2} \{ \sin x I_0(x) - \cos x I_1(x) \} \text{ en vertu de (225),} \end{aligned} \right\} (231)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \{ (2n+1) \cos x I_{2n+1}(x) + (2n+3) \sin x I_{2n+2}(x) \} = \\ & = \frac{2}{\pi} \int_0^x \cos^2 a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} da = \frac{x}{2} \{ 1 + \cos x I_0(x) + \sin x I_1(x) \} \text{ en vertu de (226),} \end{aligned} \right\} (232)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \{ (2n+1) \sin x I_{2n+2}(x) - (2n+3) \cos x I_{2n+3}(x) \} = \\ & = \frac{2}{\pi} \int_0^x \sin^2 a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} da = \frac{x}{2} \{ 1 - \cos x I_0(x) - \sin x I_1(x) \} \text{ en vertu de (226),} \end{aligned} \right\} (233)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \{ (2n+1) \cos x I_{2n+2}(x) + (2n+3) \sin x I_{2n+3}(x) \} = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} da = \frac{x}{2} \{ \sin x I_0(x) - \cos x I_1(x) \} \text{ en vertu de (225).} \end{aligned} \right\} (234)$$

De (198) nous faisons encore une autre application. A cause de la propriété des fonctions de BESSEL:  $\frac{2\nu}{x} I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)$  on peut écrire pour le membre gauche de (198) en y substituant  $\varrho = \nu + 1$ :

$$\begin{aligned} & \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \{ I_{2\nu+2n+1}(x) + I_{2\nu+2n+3}(x) \} = \\ & = \frac{x}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) I_{2\nu+2n+1}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) I_{2\nu+2n+3}(x) \right\} = \\ & = x I_{2\nu+1}(x) - \frac{x}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+4) I_{2\nu+2n+3}(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) I_{2\nu+2n+3}(x) \right\} = \\ & = x I_{2\nu+1}(x) - x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2\nu+2n+3}(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2\nu+2n+1}(x), \end{aligned}$$

de sorte que nous avons trouvé la formule suivante:

$$x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2\nu+2n+1}(x) = \int_0^x I_\nu(x-a) I_\nu(a) a da, \quad R(\nu) > -1. \quad (235)$$

Posons maintenant  $\nu = m$  resp.  $\nu = m - \frac{1}{2}$  ( $m$  entier positif ou nulle), alors nous trouvons en vertu des séries (b) et (c):

$$\int_0^x I_m(x-a) I_m(a) a da = (-1)^m \frac{x}{2} \left\{ \sin x - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n+1}(x) \right\}, \quad m \equiv 0 \quad (236)$$

$$\int_0^x I_{m-\frac{1}{2}}(x-a) I_{m-\frac{1}{2}}(a) a da = (-1)^m \frac{x}{2} \left\{ \cos x + I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n}(x) \right\}, \quad m \equiv 0; \quad (237)$$

de la dernière formule (211) et (212) sont des cas particuliers, nommément pour  $m = 0$  et  $m = 1$ .

§ 9. Si nous remplaçons dans (a)  $\nu$  par  $\nu + 2n$  et multiplions les deux membres par  $2^{\nu-\mu} \frac{(\nu+2n) \Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\mu+n+1)} \binom{\mu-\nu}{n}$ , alors nous trouvons, après la sommation sur  $n$  de 0 à  $\infty$  d'après III:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2^{\nu-\mu}}{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu+2n) \Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\mu+n+1)} \binom{\mu-\nu}{n} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \\ & = \int_0^x I_\mu(x-a) I_{\varrho+1}(a) (x-a)^{\nu-\mu} \frac{da}{a}, \left\{ \begin{array}{l} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (238)$$

qui pour  $\mu = \nu - 1$  se réduit à (89). Alors nous supposons maintenant  $\mu \neq \nu - 1$ .

En substituant  $\varrho = -\frac{1}{2}$  on obtient la formule particulière:

$$\left. \begin{aligned} 2^{\nu-\mu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu+2n) \Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\mu+n+1)} \binom{\mu-\nu}{n} I_{\nu+2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\mu}(x-a) \sin a \cdot (x-a)^{\nu-\mu} \frac{da}{a \sqrt{a}}, R(\nu) > -1. \end{aligned} \right\} \quad (239)$$

La substitution  $\mu = \nu + m$  resp.  $\mu = \nu - m - 2$  ( $m$  entier positif ou nulle) dans (238) et (239) donne les formules particulières:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{\nu+m}(x-a) I_{\varrho+1}(a) \frac{da}{a(x-a)^m} = \\ = \frac{1}{2^m(\varrho+1)} \sum_{n=0}^m \frac{(\nu+2n) \binom{m}{n}}{(\nu+m+n)(\nu+m+n-1)\dots(\nu+n)} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x), \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (240)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_{\nu+m}(x-a) \sin a \frac{da}{a(x-a)^m \sqrt{a}} = \\ = \frac{1}{2^m(\varrho+1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^m \frac{(\nu+2n) \binom{m}{n}}{(\nu+m+n)(\nu+m+n-1)\dots(\nu+n)} I_{\nu+2n+\frac{1}{2}}(x), \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ m \equiv 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2^{m+2}(m+1)!}{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n) \binom{\nu+n-1}{m+1} \binom{m+n+1}{n} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \\ = \int_0^x I_{\nu-m-2}(x-a) I_{\varrho+1}(a) (x-a)^{m+2} \frac{da}{a}, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \\ m \equiv 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (242)$$

$$\left. \begin{aligned} 2^{m+3}(m+1)! \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n) \binom{\nu+n-1}{m+1} \binom{m+n+1}{n} I_{\nu+2n+\frac{1}{2}}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_{\nu-m-2}(x-a) \sin a \cdot (x-a)^{m+2} \frac{da}{a \sqrt{a}}, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ m \equiv 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

En substituant  $\mu = -\frac{1}{2}$  resp.  $\mu = \frac{1}{2}$  dans (238) et (239) on trouve après une légère réduction:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma(\nu+1) 2^{\nu}}{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\nu+2n}{n} \binom{2\nu+2n-1}{2n-1} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \\ = \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \cos(x-a) \cdot (x-a)^{\nu} \frac{da}{a}, \begin{cases} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (244)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma(\nu) 2^\nu}{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\nu+2n}{2n+1} \binom{2\nu+2n-2}{2n} I_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \\ = \int I_{\varrho+1}(a) \sin(x-a) \cdot (x-a)^{\nu-1} \frac{da}{a}, \quad \left. \begin{array}{l} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{array} \right\} \dots (245) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\nu+1) 2^{\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\nu+2n}{n} \binom{2\nu+2n-1}{n} I_{\nu+2n+1}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin a \cos(x-a) \cdot (x-a)^\nu \frac{da}{a\sqrt{a}}, \quad R(\nu) > -1 \end{aligned} \right\} \dots (246)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\nu) 2^{\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\nu+2n}{2n+1} \binom{2\nu+2n-2}{2n} I_{\nu+2n+1}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin a \sin(x-a) \cdot (x-a)^{\nu-1} \frac{da}{a\sqrt{a}}, \quad R(\nu) > -1. \end{aligned} \right\} \dots (247)$$

La substitution  $\nu=0$  dans (244) et (246) donne (2) et (35), ainsi  $\nu=1$  dans (245) et (248) donne (1) et (34) comme des cas particuliers.

En substituant  $\nu=1$  dans (244) et  $\nu=2$  dans (245) on trouve:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 I_{\varrho+2n+2}(x) = \\ = \frac{\varrho+1}{2} \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \cos(x-a) \cdot \frac{x-a}{a} da, \quad R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \dots (248)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)^2 I_{\varrho+2n+3}(x) = \\ = \frac{\varrho+1}{2} \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \sin(x-a) \cdot \frac{x-a}{a} da, \quad R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \dots (249)$$

Substituons nous dans (180) et (181)  $\nu=\varrho+1$  et multiplions nous les deux membres par  $\frac{\varrho+1}{2}$ , alors nous trouvons en ajoutant les deux membres aux membres correspondants de (248) et (249):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(\varrho+2n+2) I_{\varrho+2n+2}(x) = \\ = \frac{(\varrho+1)x}{2} \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \cos(x-a) \frac{da}{a}, \quad R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \dots (250)$$



$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(\varrho+2n+3) I_{\varrho+2n+3}(x) = \\ = \frac{(\varrho+1)x}{2} \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \sin(x-a) \frac{da}{a}, \quad R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

Remplaçons dans  $I \varrho$  par  $\varrho+1$  resp.  $\varrho+2$  et multiplions les deux membres par  $\varrho+1$ , alors nous trouvons en ajoutant les deux membres aux membres correspondants de (250) resp. (251):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\varrho+2n+2)^2 I_{\varrho+2n+2}(x) = \\ = \frac{(\varrho+1)x}{2} \left\{ I_{\varrho+1}(x) + \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \cos(x-a) \frac{da}{a} \right\}, \quad R(\varrho) > -1 \end{aligned} \right\} \quad (252)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\varrho+2n+3)^2 I_{\varrho+2n+3}(x) = \\ = \frac{(\varrho+1)x}{2} \left\{ I_{\varrho+2}(x) + \int_0^x I_{\varrho+1}(a) \sin(x-a) \frac{da}{a} \right\}, \quad R(\varrho) > -1. \end{aligned} \right\} \quad (253)$$

Les intégrales qui paraissent dans (250) jusqu'à (253) avons nous déjà rencontrées dans (1) et (2); alors on a (qu'on peut déduire aussi directement):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(\varrho+2n+2) I_{\varrho+2n+2}(x) = \\ = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\varrho+2n+1}(x) - \frac{x}{2} I_{\varrho+1}(x), \end{aligned} \right\} \quad (254)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(\varrho+2n+3) I_{\varrho+2n+3}(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\varrho+2n+2}(x), \quad (255)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\varrho+2n+3)^2 I_{\varrho+2n+3}(x) = \\ = \frac{(\varrho+1)x}{2} I_{\varrho+2}(x) + x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\varrho+2n+2}(x). \end{aligned} \right\} \quad (256)$$

En vertu des séries (b) et (e) nous trouvons en substituant dans (254), (255) et (256)  $\varrho = 2m-1$  resp.  $\varrho = 2m$  ( $m$  entier positif ou nulle):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2m+2n+1) I_{2m+2n+1}(x) = \\ = (-1)^m \frac{x}{2} \left\{ \cos x + I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n}(x) \right\} - \frac{x}{2} I_{2m}(x), \quad m \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (257)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2m+2n+2) I_{2m+2n+2}(x) &= \\ = (-1)^m \frac{x}{2} \left\{ \sin x - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n+1}(x) \right\} - \frac{x}{2} I_{2m+1}(x), \quad m \equiv 0 \end{aligned} \right\} \dots (258)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2m+2n+2) I_{2m+2n+2}(x) &= \\ = (-1)^m \frac{x}{2} \left\{ \sin x - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n+1}(x) \right\}, \quad m \equiv 0 \end{aligned} \right\} \dots (259)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2)(2m+2n+3) I_{2m+2n+3}(x) &= \\ = (-1)^{m+1} \frac{x}{2} \left\{ \cos x + I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n I_{2n}(x) \right\}, \quad m \equiv -1 \end{aligned} \right\} (260)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2m+2n+2)^2 I_{2m+2n+2}(x) &= \\ = (-1)^m \frac{x}{2} \left\{ \sin x - 2 \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n I_{2n+1}(x) \right\} + mx I_{2m+1}(x), \quad m \equiv 0 \end{aligned} \right\} (261)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2m+2n+3)^2 I_{2m+2n+3}(x) &= \\ = (-1)^{m+1} \frac{x}{2} \left\{ \cos x + I_0(x) - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n I_{2n}(x) \right\} + \frac{(2m+1)x}{2} I_{2m+2}(x), \quad m \equiv -1. \end{aligned} \right\} (262)$$

Les cas particuliers  $m=0$  ou  $m=-1$  avons nous déjà rencontrés; voir (210), (213) et (223).

§ 10. Eu égard à la série connue<sup>1)</sup>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} I_{r+2n+1}(x) = \frac{\sqrt{\pi x}}{2} I_{r+1}\left(\frac{x}{2}\right) I_r\left(\frac{x}{2}\right) \quad (IV)$$

nous remplaçons dans (a)  $r$  par  $r+2n$  et ensuite nous multiplions les deux membres par  $(-1)^n \binom{-1/2}{n}$ ; alors la sommation sur  $n$  de 0 à  $\infty$  et le changement des membres nous donne:

$$\begin{aligned} \int_0^x I_r\left(\frac{x-a}{2}\right) I_{r-1}\left(\frac{x-a}{2}\right) I_{\varrho+1}(a) \frac{\sqrt{x-a}}{a} da &= \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\varrho+1} I_{r+\varrho+1}\left(\frac{x}{2}\right) I_{r+\varrho}\left(\frac{x}{2}\right), \quad \begin{cases} R(r) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> NIELSEN, l. c. p. 270, (4).

ou en remplaçant  $\nu$  par  $2\nu$ ,  $\varrho$  par  $2\varrho$ ,  $x$  par  $2x$  et  $a$  par  $2a$ :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_\nu(x-a) I_{\nu-1}(x-a) I_{2\varrho+1}(2a) \frac{\sqrt{x-a}}{a} da = \\ = \frac{\sqrt{x}}{2\varrho+1} I_{\nu+\varrho+1}(x) I_{\nu+\varrho}(x), \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} R(\nu) > -\frac{1}{2} \\ R(\varrho) > -\frac{1}{2}. \end{array} \quad \dots (263)$$

En  $y$  substituant successivement  $\varrho = -\frac{1}{2}$ ,  $\nu = 0$ ,  $\nu = \frac{1}{2}$  et  $\nu = 1$  on trouve les formules particulières:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_\nu(x-a) I_{\nu-1}(x-a) \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} \frac{da}{a} = \\ = 2\sqrt{\pi x} I_{\nu+\frac{1}{2}}(x) I_{\nu-1}(x), \end{aligned} \right\} R(\nu) > -\frac{1}{2} \quad \dots (264)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) I_{2\varrho+1}(2a) \cos(x-a) \frac{da}{a} = \frac{1}{2\varrho+1} \sqrt{\frac{\pi x}{2}} I_{\varrho+\frac{1}{2}}(x) I_\varrho(x), \quad R(\varrho) > -\frac{1}{2} \quad (265)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_0(x-a) I_{2\varrho+1}(2a) \sin(x-a) \frac{da}{a} = \\ = \frac{1}{2\varrho+1} \sqrt{\frac{\pi x}{2}} I_{\varrho+\frac{1}{2}}(x) I_{\varrho+\frac{1}{2}}(x), \end{aligned} \right\} R(\varrho) > -\frac{1}{2} \quad \dots (266)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_1(x-a) I_{2\varrho+1}(2a) \sin(x-a) \frac{da}{a} = \\ = \frac{1}{2\varrho+1} \sqrt{\frac{\pi x}{2}} I_{\varrho+\frac{1}{2}}(x) I_{\varrho+1}(x), \end{aligned} \right\} R(\varrho) > -\frac{1}{2}. \quad \dots (267)$$

Après avoir multiplié les deux membres de (265) par  $\sin x$  resp.  $\cos x$  et ceux de (266) par  $\cos x$  resp.  $\sin x$ , nous trouvons par soustraction resp. addition des membres correspondants:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_0(x-a) I_{2\varrho+1}(2a) \sin a \frac{da}{a} = \\ = \frac{1}{2\varrho+1} \sqrt{\frac{\pi x}{2}} I_{\varrho+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_\varrho(x) - \cos x I_{\varrho+1}(x) \}, \end{aligned} \right\} R(\varrho) > -\frac{1}{2} \quad (268)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x I_0(x-a) I_{2\varrho+1}(2a) \cos a \frac{da}{a} = \\ = \frac{1}{2\varrho+1} \sqrt{\frac{\pi x}{2}} I_{\varrho+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_\varrho(x) + \sin x I_{\varrho+1}(x) \}, \end{aligned} \right\} R(\varrho) > -\frac{1}{2}. \quad (269)$$

La substitution  $\varrho = -\frac{1}{4}$ ,  $\varrho = 0$  et  $\varrho = \frac{1}{4}$  dans (265) jusqu'à (269) donne les formules particulières :

$$\int_0^x I_0(x-a) \cos(x-a) \sin 2a \frac{da}{a\sqrt{a}} = \pi \sqrt{2x} I_1(x) I_{-1}(x), \quad (270)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) \sin(x-a) \sin 2a \frac{da}{a\sqrt{a}} = \pi \sqrt{2x} I_1(x) I_1(x), \quad (271)$$

$$\int_0^x I_1(x-a) \sin(x-a) \sin 2a \frac{da}{a\sqrt{a}} = \pi \sqrt{2x} I_1(x) I_1(x), \quad (272)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) \sin a \sin 2a \frac{da}{a\sqrt{a}} = \pi \sqrt{2x} I_1(x) \{ \sin x I_{-1}(x) - \cos x I_1(x) \}, \quad (273)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) \cos a \sin 2a \frac{da}{a\sqrt{a}} = \pi \sqrt{2x} I_1(x) \{ \cos x I_{-1}(x) + \sin x I_1(x) \}, \quad (274)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) I_1(2a) \cos(x-a) \frac{da}{a} = \sin x I_0(x), \quad (275)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) I_1(2a) \sin(x-a) \frac{da}{a} = \sin x I_1(x), \quad (276)$$

$$\int_0^x I_1(x-a) I_1(2a) \sin(x-a) \frac{da}{a} = \frac{1}{2x} (\sin x - x \cos x) I_1(x), \quad (277)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) I_1(2a) \sin a \frac{da}{a} = \sin x \{ \sin x I_0(x) - \cos x I_1(x) \}, \quad (278)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) I_1(2a) \cos a \frac{da}{a} = \sin x \{ \cos x I_0(x) + \sin x I_1(x) \}, \quad (279)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) I_2(2a) \cos(x-a) \frac{da}{a} = \frac{1}{2} \sin x I_1(x), \quad (280)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) I_2(2a) \sin(x-a) \frac{da}{a} = \frac{1}{2x} (\sin x - x \cos x) I_1(x), \quad (281)$$

$$\int_0^x I_1(x-a) I_2(2a) \sin(x-a) \frac{da}{a} = \frac{1}{2x} (\sin x - x \cos x) I_2(x), \quad (282)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) I_2(2a) \sin a \frac{da}{a} = \frac{1}{2x} (\sin x - x \cos x) I_1(x), \quad (283)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) I_2(2a) \cos a \frac{da}{a} = \frac{\sin^2 x}{2x} I_1(x). \quad (284)$$

§ 11. En égard aux séries  $2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2n+1}(x) \sin x$  et  $2 \sum_{n=0}^{\infty} I_{4n+2}(x) = \sin^2 \frac{1}{2} x$  nous substituons dans (235)  $\rho = n$  resp.  $\rho = 2n + \frac{1}{2}$  et ensuite nous multiplions les deux membres par  $2(-1)^n$  resp.  $2$ ; alors la sommation sur  $n$  de 0 à  $\infty$  et le changement des membres nous donne:

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{v+n+\frac{1}{2}}(x) I_{v+n}(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_v(x-a) I_{v-\frac{1}{2}}(x-a) \sin 2a \cdot \sqrt{x-a} \frac{da}{a}, \quad R(v) > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} (285)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{v+2n+1}(x) I_{v+2n+\frac{1}{2}}(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_v(x-a) I_{v-\frac{1}{2}}(x-a) \sin^2 a \cdot \sqrt{x-a} \frac{da}{a}, \quad R(v) > -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} (286)$$

Si nous substituons dans (285) et (286) successivement  $v=0$ ,  $v=\frac{1}{2}$  et  $v=1$ , nous trouvons comme formules particulières:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{n+\frac{1}{2}}(x) I_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x-a) \sin 2a \frac{da}{a}, \quad (287)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{n+1}(x) I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x-a) \sin 2a \frac{da}{a}, \quad (288)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{n+\frac{1}{2}}(x) I_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_0}} \int_0^x I_1(x-a) \sin(x-a) \sin 2a \frac{da}{a}, \quad (289)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{2n+\frac{1}{2}}(x) I_{2n+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x_0}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x-a) \sin^2 a \frac{da}{a}, \quad (290)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{2n+2}(x) I_{2n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x_0}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x-a) \sin^2 a \frac{da}{a}, \quad (291)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{2n+\frac{1}{2}}(x) I_{2n+2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x_0}} \int_0^x I_1(x-a) \sin(x-a) \sin^2 a \frac{da}{a}, \quad (292)$$

En multipliant les deux membres de (287) par  $\sin x$  resp.  $\cos x$  et ceux de (288) par  $\cos x$  resp.  $\sin x$  on trouve après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants, et en faisant de même à l'égard de (290) et (291):

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_n(x) - \cos x I_{n+1}(x) \} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{2n+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_{2n+1}(x) + \sin x I_{2n+2}(x) \} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_0}} \int_0^x I_0(x-a) \sin 2a \sin a \frac{da}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (293)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_n(x) + \sin x I_{n+1}(x) \} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_0}} \int_0^x I_0(x-a) \sin 2a \cos a \frac{da}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (294)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} I_{2n+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_{2n+1}(x) - \cos x I_{2n+2}(x) \} = \\ & = \sqrt{\frac{2}{\pi x_0}} \int_0^x I_0(x-a) \sin^3 a \frac{da}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (295)$$

§ 12. En remplaçant dans (263)  $\varrho$  par  $\varrho + n$  et en multipliant les deux membres par  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{x}} (2\varrho + 2n + 1)$ , on trouve après la sommation



sur  $n$  de 0 à  $\infty$ , ayant égard à  $I$  et en changeant les membres:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\nu+\varrho+n+\frac{1}{2}}(x) I_{\nu+\varrho+n}(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_{\nu}(x-a) I_{\nu-\frac{1}{2}}(x-a) I_{2\varrho}(2a) \cdot \sqrt{x-a} da, \quad \left. \begin{aligned} \{ R(\nu) > -\frac{1}{2} \\ \{ R(\varrho) > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (296)$$

ou en posant  $\nu = \mu - \varrho - \frac{1}{2}$ :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+n}(x) I_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_{\mu-\varrho-\frac{1}{2}}(x-a) I_{\mu-\varrho-1}(x-a) I_{2\varrho}(2a) \sqrt{x-a} da, \quad \left. \begin{aligned} R(\mu) > R(\varrho) > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (297)$$

En substituant dans (296)  $\varrho = \mu - \frac{1}{2}$  et  $\nu = 0$  resp.  $\nu = \frac{1}{2}$ , ainsi  $\nu = \mu - \frac{1}{2}$  et  $\varrho = -\frac{1}{4}$  resp.  $\varrho = \frac{1}{4}$ , on obtient les formules particulières:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+n}(x) I_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x) &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) I_{2\mu-1}(2a) \cos(x-a) da, \quad \left. \begin{aligned} R(\mu) > 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (298)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+n+\frac{1}{2}}(x) I_{\mu+n}(x) &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) I_{2\mu-1}(2a) \sin(x-a) da, \quad \left. \begin{aligned} R(\mu) > 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (299)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x) I_{\mu+n-1}(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(x-a) I_{\mu-1}(x-a) \cos 2a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} da, \quad \left. \begin{aligned} R(\mu) > 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (300)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+n+\frac{1}{2}}(x) I_{\mu+n-1}(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(x-a) I_{\mu-1}(x-a) \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} da, \quad \left. \begin{aligned} R(\mu) > 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (301)$$

Multiplions les deux membres de (298) par  $\sin x$  resp.  $\cos x$  et ceux de (299) par  $\cos x$  resp.  $\sin x$ , alors nous trouvons après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+n}(x) \{ \sin x I_{\mu+n-1}(x) - \cos x I_{\mu+n+1}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) I_{2\mu-1}(2a) \sin a \, da, \quad R(\mu) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (302)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+n}(x) \{ \cos x I_{\mu+n-1}(x) + \sin x I_{\mu+n+1}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) I_{2\mu-1}(2a) \cos a \, da, \quad R(\mu) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (303)$$

En multipliant les deux membres de (300) par  $\sin 2x$  resp.  $\cos 2x$  et ceux de (301) par  $\cos 2x$  resp.  $\sin 2x$ , on obtient après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+n-1}(x) \{ \sin 2x I_{\mu+n-1}(x) - \cos x I_{\mu+n+1}(x) \} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^x I_{\mu-1}(a) I_{\mu-1}(a) \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} \, da, \quad R(\mu) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (304)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\mu+n-1}(x) \{ \cos x I_{\mu+n-1}(x) + \sin x I_{\mu+n+1}(x) \} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^x I_{\mu-1}(a) I_{\mu-1}(a) \cos 2a \cdot \sqrt{\frac{a}{x-a}} \, da, \quad R(\mu) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (305)$$

**Anatomy.** — *Hemiballism and Biballism.* By C. BAUMANN. (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS.)

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

Considering the relatively rare occurrence of pure hemiballism and the fact that hitherto only one case of biballism is mentioned in literature we take the opportunity offered by two patients, one with hemiballism, the other with biballism to compare the clinical facts occurring in these cases. Since both patients are still alive post-mortem data cannot be reported, but the cases themselves are interesting enough to be published.

Although the definition of ballism, as given by different authors varies in details, the most important symptoms may be summarized as follows: The non-pyramidal involuntary co-movements observed in these patients are conspicuous by force and extension. They are usually not limited to one group of muscles or to a part of an extremity, but involve the whole extremity in such a way that it makes the impression as if the patient were throwing or kicking. This impression arises from the fact that in hemiballism of an arm not only the hand or fore-arm but the whole upper extremity including the shoulder girdle is involved. Besides, the movement is usually excessive and may include rotation of the trunk and neck. In ballistic movements of the leg the pelvic girdle may be involved. Whereas the range of the movements is great they are not frequent and compared with the movements in chorea Huntingtonia they are less quick. In some cases they make the impression of being phasic in character. Starting quite suddenly after a few minutes they usually lessen, to disappear gradually.

As stated above the majority of the cases hitherto mentioned are one-sided. They may apparently be the result of various brain affections. Appearing in a rather abrupt way on one side only, they usually involve arm and leg. Involvement of the face (sometimes on one side only) is more frequent than that of the trunk. The facial phenomena may include forced laughing or dysasthric speech. In a few cases hemiballism is accompanied with slight pyramidal disturbances on the same side.

An important fact to be noted is that the ballistic side of the body is usually *hypotonic* and that in most cases sensory and coordinative functions are entirely unimpaired. The phenomena mentioned increase by emotion and disappear in sleep.

The following case in my observation — the youngest ever described in literature — illustrates the facts mentioned above. It concerns a young man of 19 years, whose parents were perfectly healthy. Birth was normal and in his early youth no infectious diseases of any importance occurred.

Although the boy learned speaking and walking within the normal time, in the course of the first years the mother noticed that the boy did not use his right leg normally. When walking he was inclined to turn his feet inside and he showed a tendency to walk on his toes. Apart from this his gait was normal before his 7th year. From that year on it became abnormal and the boy developed a pointed foot which could not be changed by bandaging with plaster of Paris. Contemporaneous co-movements of arm and leg on one side were first observed in his 8th year. As this caused him to fall, patient was sent to school in a car. Also in the intervals walking was poor and although patient showed no distinct intellectual defects, he had great difficulties in following his lessons.



Fig. 1.

Patient G. v. K. during an attack of hemiballism. The right arm is swung entirely backward.



Fig. 2.

The same patient during a following attack. Right arm and right leg are jerked backward while elbow and wrist are kept in flexure position. The right lower leg is moved backward and outward.

Internal organs, urine, bloodserum and liquor were normal. Neurological examination revealed no disturbance of surface or deep sensibility. Senseorgans normal. As far as concerns motility, the cranial nerves are intact, no nystagmus, no squinting. Using the dynamometer the force of his right hand proves to be smaller than of his left. Movements in the thumb and the small muscles of the right hand are limited. No atrophy and no hypotony in the arm muscles can be stated. In both legs active motility is normal. The left foot is kept in normal flexion, but the right foot shows a maximal flexion- and adduction-contracture. In walking — which can be only done with the help of others — patient stands on his toes which influences his entire attitude also in standing. Pupils normal, armreflexes high and thumb-carpal reflex positive on both sides. Left abdominal

reflex lower than right. Whereas the tonus in the knee is about the same on both sides, the right knee reflex is higher than the left. Achilles reflex very high on both sides. Double-sided Babinski. The contracture in his right foot cannot be taken away. No coordination disturbances in the arms, no cerebellar symptoms. Speech, though sometimes stuttering, is usually normal. No vegetative disturbances.

The most striking symptoms are the purely monolateral hemiballistic attacks in the right arm and leg. These started suddenly with a strong backward or sideward co-movement of the right leg. During these movements the knee remained in flexion. At the same time patient started to throw out his right arm, which was slung backward in the shoulder girdle, while the elbow and wrist were kept in flexure position.

The ballistic movements appeared once in a second but their frequency varied.

It should be noted that the ballistic movements in this patient developed quite gradually, not as a consequence of a febrile disease. Apparently we have here a pure case of hemiballism based upon a gradual degenerative process, not an acute case as usually results from an infectious or vascular origin. Furthermore it is interesting that in the intervals, patient developed walking disturbances which finally presented themselves under the image of a spastic spinal paralysis.

We now turn to the case of bilateral ballism, the second hitherto published. The first case was described by RAKONITZ ('33). Before analysing that case we will give the details of our patient. It concerns a man of 58 years.

May 1939 this man came to me complaining of walking difficulties. Before that time he had always been healthy. No lues. One morning he suddenly felt dizzy, the world round him turned. This was followed by headache without nausea or vomiting. After this vertigo patient had difficulties in walking. He felt as if he were drunk, while at the same time he had a feeling as if somebody poured water over his back. One week after this patient returned, telling that one morning when he sat reading he was attacked by sudden shocks commencing simultaneously in both legs, which were lifted as if he would kick somebody. The frequency was about 1 per second. The ankle and knee joints were stretched and the leg lifted in the hip joint. The first attacks were limited to the legs, but soon they spread over the trunk, arms and head. The arms were lifted in the shoulder girdle and the elbow and wrist joints flexed. These arm movements too were practically symmetric and could not be fully repressed. The movements were large ones, 1 per second, like those of the legs. Trunk and head movements were of the same type and frequency. Those of the head were nodding movements, which could not be repressed voluntarily. The attack usually lasted one minute. During this time patient was not able to stand or to go and had to wait for the end of it in his chair. Consciousness did not leave him a moment and patient could tell all the details of his attack. During the attack and shortly after speech was considerably impaired and resembled that of an inebriate. Incontinentia and tongue bite did not occur. Once during an attack I was able to examine his footsole reflex and found a Babinski on the left. Strong perspiration over the whole body. During the attack he usually was hypersensitive to light and touch. Attempts to keep the patient upright failed, as he was inclined to fall backward and every attempt to make him take some steps failed in consequence of the throwing movements of his legs. When he sat these movements sometimes resulted in a clasping together of the legs. During



Fig. 3.

Film fragments of an attack during which patient S. makes nodding movements with his head, which slightly rotates, but is mainly moved forward and backward. At the same time the trunk is somewhat bent and stretched, both arms are moved a little up and down in the shoulders, during which elbows and fingers are flexed. The co-movements also occur in the legs, which are sometimes strongly affected. The frequency of the various co-movements was usually 1 per second. Often patient could tell when an attack was coming. They were sometimes announced by increased emotionality.



the attack the tonus of all extremities was strikingly *low*. Trying the heel-knee and finger-nose experiments he usually made considerable mistakes.

Sometimes patient was free from attacks for several days. On other days he had several attacks, one after another, each lasting some minutes. Although his emotionality was raised by his illness patient showed no signs whatever of mental deterioration.

In the intervals his neurological status was about normal, his sense of pain and touch and deep sense were unimpaired and so were vision and audition. Fundus oculi normal, hearing left and right 4 M, tune fork audition normal on both sides. No hypersensitiveness of the labyrinth. No motor disturbances in extremities, trunk or head, no double-vision, no nystagmus, pupils normal.

Arm, leg and abdominal reflexes normal and equal on both sides. Some pointing defect in the right finger, but far less than during an attack. Only the tonus in his right leg was evidently *lower* in the intervals and his gait was that of a sailor, legs spread. Blood and liquor reactions, normal.

As stated before hitherto RAKONITZ has been the only one to give a detailed description of a case of bilateral ballism or biballism. Our case resembles that of RAKONITZ in all principal features. In both cases we have symmetrical wide range movements. Although in my case these movements set on in the legs, after the attacks became more numerous the arms were most affected. The movements in the legs could also be repressed somewhat more than those of the arms.

During the attack our patient had evident speech disturbances and coordination disturbances of arms and legs.

Since in our case the symptoms probably were of arteriosclerotic origin it is not strange that the onset of the attacks had a rather apoplectiform character, in contrary to RAKONITZ's case of biballism and our case of monoballism mentioned above, which probably resulted from degenerative processes.

With RAKONITZ I am inclined to accept a double-sided affection of the corpus subthalamicum as the cause of biballism. In hemiballism VON ECONOMO ('12), MARTIN ('27), SANTHA ('32), and others constantly found a partial or total atrophy of the contralateral corpus Luysii. A comparison of the findings of various authors who had the opportunity to study the postmortems of their cases shows that no lesions of field H, and H2 of FOREL, the posterior part of the internal capsula nor of the zona incerta, red nucleus or substantia nigra are constant findings in hemiballism. Since, however, in most cases the origin of the disease was to be sought for in arteriosclerosis or some other vascular disease it is not strange that focuses in these cases are not limited to the corpus subthalamicum only. MATZDORFF ('27), WENDEROWIC ('28), PELNAR and SICKL ('29) and BALTHASAR ('30) mention additional dorsal thalamic lesions<sup>1)</sup> on the same side of the diseased corpus subthalamicum but in SANTHA's ('32) case and also in the patient described by HAMPEL ('36) no dorsal thalamic lesion was found.

<sup>1)</sup> An influence of the thalamus proper on the corp. subthalamicum might be effectuated indirectly by thalamic projections on the corpus striatum and hence by fibres of the ansa lenticularis to the c. Luysii.



The frontal connections of the corpus subthalamicum are such that descending pathways from the globus pallidus reach it via its capsular fibres. Fibres from the corpus subthalamicum to the striate body are probably far less numerous. At any rate the globus pallidus is superimposed on the functions of the corpus subthalamicum. This also explains the fact observed by KASHIDA ('25), who noted that lesions of the strio-subthalamic pathways may give rise to co-movements resembling ballistic ones. Since, however, in KASHIDA's case a bilateral interruption of the ansa lenticularis was accompanied with a bilateral lesion of the globus pallidus, this explains the *hypertonic* condition of the extremities in his patient. As stated above hypertonicity is not found in ballism resulting from a degeneration of the corpus subthalamicum only. In such circumscribed subthalamic lesions, the tonus in the affected extremities is usually *lowered*.

Also in RAKONITZ' case as in ours there was a *hypotonicity*. It is difficult to explain this *hypotonicity*, the more so as MORGAN ('28) in his experiments on dogs found lesions of the subthalamic nucleus to be constantly accompanied with hypertonicity. Choreatic or ballistic movements are not mentioned by MORGAN. The author, however, states that there was a partial recovery of all symptoms including the stiffness already in the few (10) days before the animals were killed to be examined for Marchi degeneration. So the question arises if the symptoms observed by MORGAN are complicated by excitation of adjacent tonetic systems. What causes the hypotonicity in our and other clinical cases? Does it depend on degeneration of tonic fibres reaching the subthalamic nucleus from the cortex or from the vestibular region? In Mammals no labyrinthine connection of the corpus subthalamicum has been observed, but the vestibulo-hypothalamic projection, described by WALLENBERG ('07) for birds and lower vertebrates make it possible that similar connections also exist in Mammals. If this be true their interruption might be responsible for the hypotonicity. While for the few cases of biballism now published double-sided lesions are to be considered first of all, attention should also be given to the possibility of commissural connections of the corpora subthalamica of both sides and the possibility of crossed and direct descending fibres (fig. 4).

In this respect HAMPEL's case of hemiballism may be instructive, since in his case, where the lesion was distinctly confined to the contralateral corp. subthalamicum, in the later stages of the disease indications of ballism on the homolateral side were added to the prevailing hemiballistic syndrome.

For the explanation of speech disturbances and more generalized ballistic movements of the trunk, bilateral descending or commissural connections should also be considered.

That for the chief symptoms of the ballistic syndrome, the movements of arms and legs, the subthalamic nucleus is responsible is also proved by the fact demonstrated by MELLA ('23) that normal associated movements of the fore- and hindlegs of the cat are localized in this nucleus. That in

man these movements are practically localized on one side — the contralateral side — is best illustrated by BALTHASAR's case in which, notwithstanding the fact that in addition to the total destruction of the contralateral corpus subthalamicum there was a small lesion in the homolateral corpus subthalamicum, yet the arm and leg symptoms were entirely restricted to the side influenced by the large controlateral focus.

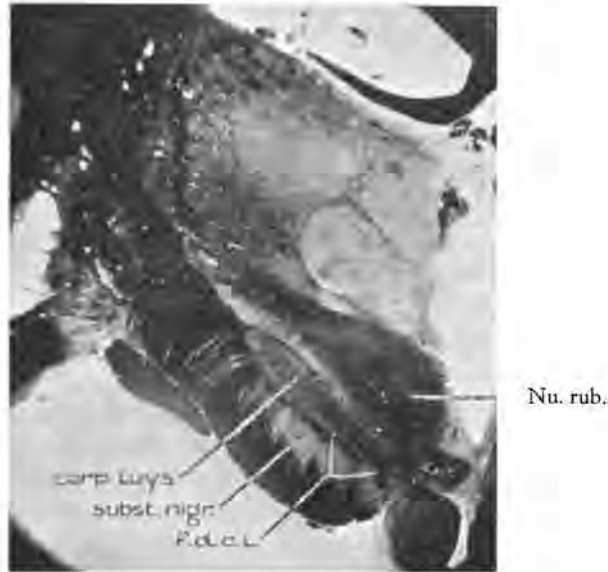


Fig. 4.

Transverse section through the human thalamus showing the corpus Luysii; substantia nigra and frontal pole of the nucl. ruber. Descending fibres (f.d.c.L.) leave the corpus Luysii at its mesial side. Part of these fibres decussate.

Whereas the afferent systems to the corpus subthalamicum are more or less known, accurate data concerning its descending connections are unfortunately very scarce. The experimental data in dogs published by MORGAN only reveal short descending pathways to a group of cells situated above the pedunculus corporis mamillaris, medially to the substantia nigra and distinct from the latter. In MARTIN's case the descending fibres of the corpus subthalamicum have a different position from those experimentally demonstrated by MORGAN which correspond to the system mentioned by CAJAL. Whereas in MORGAN's and CAJAL's descriptions the descending fibres are located medially to the main mass of the substantia nigra, those indicated by MARTIN run dorso-laterally to the red nucleus.

The system indicated in our microphotograph of a normal human thalamus corresponds to CAJAL's and MORGAN's fibres. Eventual post-mortems of our cases may perhaps give us more accurate data concerning the descending pathways of the corpus Luysii.

## LITERATURE.

- BALTHASAR, Ueber das Syndrom des Corpus Luys an der Hand eines anatomisch untersuchten Falles von Hemiballismus. *Zeitschr. f. Neur.* Bnd. 128, 702, 1930.
- BAUMANN, Het hemiballistisch syndroom (de kliniek van het corpus subthalamicum). *Ned. Tijdschr. Geneesk.*, 23 Juli 1938.
- CAJAL, S. RAMON Y., *Histologie du système nerveux de l'homme et des Vertébrés*, T. II, 440, 1911.
- ECONOMO VON, Beitrag zur Kasuistik und zur Erklärung der postapoplektischen Chorea, *Wien, Klin. Wschr.*, Bnd. 3, 429, 1912.
- HAMPEL, Hemiballismus auf luischer Grundlage. *Dtsch. Zeitschr. f. Nervenheilkunde*, Bnd. 141, 77, 1936.
- KASHIDA, Ueber Gehirnarteriosklerosis des früheren Alters und über die Kombination von korticalen, pyramidalen und extra-pyramidalen Symptomen bei der Gehirnarteriosklerose. *Zeitschr. f. Neur.*, 94, 659, 1925.
- MARTIN, Hemichorea resulting from a local lesion of the brain. (The syndrome of the body of Luys). *Brain*, Vol. 50, 637, 1927.
- MATZDORFF, Beiträge zur Pathologie des extra-pyramidalen motorischen Systems. Das Syndrom des Corpus Luysii. *Z. Neur.*, 109, 538, 1937.
- MELLA, The diencephalic centers controlling associated locomotor movements. *Arch. of Neur. and Psych.*, Vol. 10, 141, 1923.
- MORGAN, Symptoms and fiber degeneration following experimental lesions in the subthalamic nucleus of Luys in the dog. *Journal of Compar. Neurol.*, Bnd. 44, 374, 1927-'28.
- PELNAR ET SICKL, L'hémiballisme, le ballisme aigu et le Corps de Luys. *Revue Neurol.*, Bnd. 2, 328, 1929.
- RAKONITZ, Die Eigenerkrankung des Corpus Luysii. *Zeitschr. f. Neurol.*, Bnd. 144, 255, 1933.
- SANTHA, Hemiballismus und Corpus Luysii. *Zeitschr. f. Neurol.*, Bnd. 141, 321, 1932.
- WALLENBERG, Beiträge zur Kenntnis des Gehirns der Teleostier und Selachier. *Anat. Anzeiger*, Bnd. 21, 369, 1907.
- WENDEROWIC, Ueber das anatomische Substrat des Hemiballismus bzw. der Hemichorea. *Zeitschr. f. Neurol.*, Bnd. 128, 78, 1928.

**Comparative Physiology.** — *Der Einfluss von Kohlensäure auf die Atmungsbewegungen von Crustaceen. I.* Von J. SEGAAR. (Aus der Zoologischen Station zu Neapel und dem Institut für vergleichende Physiologie der Universität zu Utrecht.) (Communicated by Prof. H. J. JORDAN.)

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

### Einleitung.

*Das Verhalten einiger Crustaceen aus dem Golf von Neapel bei Durchleitung von Kohlensäure durch das Aquariumswasser.*

Die Untersuchungsaquarien bestehen aus einem tiefen Teil und einem untiefen Teil, der so zu sagen ein kleines Stück Strand darstellt. Durch das Wasser kann Kohlensäure geleitet werden. Wenn man in solch ein Aquarium verschiedene Arten von Crustaceen bringt, ergibt sich, dass Representanten verschiedener Arten sich sehr verschieden verhalten können. Wir lassen eine Uebersicht dieses Verhaltens folgen.

1. *Scyllarus arctus* bleibt während einer Stunde unbeweglich auf seinem Platz sitzen. Bringt man ihn hernach in ein Aquarium mit normalem Seewasser, so ist das Tier äusserlich vollkommen unverändert und gesund.

2. *Lambrus angulifrons* bleibt lange Zeit ruhig sitzen, um schliesslich das untiefe Wasser aufzusuchen, wobei er Kopf und Mundteile über den Wasserspiegel erhebt.

3. *Carcinus maenas* wird sehr bald unruhig. Er läuft hin und her und sucht stets aufs neue das untiefe Gebiet des Aquariums auf. Kopf und Mundteile werden über den Wasserspiegel erhoben, die Ventilationsrichtung der Kiemenkammern wird umgekehrt, sodass Luftblasen aus der eigentlichen Einatmungsöffnung aufsteigen.

4. *Dromia vulgaris* sucht zunächst den untiefen Teil auf und atmet daselbst an der Oberfläche unter dem Wasserspiegel. Später erhebt das Tier drei Viertel seiner Körperlänge über den Wasserspiegel. Es tritt Notatmung auf. In einem bestimmten Fall beobachtete ich, dass ein Tier einen Stein erstieg und den hinteren Teil des Thorax über den Wasserspiegel brachte. Hier wurde Luft eingesogen, die an der sich unter Wasser befindenden Ausströmungsöffnung in Form von Luftblasen zum Vorschein kam.

5. *Eriphia spinifrons* bleibt mit *Scyllarus* am längsten unbeweglich im tiefen Wasser sitzen. Die Bewegung der Mundteile bleibt ruhig. Es treten keine Vergiftungserscheinungen auf. Eine Stunde nach dem Augenblick, in welchem *Palinurus* aus dem Wasser genommen werden musste, da

er sonst den Vergiftungserscheinungen erlegen wäre, suchte *Eriphia* den Strand auf und sog Wasser und Luft durch die Kiemenkammern.

6. *Palinurus vulgaris* läuft hin und her, ohne eine bestimmte Richtung zu bevorzugen. Es treten Fluchtbewegungen auf (abdominalis Schwimmen). Schliesslich bleibt er an einer Stelle liegen, legt sich auf die Seite und würde so zu Grunde gehen.

7. *Callinassa laticauda* Otto schwimmt auf gleicher Weise ohne eine bestimmte Richtung zu bevorzugen hin und her. Das Tier würde auf dieser Weise bald an Vergiftung zu Grunde gehen.

### Allgemeine Prinzipien.

Dieses sehr verschiedenartige Verhalten lässt sich natürlich nicht eindeutig beschreiben. Verschiedene Grundprinzipien lassen sich aber in diesem Betragen erkennen. Zum Teile sind diese in der Literatur schon beschrieben worden.

A. Es besteht offenbar die Möglichkeit, dass Tiere auf erhöhte Kohlensäurekonzentration innerhalb beträchtlicher Zeiträume gar nicht reagieren. Sie leiden dann offenbar auch keinen Schaden durch die Kohlensäure. Welche Anpassungserscheinungen kommen bei solchen Tieren vor? Kommt vielleicht als solche Anpassungserscheinungen Ähnliches vor wie durch BOSWORTH, O'BRIEN und AMBERSON (1936<sup>1</sup>) für *Homarus americanus* beschrieben worden ist? Hier soll nämlich der Kalk des Panzers mit der eingeleiteten Kohlensäure reagieren, wodurch die Kohlensäure teilweise unter Bildung von Bicarbonat gebunden werden soll. Nach PETERS (1938) soll auch *Astacus fluviatilis* einen solchen Abwehrmechanismus gegen Kohlensäure haben.

In zweiter Linie könnte die Anpassung auf einer Erscheinung beruhen, die durch FOX und JOHNSON (1934), JORDAN und GUITTART (1938) und J. SEGAAR (1934) für *Astacus* und von VAN HEERDT und KRIJGSMAN (1939) für *Eriocheir* beschrieben worden ist, und die wir in der Tat bei *Palinurus*, *Homarus*, *Dromia* und *Eriphia* gefunden haben (siehe weiter unten). Bei diesen Tieren hemmt Kohlensäure bei einer bestimmten Konzentration die Atmungsbewegungen. Wenn dann die Skaphognatiten stillstehen, dringt Kohlensäure nur noch durch Diffusion in die Kiemenräume.

B. Es gibt vielerlei Crustaceen aus der Brandungszone, die das Wasser in der Richtung nach dem Strande oder nach den Felsen verlassen, wenn die ungünstigen Umstände sie als Reiz hierzu veranlassen. Von *Eriphia spinifrons* berichtet KRUMBACH (1927) das folgende: „*Eriphia*, die an den Felsen der Strandzone im Mittelmeere lebt, kann mehrere Tage in der Luft bleiben und selbst hohe Temperatursteigerungen aushalten“.

Andere Tiere und übrigens auch *Eriphia* gehen im untiefen Wasser zur Notatmung über (VERWEY 1930, OLTHOF 1936).

C. Endlich gibt es Tiere, die nicht zur Notatmung übergehen oder das

<sup>1</sup>) Zitiert nach F. PETERS, 1938.



Wasser verlassen, aber trotzdem suchend herumlaufen, um das sie umgebende Wasser zu verändern, oder sie suchen schwimmend zu flüchten. Hierfür nennen wir *Palinurus*, ein Tier, welches gewöhnlich bei einer Wassertiefe von 20 m gefangen wird<sup>1)</sup>).

Es ist recht wohl möglich und in einigen Fällen auch schon beschrieben worden, dass bei einzelnen Tierarten verschiedene der genannten Reaktionsmöglichkeiten kombiniert vorkommen.

#### Die Fragestellung.

Für die in Neapel untersuchten Tiere galt die folgende Fragestellung: Lässt sich ein bestimmtes Verhalten bei verschiedenen Crustaceen finden, dass in Beziehung zur normalen Lebensweise dieser Tiere steht, d.h. lässt sich eine Beziehung finden zwischen dem Verhalten und dem Umstande, dass manche Crustaceen in der Küstenzone leben, andere im tiefen Wasser? VAN HEERDT und KRIJGSMAN haben sich diese Frage schon früher auf theoretischer Grundlage gestellt. An der Hand von Mitteilungen in der Literatur, *die auf Wahrnehmungen der Reaktion der Skaphognatiten beruhten*, kommen beide genannten Autoren zum Schluss, dass unter den Seetieren die Crustaceen, die in der Brandungszone leben, keine oder nur geringfügige Reaktionen auf Kohlensäure zeigen. Dahingegen sollen Arten, die nicht in der Brandung leben, deutliches Reaktionsvermögen in diesem Sinne besitzen. Biologisch würde dieses bedeuten, dass die Brandungstiere keiner Regulation bedürfen, weil sie ja in gut durchlüftetem Wasser leben. Tiere in tieferen Zonen dahingegen, wo die Ventilation des Wassers unzureichend werden kann, und erhebliche Variationen der Kohlensäure- und Sauerstoffspannung auftreten können, müssen imstande sein sich anzupassen, vor allem natürlich durch Veränderung der Atmungsfrequenz, um der Zustand des Blutes einigermassen von dem der Umgebung unabhängig zu machen.

Das Problem scheint interessant zu sein, ist aber nicht so einfach als wir es dargestellt haben, denn alle Crustaceen, die nach der Häutung Schutz suchen, und zwar in kleinen Höhlen, werden hier wenigstens zeitweilig unter Umständen zu leben haben, unter denen die Kohlensäureabgabe und Sauerstoffaufnahme erschwert ist, ganz unabhängig davon, in welchen Tiefen diese Tiere unter normalen Umständen leben. Dem könnte dann allerdings wieder gegenüber stehen, dass die Alkalireserve des Blutes bei der Häutung enorm steigt, wodurch die Kohlensäurewirkung kompensiert werden könnte (siehe ARISTIE DAMBOVICEANU 1932).

Unsere Untersuchungen zwangen uns zu dem folgenden Schluss: *Palinurus*, *Eriphia* und *Dromia* werden im Sommer bei Neapel in den folgenden Tiefen gefangen: 20, 10 und 1 Meter. Alle drei Tiere zeigen

<sup>1)</sup> Für eine weiter fortgesetzte feinere Analyse des Verhaltens dieser Tiere bei Kohlensäureeinleitung wird es nötig sein an Stelle von reiner Kohlensäure kohlensäurehaltige Gasgemische zu benutzen. Bei Verwendung von reiner Kohlensäure steigt der Kohlensäuredruck im Wasser zu schnell an.

bei Kohlendäuredurchleitung typische Regulation der Atmungsbewegungen. Dies gilt auch für *Homarus*. Die Form dieser Regulation wird weiter unten beschrieben werden.

#### Methodik.

Nach GUITTART (1938), PETERS (1938), VAN HEERDT (1939) darf unter keinen Umständen das Versuchsobjekt gefesselt werden um die Bewegungen der Skaphognatiten auf einem Kymographion zu registrieren. Die Fesselung reizt das Tier zu übernormaler Atmungsfrequenz (Siehe SEGAAR 1934). Dadurch wird es unmöglich, regulatief auftretende Frequenzerhöhung von einer Ruhfrequenz zu unterscheiden. Die jetzt gebrauchte Methode ist dieselbe als die von VAN HEERDT (1939). Wichtig ist natürlich, vor allen Dingen wenn man, wie der Autor, in Neapel im Sommer arbeitet, die Temperatur niedrig und konstant ( $16^{\circ}$ ) zu erhalten.

#### PALINURUS VULGARIS.

Abb. 1. Geringe Kohlendäurekonzentration<sup>1)</sup> von 13,4 ccm pro Liter, verursacht im Moment, in welchem der Strom von kohlendäurehaltigem

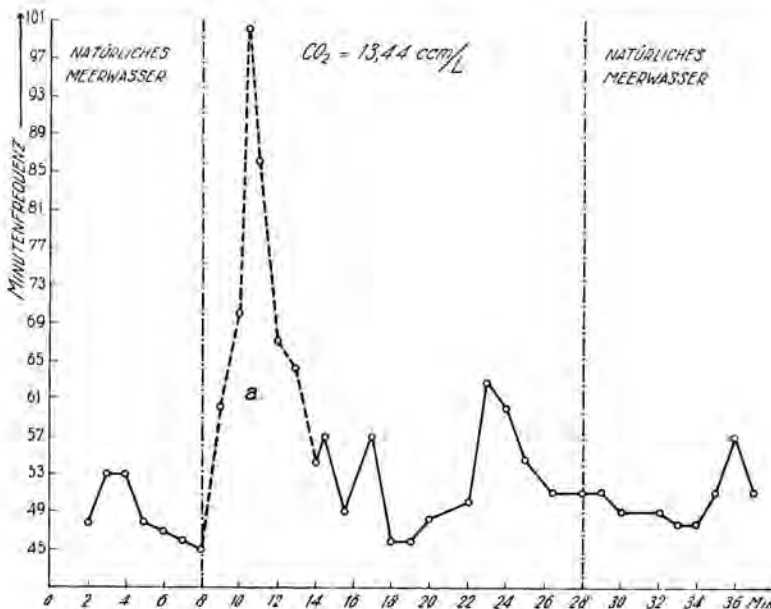


Abb. 1. Palinurus.

Änderung der Atemfrequenz nach Zufuhr von Wasser verschiedenen  $\text{CO}_2$ -Gehaltes.  
Abszisse: Versuchszeit in Min., Ordinate: Minutenfrequenz der Skaphognatiten.  
a = Frequenzzunahme.

<sup>1)</sup> Was die Methode der Kohlendäurebestimmung betrifft, sei auf die Publikation von VAN HEERDT (1939) verwiesen. Wir geben den Kohlendäuregehalt stets in ccm/l an und nicht als Partialdruck, da diese Form in den Publikationen gleichen Gebietes gebräuchlich ist.



Seewasser das Tier erreicht haben kann, eine akute, sehr starke Frequenzzunahme. Diese ist offenbar eine Reaktion auf exterozeptive Reizung durch die Kohlensäure. Die normale Frequenz stellt sich schnell wieder her. Es folgt eine normale Frequenzkurve. Bedingung zur Feststellung dieser Steigerung ist, dass das Tier im untersuchten Gefäß sich ruhig verhält. Oftmals jedoch verursacht die Kohlensäure Unruhe. Auf alle Fälle muss man scharf unterscheiden zwischen Frequenzerhöhung die selbständig auf den Kohlensäurereiz folgt (hierbei bleibt das Tier also ruhig) und der Unruhe des ganzen Tieres, die ihrerseits Frequenzerhöhung verursachen kann.

In der Abbildung ist die eigentliche Frequenzerhöhung mit *a* angegeben.

Abb. 2. Eine Kohlensäurekonzentration von 17.72 ccm/l. Es tritt eine zweifältige Reaktion auf.

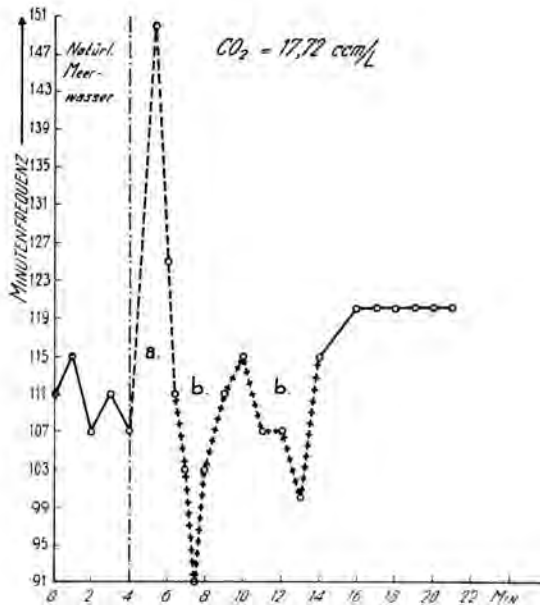


Abb. 2. Palinurus.

Zweiphasige Atmungsreaktion nach Zufuhr von Wasser mit einer  $\text{CO}_2$ -Konzentration, die ein wenig mehr ist als die von Abb. 1. *a* = Frequenzzunahme; *b* = Frequenzabnahme.

a) Die erste Reaktion kommt hier nach  $1\frac{1}{2}$  Minuten und stimmt mit der Frequenzerhöhung von Abb. 1 überein. Nach  $2\frac{1}{2}$  Minuten ist sie beendet. Hierauf folgt

b) eine zweite Reaktion, die eigentlich das Gegenteil der erste ist. Die Frequenz wird abnormal niedrig. Auf der Abbildung erscheint diese Hemmung als 2 nach unten gerichtete Zacken. Auch diese Reaktion ist meiner Meinung nach von exteroceptivem Ursprung. Sie ist in der Abbildung mit *b* angegeben. Im ersten Augenblick drängt sich uns der

Gedanke auf, es könnte sich bei dieser Hemmung um endoceptive<sup>1)</sup> Apnoë nach der starken Ventilation von Phase a handeln. Hierfür ist aber wohl Phase a zu kurz.

Endlich folgt eine sehr regelmässige Atmungskurve auf ungefähr normalem Niveau.

Abb. 3. Kohlensäurekonzentration von 58.24 ccm/l. Hier können wir drei Reaktionsformen unterscheiden.

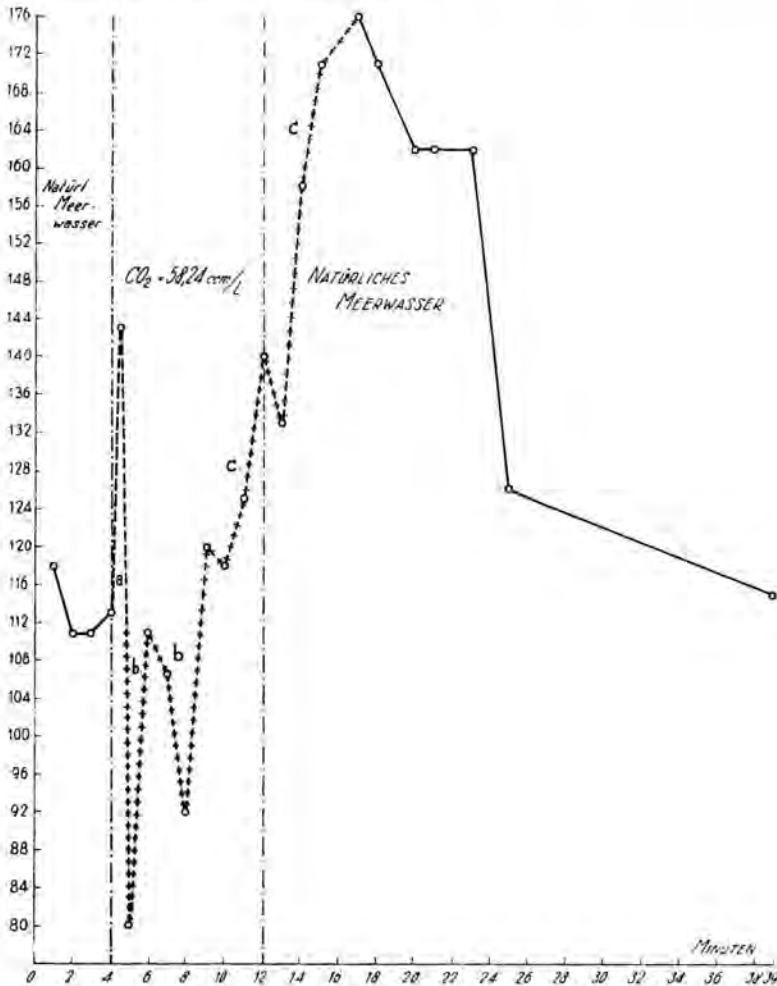


Abb. 3. Palinurus.

Dreiphasige Atmungsreaktion nach Zufuhr von Wasser mit einer  $\text{CO}_2$ -Konzentration von mehr als 5% (58,24 ccm/l. a = Frequenzzunahme; b = Frequenzabnahme; c = Frequenzzunahme.

Abszisse: Versuchszeit in Minuten. Ordinate: Minutenfrequenz der Skaphognatiten.

<sup>1)</sup> Ich habe in einer früheren Publikation in analogen Fällen von proprioceptiven Reflexen gesprochen. Dieser Ausdruck kann irreführend sein, da man, SHERRINGTON folgend, daran denken könnte, dass die Receptoren für diese Reflexe in den Skaphognatiten selbst lokalisiert sind.

a) Die erste Reaktion ist die vorübergehende Frequenzsteigerung, wie sie sich auch aus den Abb. 1 und 2 ergibt. Sie schlägt um in

b) die zweite Reaktion von Abb. 2. Auch jetzt sehen wir zwei nach unten gerichtete Zacken als Ausdruck dieser Hemmungsphase. Nach Massgabe zunehmender Konzentration der Kohlensäure im Seewasser bei konstanter Durchströmungsgeschwindigkeit des Seewassers durch den Glaszylinder worin sich das Tier befindet, werden die einzelnen Reaktionen kürzere Zeit dauern, daher sind die Kurven auf Abb. 3 schmäller als auf Abb. 1 und 2.

c) Es tritt neuerliche Frequenzsteigerung auf.

Wenn wir jetzt normales Seewasser geben, dann behauptet sich die Frequenzerhöhung noch ungefähr 10 Minuten lang. Hieraus und aus einer Vergleichung zwischen dieser Phase c mit der entsprechenden Phase von Abb. 4 kann man schliessen, dass Phase c verursacht wird durch Kohlen-säureanreicherung im Blut (endoceptive Wirkung der Kohlensäure).

Abb. 4. 106 ccm/l. Bei dieser Konzentration haben die Reaktionen a und b keine Gelegenheit aufzutreten. Unmittelbar erscheint Reaktion c, die sich 9 Minuten lang behauptet, und auf der Kurve als regelmässig fortschreitende Frequenzerhöhung erscheint. Weiterhin nimmt die Frequenz dann aber nicht mehr zu. Die Narkotisierende Wirkung der Kohlensäure macht sich geltend, das kann man auch ohne Hilfsmittel am ganzen Tiere beobachten: der Strecktonus der Extremitäten verschwindet, die Extremitäten tragen das Tier nicht mehr, dieses muss aus dem Beobachtungszylinder entfernt werden.

Zusammenfassend können wir also für *Palinurus* bei steigender Konzentration der Kohlensäure im Atemwasser das folgende feststellen. Es treten nacheinander vier Reaktionen auf, die nach Massgabe der Konzentration der Kohlensäure aufeinander folgen.

- a) exteroceptiv verursachte Beschleunigung,
- b) exteroceptiv verursachte Hemmung (Verzögerung),
- c) endoceptiv verursachte Beschleunigung,
- d) Narkose.

Bei *Astacus* hat der Verfasser früher (bei Registrierung auf dem Kymographion) durch Kohlensäure lediglich Hemmung hervorrufen können. Auf den Kiemen müssen sich bei diesen Tieren Sinnesorgane befinden, die durch Kohlensäure gereizt werden. Der Hemmungsreflex wirkt ausschliesslich homolateral, niemals gekreuzt. Die spezifische Schwelle für diese Kohlensäurewirkung befindet sich bei pH 6.17. Bei andern Säuren, z.B. bei einem Phosphatpuffergemisch, ergeben sich andere pH Werte für den

---

siert sein müssen. Dies wollen wir aber keineswegs behaupten, daher die Ausdruck endoceptiv.

Hemmungsreflex, z.B. 3.5. Dies gilt aber lediglich für diese Versuchsanordnung mit Selbstregistrierung.

Für *Astacus* fand PETERS, wenn er die Tiere ohne sie zu fixieren untersuchte, lediglich diejenige Beschleunigung, die ich als Phase *c* angab. Wenigstens ist dieses die Meinung von PETERS selbst. Aus seinem Protokoll *b* 30.3.37, Seite 602—603 lese ich etwas anderes. Ich finde daselbst:

21.15 Uhr	erste	Registrierung, Frequenz	30/Min.
21.20	„ zweite	„ „	28/Min.
21.25	„ dritte	„ „	28/Min.
21.30	„ vierte	„ „	28/Min.
21.33	„	nach Ablauf der vierten Registrierung wurde auf Kohlensäurereiches Wasser umgeschaltet (273.35 ccm pro l)	
21.35	„	starke motorische Unruhe	
21.37	„	„ „	
		Nach diesen Unruhen werden die Atembewegungen leiser und ihre Zahl sinkt.	
21.43	„	die Atembewegungen sind kaum noch wahrzunehmen.	
21.45	„	eine ganz schwache motorische Unruhe tritt auf.	
21.47	„	fünfte Registrierung, Frequenz	7/Min.
22.08	„ sechste	„ „	3/Min.
22.10	„ siebente	„ „	149/Min.
22.15	„ achte	„ „	150/Min.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass wir diese genauen Wahrnehmungen besser lesen müssen als der Forscher dies selbst getan hat. Keineswegs handelt es sich hier ausschliesslich um eine Beschleunigungsphase (7te und 8te Registrierung). Diesen Registrierungen geht eine deutliche Hemmungsphase voran, die von 21.37 Uhr bis 22.08 Uhr dauert, also nicht weniger als eine halbe Stunde.

Für *Astacus* fanden JORDAN und GUITTART eine Hemmungs- und Beschleunigungsphase bei Anwendung von 100 ccm Kohlensäure pro l. Für *Eriocheir* fanden VAN HEERDT und KRIJGSMAN eine exteroceptiv verursachte Hemmungs- und eine endoceptiv verursachte Beschleunigungsphase. Bei diesen Tieren sind die Antennulae Träger der Sinnesorgane, deren Reizung die Hemmungsphase verursacht. Wenn man die Antennulae wegnimmt, fällt die Hemmungsphase aus. Die in Frage stehende Sinnesorgane reagieren auf gleiche Weise auf Kohlensäure und auf eine beliebige andere Säure, z.B. Salzsäure, mit gleichem Schwellenwerte, nämlich von pH 6.5.

#### SINNESORGANE FÜR KOHLENSÄURE BEI PALINURUS.

a) *Die Kiemen.* Auch bei *Palinurus* sind die Kiemen Träger von Sinnesorgane, die imstande sind auf eine bestimmte Kohlensäurekonzen-

tration im Wasser zu reagieren. Man stellt dafür eine Reihe von Gefäßen mit Seewasser bereit mit verschiedenen Kohlensäurekonzentrationen. Der Schwellenwert für die Reaktion befindet sich bei pH 6. Hierdurch werden die Atmungsbewegungen gehemmt. Hierfür ist es nötig dass nur ein sehr kleiner Teil der Kiemen mit dem betreffenden Seewasser benetzt wird. Die Hemmung ist dann akut und homolateral, Antennulae und Taster spielen bei dieser Reaktion keine Rolle. Auch wenn man den Kiemendeckel weg-schneidet, tritt die Hemmung unter den genannten Bedingungen auf. Wenn man dahingegen auf einer Seite des Tieres die Kiemen mit Paraffin bedeckt oder einseitig die Kiemen wegnimmt, dann bleibt die Hemmung an der betreffenden Seite aus. Was die Methode betrifft, siehe SEGAAR 1934, allerdings abgesehen von der damals benutzten Fixierung der Versuchstiere.

Die Kohlensäureschwelle ist spezifisch. Wenn man an Stelle von

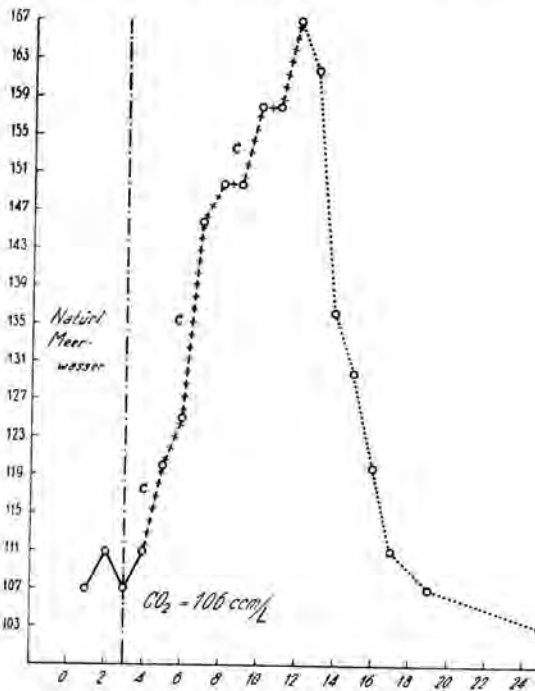


Abb. 4. Palinurus.

Änderung der Atmungsfrequenz nach Zufuhr von Wasser hohen  $\text{CO}_2$ -Gehaltes (mehr als 10%). Phase a und Phase b sind weggefallen. Phase c: endoceptiv verursachte Frequenzzunahme. Danach tritt Narcose ein. Abszisse: Versuchszeit in Min., Ordinate: Minutenfrequenz der Skaphognatiten.

Kohlensäure Salzsäure nimmt, um den pH zu erniedrigen, dann liegt die Schwelle bei einem pH von ungefähr 3.9. (Nach der Hinzufügung von Salzsäure muss Luft durch das Wasser geführt werden, um die freiwerdende Kohlensäure auszuwaschen.)

b) *Die Antennulae*. Merkwürdigerweise sind auch die Antennulae imstande um auf eine bestimmte Kohlensäurekonzentration im Wasser zu reagieren.

Abb. 5. Eine Kohlensäurekonzentration von 34.64 ccm/l verursacht bei einem normalen Tiere eine Atmungskurve, die aus drei Phasen besteht, nämlich a, b und c, die wir schon kennen gelernt haben. Nun entfernen wir die Antennulae. Diese bestehen aus drei Schaftgliedern und 2 bis 3 Endgeißeln, von denen eine die Haare trägt, die als Chemorezeptoren anzusehen sind (H. BALSS). Nach drei Tagen wiederholten wir den gleichen Versuch mit diesem Tiere, dem die Antennulae fehlen. Die Kurve verläuft nun flacher. Phase a ist weggefallen, Phase b ist viel flacher geworden, Phase c ist unverändert geblieben. Die zwei ersten Reaktionen werden bei *Palinurus* daher offenbar durch Reizung der Antennulae verursacht. Dahingegen Phase c ein endozeptiver Effekt, und daher nicht von bestimmten äusseren Sinnesorganen abhängig. In beiden Kurven stimmen die der Phase c entsprechenden Teile mit einander überein.

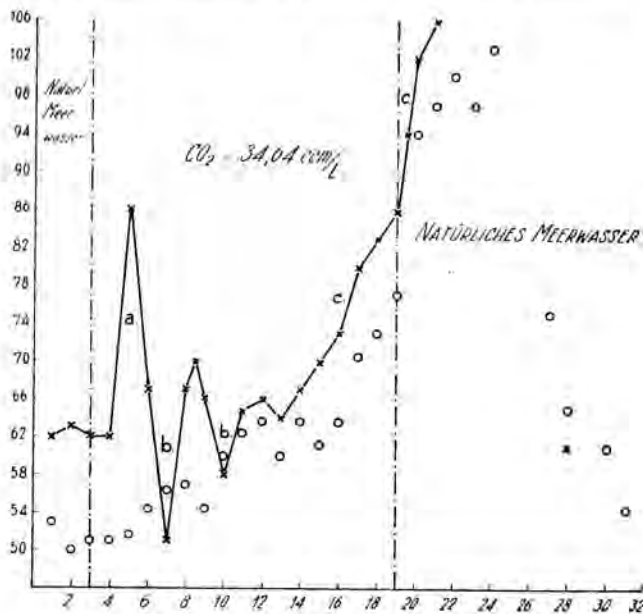


Abb. 5. *Palinurus*.

x x x für das normale Tier.

o o o für das Tier ohne Antennulae.

Ausbleiben von Phase a und Abschwächung von Phase b nach Amputation der Antennulae. In beiden Kurven normale Phase c und in beiden Kurven steil Emporsteigen sobald wieder normales Wasser gegeben wird, durch hinwegfallende Hemmungswirkung von  $\text{CO}_2$  auf die Sinnesorgane der Kiemen. Abszisse:

Versuchszeit in Min., Ordinate: Minutenfrequenz der Skaphognatiten.

Ich möchte im Übrigen noch eine andere Tatsache andeuten. Sobald man nämlich nach dem Versuch mit kohlensäurehaltendem Wasser wieder nor-



males Wasser gibt, steigen *beide* Kurven steiler als unter früher angewandten Bedingungen empor. Das beweist, dass in diesem Augenblick eine Hemmung wegfällt. Wäre nämlich diese Hemmung nicht vorhanden gewesen, dann würden die Kurven soweit sie der Phase *c* entsprechen, von vorn herein steiler gewesen sein. Nun aber ist Phase *c* sozusagen die Ausserung eines Gleichgewichtes zwischen einer endoceptiven Beschleunigung und einer *nicht durch die Antennulae* verursachten exteroceptiven Hemmung. Offenbar ist diese Hemmung gleich derjenigen, die wir oben besprochen, deren Rezeptoren auf den Kiemen liegen. Dass diese Hemmung in Phase *c* unserer Kurve lediglich als weniger steiler Anstieg von Phase *c* in die Erscheinung tritt, erklärt sich durch die Tatsache, dass für volle Entwicklung der Hemmungswirkung durch die Kiemen die Schwelle höher ist und (bei *Palinurus*) ein unmittelbares Vorhandensein von einer höheren Schwellenkonzentration nötig ist. Die Kohlensäure scheint nämlich bei *Palinurus* ziemlich schnell in das Blut aufgenommen zu werden: hierdurch kommt es, dass die endoceptive Wirkung sich in *erster* Linie geltend macht. Bei *Homarus* ist, wie wir sehen werden, dies nicht der Fall.

Für *Palinurus* erhalten wir das folgende: gleichmässig zunehmende Kohlensäurekonzentrationen werden während Phase *c* durch die Kiemen wahrgenommen, aber die Wirkung dieser Reizung mischt sich mit der Wirkung der bereits im Blut vorhandenen Kohlensäure. Hohe und akut auftretende Kohlensäurekonzentrationen werden durch die Kiemen wahrgenommen.

*Palinurus* wird daher auf verschiedenen Wegen vor ungünstigem Atemwasser gewarnt durch die *Antennulae* und durch die Kiemen. In diesem Sinne fasse ich auch Phase *a* auf, nämlich als ein „Schrecken“ dafür „dass etwas nicht in Ordnung ist“<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Die zweite Abteilung dieser Mitteilung folgt im nächsten Heft.

**Medicine.** — *De l'immunité contre le phosgène. Présence d'une protéine nouvelle dans le poumon intoxiqué par le phosgène* (Deuxième mémoire). Par ONG SIAN GWAN. (Communicated by Prof. E. GORTER.)

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

1. Nous avons montré dans un mémoire précédent que les animaux qui ont reçu une ou plusieurs doses inframortelles de phosgène peuvent ultérieurement supporter une ou plusieurs doses sûrement mortelles de phosgène <sup>1)</sup>. Pour expliquer ce résultat nous avons pensé que le phosgène agirait sur les protéines de poumon. Il en résulterait une combinaison chimique nouvelle. Cette protéine modifiée agirait comme antigène et il vaccinerait l'animal contre le phosgène.

Le but de ce travail est de montrer par des méthodes physiques la présence de cette protéine nouvelle dans le poumon ayant été en contact avec le phosgène.

2. *Séparation des protéines de poumon.* Dans toutes ces expériences on a employé des poumons de porc. Les poumons fraîchement obtenus de l'abattoir sont finement hachés. Ils sont ensuite étalés sur le fond d'un ballon en verre Jena d'un volume de trois litres. La figure 1 montre comment l'expérience a été réalisée. L'action de phosgène peut être suivie à l'oeil

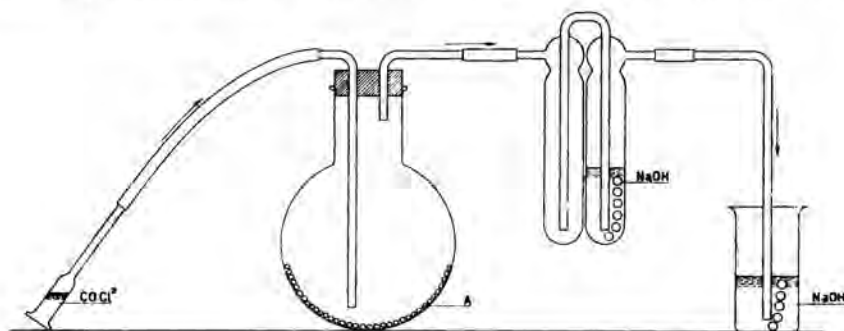


Fig. 1.

Dispositif permettant de traiter le poumon haché A par le phosgène.

nu. En effet, la pulpe pulmonaire qui au début est d'une couleur rouge vif devient grisâtre ou noirâtre après quelques minutes seulement de contact avec le phosgène. De plus le poumon libère un liquide brun ou noirâtre. On prend en général 150 gr. de poumon haché et 5 gr. de phosgène pur. La

<sup>1)</sup> Proceedings Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 205 (1941).

durée de l'intoxication est de deux à trois heures. On abandonne la pulpe pulmonaire après ce traitement pendant 20 heures au laboratoire et on ajoute une quantité égale d'eau salée à 0,9 p. 100 ou d'eau distillée stérilisée. On agite de temps à autre et on laisse macérer pendant 24 h. à la température du laboratoire. Ensuite on centrifuge l'extrait ainsi obtenu et on neutralise le liquide surnageant avec NaOH. Il se forme un précipité gris qu'on élimine par une seconde centrifugation. Le liquide ainsi obtenu est d'une couleur brun ou noirâtre.

Par la même technique et dans les mêmes conditions on prépare un extrait du même poumon haché et non intoxiqué. Cet extrait sert de témoin.

Dans certaines expériences on prépare à partir de ces extraits pulmonaires des protéines pures par précipitation acétonique et lavage à l'éther. On obtient de cette manière des protéines débarrassées de lipides et de sels.

3. *Différence de solubilité des protéines de poumon normal et celles de poumon intoxiqué par le phosgène.* Pour déterminer la solubilité de ces protéines, on précipite celles-ci dans les extraits pulmonaires par un mélange d'acétone et d'alcool à 98 p. 100 à parties égales (Méthode de KAYSER). Le tableau 1 montre les résultats obtenus.

TABLEAU I.

No. des poumons	Quantité de protéines en gr. par 100 cc d'extrait de	
	poumon normal	poumon intoxiqué par le phosgène
114	1.784	0.749
115	2.090	0.785
116	2.818	0.958
117	—	1.204
118	1.702	—
119	—	1.205
120	0.851	0.831
121	1.784	1.144
122	2.544	1.218
123	2.010	1.280
124	1.482	0.794
125	3.454	1.288
Total	20.519	11.456
Moyennes	2.052	1.041

En appliquant la méthode statistique on constate que la différence entre les deux moyennes  $2,052 - 1,041 = 1,011$  est réelle. En effet, on trouve à l'aide de la loi de  $t$  les valeurs suivantes  $n = 19$ ,  $t = 4,378$  et la probabilité pour que  $t > 4,378$  est inférieure à 1 p. 1000.

Le même résultat a été obtenu pour la solubilité dans l'eau salée à 0,9 p. 100 des protéines pures isolées à partir de l'extrait de poumon normal et celui de poumon intoxiqué par le phosgène. On trouve

	$c_n$	$c_p$	$c_n/c_p$
Poumon 121	0,902	0,383	2,4
Poumon 122	0,839	0,309	2,7
Poumon 123	0,651	0,222	2,9
Poumon 124	0,472	0,196	2,4
Poumon 125	1,128	0,422	2,7

$c_n$  et  $c_p$  indiquent respectivement la quantité en grammes de protéines de poumon normal et celle de poumon intoxiqué dissoute dans 100 c.c. de solution. Dans tous les cas considérés, on constate que le rapport  $c_n/c_p$  est du même ordre de grandeur.

Ces résultats montrent que les protéines pulmonaires après l'action énergétique de phosgène deviennent moins solubles. Il est probable par conséquent, que ces protéines modifiées sont devenues moins hydrophiles, comme l'a montré M. A. KLING pour les stérols du poumon après l'action du phosgène, du chlore et du brome <sup>2)</sup>.

4. *Détermination de l'indice de réfraction.* La détermination de l'indice de réfraction est effectuée à l'aide de l'appareil d'ABBE, qui est basé sur la mesure de l'angle limite. La source de lumière était une lampe électrique à vapeur de sodium ( $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ ). On trouve en général pour l'extrait de poumon intoxiqué contenant la même quantité de protéines que celui de poumon normal, un indice de réfraction un peu plus élevé. La différence des indices de réfraction est probablement due à la quantité plus importante de chlorure de sodium dans l'extrait de poumon intoxiqué. En effet, le phosgène en agissant sur le plasma pulmonaire est décomposé en acide chlorhydrique qui après neutralisation donne du chlorure de sodium.

Pour savoir si l'indice de réfraction des protéines est modifié après l'intoxication phosgénique on a fait les deux expériences suivantes:

a. On ajoutait à l'extrait de poumon normal une quantité de chlorure de sodium déterminée, de telle manière qu'on obtenait un extrait contenant la même quantité de chlorure de sodium et de protéines que celui du poumon intoxiqué. Avec cet extrait ajusté on faisait les mesures des indices de réfraction à des concentrations différentes. On répétait les mesures avec l'extrait de poumon intoxiqué. De cette manière on obtient une courbe de concentration en fonction de l'indice de réfraction. La courbe ainsi obtenue montre que l'indice de réfraction de l'extrait de poumon intoxiqué est légèrement plus élevé que celui de poumon normal.

Dans cette expérience et dans l'expérience suivante les mesures ont été faites à l'aide d'un réfractomètre interférentiel de JAMIN, qui donne une

<sup>2)</sup> C. R. Acad. Sc. 197, 1782 (1933).

précision de l'ordre de 0,00005<sup>3</sup>). Les mesures ont été effectuées à la lumière monochromatique de sodium.

b. Il est probable que dans l'expérience précédente la différence d'indices de réfraction était due à la présence de lipides dans les extraits examinés. On sait d'après M. KLING que les lipides de poumon sont modifiés après contact avec le phosgène<sup>2</sup>).

C'est pour cela que dans cette expérience on a déterminé les indices de réfraction des protéines pures isolées à partir d'extraits de poumons normal et intoxiqué. Les protéines ainsi obtenues, débarrassées de lipides et de sels furent dissoutes dans l'eau salée à 0,9 p. 100. On constate dans la figure 2 et dans le tableau 2 que la différence des indices de réfraction persiste

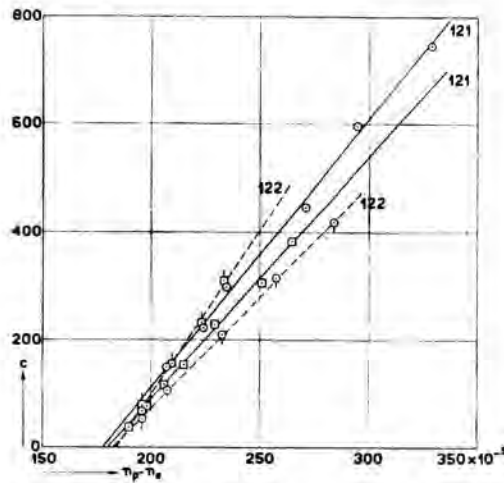


Fig. 2.

Poumons 121 et 122. Indices de réfraction des protéines de poumon normal et de poumon intoxiqué par le phosgène.

$c$  = concentration de protéines en mg. par 100 cc de solution

$n_p - n_e$  = différence entre l'indice de réfraction de la solution protéique et celui de l'eau

○ poumon normal

□ poumon intoxiqué

encore. Et ici comme dans les deux expériences précédentes l'indice de réfraction des protéines de poumon intoxiqué est plus élevé que celui de poumon normal. Ces expériences répétées avec des protéines d'un autre poumon 122 donnait une différence d'indices plus marquée, mais l'indice de poumon intoxiqué était dans ce cas moins élevé que celui du poumon normal (fig. 2).

Les courbes obtenues dans la figure 2 sont des droites, qu'on peut représenter par l'équation

$$n_p - n_e = ac + b$$

<sup>3</sup>) Nous remercions vivement M. H. J. R. PERDIJK qui a bien voulu effectuer ces mesures.

où  $(n_p - n_e)$  indique la différence d'indice de réfraction de la solution protéique et celui de l'eau et  $c$  la concentration de protéines en mg. par

TABLEAU 2.  
Poumon 121. Indices de réfraction de protéines de poumon normal et de poumon intoxiqué par le phosgène.

Poumon normal		Poumon intoxiqué	
$c$	$n_p - n_e$	$c$	$n_p - n_e$
746	0.00329	382.7	0.00264
596.8	0.00294	306.1	0.00251
447.6	0.00271	229.6	0.00229
298.4	0.00234	153.1	0.00215
223.8	0.00223	114.8	0.00206
149.2	0.00207	76.5	0.00198
67.1	0.00196	38.3	0.00190

$c$  = concentration de protéines en mg. par 100 cc de solution.

$n_p - n_e$  = différence entre les indices de réfraction de la solution protéique et de l'eau.

100 cc de solution. On trouve les constantes suivantes pour le poumon 121

$$\text{poumon normal} \quad a_1 = 0,201 \times 10^{-5} \quad b_1 = 177,9 \times 10^{-5}$$

$$\text{poumon intoxiqué} \quad a_2 = 0,219 \times 10^{-5} \quad b_2 = 181,3 \times 10^{-5}$$

et pour le poumon 122

$$\text{poumon normal} \quad a_1 = 0,238 \times 10^{-5} \quad b_1 = 182,7 \times 10^{-5}$$

$$\text{poumon intoxiqué} \quad a_2 = 0,166 \times 10^{-5} \quad b_2 = 183,3 \times 10^{-5}$$

Pour savoir si la différence d'indice de réfraction du poumon normal et celui du poumon intoxiqué est réelle on compare les coefficients de régression  $a_1$  et  $a_2$  des deux droites. On détermine d'après R. A. FISHER le rapport  $t$  de la différence des coefficients de régression  $|a_1 - a_2|$  à celui de l'écart type de la différence de ces coefficients. On trouve ainsi pour le poumon 121,  $t = 1,945$ ,  $n = 10$  et pour le poumon 122,  $t = 11,518$  et  $n = 6$ , montrant que dans le premier cas la différence est peu significative et qu'elle est très nette dans le deuxième cas.

On admet en général que la réfraction est une propriété atomique et que la formation des molécules à partir des atomes et la modification de la structure moléculaire ne donnent que des différences secondaires. Les résultats obtenus ci-dessus avec les protéines pures semblent donc prouver qu'il s'agirait ici d'une modification de la structure moléculaire des protéines ayant été en contact avec le phosgène. La détermination du pouvoir rotatoire va nous donner une plus grande précision.

5. *Détermination du pouvoir rotatoire.* On sait que les protéines sont des substances actives lévogyres. Si une modification de la structure moléculaire se produirait après l'action de phosgène sur les protéines, la déviation du plan de polarisation ne serait plus la même.



Les mesures furent effectuées au moyen d'un polaristrobomètre de WILD, dont nous avons employé dernièrement pour l'étude du sérum sanguin et des antigènes <sup>4)</sup>. Le seul tube employé avait une longueur de 20 cm et la source de lumière était une lampe à arc de tungstène, consommant 2,4 ampères sous 220 volts et qui donnait une lumière blanche très intense.

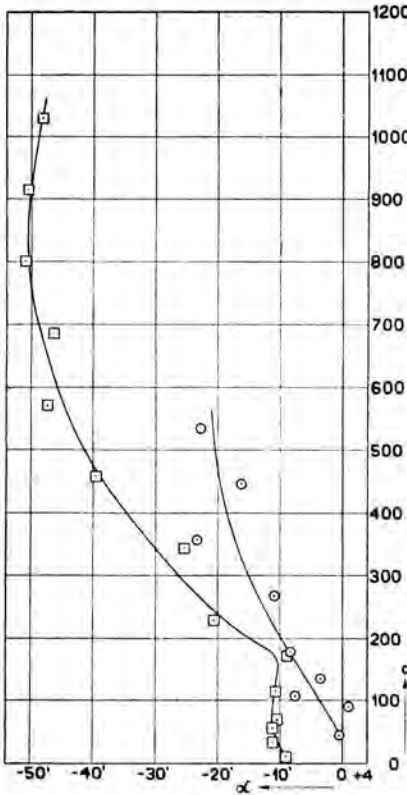


Fig. 3.

Extraits de poumon 121

c = concentration de protéines en mg. par 100 cc de solution

$\alpha$  = angle moyen en minutes dont le plan de polarisation est tourné

○ poumon normal

□ poumon intoxiqué

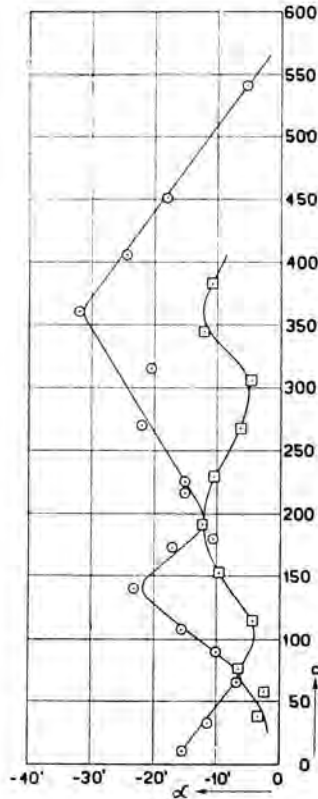


Fig. 4.

Protéines de poumon 121.

Ceci était nécessaire pour la mesure des concentrations élevées de protéines, qui montraient un obscurcissement des plages. Pour des petites déviations du plan de polarisation l'éclairage par une lumière blanche donnait le même résultat que celui par une lumière monochromatique.

Des mesures préliminaires effectuées sur plusieurs extraits de poumon à des concentrations variables ne nous permettaient pas de faire une

<sup>4)</sup> Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 43, 1250 (1940).

TABLEAU 3.

Poumon 121. Extraits de poumon normal et de poumon intoxiqué par le phosgène.

Poumon normal			Poumon intoxiqué		
c	N	$\alpha$	c	N	$\alpha$
44.6	50	- 0.56	11.4	75	- 9.08
89.2	70	+ 0.91	34.3	25	-11.18
107.4	25	- 7.61	57.2	20	-11.30
133.8	25	- 3.61	68.6	25	-10.54
178.4	50	- 8.38	114.4	41	-10.83
267.6	75	-10.98	171.6	70	- 8.92
356.8	50	-23.42	228.8	41	-20.70
446.0	50	-16.26	343.2	70	-25.50
535.2	31	-22.75	457.6	45	-39.68
			572.0	50	-47.41
			686.4	70	-46.44
			800.8	36	-51.00
			915.2	20	-50.52
			1029.6	20	-48.22
Total	426			608	

c = concentration de protéines en mg. par 100 cc de solution.

N = nombre de lectures.

 $\alpha$  = angle moyen en minutes dont le plan de polarisation est tourné.

TABLEAU 4.

Poumon 121. Protéines de poumon normal et de poumon intoxiqué par le phosgène.

Poumon normal			Poumon intoxiqué		
c	N	$\alpha$	c	N	$\alpha$
10.8	25	-15.43	38.3	25	- 3.44
32.5	16	-11.40	57.4	25	- 2.44
64.9	16	- 6.80	76.5	25	- 6.48
90.2	36	-10.08	114.8	50	- 4.30
108.2	16	-15.65	153.1	16	- 9.65
140.6	16	-23.22	191.4	75	-12.33
173.1	25	-17.12	229.6	16	-10.45
180.3	36	-10.72	267.9	25	- 6.20
216.4	16	-15.12	306.2	41	- 4.61
225.4	25	-15.12	344.4	25	-12.08
270.5	36	-21.94	382.7	16	-10.78
315.5	50	-20.52			
360.6	25	-32.04			
405.7	16	-24.34			
450.8	25	-18.04			
540.9	36	- 5.26			
Total	415			339	

conclusion nette. C'est pour cette raison que des mesures systématiques ont été effectuées sur des concentrations variables du même extrait de poumon normal ou intoxiqué. On obtient de cette manière une courbe expérimentale  $c = f(\alpha)$ , où  $c$  indique la concentration de protéines en mg. par 100 cc de liquide et  $\alpha$  la déviation moyenne en minutes du plan de polarisation.

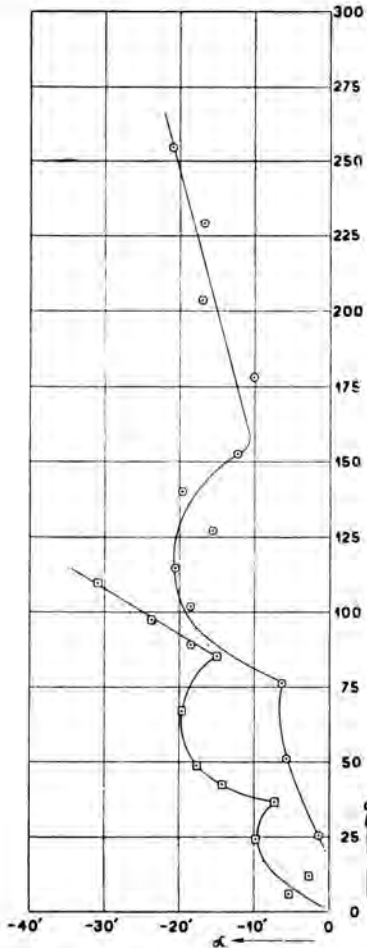


Fig. 5.  
Extraits de poumon 122.

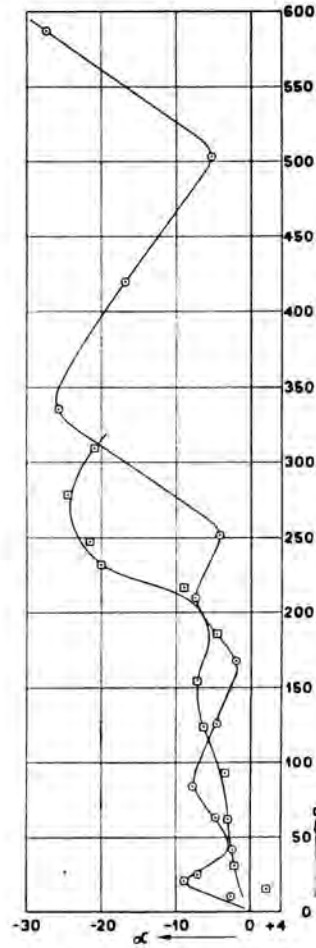


Fig. 6.  
Protéines de poumon 122.

Pour pouvoir reproduire une courbe à des temps différents avec la même substance il faut se placer dans les conditions suivantes: *a.* faire des lectures nombreuses de  $\alpha$  sur la même concentration  $c_i$ , de sorte qu'on obtient un écart type variant entre quelques centièmes et un dixième de la moyenne; *b.* garder toutes les solutions à  $0^\circ \text{C}$ ; *c.* faire des mesures consécutives le plus vite possible.

Les mesures que nous avons obtenues sont limitées par l'obscurcissement absolu des plages quand la concentration augmente et par la solubilité limite de la protéine.

En examinant les résultats représentés par les figures 3, 4, 5 et 6 et les tableaux 3, 4, 5 et 6 on peut faire les observations suivantes.

Il est clair qu'il existe une différence nette entre la courbe de l'extrait de poumon normal et celui de poumon intoxiqué. (Fig. 3 et 5.)

Le même résultat a été obtenu pour les protéines pures de poumon normal et celles de poumon intoxiqué. (Fig. 4 et 6.)

TABLEAU 5.

Poumon 122. Extraits de poumon normal et de poumon intoxiqué par le phosgène.

Poumon normal			Poumon intoxiqué		
c	N	$\alpha$	c	N	$\alpha$
25.44	25	- 1.42	6.09	20	- 5.35
50.88	20	- 5.76	12.18	36	- 2.73
76.32	25	- 6.30	24.36	20	- 9.77
89.04	20	-18.51	36.54	20	- 7.35
101.76	20	-18.46	42.63	20	-14.35
114.48	76	-20.58	48.72	20	-17.67
127.10	20	-15.61	66.99	20	-19.67
139.82	20	-19.71	85.26	20	-15.17
152.64	25	-12.30	97.44	20	-23.72
178.08	20	-10.11	109.62	20	-30.92
203.52	20	-17.01			
228.96	20	-16.76			
254.40	25	-21.02			
Total	336			216	

TABLEAU 6.

Poumon 122. Protéines de poumon normal et de poumon intoxiqué par le phosgène.

Poumon normal			Poumon intoxiqué		
c	N	$\alpha$	c	N	$\alpha$
10.5	20	- 2.70	15.5	40	+ 1.96
21.0	20	- 8.95	30.9	20	- 2.29
25.2	60	- 7.20	61.9	20	- 3.19
42.0	45	- 2.56	92.8	20	- 3.54
63.0	20	- 4.85	123.7	20	- 6.34
83.9	40	- 7.83	154.7	20	- 7.19
125.9	20	- 4.65	185.6	20	- 4.64
167.8	20	- 2.15	216.5	20	- 8.94
209.8	40	- 7.43	232.0	40	-20.09
251.7	20	- 4.20	247.4	30	-21.49
335.6	25	-25.73	278.4	20	-24.54
419.5	20	-16.85	309.3	20	-20.89
503.4	20	- 5.30			
587.3	25	-27.37			
Total	395			290	

On sait qu'en général les courbes  $c = f(\alpha)$  sont des droites ou des paraboles. Les courbes que nous avons obtenues sont très curieuses, parce qu'elles montrent une forme ondulatoire. Dans la figure 4 on voit que deux maxima de la courbe de poumon intoxiqué se coïncident avec deux minima de celle du poumon normal. Si l'on compare la courbe du poumon normal et celle du poumon intoxiqué dans les figures 5 et 6, on est frappé par la forme semblable. La courbe du poumon intoxiqué pourrait être obtenue en comprimant la courbe du poumon normal de haut en bas et en la tournant ensuite à gauche. Dans la figure 4 on pourrait obtenir la courbe du poumon intoxiqué en comprimant seulement la courbe du poumon normal. La courbe du poumon intoxiqué est dans ce cas aplatie.

6. On pourrait probablement expliquer la forme de la courbe comme suit. E. NAVASSART a montré que le pouvoir rotatoire de la solution de tanin augmente en même temps avec les dimensions des molécules de tanin<sup>5)</sup>. Si ce résultat pourrait être appliqué sur la solution de protéines, on est en droit de supposer que les molécules de protéines s'agrandissent quand la solution a été diluée. Le pouvoir rotatoire devrait ainsi augmenter. L'augmentation du pouvoir rotatoire et par conséquent du volume des molécules continuerait jusqu'à ce que la concentration  $c$  a atteint une valeur déterminée et ensuite on aurait après l'effet de la dilution, c'est-à-dire, quand  $c$  diminue,  $\alpha$  diminuerait en même temps. Ce cycle — augmentation de volume des molécules et effet de dilution — se répéterait de nouveau quand  $c$  continue à diminuer.

La coïncidence du maximum et du minimum dans les courbes de la figure 4, nous permet de penser que les deux molécules différentes de protéines se trouveraient dans un état opposé.

Quant à la forme semblable de la courbe du poumon normal et celle du poumon intoxiqué, elle nous montrerait que la différence entre les deux structures moléculaires n'est pas profonde. La différence devrait être quantitative et il s'agirait ici d'une modification chimique superficielle de la molécule de protéine après l'action du phosgène. Ce résultat correspond avec celui obtenu par la détermination des indices de réfraction des protéines du poumon normal et du poumon intoxiqué, où l'on constate que la différence entre les deux indices est petite.

Il est intéressant de remarquer, qu'une telle modification superficielle de la structure moléculaire de protéines de poumon suffit de les rendre antigéniques et de permettre ainsi l'individu de se vacciner soi-même contre l'effet mortel d'un des gaz de guerre les plus redoutables: le phosgène.

Ce travail a été poursuivi au laboratoire KAMERLINGH ONNES à Leyde. Je remercie MM. les Professeurs W. J. DE HAAS et W. H. KEESOM, qui m'ont permis de poursuivre mes recherches. Je remercie également le comité de la fondation „Toegepast-natuurwetenschappelijk Onderzoek" qui m'a facilité de les poursuivre.

<sup>5)</sup> Kolloid Zeitschr., 12, 97 (1913).

---

PROCEEDINGS

VOLUME XLIV

No. 8

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: M. W. WOERDEMAN

---

---

CONTENTS

- VENING MEINESZ, F. A.: "Gravity over the continental edges", p. 883.
- CLAY, J.: "Cosmic Ray Showers", p. 888.
- ITERSON Jr., G. VAN, and A. D. J. MEEUSE: "The shape of cells in homogeneous plant tissues". II. (With one plate), p. 897.
- WEITZENBÖCK, R.: "Ueber die Figur dreier Ebenen im  $R_5$ ", p. 907.
- BIEZENO, C. B., and J. J. KOCH: "On the elastic behaviour of the so-called "Bourdon" pressure gauge". II, p. 914.
- DEVIVERE, D. VON, and A. DE KLEYN: "A new form of position nystagmus", p. 921.
- HEUX, J. W. N. LE: "Recherches sur quelques phénomènes d'interférence des courbes de vibration". (Suite). (Communicated by Prof. P. ZEEMAN). (With one plate), p. 926.
- ELTEREN, J. F. VAN: "The orientation of watermolecules round charged particles". (Communicated by Prof. J. D. VAN DER WAALS Jr.), p. 930.
- GROOT, J. DE: "Sätze über topologische Erweiterung von Abbildungen". (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER): p. 933.
- MONNA, A. F.: "Sur la représentation des fonctions harmoniques". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 939.
- WRONA, W.: "Eine Verallgemeinerung des SCHURschen Satzes". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 943.
- UVEN, M. J. VAN: "Likelihood as conditioned probability". (Communicated by Prof. H. A. KRAMERS), p. 947.
- WOLFF, J.: "Inégalités remplies par les fonctions univalentes". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 956.
- VEEN, S. C. VAN: "Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art". I. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 964.
- VEEN, S. C. VAN: "Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergenten Reihen". I. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 974.



- RUTGERS, J. G.: "Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL". V. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 978.
- FUNKE, G. L.: "The photoperiodic responses of *Anthemis tinctoria* in different ranges of wave length". (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING). (With one plate), p. 989.
- ROEVER, W. P. DE: "Die permischen Alkaligesteine und die Ophiolithe des timoresischen Faltengebirges". (Communicated by Prof. H. A. BROUWER), p. 993.
- BELLEN, R. C. VAN: "Some eocene Foraminifera from the neighbourhood of Ričice near Imotski, E. Dalmatia, Yugoslavia". (Communicated by Prof. L. RUTTEN). (With one plate and one table), p. 996.
- KEIJZER, F.: "Eine neue eozäne Foraminiferengattung aus Dalmatien". (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 1006.
- BOL, F. P.: "On the structure of the connective tissue of the anterior lobe of the hypophysis cerebri and the nature of the intraprotoplasmic networks described by Tello in and around the cells of the anterior lobe". (Communicated by Prof. J. BOEKE). (With one plate), p. 1008.
- BRUMMELKAMP, R.: "Microgyria and retarded migration". (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS). (With one plate), p. 1011.
- SEGAAR, J.: "Der Einfluss von Kohlensäure auf die Atmungsbewegungen von Crustaceen". II. (Communicated by Prof. H. J. JORDAN), p. 1017.
- ONG SIAN GWAN: "Biophysique. Spectres d'absorption de l'extrait et des protéines du poumon normal et du poumon intoxiqué par le phosgène dans l'ultra-violet". (Troisième mémoire). (Communicated by Prof. W. H. KEESOM), p. 1024.
- GERLINGS, P. G.: "Investigations about stimulation and paralysis of the labyrinth by methylamine". (Communicated by Prof. A. DE KLEYN), p. 1031.
- BIJTEL, J.: "Some considerations concerning our knowledge of the action of the auditory organ". I. (Communicated by Prof. A. DE KLEYN), p. 1037.

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

During the gravity expeditions at sea of the Netherlands Geodetic Commission, carried out as it is well-known on board of submarines of the Royal Netherlands Navy, numerous gravity profiles over the edges of the continents have been observed, the stations having been chosen in lines more or less at right angles to the continental slope. At the landside some of the profiles end in a station over the continental shelf, some in a harbour-station occupied during the stay in port of the submarine, and several profiles observed during the expedition of Hr. Ms. K 18 could be continued inland by means of HOLWECK-LEJAY observations during excursions from these ports. In total the writer obtained three profiles at the end of the Channel, one near Lisbon, four at the coast of W. Africa, four at the coast of S. Africa, two at the east-coast of the U.S. near the mouth of the Chesapeake Bay, four at the west-coast of America between Panama and San Francisco of which one is incomplete, six at the east-coast of S. America, two at the west-coast of Australia, one at the south-coast of Ceylon and an incomplete one near Socotra. We shall not mention here the many coastal profiles in the East and West Indies which can not be considered as continental shelf profiles. In this paper the writer wants to discuss the results of the isostatic reduction of these shelf profiles with the new tables for regional and local compensation published this year by the Netherlands Geodetic Commission<sup>1</sup>).

The gravity results of these profiles have formerly been isostatically reduced according to three methods, in the first place by means of the HAYFORD-BOWIE tables based on the assumption that the isostatic compensation is evenly distributed between the Earth's surface and a surface at a depth of 113.7 km below it, in the second place by means of the AIRY-HEISKANEN tables for a normal thickness of the crust of 40 km which assume each vertical prism of the crust to float freely on the denser substratum, thus locating the compensation of a density of  $-0.6$  in crustal roots at the lower boundary of the crust, and in the third place by means of provisional tables for regional isostatic reduction which have now been superseded by the more complete new tables. In nearly all the profiles the results of these three reductions have shown an increase of the anomalies of 30–100 mgals when passing from the shelf to deep water. This fairly sudden jump in the anomalies brought about positive anomalies at the ocean-side of most of the profiles, which in many cases continued to exist over great parts of the ocean-crossing. The suddenness of the transition pointed to a cause that can not be deepseated and several suppositions have already been made about it. The new reductions have provided a simple solution. For a better understanding the writer will begin by shortly recalling the principle of these reductions.

They are based on the AIRY supposition of a rigid crust floating on a denser plastic substratum; the densities have been assumed to be 2.67 and 3.27, i.e. the values chosen by HEISKANEN for his tables for local AIRY reduction. Three sets of tables have been computed viz for values of the normal thickness  $T$  of the crust of 20 km, 30 km and 40 km. For local reduction we assume that each vertical column of the crust can adjust itself in equilibrium independent of its surroundings, thus bringing about a local isostatic compensation located in roots at the lower boundary of the crust. The new tables for regional isostatic reduction are based on the assumption that each crustal column can not locally adjust itself but that the crust acts as an elastic plate floating on the substratum and that it bends under the load of the topography till equilibrium is readjusted; the

<sup>1</sup>) F. A. VENING MEINESZ, Tables for regional and local isostatic reduction (AIRY-system) for gravity values, Waltman, Delft, 1941.

isostatic compensation of an element of the topography is thus also located in a root at the lower boundary of the crust but the root is much broader than the element and it corresponds to the shape of the bending curve. In the practical execution of the tables the compensation has been assumed at the same depth as that of the local reduction but distributed in a horizontal sense round the element according to the shape of the bending curve. This distribution extends as far as the bending goes, i.e. up to a radius  $R$  round the element depending on the thickness of the crust and its elastic properties. The tables have been made for values of  $R$  of 29.05 km, 58.1 km, 116.2 km, 174.3 km and 232.4 km, and a column has been added for  $R = 0$ , i.e. for local compensation according to HEISKANEN's assumptions. The tables thus allow the comparison of local compensation and of five different ranges of regional compensation.

The entire gravity material of the gravity expeditions at sea has been reduced with these new tables. The reductions have been made with all the values for  $R$  and for  $T = 20$  km and  $T = 30$  km. A study of the results for the shelf-profiles shows that the above-mentioned increase of the anomalies over the edge of the shelf disappears for suitable values of  $R$  and  $T$ . In many profiles this is the case for  $T = 30$  km and for  $R = 0$  or for small values of  $R$ . In many other profiles this occurs for  $T = 20$  km or  $T$  between 20 and 30 km, in a few also for slightly larger values of  $T$ . In cases of profiles leading to oceanic basins where the gravity anomalies are positive the transition becomes gradual. A detailed investigation of all the shelf-profiles will be given in the final report of the gravity expeditions at sea to be published in the next year by the Netherlands Geodetic Commission. The writer may give here two examples in fig. 1 and 2. Fig. 1

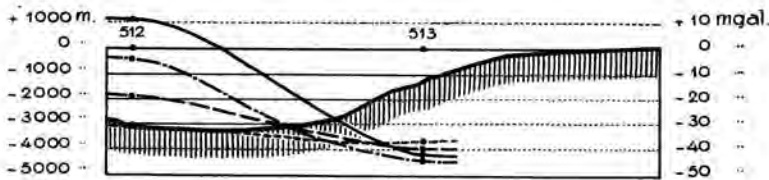


Fig. 1. Shelf-profile SE of Canary Is., horiz. scale 1 : 3000000, vertic. scale 1 : 300000.

is a gravity profile at the west-coast of Africa to the south-east of the Canary-islands and fig. 2 one at the south-coast of Africa south of Humansdorp. In both profiles the

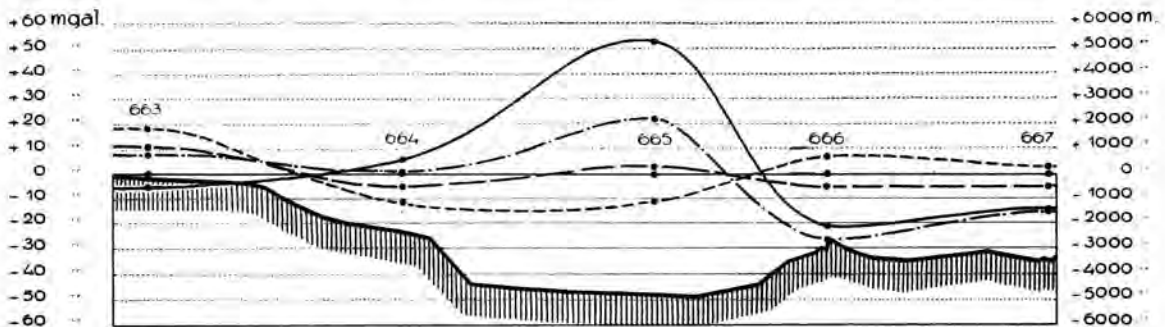


Fig. 2. Shelf-profile S of Humansdorp (S. Africa), horiz. scale 1 : 3000000, vertic. scale 1 : 300000.

dotted line represents the anomalies for  $T = 20$  and  $R = 0$ , the broken line for  $T = 30$  km and  $R = 0$ , the point-dot line for  $T = 30$  km and  $R = 116.2$  km and the drawn line for  $T = 30$  km and  $R = 232.4$  km. Fig. 1 shows a case where local compensation for

$T = 20$  km fits best the observed anomalies and fig. 2 one where local compensation combined with a value of  $T$  of 30 km meets them best. In the last case the depth-profile is more complicated than for the normal shelf-profile of which fig. 1 is a good example. The drawn curves of both profiles show the sudden increase to positive anomalies at the edge of the shelf in case the gravity results are isostatically reduced for large values of  $R$ ; the old reductions according to the HAYFORD system, the AIRY-HEISKANEN system with a value of  $T$  of 40 km or the old regional system with a large degree of regionality all gave curves similar to these drawn curves.

Several shelf-profiles show more complicated curves than those of the figures given here. Obviously other features are present there besides the main shelf-effect. In most of the cases we can nevertheless determine or at least surmise which reduction best fits the shelf-effect. A method to eliminate more or less the other features without making a detailed study of them is to take the mean of a great number of profiles; the different irregularities of the individual profiles thus merge in the common shelf-effect. For getting a representative figure for this purpose for each profile, we can take the difference of the anomaly of the station at the continental side and of that at the oceanic side of the profile, eventually of mean values of the anomalies of more stations at each of those places. In this way the stations halfway the shelf are left out of account. Taking the mean of the resulting figures for all the 26 available profiles we thus get the following figures for the different sets of anomalies; the mean elevations of the stations at both ends of the profiles are given in the last columns.

Mean shelf difference for all the profiles in mgal.

$R =$	0	29.05 km	58.1 km	116.2 km	174.3 km	232.4 km	Depth shelf	Depth ocean
$T = 30$ km	- 5	- 2	+ 1	+12	+25	+38	230 m	4340 m
$T = 20$ km	-24	-21	-15	+ 1	+16	+33	230 m	4340 m

We see that our conclusion is confirmed<sup>1)</sup>; the difference between the shelf and the ocean anomalies disappears for  $T = 30$  km and for small regionality of the compensation. This is likewise the case for  $T = 20$  km and somewhat larger regionality but even for this small crustal thickness the regionality is less than for many mountain features in the continents and less also than for the oceanic islands of volcanic origin that have been investigated, i.e. the Hawaii archipelago, Madeira<sup>2)</sup>, St. Vincent (Cape Verde Is.), Fayal, St. Miguel and Bermudas.

We may, therefore, conclude that the crust becomes rather suddenly much thinner at the edge of the continents or, to put it more accurately, those layers of the rigid crust which have less density than the substratum or at least less than the deeper layer. The boundary between these layers does not necessarily coincide with the boundary between rigid and plastic material. Adopting the above-mentioned densities of 2.67 and 3.27 for these layers and 1.027 for sea-water, indicating the sea-depth by  $d$  and assuming the shelf to have zero depth, the amount of this decrease of thickness of the upper layer is

$$\left(1 + \frac{2.67-1.027}{0.6}\right) d = 3.73 d.$$

<sup>1)</sup> The detailed study of the profiles gives a slightly smaller estimate for the best suited value of  $T$ .

<sup>2)</sup> VENING MEINESZ, F. A., Gravity over the Hawaiian archipelago and over the Madeira area; conclusions about the Earth's crust, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 1 (1941).

For values of  $d$  of 4000—5000 meter this corresponds to 15—19 km. It is difficult to see the cause of this great irregularity in the Earth's crust and in fact this problem is the old problem of the origin of the continents and oceans at the Earth's surface. The above-mentioned results give a slight contribution to the nature of the zone of transition between the continental and oceanic parts of the crust; it tends to the supposition that this transition is rather sudden.

Further light on this problem is shed by the seismic results, which we may shortly recall here. The evidence about crustal structure given by near earthquakes is generally interpreted as pointing to the continental crust consisting of at least two principal layers, an upper layer usually called the granitic layer of about 15 km thickness and a lower layer of about the same thickness generally assumed to be basaltic; on top of the granitic layer we may have a sedimentary layer. In a critical discussion of all the European data JEFFREYS in 1937<sup>1)</sup> found a thickness of 17 km for the granitic layer and of 9 km for the basaltic or intermediate layer as he calls it. In southern California GUTENBERG<sup>2)</sup> found four crustal layers from top to bottom of 14, 11, 6 and 8 km thickness; in northern California BYERLY and WILSON<sup>3)</sup> obtained three of 13, 12 and 6 km. In both cases the top layer is probably the granitic one. For the oceans no near earthquake data are in general available.

About the thinning of the crustal layers near the shelf as it has been deduced from the gravity results, we may make several suppositions. We can assume all the layers of the crust to become in the same proportion thinner but we can also suppose only the upper one to do so or at least this layer to be the main one responsible for it. The rather sudden character of the change is a slight indication in the latter sense<sup>4)</sup>. As the thickness of the upper layer, according to the seismic results, is about the same as the amount of thinning, this supposition would mean that this layer would entirely or nearly disappear at the edge of the shelf. This hypothesis is corroborated by further seismic evidence. In fact most seismologists agree to suppose that the granitic layer is absent in the central Pacific area and that it is thin or also lacking in the deepest parts of the other oceans. This result has been derived from two sources connected with the study of distant earthquakes. In the first place the velocity of the surface waves of short period through the Pacific is considerably larger than through the continents while those of long period show less difference; this effect is given by the Love waves as well as the Rayleigh waves. In the other oceans we find results for the velocities of these waves between those for the Pacific and for the continents. These results point to a surface layer of lower velocity and probably, therefore, of lower density being present in the continents, absent or very thin in the Pacific and thin in the other oceans, or we may assume two layers of the same kind being absent or thin in the Pacific and one of them absent or thin in the other oceans. GUTENBERG favours the hypothesis that the crustal layers of the continents are entirely absent in the central Pacific<sup>5)</sup> while BYERLY<sup>6)</sup>

<sup>1)</sup> JEFFREYS, H., The structure of the Earth down to the 20° discontinuity. *M.N.R.A.S. Geophys. Suppl.*; **3**, 401—422 (1936); **4**, 13—39 (1937).

<sup>2)</sup> GUTENBERG, B., Travel-time curves at small distances and wave-velocities in southern California. *Gerl. Beitr. Geophysik*, **35**, 6—45 (1932).

<sup>3)</sup> BYERLY, P. and WILSON, J. T., The central California earthquakes of May 16, 1933, and June 1, 1934. *Seismol. Soc. America, Bull.*, **25**, 223—246 (1935).

<sup>4)</sup> The seismic results found by EWING at the east-coast of the U.S. and by BULLARD at the end of the Channel seem to point in a contrary direction for these coasts. The writer will come back to these results in the coming detailed report.

<sup>5)</sup> GUTENBERG, B. and RICHTER, C. F., *Bearbeitung von Aufzeichnungen einiger Weltbeben*, Senckenberg, naturf. Ges. Abh., **40**, 57 (1925).

<sup>6)</sup> BYERLY, P., The dispersion of seismic waves of the Love type and the thickness of the surface layer of the Earth under the Pacific. *Gerl. Beitr. Geophysik*, **26**, 156—157 (1930).



advocates the alternative explanation of a deeper layer of the continental series to be still present there. The writer is inclined to the latter assumption because otherwise it appears difficult to him to explain the isostatic equilibrium of the Hawaii archipelago and other islands in this ocean. As there is no evidence of any sinking back of these islands we must suppose this equilibrium to be realized and so we need deficiencies of mass lower down for compensating them. For the Hawaiian islands at least we can not easily explain these deficiencies by the blowing out of mass during the volcanic eruptions that gave rise to these islands<sup>1)</sup> because the horizontal spreading out over large areas of these compensating masses as it has been stated by means of the gravity results, could not well be understood in this way. An explanation by regional compensation according to the AIRY system appears to the writer<sup>2)</sup> to be the only acceptable one. But this implies the presence of a crustal layer of smaller density than the plastic substratum and so the writer is inclined to assume at least one such layer to be present in the Pacific area.

Another argument for the absence of the granitic layer in this area is given by GUTENBERG and RICHTER<sup>3)</sup>. By studying the amplitudes of the reflected longitudinal waves (*PP*, *PPP*, etc.) they have found that waves of this kind reflected in the central Pacific area and in part of the Arctic basin had smaller amplitudes than those reflected in the continents and in the other oceans and they have ingeniously explained this phenomenon by remarking that the angle of incidence of the wave at the reflecting surface must be larger when no surface layer is present. The writer has not studied this matter but he should wish to venture that the explanation seems to him also to hold true when the number of crustal layers is smaller under the Pacific than elsewhere. As far as the waves having undergone reflections in the other oceans are concerned, it might be possible that they have reflected in parts where remnants of the granitic layer must be admitted or we might suppose, in case we should have to assume no granitic layer at that place, that one layer more than in the Pacific is present there, causing a smaller angle of incidence, although it must be assumed to be larger than in the continents.

Resuming our subject after this short transgression into seismology, it appears to the writer that the most probable explanation of the present seismic and gravimetric data concerning the problem of the presence of oceans and continents at the Earth's surface is to assume the granitic layer only to be present in great thickness in the continents and to end rather suddenly at the edge of the shelf or, if present in some parts of the oceans, to be thin there. The next layer seems to continue under the oceans, perhaps somewhat thinner under the deepest parts of the Atlantic and Indian oceans and certainly thinner under the central part of the Pacific east of the andesite line; it may even be absent in this last area but in this case we must assume a still deeper crustal layer to be present there of a smaller density than the layer below it. The principal part of the gravimetric shelf-profiles as well as of the seismic data could thus be explained.

<sup>1)</sup> This explanation was tentatively offered to the writer by Dr. VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT.

<sup>2)</sup> VENING MEINESZ, F. A., Gravity over the Hawaiian archipelago and over the Madeira area; conclusions about the Earth's crust, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 1 (1941).

<sup>3)</sup> GUTENBERG, B. and RICHTER, C. F., On seismic waves (2nd paper). Gerl. Beitr. Geophysik, 45, 280—360 (1935).

**Physics.** — *Cosmic Ray Showers.* By J. CLAY.

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

*Summary.*

A summary is given of a number of experiments concerning showers. Especially a comparison is made between the divergence and the penetrating power of showers with small spreading in the first maximum (1.5 cm Pb) and the second maximum (25 cm Pb). The spreading is greater in the second case and the hardness is less. The proportion of the maxima moves between 4 and 3.

Next a distinction is made between the occurring hard showers (of mesons) and soft showers (electrons) and mixed showers, under thick layers of different matter: air, water, aluminium, iron and lead. The variation with the electron density is determined. The number decreases with increasing atomic number.

The meson showers have greater spreading than the electron showers.

§ 1. When cosmic rays pass through matter bundles of rays (showers) occur, which are formed in consequence of the interaction of the rays and the field of the atomic nuclei. The process of multiplication is such, that in consequence of the reactions the charged corpuscle throws off part of the energy in the form of a photon and this photon loses its energy in forming pairs of electrons, one with a positive, one with a negative charge. Thus arises a multiplication. This process has been treated by many authors, but now BRUINS (1) has succeeded in accounting for it quantitatively. He has been able to describe the process that occurs in the higher layers of the atmosphere and from the phenomena he has estimated the energy distribution of the original spectrum of the incident particles, *which proves to be mostly identical* to the spectrum which has been measured of the mesons in the atmosphere.

§ 2. However in thin layers of matter — where the process was originally found — it is more complicated, because the loss of energy of the particles through ionization is a factor not to be neglected. The theory of it has also been indicated by him in principle but it has not yet been worked out quantitatively.

On measuring *showers* in thin layers of matter there is a difference in relation to the geometrical proportion of the experiment; in the first place how many shower particles are counted and at what distance from the dispersing matter the counters are placed.

In the past year these circumstances have been carefully studied in this laboratory (2). The results have shown in how far the numbers found can be made independent of the geometry of the measuring apparatuses.

In thin layers the production is proportional to the square of the atomic number. But the location and the height of the maximum of showers of varying number can only now be tested with the help of the theory of BRUINS.

§ 3. There was however another problem to which we have given our special attention.

When the number of the showers formed under thick layers is examined, it is seen that there must be a second process of a different nature. There is namely a second maximum, indicating that there must be a corresponding multiplication phenomenon, but of particles of more penetrating power. For some time it had been suspected that this must be meson showers. So far, the phenomena found by different investigators, were greatly contradictory (3).

The second maximum, first found by ACKEMAN and HUMMEL (4) under lead, lies at about 16 cm and was also found by us in an earlier investigation under iron at about 26 cm. This was not at all confirmed by some investigators, while under some circumstances others found it, being so evident as to exceed even the first (5).



First of all we determined by three different methods that this maximum and a third maximum certainly exist (7).

Secondly, however, these maxima proved always to be much lower than the first in the proportion of 3 to 4 times. But an even greater difference may be noted. The second maximum, which according to BOTHE and SCHMEISER (6) consists of more penetrating rays, was thought to have less divergence than the showers of soft rays (electrons). In a systematic investigation, carried on for a considerable time, we found the opposite result.

In this investigation we made an arrangement as shown in Figure 1. Four counters of 1 cm diameter are connected parallel, close under a layer of lead A, successively

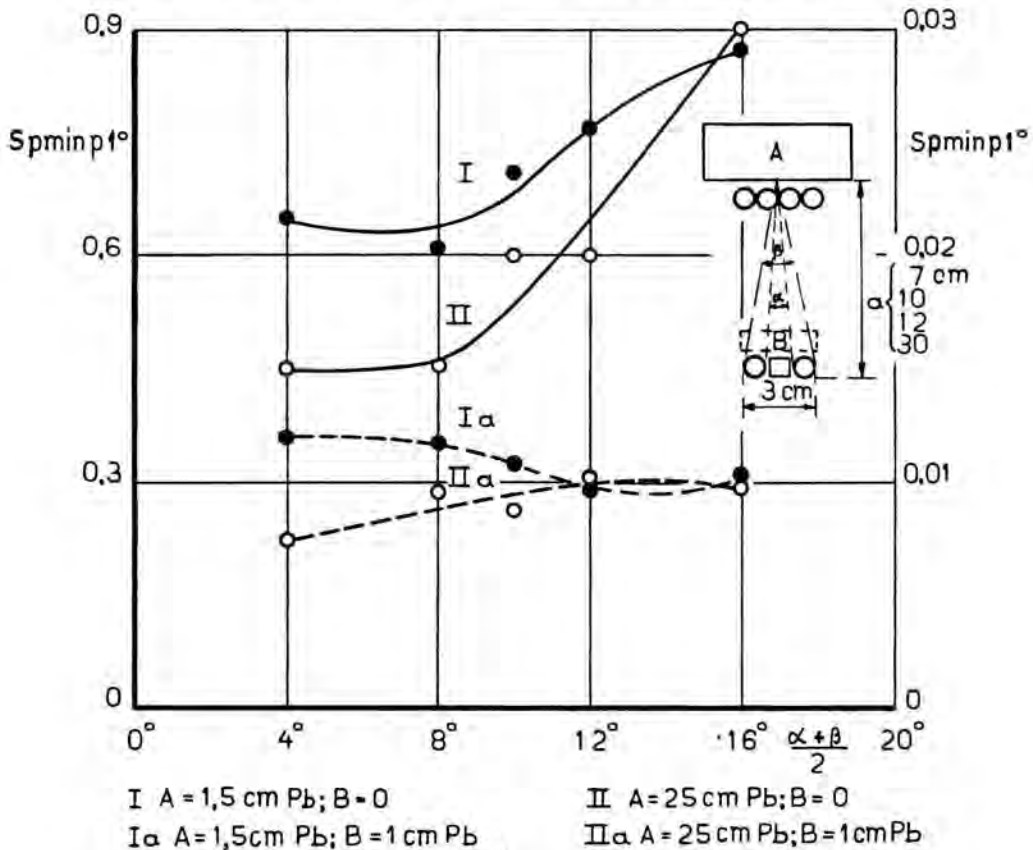


Fig. 1. Showers under 1.5 cm Pb, I and Ia under 25 cm Pb, II and IIa in dependence on their angle of divergence.

1.5 and 25 cm thick. Under it at a distance  $a$  there are two counters of 1 cm, separated by 1 cm Pb. The distance  $a$  was varied from 30 to 7.5 cm and thereby the angle of rays from the scattering lead was varied from  $2^\circ$ – $6^\circ$  to  $8^\circ$ – $26^\circ$ . Above the lowest counters layers of lead were placed, varying from 0.5 to 2 cm Pb, in order to measure the absorption of the shower rays. Because the opening becomes larger as the distance is smaller, the numbers were divided by the value of the opening angle and in that way comparable figures were found for different spreading. For 1.5 cm Pb above the counters the figures are given in column 4, the same for a layer of 25 cm Pb in column 7. All observations were continued until at least 150 showers had been observed, so that the uncertainty was no more than 8%.

TABLE I.

Showers under thin lead,  $A_1 = 1.5$  cm Pb and thick lead,  $A_2 = 25$  cm Pb at different angles of divergence.

Divergence			$A_1 = 1.5$ cm Pb		$A_2 = 25$ cm Pb		$\frac{SA_1}{SA_2}$
$\alpha$	$\beta$	$\frac{\alpha + \beta}{2}$	S/min	S/min/1°	S/min	S/min/1°	$\frac{\max 1.5 \text{ cm Pb}}{\max 25 \text{ cm Pb}}$
2°	6°	4°	0.256	0.065	0.062	0.015	4.1
4°	12°	8°	0.49	0.061	0.12	0.015	4.0
5°	15°	10°	0.72	0.072	0.22	0.020	3.6
6°	18°	12°	0.93	0.077	0.24	0.020	3.9
8°	26°	17°	1.51	0.086	0.54	0.030	3.0

The relative increase of the numbers with the angle of divergence are found in columns 5 and 8. It is seen that under the thick layer the divergence is greater than under the thin one, while further the proportion of the numbers is given in the 8th column. It is seen that this proportion decreases with the divergence. This is in accordance with our experience that the second maximum works out better for greater angles. It is contradictory to the result of BOTHE and SCHMEISER, but in keeping with the results of other investigators, especially TRUMPY (8), and with our results given in § 7.

TABLE II.

Absorption of showers under a thin and under a thick layer of lead at different divergences of the rays.

$\frac{\alpha + \beta}{2}$	4°		8°		10°		12°		17°	
B cm Pb	A 1.5 cm Pb	A 25 cm Pb	A 1.5 cm Pb	A 25 cm Pb	A 1.5 cm Pb	A 25 cm Pb	A 1.5 cm Pb	A 25 cm Pb	A 1.5 cm Pb	A 25 cm Pb
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.5									0.50	0.44
1.0	0.56	0.50	0.58	0.64	0.44	0.45	0.38	0.52	0.35	0.33
2.0	0.24	0.37	0.32	0.29	0.22	0.25	0.22	0.29		

Under a thin layer (1.5 cm Pb) the divergence is therefore less than under 25 cm Pb (Table I, Fig. 1) and the hardness of the showers under the thick layers is not greater than under the thin layer (Table II, Fig. 1). TRUMPY (8) found lately that the hardness is even less under the thick layers and we found the same for a greater divergence.

This is clear from Table II and Fig. 1.

§ 4. In order, however, to distinguish between softer electron showers and hard meson showers, a separate investigation was made, in which four-fold coincidences were measured, but in such a way that the counters were placed two by two above each other, 10 cm, sometimes 15 cm Pb being inserted between them, Fig. 2 a. The experiments were made with four counter boxes of 3 counters, parallel to each other with sensitive area of 840 cm<sup>2</sup>.

In this way 3 different cases could be distinguished. If between the two pairs of counters 10 cm Pb ( $B_1$  and  $B_2$ ) are inserted, it is certain that the two parts necessary for a four-fold coincidence must both have been mesons, for already at 5 cm Pb 10<sup>11</sup> eVolts is needed, according to HEITLER's theory, and if the energy increases in the same way for the penetration of thicker layers, we arrive at values which do not occur for electrons on the surface of the earth.

TABLE III.

Absorption of soft and of hard shower particles under different kinds of matter in 100 min area 840 cm<sup>2</sup>.

$B_1$ en $B_2$	0:0	0:1	0:2	0:3	0:4	0:5	0:10
Open	57	40	40	28	30	28	22
70 cm water	70	51	50	46			30
28 cm aluminium	59	44	39	41			23
33 cm iron	31	24	25	23	19		17.5
15 cm lead	33	25	21				15

By leaving the thickness of lead  $B_1$  10 cm between one pair, and then stating the decrease which arises when the absorption layer between the other counters is varied

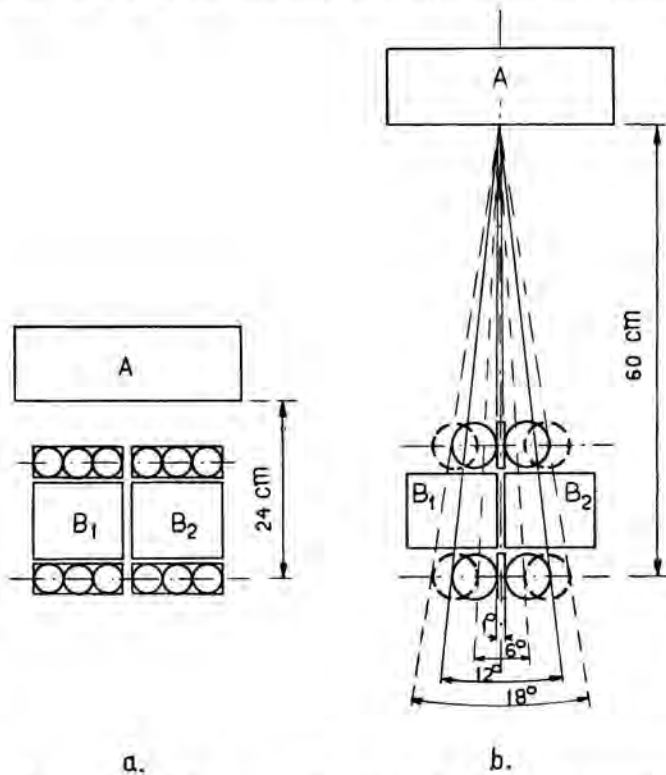


Fig. 2. Arrangement of the counters in order to distinguish between electron and meson showers.

- Four-fold coincidences in 4 boxes each of 3 counters, each of 6 cm diameter and 47 cm long and afterwards 3 counters each 30 cm long and 4 cm diameter.
- Four-fold coincidences in four counters each 47 cm long and 6 cm diameter in two positions.

from 5 to 15 cm, we finally obtain the absorption of the meson particles in the showers. This is given in Fig. 3 and Table IV. The number is seen to have decreased very little.

When one takes  $B_1$  10 cm Pb, varying  $B$  from 0 to 5 cm the absorption is seen to be much greater. The additional showers which are obtained are showers in which one particle must be a meson, but in which the other is most probably an electron. Vide Table V.

TABLE IV.

B <sub>1</sub> and B <sub>2</sub>	10: 0	10: 1	10: 2	10: 3	10: 4	10: 5	10: 10	10: 15
Open	22	18	15	13		11	10	7.3
Water	30	24	21			16	12	12.6
Aluminium	27	22	20	20		14	9.1	
Iron	17.5	13	13			10	9	
Lead	15	13				11	8.8	6.4

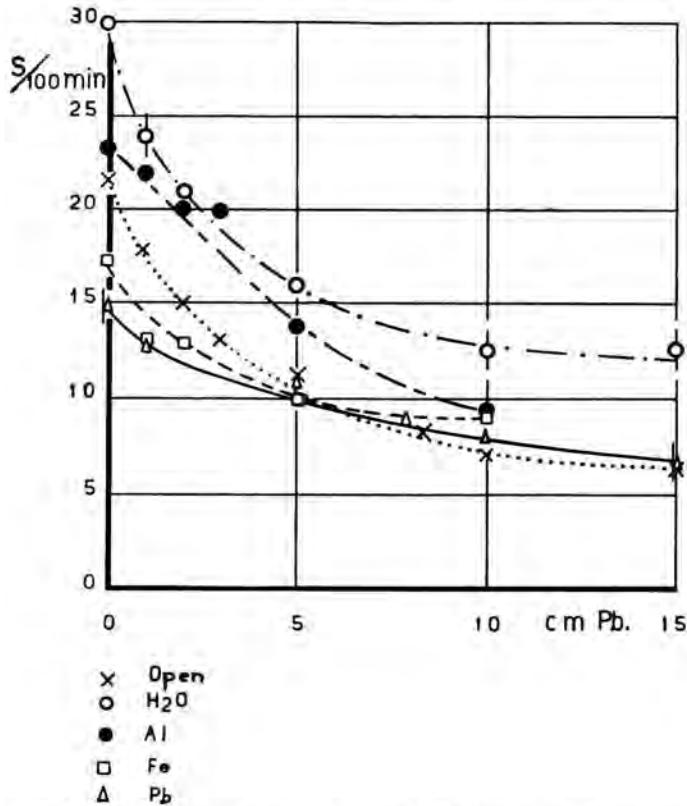


Fig. 3. Decrease of meson showers and mixed showers under air, water, Al, Fe, Pb by absorption in lead from 0—5 and from 5—15 cm. The uncertainty is given for 4 values, but for all the values it is less than 8%.

TABLE V.

Decrease of soft showers and mixed showers by 1 cm Pb, number in 100 min.

	0: 0—10: 0	0: 1—10: 0	$\frac{0: 1-10: 0}{0: 0-10: 0}$	0: 10—10: 10	1: 10—10: 10	$\frac{1: 10-10: 10}{0: 10-10: 10}$
Open	35	18	0.52	12	8	0.67
Water	40	21	0.52	18	12	0.67
Aluminium	36	21	0.58	22	13	0.59
Iron	13.5	6.5	0.48	8.5	4	0.50
Lead	18	10	0.55	6.2	4.2	0.68

These are processes in which the meson throws off an electron from the atomic connection, the processes in which the secondary electron rays are formed. These processes have been observed under thick layers of different material, water, aluminium, iron and lead, in order to attain the condition of saturation (Fig. 4).

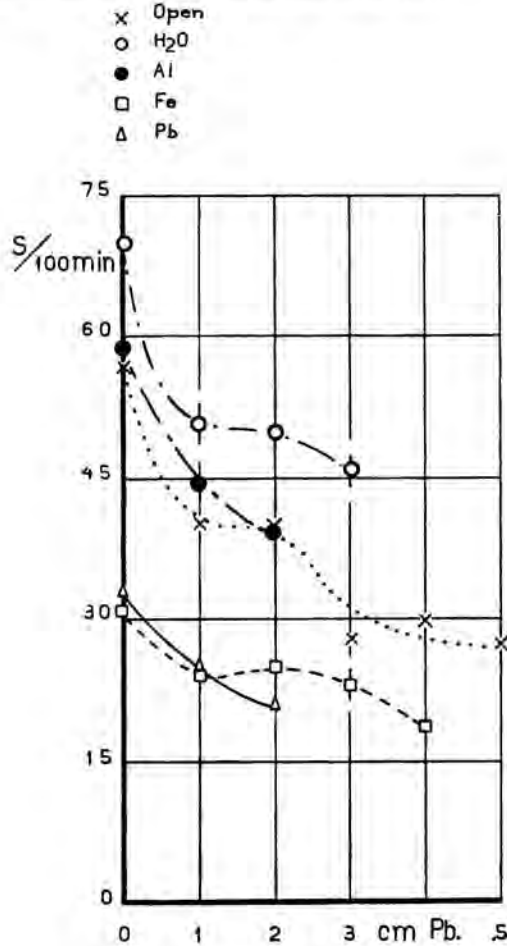


Fig. 4. Decrease of electron showers under thick layers of air, H<sub>2</sub>O, Al, Fe and Pb in lead from 0 to 5 cm.

That there are here electrons is apparent from the fact that the decrease by 1 cm Pb ( $B_2$ ) is of the same value, being only little less than that in soft showers. This is seen from the figures in Table V, where in column 2 the soft showers found are given and in column 3 the cases in which 1 cm Pb is placed in one of the two ways which must be taken by the showers particle; column 4 shows the percentage of the showers left after absorption by 1 cm Pb.

The same is given for the mixed showers in columns 5, 6 and 7. From this it is clear that in this case the remaining particle is not a meson but an electron, although the average energy is a little greater than in the first case.

So in this case we are confronted by a coincidence, in which there is certainly one meson and certainly one electron. A number of such cases is known from WILSON-chamber photographs, namely that an electron rich in energy is produced by a meson (9). When further we deduce the number of coincidences found with  $B_1 = 10$  and  $B_2 = 0$  from the

number with  $B_1 = 0$  and  $B_2 = 0$ , there is left the number of showers consisting of soft rays i.e. electrons. The decrease of the number in both cases is given in Table V, fig. 4.

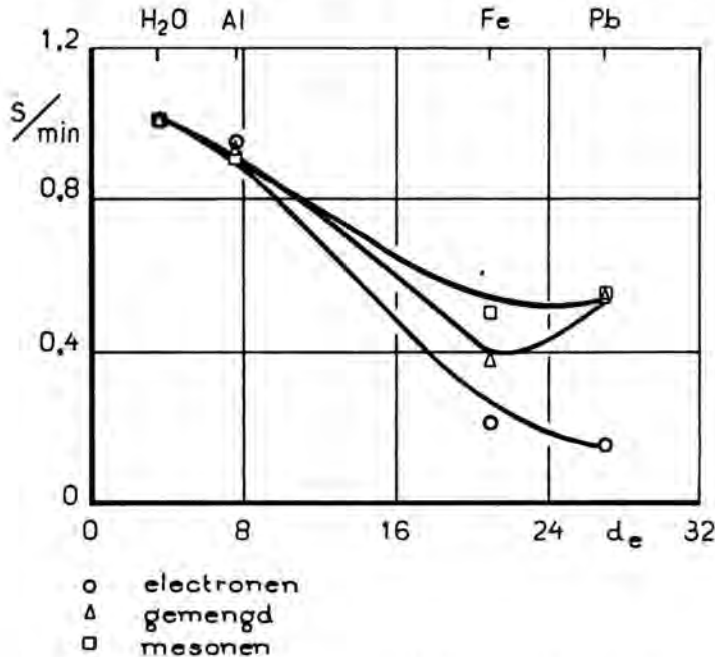


Fig. 5. Decrease of electron showers, mixed showers and meson showers with decrease of the electron density of the material: water, Al, Fe, and Pb.

§ 5. The measurements were all taken under thick layers of different matter. We see that the number of showers under thick layers decreases with the electron density and here we have the same phenomenon as when we measured the number of secondary rays (electrons) with regard to the number of mesons by which they are produced (10). The production is, indeed, proportional to the electron density, but the absorption in the material itself is proportional to the square of the atomic number and consequently, in condition of saturation under thick layers, the number of showers under the material will decrease in proportion to the atomic number.

The number of coincidences found, in which at least one meson and one electron are combined, is less rapid with the electron density of the dispersing material. Here is, however, an irregularity, namely that with lead the number is greater than with iron and this irregularity was tested several times and therefore seems to be real.

TABLE VI.

Number of showers observed under different layers with different absorbing layers, per 100 min, area 360 cm<sup>2</sup>.

	$B_1$ $B_2$ 0 0	$B_1$ $B_2$ 0 10	$B_1$ $B_2$ 5 10	$B_1$ $B_2$ 10 10
Air	29	16	8.8	4.5
70 cm H <sub>2</sub> O	60	22	10	6.9
28 cm Al	56	20	10	6.2
33 cm Fe	17	9	4.9	3.5
15 cm Pb	18	12	6.1	3.8



In order, however, to measure this with certainty a measurement was repeated with another set of four glass counters, this time in quicker succession, the different layers of material being exchanged in order to prevent insufficient constancy of the circumstances during the continued measurements necessary for the absorption. The sensitive area of these counters was 360 cm<sup>2</sup>. It was seen that in the proportion of the hard meson showers the number had decreased approximately in the same proportion as the sensitive area, the proportion for the narrower areas being more favourable for the soft electron showers. This means that in the meson showers there is greater divergence than in the electron showers. This was confirmed in a further investigation, which will be described lower. The figures found are given in Table VI and these values were obtained from a number which was always greater than 150, so that the uncertainty was less than 8%. The values of table VII were deduced from these data and figures were found for Al, Fe,

TABLE VII.

Number of electron showers (S), combined showers (S & H) and meson showers (H) under different layers of matter of great thickness.

	S		H & S		H		$\frac{S}{H}$	$\frac{H \& S}{P}$
Air	0.13		0.115		0.045		4	2.5
70 cm H <sub>2</sub> O	0.38	100	0.15	100	0.069	100	5.5	2.2
28 cm Al	0.36	95	0.138	92	0.062	90	6	2.3
33 cm Fe	0.08	21	0.055	37	0.035	50	2.3	1.6
15 cm Pb	0.06	16	0.082	54	0.038	55	1.6	2.2

and Pb with regard to water. From them is seen the decrease, as the electron density in the material in which they are produced, increases.

§ 6. In figure 6 a separate series of figures is given under iron of varying thickness, in order to state the influence of the thickness of the producing layer of iron. It is seen that the number decreases to a greater extent with the thickness than would agree with the decrease of the entering mesons, except that with the greater thickness there is an irregularity which appears to be greater than only the uncertainty of the observations

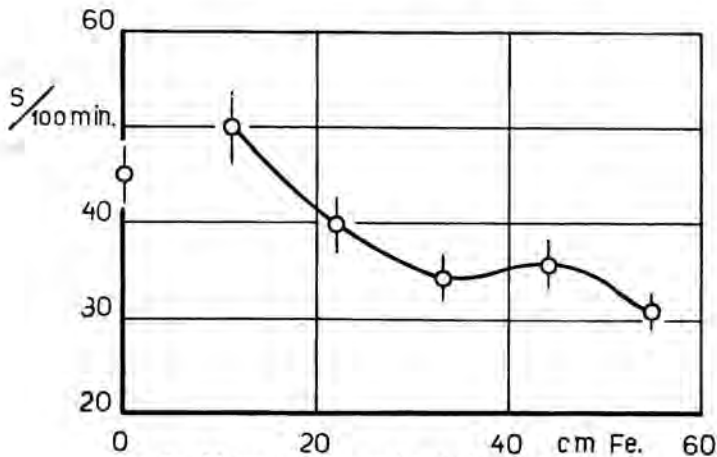


Fig. 6. Meson showers under thick layers of iron.

§ 7. In order to investigate the spreading of the two species of showers an arrangement was made as shown in fig. 2 b. We measured under 70 cm of water, the number was determined when the counters were only separated by 1 cm Pb, and secondly when placed at a distance of 6 cm. The results of the two series of measurements for soft and for hard showers given in table VIII clearly show that the divergence of the meson

TABLE VIII.  
Comparison of the divergence of electron and meson showers.  
Electron showers (no lead between the counters).

	min.	number	S/min.	
1°—12°	1841	975	0.53	1.00
6°—18°	1362	499	0.37	0.70
For hard showers (10 cm lead between the counters).				
1°—12°	2757	187	0.068	1.00
6°—18°	7593	407	0.055	0.80

showers is greater than of electron showers. This might be expected on the ground of the theory, but after BOTHE and SCHMEISER thought they had found the reverse, WENTZEL (11) investigated what modification must perhaps be made in order to bring the theory in agreement with the phenomena. Therefore it does not seem necessary to insist in this modification.

We will not, as some authors have done, from the decrease of the number of particles with the thickness of the absorbing layer, determine an absorption coefficient with the aid of an exponential absorption formula (12). When one knows the loss of energy of the particles in dependence on the energy, the spectral energy distribution of the entering particles may be deduced from the decrease of the number in layers of increasing thickness (9). This is easy in the case of heavy particles because the loss of energy varies very little with the energy. In the case of known formulas which have been tested in experiment, one should take into consideration the dependence of electrons on energy. For the soft primary rays produced by mesons the distribution is seen not to be exponential, but a proportional to  $E^{-n}$ , the value of  $n$  but little differing from 1 (10). It will only be possible to make a rough estimate in the case of the small number of shower particles, which can be measured.

In any case, however, it will only be possible to find the decrease of the electrons and the mesons together in thin layers of lead or iron and that of mesons only in thick layers.

#### REFERENCES.

1. E. M. BRUINS, *Physica*, 8, \* (1941).
2. J. CLAY and K. H. J. JONKER, *Physica*, 7, 94 (1940).
3. Literature showers, R. STEINMAURER, *Erg. d. Kosmischen Physik III* (1938).  
D. K. FROMAN and J. C. STEARNS, *Rev. Mod. Phys.*, 10, 138 (1939).  
W. BOTHE, *Rev. Mod. Phys.*, 11, 303 (1939).  
W. M. NIELSEN and J. E. MORGAN, *Rev. Mod. Phys.*, 11, 287 (1939).
4. M. ACKEMANN, *Z. f. Phys.*, 32, 161 (1938).
5. J. CLAY, A. v. GEMERT, J. T. WIERSMA, *Physica*, 3, 627 (1936).
6. K. SCHMEISER and W. BOTHE, *Ann. d. Phys.*, 32, 161 (1938).
7. J. CLAY, A. VENEMA and K. H. J. JONKER, *Physica*, 7, 637 (1940).
8. B. TRUMPY, *Bergens Museum Årbok* (1939).
9. L. LEPRINCE-RINGUET and J. CRUSSARD, *J. d. Physique* (7), 8, 207 (1937).
10. J. CLAY, *Proc. Ned. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, 43, 1260 (1940).
11. G. WENTZEL, *Phys. Rev.*, 54, 869 (1938).
12. A. EHMERT, *Z. f. Physik*, 113, 234 (1939).

**Botany.** — *The shape of cells in homogeneous plant tissues.* II. G. VAN  
ITERSON JR and A. D. J. MEEUSE.

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

4. *Suppositions, concerning physical causes of the formation of the cubo-octahedral cellform.*

We have communicated that as early as 1807 MIRBEL suggested that the cells assume their polygonal shape, owing to the fact that originally they are round bodies, flattening each other during their growth.

The idea to connect the form of the cells with the shape which plastic spheres assume, when assemblages of them are compressed through pressure on all sides, or when assemblages of inflatable spherical bodies are freed from their interstices by inflation in an enclosed space, has also been discussed by later investigators.

We shall first discuss the theoretical side of the problem.

When the faces with which the spheres on compression from all sides of the assemblages, or on inflation in an enclosed space, touch and flatten each other, cannot slide over each other, the form of the resulting bodies will be entirely determined by the method of stacking. An assemblage of equal spheres wherein the spheres are placed in the corners of a cubic partitioning of space will produce cubes, and an arrangement according to the closest packing of equal spheres produces rhombic dodecahedrons or extended rhombic dodecahedrons (depending on the position of the spheres in the successive plane layers of the stack)<sup>1</sup>). The way how to pack equal spheres in order to produce on compression orthic tetrakaïdecahedrons was calculated for LEWIS by Prof. WILLIAM C. GRAUSTEIN (11); the spheres in the separate plane layers must be placed in squares, but with interstices between the neighbouring spheres equal to  $0.31 \times$  the radius, the spheres of a superior layer must rest on four spheres of a lower layer.

Experimentally the proof of the correctness of these considerations cannot easily be furnished. It is difficult to cause uniform pressure on all sides of an assemblage of spheres and it is not easy to find bodies inflating

---

<sup>1</sup>) As early as 1897 W. BARLOW (A mechanical cause of homogeneity of structure and symmetry geometrically investigated, etc., *Scient. Proc. Roy. Dublin Soc.* 8, 527—540 (1893—1898)) pointed out the circumstance that an assemblage of equal spheres in closest packing may be constructed in different ways, the centres of the spheres forming point systems with different symmetries. B. G. ESCHER (Over de reguliere en hexagonale dichtste bolstapelingen en de deformatie hunner bollen tot dodecaëders tengevolge van compactie, these *Proceedings* 43, 1302—1310 (1940)) lately discussed the bodies which are formed on allsided compression of such arrangements until there is no space left between the spheres. Such bodies are rhombic dodecahedrons and extended rhombic dodecahedrons (for the latter see Fig. 1d in the first part of this communication).

equally in all spatial directions. Some investigators have caused peas to swell in an enclosed space, in imitation of a famous experiment by G. L. L. DE BUFFON (2). One of those who tried this was R. GANE (6) but he was not successful, neither with globes of dough, which he caused to expand by fermentation. F. T. LEWIS (20) informs us that after an experiment with peas, which were made to swell in a brass cylinder, he found an average number of 12.13 faces on 200 peas, and in another experiment with 400 peas the average was 12.14 faces. When he considered that some faces were bounded by intercellular spaces he came to the occurrence of averagely 12 contact faces for one pea with other peas. This result was to be expected if the peas were indeed placed after a closest-packing-arrangement. Yet — for reasons which will be given later — LEWIS calls this experiment "unfortunate".

Some investigators have compressed stacks of equal spheres of plastic material unilaterally. GANE (6) used for this purpose spheres of plasticin, which he rubbed with talc powder and compressed in a cylindrical tumbler, in which he first shook them gently. Here bodies were obtained with lateral faces the number of which varied between 12 and 14. Yet we cannot attach great value to GANE's experiments, seeing that he also compressed equal plastic globes packed as closely as possible in a rectangular space in which experiment he did not get rhombic dodecahedrons, but bodies approaching the orthic tetrakaidecahedron. We have repeatedly made the same experiments and we did get rhombic dodecahedrons or extended rhombic dodecahedrons. On unilateral compressure of equal spheres these bodies naturally did not possess edges of uniform length, but on compression of ellipsoid bodies the resulting bodies had this property. The main fact is that from different stacks of equal spheres bodies with perfectly flat lateral faces and with straight edges are obtained and further it is of importance that on the resulting bodies right and acute angles may be observed and that each body may show more than 3 edges meeting in the same vertex. In the compressed plastic matter these figurations are perfectly stable.

These details exclude the explanation of the tetrakaidecahedral cell form *with curved edges and curved faces* as a result of compressure of originally spherical cells in closest packing and even in a packing after GRAUSTEIN.

A short time ago J. W. MARVIN made some very careful experiments concerning the compression of lead shot in cylinders. A provisional communication (22) appeared in 1937 and this is the treatise which confused LEWIS, making him attribute his own observations of swollen peas to an unfortunate experiment. MARVIN found an average number of lateral faces of 14.17 in shot which had been placed arbitrarily in a cylinder and had been compressed in it in such a way that all intervening space had disappeared, the shot located peripherally in the cylinder being omitted on counting the faces. This figure strikingly approaches the average value which LEWIS found for the number of lateral faces of the cells of elder

pith, and led him to doubt whether shot in the closest packing produces rhombic dodecahedrons on compression.

Since then, in 1939, MARVIN (24) made detailed communications about his experiments. Among others he gives pictures of the result of shot compressed when packed in the closest way, rightly mentioning that in that case rhombic dodecahedrons are obtained. Further he investigated statistically the frequency distribution of the various lateral faces of compressed shot which had been poured into the cylinder without any precautionary measures. There is no doubt that the deviations from the rhombic dodecahedron in the latter case are to be ascribed to the fortuitous arrangement of the shot in this case. It should be borne in mind that even if the bottom layer was placed in such a way that each sphere touched 6 neighbours the arrangement of the shot in the next layers generally would not be the closest possible, as for that purpose the shot of the second layer should fall in *fixed* hollows of the first layer (these hollows are determined as soon as one of the shot of the second layer has found a place in one of the hollows of the bottom layer). The compressure of spheres in a fortuitous arrangement never can lead to a *homogeneous* assemblage. So in our opinion the agreement of the average number of the lateral faces of compressed shot in these experiments with the average number of the lateral faces of cells in *homogeneous* plant tissues is of no account.

Therefore I shall not discuss the certainly interesting experiments of E. B. MATZKE (25) who compressed mixtures of large and small shot in different proportions until the air in between had disappeared. It will be clear that averagely there were produced more lateral faces on the large shot than on the small.

After what has been said above about the occurrence of tetragonal faces in cells in uniform tissues with sides curved outwards, and about the occurrence of corresponding faces in bodies of membranes of a solution of soap in a homogeneous soap-froth, one might be inclined to consider the shape of the cell as the result of the action of surface tension.

It would be superfluous to recall the fact that there has been a time when surface tension was indeed connected with the position of cell walls with respect to each other. L. ERRERA (4) and afterwards his collaborator E. DE WILDEMAN *compared* the perpendicular position of newly formed cell walls on those present before, and the cell structure of mature tissues with respectively the position of membranes of a soap solution against a moist solid wall and the position of membranes in soap-froth. Meanwhile the conception that in juvenile as well as in mature tissues the surface tension is the *causal force* of the arrangement of the cell walls, has been wrongly ascribed to ERRERA. As a matter of fact the investigator referred the botanist NOLL to an experiment of MACH, when at a congress at Wiesbaden—where ERRERA read a paper on this subject—NOLL remarked that from their origin cell walls should be considered as a solid and not as a liquid matter. From MACH's experiment, which will be discussed



later, it appears that stretched rubber membranes — which are solid — may behave to a certain extent like membranes of a liquid. Yet ERRERA is himself guilty that people had a wrong impression of his conceptions, for in some of his publications he did not avoid the suggestion that the surface tension plays a part at least in determining the position of juvenile cell walls. This can be made clear from the following quotation, which will be of interest in our subsequent considerations. "In mature plant tissues the passive tension of the cell wall through turgor replaces active surface tension. Grouping according to angles of  $120^\circ$  is therefore maintained, or is even reached owing to later shiftings in cases where originally angles of  $90^\circ$  occurred!"

G. BERTHOLD (1) formulated the difference between the arrangement of juvenile cell walls and that of walls in older cell tissues thus that during the development each cell wall tries to become "a plane of *minimal area*" and that in mature tissues the "assemblage of cell walls in its entirety" tries to fulfil the requirements of the principle of the minimal area. For that latter purpose, he thinks, "the cells will later slide over each other and be deformed". BERTHOLD is very certain in his opinion that even the juvenile cell wall should not be considered as a liquid lamella and he tries to account for the perpendicular location of the young wall on the older ones by a tendency to equal division of space of the mother cell over the daughter cells.

It is well-known that in his book mentioned before D'ARCY W. THOMPSON enumerated instances in which the location of the cell walls according to BERTHOLD's principles may be observed. From the recent studies of R. SOUÈGES (30) on the development of vegetable embryos other instances may be taken.

Later investigations about the development of young cell walls and their deformations after the embryonic stages entirely exclude activity of surface tension in the formation of the cubo-octahedral shape. This does not take away from the fact that ERRERA's reference to the experiment of MACH and his observations on the activity of turgor as a deforming action on cell walls have not lost their significance. Therefore I wish to call the attention to that experiment. It was described by MACH (28) at a congress in Prague in 1868. Over the edges of a regular tetrahedron rubber membranes were stretched, after which the space enclosed by those membranes, into which a metal tube entered, was exhausted. The membranes then contracted to the same figure as the membranes of a solution of soap assume when a wire tetrahedron is immersed in a such a solution.

K. GIESENHAGEN (7) enclosed rubber balloons in glass vessels and then exhausted the space round the spheres; the rubber spheres then expended and flattened each other; the partition walls showed positions agreeing with those of cell walls in certain tissues. It was necessary, however, to moisten the balloons with paraffin oil, so that they could slide over each other.



G. VAN ITERSON Jr and A. D. J. MEEUSE: THE SHAPE OF CELLS IN  
HOMOGENEOUS PLANT TISSUES.

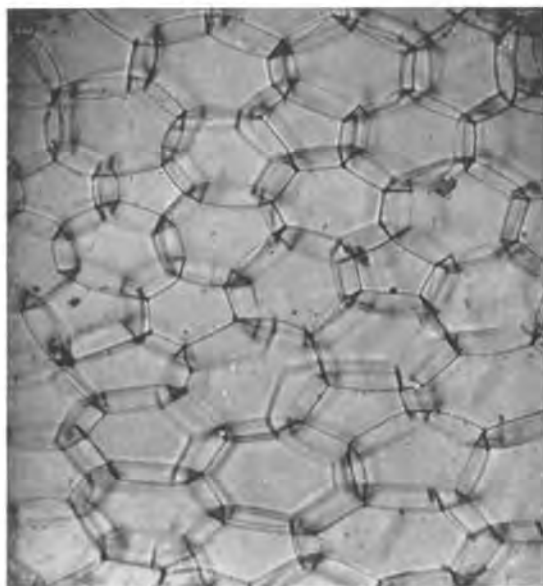


Fig. 1.

Transverse section of the cortical parenchyma of a root tuber of *Asparagus Sprengeri*. Magnif. 50.

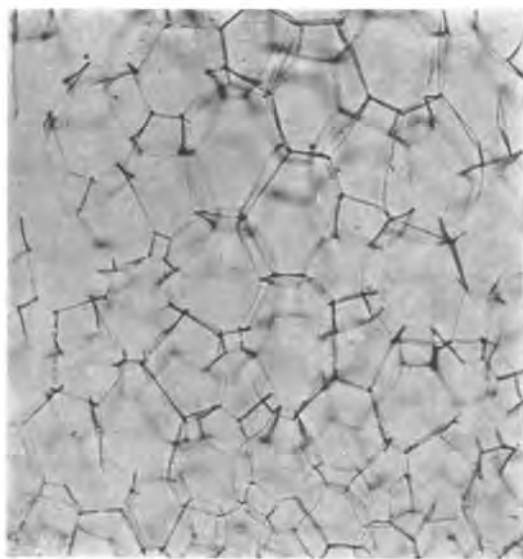


Fig. 2.

Oblique section of the same tissue with many tetragonal faces. Magnif. 50.

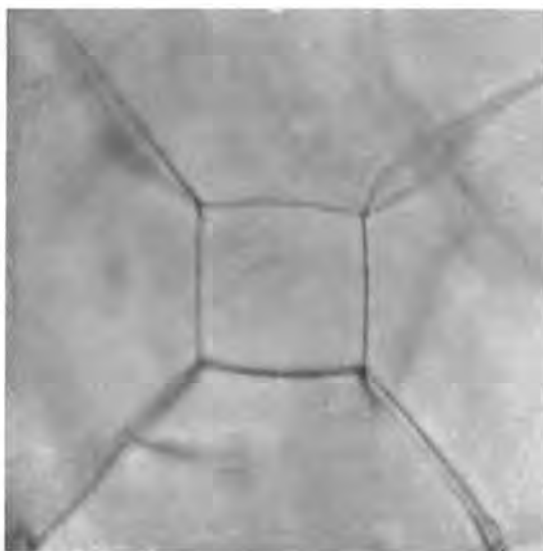


Fig. 3.

A tetragonal face with curved sides and parts of four adjacent hexagonal faces of a cubo-octahedral cell of the cortical parenchyma of a root tuber of *Asparagus Sprengeri*. Magnif. 200.



Fig. 4.

The tetragonal plane face with curved sides and the adjacent faces formed in the centre of a rectangular prismatic wire model (the sides of which were 10.2 cm, 8 cm and 10.2 cm). The faces of the model were entirely covered with plane rubber sheet, then it was exhausted by an air pump for which purpose a small tube entered the enclosed room to the centre (this tube is to be seen in the photograph). All the faces in the exhausted model are formed by two membranes. The model was illuminated from the back side, which causes the contrast between the tetragonal face and the other faces.

MACH's experiment may be repeated with other wire figures, for instance with the rectangular prism that Sir WILLIAM THOMSON used to demonstrate the tetragonal plane faces with curved sides of the cubo-octahedron with minimal area (see figure 2 in Part I of this communication); the rubber membranes in the centre of the prism assume a tetragonal shape with curved sides (see fig. 4 on the plate), which entirely corresponds with the shape observed in the experiment of Sir WILLIAM THOMSON with membranes of a solution of soap.

Now it may be assumed with ERRERA that in plant tissues the tension in the cell walls is caused by the turgor pressure of the cells. Further, a hypothetical explanation might be given of what happens in the development of a homogeneous cell tissue with cubo-octahedral cells with curved edges. It may namely be imagined that the cell walls under the influence of their tension take up such a position on growth that in total they assume a minimal area and that if they do not attain that position without changing their mutual arrangement, they will slide over each other in such a way (remember the paraffin oil in GIESENHAGEN's experiments) that they attain that position subsequently.

5. *The significance of the original location and of the growth of the cell walls for the arrangement of the walls of the mature tissues.*

Originally the senior author of this treatise actually thought that the explanation of the occurrence of the "body of Thomson" as the ideal cell form in homogeneous tissues was indeed that juvenile cubic cells, or juvenile cells of a rectangular or a hexagonal prismatic shape, when expending by their growth to maturity, slide over each other, changing their position, until the walls of each cell have obtained the minimal area, possible with the contents of the cells.

Meanwhile it is true that the possibility of the cell walls sliding over each other has often been assumed, but it has also repeatedly been doubted. A dissertation has appeared by A. D. J. MEEUSE (26) in which "the problem of the sliding growth in plant tissues" has once more been thoroughly studied, and from this it can be seen that in plant tissues such growth is out of the question. All the cases in which such growth was assumed may be interpreted differently. The exceptional cases in which cells get into contact with cells with which originally they had no contact must — as is proved by this investigation — be interpreted otherwise than by sliding of a cell wall over other cell walls.

In consequence one may expect the 14 faces of contact of the mature cell with neighbouring cells in homogeneous tissues to be present from the very beginning, that is to say from the moment the cells had been formed through division of other cells. This is actually seen to be the case in the investigation of meristems from which homogeneous plant tissues develop. In those meristems the juvenile cells are hexagonally prismatic, rectangularly prismatic or cubic in shape and in that form they

are already bounded by 14 other cells. The cubo-octahedron develops when 12 out of those 14 faces take up another position when the cells increase in size, namely a position oblique to that of the original one. Two of the faces, those namely which may be considered as upper and lower, or as anterior and posterior faces, only move parallel to themselves. During this development all the edges and eight of the lateral faces of the cell body are curved. The change in the shape of the cells takes place in such a way that the ratio of the contents to the area increases; this may also be formulated by saying that the cell approaches the spherical shape more than would be the case if all the walls had remained plane and the edges straight.

The opposite of the process described may be easily pictured, by placing a cubo-octahedron (with straight or with curved edges) of plastic material with a hexagonal face on a horizontal plane, imagining the body stretched vertically in such a way that the six double broken edges connecting the corners of the top and bottom faces of the cubo-octahedron are changed into straight edges, the body thus becoming a hexagonal prism. By horizontal stretching this prism may be changed into a rectangular prism and from that by stretching or compression in two perpendicular directions a cube may be obtained. If the same is imagined to happen to all the cells of a homogeneous tissue of cubo-octahedral cells the walls will not slide over each other; the hexagonal prisms, the rectangular prisms and the cubes that are the result of the deformation will then have 14 contacts with neighbouring prisms or with neighbouring cubes.

On studying juvenile tissues from which homogeneous tissues develop it is seen that they must be counted among the column- or platemeristems in the sense of O. SCHÜEPP (29). As an example we refer to the pictures of longitudinal and transverse sections of the meristem of the pith of *Juncus effusus*, occurring in a publication by R. A. MAAS GEESTERANUS (21), in these Proceedings. Its cells are hexagonal prisms and in the not too juvenile part of the meristem they form vertical columns of cells, owing to the fact that almost exclusively transversely placed partition walls are formed; each cell therefore touches one cell above and one under itself. Besides, these cells have contact sideways with twelve other cells. The same arrangement is found in the columnmeristem from which the cortical parenchyma of the tuber of *Asparagus Sprengeri* develops.

When these cells are inflated by turgor pressure, which will cause tension in the cell walls, then on growth of the cells the result will be the development of "bodies of Thomson", or of bodies which may be derived from them.

It is not necessary to assume that the bounding faces from the very beginning possess surfaces which bear the same ratios to each other as the faces of the "body of Thomson" do. When for instance one of the partitional faces is proportionally too small, there will on inflation be

greater tension in it than in the other faces<sup>1)</sup>). As a result the face in question will be more stretched and by growth will more increase its surface than the other faces do. When the inflation is continued long enough, and when the increase of the contents of the cell is equally possible to all sides, the influences discussed here will cause the curving of all the edges and of eight of the faces characteristic of the "body of Thomson", and the ratios of the surfaces of the bounding faces occurring in this body will also be attained.

From what has been said it follows that the shape of the cells in homogeneous cell tissues is determined for the greater part, though not entirely, in the meristem. In order to account for the occurrence of the "body of Thomson", the arrangement of the new cell walls in the meristem has therefore to be considered. I shall restrict myself here to a columnmeristem constructed from hexagonal columns. If the cubo-octahedral cell form is indeed preformed in this meristem, the arrangement of the cell walls in one of the cells forming such a column, and that of some of the walls of adjacent cells, must be approximately as pictured in fig. 5 (in this picture is found a perspective view of the cell and moreover it is folded out in the plane of drawing).

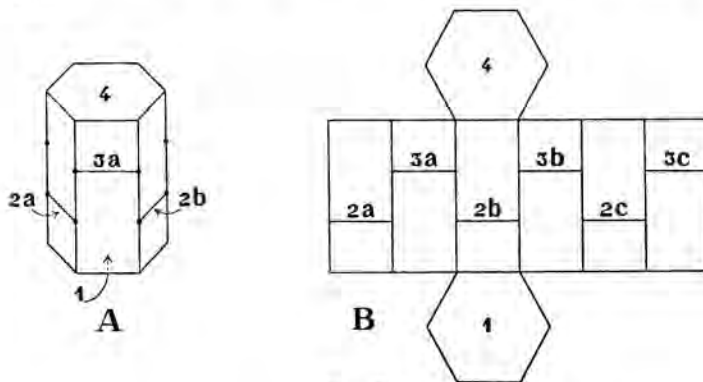


Fig. 5.

A. Hexagonal prismatic meristematic cell in contact with 14 others. B. The same cell, all faces folded out in the plane of drawing.

The horizontal walls are numbered in the order in which they are supposed to be deposited; the walls 2a, 2b, 2c and 3a, 3b, 3c are horizontal walls of neighbouring cells; the walls indicated by 2a, 2b, 2c are supposed to be formed simultaneously or nearly simultaneously and the same holds good for the walls 3a, 3b, 3c.

If it is assumed that the youngest part of the meristem is found at the top of our picture, it is plausible that the horizontal cell walls have developed in the order indicated by the figures by the side of the walls. In order to explain why the arrangement of the horizontal walls comes about as is shown in our picture, the theory may be brought forward —

<sup>1)</sup> This becomes clear when one imagines a regular, hexagonal network of equally thick and equally tautly stretched rubber threads, and one of the sides of a hexagon shortened.

very plausible in the light of newer investigations — that for the formation of cell walls a certain substance is necessary which is supplied from the older part of the meristem, but which is consumed in the formation of the wall<sup>1</sup>). If at first only wall 1 is imagined to be present and new cell wall forming substance is imagined rising *regularly*, it is more likely that the next cell wall will not be formed within the cell pictured, but in an adjacent cell. If for instance the formation of cell wall 2a follows that of wall 1 it will be most probable, owing to the consumption of the substance in consequence of the formation of the new wall, that other new cell walls are formed in cells not located in the immediate neighbourhood of wall 2a. Thus it may be understood that walls 2b and 2c are formed about simultaneously with wall 2a.

If following the deposition of the walls 2a, 2b and 2c wall-forming substance is imagined to rise with the same regularity, then, owing to the consumption of the substance by the walls which are in course of construction, it will be the turns of walls 3a, 3b and 3c to be formed. It stands to reason that on further supply a new wall in the completely pictured cell, so wall 4, will next be formed.

In a "platemeristem" similar circumstances may account for the pre-formation of the cubo-octahedral cells, here all-sided supply in the plane of the substance introducing the formation of the cell wall must be assumed. In a "columnmeristem", constructed from columns of cubic cells, we are probably confronted with a case intermediate between a columnmeristem of hexagonal columns and a platemeristem.

Although these considerations are of a purely hypothetical nature, they may serve to make it clear that simple circumstances in the meristems may cause the arrangement of the cell walls according to the scheme discussed.

We will bring forward that these considerations likewise explain the occurrence of cell shapes deviating from the cubo-octahedron, which exceptional shapes occur in great numbers even in highly uniform tissue. Slight disturbances in the supply of the substance, which determines the deposition of the new cell walls, may cause such modifications that they cannot be eliminated by the subsequent regulating activity during the further development of the cell, described in the foregoing pages.

For several of the subjects discussed we finally refer to A. D. J. MEEUSE's dissertation, published lately<sup>2</sup>).

*Delft, Laboratory of Technical Botany  
of the University College of Technology.*

<sup>1</sup>) Naturally nucleus division precedes the formation of a new wall; properly speaking we should therefore say: the supply of a substance causing nucleus division, but in order to simplify the trend of thought we indicate it as a substance necessary for the formation of a new wall.

<sup>2</sup>) In some respects the considerations exposed here differ from those of MEEUSE; this applies especially to those at the end of this communication. It is to be regretted that MEEUSE has not distinguished between the "body of Thomson" and the "orthic tetrakaidecahedron" (see his dissertation page 61), which makes misunderstandings possible. The above communication may help to remove those.



## LITERATURE.

1. BERTHOLD, G., Studien über Protoplasmamechanik, Leipzig 1886, see especially: Kapitel 17 "Theilungsrichtungen und Theilungsfolge, Definitive Ausgestaltung des Zellnetzes".
2. BUFFON, G. L. L. DE, Histoire naturelle, t. 4, Paris 1753, p. 99—100.
3. DUCHARTRE, P., Elements de botanique, Paris 1867 (see especially page 14, and the heading: "Solide géométrique, formé par chaque cellule").
4. ERRERA, L., a.o. in "Zellenformen und Seifenblasen", Biol. Centralbl. 7, 728—731 (1888).
5. FEDOROW, E. VON, Theorie der Kristalstruktur, Z. Kristall. u. Mineral. 25, 113—140 (1896).
6. GANE, R., A Method for Demonstrating the Shape of Meristematic Cells in Plants, New Phytologist 29, 77—99 (1930).
7. GIESENHAGEN, K., Die Richtung der Teilungswand in Pflanzenzellen, Flora 49, 355—369 (1909).
8. KELVIN, Lord, On Homogeneous Division of Space, Proc. Roy. Soc. London 55, 1—17 (1894); see also his treatise: "On the molecular factors of a crystal", Robert Boyle Lecture, May 16, 1893, published in "Baltimore Lectures", London 1904, p. 602—621.
9. KIESER, D. G., Ueber die ursprüngliche und eigenthümliche Form der Pflanzenzellen, Verh. der Leop.-Carol. Akad. der Naturforscher 9, 59—85 (1818). See also by the same author: Mém. sur l'organisation des plantes, Verh. Teyler's Genootschap 18, Haarlem, 1814.
10. LEWIS, F. T., The typical shape of polyhedral cells in vegetable parenchyma and the restoration of that shape following cell division, Proc. Amer. Acad. Arts and Sc. 58, 537—552 (1922—1923).
11. ———, A further study of the polyhedral shapes of cells, Proc. Amer. Acad. Arts and Sc. 61, 1—34 (1925—'26).
12. ———, The effect of cell division on the shape and size of hexagonal cells, Anat. Rec. 33, 331—335 (1926).
13. ———, The correlation between cell division and the shape and sizes of prismatic cells in the epidermis of Cucumis, Anat. Rec. 38, 341—376 (1928).
14. ———, The shape of cork cells: a simple demonstration that they are tetrakaidecahedral, Science, New Ser. 68, 625—626 (1928).
15. ———, A volumetric study of growth and cell division in two types of epithelium, the longitudinally prismatic epidermal cells of Tradescantia and the radially prismatic epidermal cells of Cucumis, Anat. Rec. 47, 59—99 (1930).
16. ———, A comparison between the mosaic of polygons in a film of artificial emulsion and the pattern of simple epithelium in surface view (Cucumber epidermis and human amnion), Anat. Rec. 50, 235—265 (1931).
17. ———, The significance of cells as revealed by their polyhedral shapes, with special reference to precartilage, and a surmise concerning nerve cells and neuroglia, Proc. Amer. Acad. Arts and Sc. 68, 251—285 (1932—'33).
18. ———, Mathematically precise features of epithelial mosaics: observations on the endothelium of capillaries, Anat. Rec. 55, 323—341 (1933).
19. ———, The Shape of the Tracheids in the Pine, Amer. J. Bot. 22, 741—762 (1935).
20. ———, The Shape of Compressed Spheres, Science, New Ser. 86, 609—611 (1937).
21. MAAS GEESTERANUS, R. A., On the development of the stellate form of the pith cells of Juncus species, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 4 and 5 (1941).
22. MARVIN, J. W., Cell Shape Phenomena Interpreted in Terms of Compressed lead Shot, Science, New Ser., 86, 493—494 (1937).



23. ———, Cell Shape Studies in the Pith of *Eupatorium purpureum*, *Amer. J. Bot.*, **26**, 487—503 (1939).
  24. ———, The Shape of Compressed Lead Shot and its relation to Cell Shapes, *Amer. J. Bot.*, **26**, 280—288 (1939).
  25. MATZKE, E. B., An Analysis of the Orthic Tetraikaidcahedron, *Bull. Torrey Bot. Club*, **54**, 341—348 (1927—'28).
  26. MEEUSE, A. D. J., A Study of intercellular relationships among vegetable cells with special reference to cell form and "sliding growth", Dissertation Leyden, Gouda 1941.
  27. MIRBEL, C. F. BRISSEAU, *Traité d'anatomie et de physiologie végétales*, t. 1, Paris 1802 (see in particular the explanation to the "gravure" added to the work under the heading "Système organique des végétaux", especially what is said under "Du tissu cellulaire").
  28. Cited after J. PLATEAU, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Paris 1873, t. 1, p. 374.
  29. SCHÜEPP, O., *Meristeme*, Bd. 4, 1. Abt., 2. T1 (Histology) of K. LINSBAUER's "Handbuch der Pflanzenanatomie", Berlin 1926.
  30. SOUÈGES, R., *Les lois du développement, Exposés d'embryologie et de morphologie végétales* 8, Paris (Hermann et Cie) 1937, in which many works of this author are cited.
  31. THOMSON, Sir WILLIAM, On the Division of Space with Minimum Partitional Area, *Philos. Mag.* 5th Ser., **24**, 503—514 (1887).
  32. THOMPSON, D'ARCY WENTWORTH, *On Growth and Form*, Cambridge 1917.
  33. TUTTON, A. E. H., *Crystallography and Practical Crystal Measurement*, London 1911, p. 536 and following.
  34. WILDEMAN, E. DE, Etudes sur l'attache des cloisons cellulaires, *Mém. coron. et mém. sav. étr., Acad. roy. Belg.*, **53**, 1—84 (1894).
-

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

Drei zueinander windschiefe Ebenen des fünfdimensionalen Raumes  $R_5$  bestimmen ein System von  $\infty^1$  solchen Ebenen, die eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit dritten Grades  $M_3^3$  erzeugen. Im binären Gebiete dieser  $\infty^1$  erzeugenden Ebenen der  $M_3^3$  stellen die drei gegebenen Ebenen  $E_1, E_2$  und  $E_3$  eine binäre kubische Form dar, deren Kovarianten neue erzeugende Ebenen zugeordnet sind.

Es wird im Folgenden der Zusammenhang letztgenannter Ebenen mit den linearen, zu den drei gegebenen Ebenen gehörigen, kovarianten Ebenenkomplexen des  $R_5$  aufgedeckt. Am Schlusse zeige ich, dass die  $\infty^1$  erzeugenden Ebenen der  $M_3^3$  die Doppel Ebenen der in der Schaar  $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3$  enthaltenen Ebenenkomplexe sind.

§ 1.

In den drei paarweise windschiefen Ebenen 1, 2 und 3 mit den Gleichungen

$$E_1 = (a^3 \pi^3) = (1^3 \pi^3) = 0, \quad E_2 = (\alpha^3 \pi^3) = (2^3 \pi^3) = 0, \quad E_3 = (p^3 \pi^3) = (3^3 \pi^3) = 0$$

seien  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  und  $C_1, C_2, C_3$  je drei Punkte. Davon wählen wir  $A_1, A_2, A_3$  willkürlich. Wir verbinden  $A_i$  mit der dritten Ebene 3; der Verbindungs- $R_3$  schneidet die zweite Ebene in  $B_i$ . Die Gerade  $A_i B_i$  trifft dann die dritte Ebene in  $C_i$ . Diese Konstruktion ergibt

$$B_i = 2 (2^2 A_i 3^3). \quad . . . . . (1)$$

und

$$C_i = B_i - \frac{1}{3} A_{23} A_i. \quad . . . . . (2)$$

wobei  $A_{23}$  die Invariante

$$(2^3 3^3) = (a^3 \alpha^3) = 36 \sum a_{123} \alpha_{456}$$

bedeutet. Wir setzen

$$(A_1 A_2 A_3)_{ijk} = a_{ijk} = l_{ijk} = \frac{1}{6} (1^3)_{ijk}; \quad E_1 = 6 (A_1 A_2 A_3 \pi^3) \quad . (3)$$

Nach (1) haben wir, wenn  $2_1$  und  $2_2$  mit 2 äquivalent sind:

$$(B_1 B_2 B_3 \pi^3) = (22_1 2_2 \pi^3) (2^2 A_1 3^3) (2_1^2 A_2 3_1^3) (2_2^2 A_3 3_2^3) \quad . . . (4)$$

und dies lässt sich umformen auf

$$(B_1 B_2 B_3 \pi^3) = -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{6} \cdot A_{23}^2 A_{31} (2^3 \pi^3) = -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{6} \cdot A_{23}^2 A_{31} \cdot E_2. \quad (5)$$

Setzt man analog zu (1)

$$A_i^* = 1 (1^2 B_i 3^3) \quad . . . . . (6)$$

und hierin  $B_i$  von (1) ein, so ergibt sich

$$A_i^* = 1 (1^2 23^3) (2^2 A_i 3^3),$$

oder, nach Umformung der rechten Seite:

$$A_i^* = -\frac{1}{6} A_{23} A_{31} \cdot A_i. \quad . . . . . (7)$$

§ 2.

Wir nehmen jetzt auf den drei Geraden  $A_i B_i$  je einen Punkt  $A_i + \mu_i B_i$  an; ihre Verbindungsebene hat die Gleichung

$$(A_1 + \mu_1 B_1, A_2 + \mu_2 B_2, A_3 + \mu_3 B_3 \pi^3) = 0. \quad (8)$$

Sie ist dann und nur dann erzeugende Ebene der durch die drei Ebenen bestimmten  $M_3^3$ , wenn sie von allen Treffgeraden dieser drei Ebenen geschnitten wird. Diese  $\infty^2$  Treffgeraden sind durch  $AB$  gegeben mit

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3, \quad B = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3.$$

$AB$  trifft die Ebene (8) wenn die Determinante

$$\left. \begin{aligned} (A_1 + \mu_1 B_1, A_2 + \mu_2 B_2, A_3 + \mu_3 B_3, \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3, X) \end{aligned} \right\} \cdot \quad (9)$$

für jedes  $X$  und jedes  $\lambda_i$  verschwindet.

Wertet man (9) aus und setzt die Koeffizienten von  $\lambda_i \lambda_k$  gleich Null, so ergeben sich die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\mu_3 - \mu_2) \cdot [(A_1 A_2 A_3 B_2 B_3 X) + \mu_1 (B_1 B_2 B_3 A_2 A_3 X)] \equiv 0 \\ (\mu_1 - \mu_3) \cdot [(A_1 A_2 A_3 B_3 B_1 X) + \mu_2 (B_1 B_2 B_3 A_3 A_1 X)] \equiv 0 \\ (\mu_2 - \mu_1) \cdot [(A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 X) + \mu_3 (B_1 B_2 B_3 A_1 A_2 X)] \equiv 0 \end{aligned} \right\} \cdot \quad (10)$$

Dies muss identisch in allen  $X$  gelten. Wegen  $(A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3) \neq 0$  sind die sechs Räume  $(A_1 A_2 A_3 B_2 B_3 X) = 0$  u.s.f. von (10) linear-unabhängig und es folgt

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu,$$

d.h. aus (8) wird

$$(A_1 + \mu B_1, A_2 + \mu B_2, A_3 + \mu B_3 \pi^3) = 0,$$

oder, entwickelt:

$$\left. \begin{aligned} (A_1 A_2 A_3 \pi^3) + \mu \cdot [(A_2 A_3 B_1 \pi^3) + (A_3 A_1 B_2 \pi^3) + (A_1 A_2 B_3 \pi^3)] + \\ + \mu^2 \cdot [(A_1 B_2 B_3 \pi^3) + (A_2 B_3 B_1 \pi^3) + (A_3 B_1 B_2 \pi^3)] + \mu^3 \cdot (B_1 B_2 B_3 \pi^3) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Hier wird der erste Term nach (3)

$$(A_1 A_2 A_3 \pi^3) = \frac{1}{6} (1^3 \pi^3) = \frac{1}{6} E_1.$$

Beim Koeffizienten von  $\mu$  in (11) ersetzen wir  $B_i$  durch die Ausdrücke (1) und formen

$$(A_2 A_3 2 \pi^3) (2^2 A_1 3^3) \dots \quad (12)$$

um, indem wir  $A_1$  in den ersten Klammerfaktor bringen. Hierdurch wird dieser Koeffizient zu

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 A_3 \pi^3) (2^3 3^3) - 3 (A_1 A_2 A_3 2 \pi^2) (2^2 \pi 3^3) = \\ = \frac{1}{6} (1^3 \pi^3) \cdot A_{23} - \frac{1}{2} \cdot (1^3 \pi^2 2) (2^2 \pi 3^3) = \frac{1}{6} A_{23} E_1 - \frac{1}{2} J_{1\pi 23} = -\frac{1}{2} J_{\pi 123}; \end{aligned}$$

denn es ist <sup>1)</sup>

$$J_{1\pi 23} = J_{\pi 123} + \frac{1}{3} A_{1\pi} A_{23}.$$

Beim Koeffizienten von  $\mu^2$  in (11) ersetzen wir zuerst  $A_i$  durch  $A_i^*$ ; nach (7) wird dann

$$(A_1 B_2 B_3 \pi^3) = - \frac{9}{A_{23} A_{31}} (A_1^* B_2 B_3 \pi^3).$$

<sup>1)</sup> Vgl. diese Proceedings 35 (1932), p. 1029, Formel (12).

also nach (6)

$$= -\frac{9}{A_{23} A_{31}} (B_2 B_3 1 \pi^3) (1^2 B_1 3^3)$$

und hier kann man dieselbe Umformung wie bei (12) ausführen und die drei  $B_i$  im ersten Klammerfaktor vereinigen. Man erhält

$$-\frac{9}{A_{23} A_{31}} \{ A_{13} (B_1 B_2 B_3 \pi^3) - 3 (B_1 B_2 B_3 1 \pi^2) (1^2 \pi 3^3) \},$$

also nach (5):

$$\frac{1}{18} A_{23} \{ A_{13} E_2 - 3 J_{2\pi 13} \} = -\frac{1}{8} A_{23} J_{\pi 213}.$$

Somit kommt statt (11), wenn wir den Faktor  $\frac{1}{8}$  weglassen:

$$E_1 - 3\mu J_{\pi 123} - \mu^2 A_{23} J_{\pi 213} - \frac{1}{8} \mu^3 A_{23}^2 A_{31} E_2 = 0. \quad \dots \quad (13)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} J_{\pi 213} &= J_{\pi 123} + \frac{1}{8} (A_{13} A_{\pi 2} + A_{32} A_{\pi 1} + A_{21} A_{\pi 3}) \\ J_{\pi 213} &= J_{\pi 123} + \frac{1}{8} (A_{23} E_1 + A_{31} E_2 + A_{12} E_3). \quad \dots \quad (14) \end{aligned}$$

und wenn wir die in allen vier Indizes symmetrische Komitante

$$\begin{aligned} S &= S_{123\pi} = \frac{1}{24} \Sigma J_{123\pi} \\ &= J_{\pi 123} - \frac{1}{8} A_{\pi 1} A_{23} + \frac{1}{18} A_{\pi 2} A_{31} - \frac{1}{18} A_{\pi 3} A_{12} \\ S &= S_{123\pi} = J_{\pi 123} + \frac{1}{8} A_{23} E_1 - \frac{1}{18} A_{31} E_2 + \frac{1}{18} A_{12} E_3 \end{aligned}$$

einführen, so wird

$$J_{\pi 123} = S - \frac{1}{8} A_{23} E_1 + \frac{1}{18} A_{31} E_2 - \frac{1}{18} A_{12} E_3 \quad \dots \quad (15)$$

$$J_{\pi 213} = S - \frac{1}{18} A_{23} E_1 + \frac{1}{8} A_{31} E_2 + \frac{1}{18} A_{12} E_3. \quad \dots \quad (16)$$

Damit erhält (13) die Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} E_1 \cdot (1 + \frac{1}{2} \mu A_{23} + \frac{1}{18} \mu^2 A_{23}^2) - E_2 \cdot \frac{1}{8} \mu A_{31} (1 + \mu A_{23} + \frac{2}{9} \mu^2 A_{23}^2) + \\ + E_3 \cdot \frac{1}{8} \mu A_{12} (1 - \frac{1}{3} \mu A_{23}) - \mu \cdot S (3 + \mu A_{23}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

§ 3.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden  $A_i B_i$  mit dieser Ebene (17) durch  $D_i$ , setzen also nach (8)

$$D_i = A_i + \mu B_i, \quad \dots \quad (18)$$

so folgt nach (2), dass bei

$$\mu A_{23} = -3\delta. \quad \dots \quad (19)$$

die Grösse  $\delta$  gleich dem Doppelverhältnis  $(A_i B_i D_i C_i)$  wird. Aus (17) folgt dann, wenn die Ebene (17)  $E_\delta$  genannt wird:

$$\left. \begin{aligned} E_\delta = E_1 \cdot A_{23} \frac{1}{2} (\delta - 1) (\delta - 2) + E_2 \cdot A_{31} \delta (\delta - 1) (\delta - \frac{1}{2}) - \\ - E_3 \cdot A_{12} \frac{1}{2} \delta (1 + \delta) + S \cdot 9\delta (1 - \delta). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Hierdurch werden die erzeugenden Ebenen der  $M_3^3$  durch den Parameter  $\delta$  dargestellt. Den Werten  $\delta = 0, \infty, 1$  entsprechen die Ebenen  $E_1, E_2$  und  $E_3$ .

Führt man nach (19) das Doppelverhältnis  $\delta$  statt der Grösse  $\mu$  in die Gleichung (13) ein, so ergibt sich

$$E_\delta = E_1 \cdot A_{23} + 9\delta \cdot J_{\pi 123} - 9\delta^2 \cdot J_{\pi 213} + \delta^3 \cdot E_2 \cdot A_{31} = 0 \quad (21)$$

in Uebereinstimmung mit einer früher abgeleiteten Gleichung<sup>2)</sup>. Setzt man nämlich in (21)  $\pi_{ijk} = s_{ijk}$  als gegeben voraus, so stellt (21) eine Gleichung dritten Grades für  $\delta$  dar. Ihren drei Wurzeln entsprechen die drei Transversalebene der  $M_3^3$ , die dem linearen Komplex  $s_{ijk}$  angehören. Ist  $s_{ijk}$  speziell, so bedeutet dies, dass diese drei Transversalebene die Ebene  $s_{ijk}$  schneiden. Die zugehörigen Punkte  $D_i$  sind demnach die Schnittpunkte der Ebene  $s_{ijk}$  mit der  $M_3^3$ .

§ 4.

Die  $\infty^1$  erzeugenden Ebenen  $E_\delta$  werden nach (20) durch ein Polynom dritten Grades in  $\delta$  gegeben, also, wenn man durch  $\delta = \frac{\delta_1}{\delta_2}$  zu homogenen Parametern übergeht, durch eine kubische Binärform  $f(\delta_1, \delta_2)$  dargestellt. Die drei Basisebenen  $E_1, E_2$  und  $E_3$  sind dann durch die Form

$$f_0 = \delta_1 \delta_2 (\delta_1 - \delta_2)$$

dargestellt. Deren kubische Kovariante  $Q_0$  wird

$$Q_0 = 2\delta_1^3 - 3\delta_1^2\delta_2 - 3\delta_1\delta_2^2 + 2\delta_2^3;$$

ihre Nullpunkte sind also durch die Gleichung

$$2\delta^3 - 3\delta^2 - 3\delta + 2 = 0$$

gegeben, was die Parameterwerte

$$\delta_1 = 2, \delta_2 = \frac{1}{2}, \delta_3 = -1$$

ergibt. Die hierzu gehörigen Ebenen werden dann nach (20):

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= A_{31} E_2 - A_{12} E_3 - 6S = 0 \\ F_2 &= -A_{23} E_1 + A_{12} E_3 - 6S = 0 \\ F_3 &= A_{23} E_1 - A_{31} E_2 - 6S = 0 \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

Hieraus folgt

$$F_1 + F_2 + F_3 = 18S; \dots (23)$$

hierdurch ist der lineare Ebenenkomplex  $S = 0$  als Linearkombination dreier Ebenen dargestellt. Es ist aber  $S$  auch durch zwei erzeugende Ebenen der  $M_3^3$  darstellbar. Die HESSE'sche Kovariante der Grundform  $f_0 = \delta_1 \delta_2 (\delta_1 - \delta_2)$  ist bis auf einen Zahlenfaktor durch

$$\delta_1^2 - \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2$$

gegeben, was auf die Nullpunkte

$$\delta = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{-3})$$

führt. Setzt man dies in (20) ein und setzt

$$T = A_{23} E_1 + A_{31} E_2 + A_{12} E_3, \dots (24)$$

<sup>2)</sup> Diese Proceedings 35 (1932), p. 1125, Formel (12). Bei dieser muss im dritten Term  $J_{4213}$  statt  $J_{1342}$  stehen.

so erhält man die beiden erzeugenden Ebenen

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= S + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \sqrt{-3} T \\ H_2 &= S - \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \sqrt{-3} T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

wonach also

$$S = \frac{1}{2} (H_1 + H_2), \quad T = \frac{9}{\sqrt{-3}} (H_1 - H_2) \dots \dots \dots (26)$$

Die geometrische Bedeutung der linearen Ebenenkomplexe  $T=0$  und  $S=0$  ist leicht anzugeben. Wenn die durch (21) gegebene kubische Binärform mit der Grundform

$$f_0 = \delta_1 \delta_2 (\delta_1 - \delta_2)$$

konjugiert (apolar) sein soll, so folgt  $T=0$ ; ist aber (21) zur Kovariante

$$Q_0 = 2 \delta_1^3 - 3 \delta_1^2 \delta_2 - 3 \delta_1 \delta_2^2 + 2 \delta_2^3$$

konjugiert, so folgt  $S=0$ , wie schon E. A. WEISS bewiesen hat<sup>3)</sup>.

§ 5.

Für die beiden Ebenen  $H$  von (25), die im binären Gebiete der erzeugenden Ebenen der  $M_3^3$  den Nullpunkten der HESSE'schen Kovariante von  $f_0$  entsprechen, lässt sich leicht eine geometrische Deutung in Bezug auf die Komplexe  $T$  und  $S$  geben.

Zunächst eine Vorbemerkung. Ein linearer Ebenenkomplex  $K$  im  $R_5$

$$K = A_{K\pi} = (a^3 \pi^3) = 0 \dots \dots \dots (27)$$

hat eine Komitante

$$R_K = (a^3 b^2 c) (b c^2 \pi^3) = J_{KKK\pi} = A_{R_K\pi} \dots \dots \dots (28)$$

die, gleich Null gesetzt, wieder einen linearen Ebenenkomplex darstellt. Die bilineare Invariante

$$J_K = A_{R_K K} = (a^3 b^2 c) (b c^2 d^3) = J_{KKKK} \dots \dots \dots (29)$$

der beiden Komplexe  $R_K$  und  $K$  ist die einzige Invariante des Komplexes  $K$ .

Die beiden Komplexe

$$H_K = R_K \pm \sqrt{-\frac{1}{3} J_K} \cdot K = 0 \dots \dots \dots (30)$$

sind dann speziell und geben die sogen. „Doppelebenen“ des Komplexes  $K$ . Bei  $J_K \neq 0$  ist die Beziehung zwischen  $K$  und  $R_K$  gegenseitig, d.h.  $R_{R_K}$  führt auf  $K$  zurück. Man hat nämlich

$$R_{R_K} = -\frac{1}{\sqrt[3]{8}} J_K^2 \cdot K \dots \dots \dots (31)$$

$$J_{R_K} = A_{R_{R_K} R_K} = -\frac{1}{\sqrt[3]{8}} J_K^2 \cdot A_{K R_K} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} J_K^3 \dots \dots \dots (32)$$

Wir setzen nun  $K=T$  (Gleichung (24)). Dann folgen

$$A_{T_1} = 0, \quad A_{T_2} = 0, \quad A_{T_3} = 0 \dots \dots \dots (33)$$

und nach leichter Rechnung

$$R_T = 6 A_{23} A_{31} A_{12} \cdot S \dots \dots \dots (34)$$

Es ist also  $S$  der zum Komplexe  $T$  kovariante Ebenenkomplex und umgekehrt.

<sup>3)</sup> Diese Proceedings 36 (1933), p. 74—75.



Weiter folgt für die Invariante von  $T$ :

$$J_T = 2 (A_{23} A_{31} A_{12})^2. \dots \dots \dots (35)$$

Aus (31) und (34) ergeben sich

$$R_s = -\frac{4}{6^5} A_{23} A_{31} A_{12} \cdot T, \quad J_s = \frac{4}{3 \cdot 6^5} (A_{23} A_{31} A_{12})^2 \quad (36)$$

und nach (30)

$$H_T = 6 A_{23} A_{31} A_{12} (S \pm \frac{1}{18} \sqrt{-3} T) \dots \dots \dots (37)$$

in Übereinstimmung mit (25).

§ 6.

Zu den erzeugenden Ebenen der  $M_3^3$  gelangt man noch auf einem anderen Wege. Die drei Ebenen  $E_l$  bestimmen eine lineare Schaar von  $\infty^2$  linearen Ebenenkomplexen, die wir in der Gestalt

$$\Sigma = \sigma_1 A_{23} E_1 + \sigma_2 A_{31} E_2 + \sigma_3 A_{12} E_3 = A_{\sigma\pi} = (\sigma^3 \pi^3). \dots (38)$$

schreiben. Für den zu  $\Sigma$  kovarianten Komplex  $R_\Sigma$  (Gleichung (28)) erhält man:

$$R_\Sigma = J_{\sigma\sigma\sigma\pi} = 2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 A_{23} A_{31} A_{12} \cdot \sum_c J_{123\pi} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{3} A_{23} A_{31} A_{12} \cdot \sum_c \sigma_1 A_{23} (\sigma_3 \sigma_1 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3) E_1, \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

wobei  $\sum_c$  zyklische Summierung andeutet.

Da nun nach (15) und (24)

$$\sum_c J_{123\pi} = J_{123\pi} + J_{231\pi} + J_{312\pi} = 3S + \frac{1}{3} T = 3S + \frac{1}{3} \sum_c A_{23} E_1 \quad (40)$$

wird, ergibt sich

$$R_\Sigma = J_{\sigma\sigma\sigma\pi} = 6 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 A_{23} A_{31} A_{12} \cdot S + \frac{1}{3} A_{23} A_{31} A_{12} \sum_c \sigma_1^2 (\sigma_3 - \sigma_2) A_{23} E_1 \quad (41)$$

Wegen

$$A_{S1} = \frac{1}{3} A_{31} A_{12}, \quad A_{S2} = \frac{1}{3} A_{12} A_{23}, \quad A_{S3} = \frac{1}{3} A_{23} A_{31} \dots \dots (42)$$

$$A_{1\Sigma} = A_{31} A_{12} (\sigma_2 - \sigma_3), \quad A_{2\Sigma} = A_{12} A_{23} (\sigma_3 - \sigma_1), \quad A_{3\Sigma} = A_{23} A_{31} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (43)$$

folgen

$$A_{S\Sigma} = \frac{1}{3} A_{23} A_{31} A_{12} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \dots \dots \dots (44)$$

$$J_\Sigma = A_{R_\Sigma\Sigma} = \frac{1}{3} (A_{23} A_{31} A_{12})^2 [2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sum_c \sigma_1^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2] = \left. \begin{aligned} &= -\frac{2}{3} (A_{23} A_{31} A_{12})^2 [(\sum_c \sigma_2 \sigma_3)^2 - 4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 (\sum_c \sigma_1)] \end{aligned} \right\} \dots (45)$$

Für

$$(\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2)^2 = 4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \dots \dots \dots (46)$$

ist also  $\Sigma$  halb-spezial und  $R_\Sigma$  wird spezial und hat wegen  $A_{ik} \neq 0$  nach (41) die Gleichung:

$$S = \frac{1}{18} \sum_c \frac{\sigma_1^2 (\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} A_{23} E_1 = 0. \dots \dots \dots (47)$$

Gehen wir hier zu inhomogenen Parametern

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \quad \tau = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

über und setzen

$$\tau = (1 - \delta)^2,$$

so ergibt sich aus (46)

$$\sigma = \frac{(\delta - 1)^2}{\delta^2}$$

und aus (47) wird

$$S - \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \frac{\delta - 2}{\delta} A_{23} E_1 - \frac{1}{\sqrt[3]{8}} (2\delta - 1) A_{31} E_2 - \frac{1 + \delta}{1 - \delta} A_{12} E_3 = 0$$

in voller Uebereinstimmung mit (20).

Die erzeugenden Ebenen der  $M_3^3$  sind also die Doppelebenen, der in der Schaar enthaltenen halbspeziellen Ebenenkomplexe.

Die Doppelebenen  $H_{\Sigma}$  von  $\Sigma$  haben nach (30), (41) und (45) die Gleichung

$$S - \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \sum_c \left( \frac{\sigma_1 (\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_2 \sigma_3} \pm \frac{1}{\sigma_2 \sigma_3} \sqrt{(\sum_c \sigma_2 \sigma_3)^2 - 4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 (\sum_c \sigma_1)} \right) A_{23} E_1 = 0. \quad (48)$$

Setzt man hier

$$\delta = \frac{1}{2 \sigma_2 \sigma_3} \left( \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 \pm \sqrt{(\sum_c \sigma_2 \sigma_3)^2 - 4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 (\sum_c \sigma_1)} \right) \quad (49)$$

so ergibt sich wiederum (20). Die Doppelebenen aller Komplexe  $\Sigma$  sind also erzeugende Ebenen der  $M_3^3$ . Im Besonderen ist  $E_3$  von (20) Doppelebene aller  $\Sigma$  mit

$$\sigma_2 \sigma_3 \cdot \delta (\delta - 1) + \sigma_3 \sigma_1 \cdot \delta + \sigma_1 \sigma_2 (1 - \delta) = 0. \quad \dots \quad (50)$$

**Mechanics.** — *On the elastic behaviour of the so-called "Bourdon" pressure gauge.* II. By C. B. BIEZENO and J. J. KOCH.

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

4. *The iterative method.* Provisionally we introduce in the endplanes  $V_1$  and  $V_2$  a system of tangential stresses  $\sigma_1$ , such that:

- 1<sup>0</sup>. each plane is loaded by an equilibrium system,
- 2<sup>0</sup>. the material points of  $V_1$  and  $V_2$  remove to planes  $V'_1$  and  $V'_2$ , the relative position of which is defined by the specific quantities  $\varepsilon_1$  and  $\omega_1$ , (differing from the definitive values  $\varepsilon_0$  and  $\omega_0$  mentioned in § 3).
- 3<sup>0</sup>. for the points of any cross-section the displacements in the direction  $y$  are given by  $v_1$ .

These stresses can easily be found by considering a fibre intersecting the meridional plane of symmetry of the ring in the point  $(x, y)$ . The original length of this fibre is  $(r + y)d\psi$  whereas its new length is given by:

$$(r + y + v_1) d\psi + \varepsilon_1 r d\psi + (y + v_1) \omega_1 d\psi.$$

The specific elongation  $\varepsilon$  therefore is:

$$\varepsilon = \frac{v_1 d\psi + \varepsilon_1 r d\psi + (y + v_1) \omega_1 d\psi}{(r + y) d\psi}.$$

In the numerator we neglect the product  $v_1\omega_1$  against terms of the first degree in  $v_1$ ,  $\varepsilon_1$  and  $\omega_1$ ; in the denominator  $y$  in all actual cases is negligible with respect to  $r$ . Hence:

$$\varepsilon = \frac{v_1}{r} + \varepsilon_1 + \frac{y}{r} \omega_1$$

and consequently

$$\sigma_1 = E\varepsilon = E \left[ \frac{v_1}{r} + \varepsilon_1 + \frac{y}{r} \omega_1 \right].$$

The equilibrium of the force-system produced by the stresses  $\sigma_1$  requires — if  $dF$  denotes the surface element on which  $\sigma_1$  acts —

$$\int_F E \left[ \frac{v_1}{r} + \varepsilon_1 + \frac{y}{r} \omega_1 \right] dF = 0$$

$$\int_F E \left[ \frac{v_1}{r} + \varepsilon_1 + \frac{y}{r} \omega_1 \right] y dF = 0.$$

On account of symmetry  $\int_F y dF$  as well as  $\int_F v_1 dF$  is zero, so that the equations pass into:

$$E \varepsilon_1 F = 0$$

$$\frac{E}{r} \int_F [v_1 + \omega_1 y] y dF = 0$$

from which we derive:

$$\varepsilon_1 = 0 \quad \omega_1 = - \frac{\int_F v_1 y dF}{\int_F y^2 dF}.$$

With these values  $\sigma_1$  becomes

$$\sigma_1 = \frac{E}{r} \left[ v_1 - \frac{\int_F v_1 y dF}{\int_F y^2 dF} y \right].$$

As a matter of course we replace the integrals  $\int_F v_1 y dF$  and  $\int_F y^2 dF$  by the sums  $\Sigma v_1 y \Delta F$  and  $\Sigma y^2 \Delta F$ , where  $\Delta F$  stands for the meridional surface of a segment of the length  $s$ .

The product  $v_1 y$ , the sums  $\frac{1}{4} \Sigma v_1 y \Delta F$  and  $\frac{1}{4} \Sigma y^2 \Delta F$  and the expression

$$v_1^* = v_1 - \frac{\Sigma v_1 y \Delta F}{\Sigma y^2 \Delta F} y$$

can be read from the columns 20—23 of table I.

The introduction of the stress systems

$$\sigma_1 = \frac{E}{r} v_1^*$$

in the endplanes  $V_1$  and  $V_2$  unfortunately does not bring our problem to an end. For the forces  $\sigma_1 \Delta F$  in two corresponding elements of the planes  $V_1$  and  $V_2$  include an angle  $d\psi$ , and therefore produce a resultant force

$$\sigma_1 \Delta F \cdot d\psi$$

in the direction of the negative  $y$ -axis.

Consequently the ring is submitted to a new flexure due to forces  $P_{2y}$

TABLE II. 2<sup>nd</sup> iteration.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
joint	$x$	$y$	$\Delta x$	$\Delta y$	$\frac{P_{2y} \equiv E}{r^2} \Delta F v_1^*$	$K_{2y}$	$K_{2y} \Delta x$	$M_2^*$	$M_2^{**}$	$M_2$	$\Delta \varphi_2$	$\varphi_2$	$\frac{\Delta v_2 = -\varphi_2 \Delta x}{v_2}$	$v_2$	$v_{2y} \Delta F$	$\frac{\sum v_{2y} \Delta F}{\sum y^2 \Delta F} y$	$\frac{v_2^* = v_2 - \sum v_{2y} \Delta F}{\sum y^2 \Delta F} y$	
0	0	262			-1703			0	-1972	-1972	-986			-2331	-305	-1490	-841	
1	75	261	75	-1	-3164	1703	128	128	-1973	-1845	-1845	-986	74	-2257	-589	-1485	-772	
2	150	258	75	-3	-2457	4867	365	493	-1973	-1480	-1480	-2831	212	-2045	-528	-1468	-577	
3	225	252	75	-6	-1364	7324	549	1042	-1973	-931	-931	-4311	323	-1722	-434	-1433	-289	
4	300	243	75	-9	-94	8688	652	1694	-1973	-279	-279	-5242	393	-1329	-323	-1382	53	
5	374	232	74	-11	1434	8782	650	2344	-1972	372	372	-5521	409	-920	-213	-1320	400	
6	448	215	74	-17	2858	7348	544	2888	-1973	915	915	-5149	381	-539	-116	-1223	684	
7	518	187	70	-28	3741	4490	314	3202	-1973	1229	1229	-4234	296	-243	-45	-1064	821	
8	576	138	58	-49	3467	749	43	3245	-1973	1272	1272	-3005	174	-69	-10	-785	716	
9	612	73	36	-65	2055	-2718	-98	3147	-1973	1174	1174	-1733	62	-7	-1	-415	408	
10	624	0	12	-73	0	-4773	-57	3090	-1972	1118	559	-559	7	0	0	0	0	
								$\Sigma = 19728$						$\Sigma = -2564$				
	$10^{-3} \alpha$	$10^{-3} \alpha$	$10^{-3} \alpha$	$10^{-3} \alpha$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^5}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^5}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^6}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^6}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^6}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^6}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^6}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^7}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^7}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^8}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^8}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^8}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^8}{\beta^2 \gamma^2} p$	$10^{-5} \frac{E s^2 h}{E^* I^2} \frac{a^8}{\beta^2 \gamma^2} p$

TABLE III. 3rd iteration.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
joint	x	y	$\Delta x$	$\Delta y$	$P_{3y} = -\frac{E}{r^2} \Delta F v_2^*$	$K_{3y}$	$K_{3y} \Delta x$	$M_3^*$	$M_3^{**}$	$M_3$	$\Delta \varphi_3$	$\varphi_1$	$\Delta v_3 = -\varphi_2 \Delta x$	$v_3$	$v_3 y \Delta F$	$\frac{\sum v_3 y \Delta F}{\sum y^2 \Delta F} y$	$\frac{v_3^* = v_3 - \sum v_3 y \Delta F}{\sum y^2 \Delta F} y$
0	0	262	75	-1	420	-420	-315	0	4610	4610	2305			5329	698	3388	1941
1	75	261	75	-3	772	-1192	-894	-315	4610	4295	4295	2305	-173	5156	1346	3375	1781
2	150	258	75	-6	577	-1769	-1327	-1209	4609	3400	3400	6600	-495	4661	1203	3336	1325
3	225	252	75	-9	289	-2058	-1544	-2536	4610	2074	2074	10000	-750	3911	986	3258	653
4	300	243	74	-11	-53	-2005	-1484	-4080	4610	530	540	12074	-906	3005	730	3142	-137
5	374	232	74	-17	-400	-1605	-1188	-5564	4610	-954	-954	12604	-933	2072	481	3000	-928
6	448	215	70	-28	-684	-921	-645	-6752	4609	-2143	-2143	11650	-862	1210	260	2780	-1570
7	518	187	58	-40	-821	-100	-58	-7397	4610	-2787	-2787	9507	-665	545	102	2418	-1873
8	576	138	36	-65	-716	616	221	-7455	4610	-2845	-2845	6720	-390	155	21	1784	-1629
9	612	73	12	-73	-408	1024	123	-7234	4610	-2624	-2624	3875	-140	15	1	944	-929
10	624	0			0			-7111	4609	-2502	-1251	1251	-15	0	0	0	0
								$\Sigma = 45097.5$							$\Sigma = 5828$		
	$10^{-3} \alpha$	$10^{-3} \alpha$	$10^{-3} \alpha$	$10^{-3} \alpha$	$10^{-5} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a^9}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-5} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a^9}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-6} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a_{10}}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-6} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a_{10}}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-6} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a_{10}}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-6} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a_{10}}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-6} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a_{10}}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-6} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a_{10}}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-6} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a_{10}}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-6} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a_{10}}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-6} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a_{10}}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-6} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a_{12}}{\beta^4 y^4} p$	$10^{-6} \frac{E^2 s^4 h^2}{E^{*2} I^2 r^4} \frac{a_{12}}{\beta^4 y^4} p$



parallel to the  $y$ -axis of the magnitude (pro unit of surface):

$$P_{2y} = - \frac{\sigma_1 \Delta F d\psi}{r d\psi} = - \frac{E \Delta F}{r^2} v_1^*.$$

The displacements  $v_2$  caused by this load can be calculated after the scheme of table I (see table II, column 1—15). They renew the problem in as far as they are responsible for a new distortion of the endplanes  $V_1$  and  $V_2$ . Therefore a new set of normal stresses has to be introduced in these planes, which on their part give rise to other displacements  $v_3$  a.s.o.

If the process of iteration herewith described, converges, we get three series of quantities  $M_i, \omega_i, \sigma_i$ , which summed up, give rise to the ultimate bending moment  $M$ , the ultimate  $\omega_0$ , and the ultimate tangential stress  $\sigma$ .

As will be seen from the two tables II, III, the set of values  $M_3$  is nearly proportional to the set of values  $M_2$ .

Therefore the iteration needs not to be continued any longer; for if we put  $M_3 : M_2 = \lambda$ , obviously  $M_4 : M_3$  will be  $\lambda$  too, a.s.o. so that

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots = M_1 + M_2 + \frac{M_3}{1-\lambda}.$$

Analogous remarks hold for  $\omega$  and  $\sigma$ .

5. *Numerical results.* It follows from table I, II and III that

$$\omega_1 = - \frac{\Sigma v_1 y \Delta F}{\Sigma y^2 \Delta F} = - \frac{13014}{4508} \cdot \frac{10^{-1} \cdot s \alpha^3}{E^* I \beta^3} p = -0,2887 \frac{s \alpha^3}{E^* I \beta^3} p$$

$$\omega_2 = - \frac{\Sigma v_2 y \Delta F}{\Sigma y^2 \Delta F} = + \frac{2564}{4508} \cdot \frac{10^{-1} E s^3 h a^7}{E^* I^2 r^2 \beta^5 \gamma^2} p = 0,05688 \frac{s \alpha^3}{E^* I \beta^3} \cdot \frac{E s^2 h a^4}{E^* I r^2 \beta^2 \gamma^2} p$$

$$\omega_3 = - \frac{\Sigma v_3 y \Delta F}{\Sigma y^2 \Delta F} = - \frac{5828}{4508} \cdot \frac{10^{-2} E^2 s^5 h^2 \alpha^{11}}{E^* I^3 r^4 \beta^7 \gamma^4} p = -0,01293 \frac{s \alpha^3}{E^* I \beta^3} \cdot \left[ \frac{E s^2 h a^4}{E I r^2 \beta^2 \gamma^2} \right]^2 p$$

$$\lambda = \frac{\omega_3}{\omega_2} = - \frac{0,01293}{0,05688} \cdot \frac{E s^2 h a^4}{E^* I r^2 \beta^2 \gamma^2}.$$

With  $r = 3,15$  cm,  $h = 0,06$  cm,  $s = 0,075$  cm,  $E = 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> (the data of the pressure gauge under consideration), we find:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \frac{\omega_3}{1-\lambda} = \left[ -1,127 + 0,3933 \frac{\alpha^4}{\beta^2 \gamma^2} - \frac{0,1584 \left( \frac{\alpha^4}{\beta^2 \gamma^2} \right)^2}{1 + 0,403 \frac{\alpha^4}{\beta^2 \gamma^2}} \right] \cdot 10^{-3} \frac{\alpha^3}{\beta^3} p.$$

For the standard pressure gauge itself, we get — putting  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  —

$$\omega = 0,8465 \cdot 10^{-3} p.$$

Experiments made on this gauge gave

$$\omega = 0,7260 \cdot 10^{-3} p.$$

The agreement of both results is quite satisfactory, and probably would have still been better if we had used the real modulus of elasticity instead of the standard value  $10^6$  kg/cm<sup>2</sup>.

For the moment  $M$  we get in a similar manner:

$$M = \left[ M_1 + 0,1772 \frac{\alpha^4}{\beta^2 \gamma^2} M_2 + \frac{0,0314 \left( \frac{\alpha^4}{\beta^2 \gamma^2} \right)^2}{1 + 0,403 \frac{\alpha^4}{\beta^2 \gamma^2}} M_3 \right] 10^{-4} a^2 p.$$

In this formula the values of  $M_1, M_2, M_3$ , following from table I, II, III, for the point ( $i$ ) have to be substituted if the total bending moment at this point ( $i$ ) is required. The greatest bending stress  $\sigma_b$  is given by

$$\sigma_b = \frac{M}{\frac{1}{6} h^2 \beta^2} = \frac{10^4 M}{6 \beta^2}.$$

Finally the total tangential normal stress is given by

$$\sigma_t = \frac{E}{\gamma r} \left[ v_1^* + 1,772 \frac{\alpha^4}{\beta^2 \gamma^2} v_2^* + \frac{0,314 \left( \frac{\alpha^4}{\beta^2 \gamma^2} \right)^2}{1 + 0,403 \frac{\alpha^4}{\beta^2 \gamma^2}} v_3^* \right] \frac{10^{-5} s \alpha^4}{E^* I \beta^3} p.$$

Again the values  $v_1^*, v_2^*, v_3^*$  following from table I, II, III for the point ( $i$ ) have to be substituted in this formula if the total tangential stress at this point ( $i$ ) is required.

To conclude we reproduce in table IV the stress distribution of the standard gauge, characterized by the parameters  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ .

The columns 1, 2, 3 contain the values  $M_1, M_2$  and  $M_3$ ;  $(1-\lambda)$ ; the value of  $\lambda$  used in the third column agrees with the value of  $\lambda$ , used with the quantity  $\omega$  ( $\lambda = -\frac{0,01293}{0,05688} = -0,403$ ). The total moment  $M$  is inserted in column 5. The common multiplying factor of all columns 2—5 is  $10^{-4} p$ . The quantities occurring in the following columns are expressed in kg/cm<sup>2</sup>, and relate to the pressure  $p = 60$  kg/cm<sup>2</sup>, for which the gauge was said to be designed. Column 6 gives the greatest bending stress, column 10 the total tangential stress as a sum of the stresses  $\sigma_1, \sigma_2$  and  $\sigma_3$ ;  $(1-\lambda) = \sigma_3 : 1,403$ , and column 11 the so-called "ideal" stress, which is equal to the absolute value of the difference of the extreme principal stresses. In calculating this stress, it must be observed, that  $\sigma_b$  (column 6) has been calculated for the outer surface of the gauge, and that an equal bending stress, but of opposite sign, occurs at the inner surface. From two

corresponding points of the outer and inner surface, *that* point is to be considered as the most dangerous one, for which the difference of the two

TABLE IV.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$M_1$	$M_2$	$\frac{M_3}{1,403}$	$M$	$\sigma_b$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\frac{\sigma_3}{1,403}$	$\sigma_t$	$\sigma_{id.}$
0	722	-349	103	476	4760	2534	-1109	323	1748	6508
1	697	-327	96	466	4660	2354	-1018	286	1622	6282
2	621	-262	76	435	4350	1828	-761	221	1288	5638
3	494	-165	46	375	3750	1015	-381	109	743	4493
4	319	-49	12	282	2820	70	70	-23	117	2937
5	97	66	-21	142	1420	-1067	527	-154	-694	2114
6	-170	162	-48	-56	-560	-2126	902	-261	-1485	2045
7	-452	218	-62	-296	-2960	-2783	1082	-312	-2013	4973
8	-689	225	-64	-528	-5280	-2580	944	-271	-1907	7187
9	-836	208	-59	-687	-6870	-1529	538	-155	-1146	8016
10	-884	198	-56	-742	-7420	0	0	0	0	7420
	$10^{-4} p$	$10^{-4} p$	$10^{-4} p$	$10^{-4} p$						

extreme principal stresses is the greater; and it is seen at once that this is the point for which  $\sigma_b$  and  $\sigma_t$  have opposite signs. With this remark in mind the absolute value of  $\sigma_{id}$  is obtained by adding the corresponding *absolute* values of  $\sigma_b$  and  $\sigma_t$ .

A glance at column 11 learns that very high stresses indeed occur, and that the manifold ruptures of pressure-gauges which are registered in practice, are in full accordance with what has to be expected. It is worth while to state, that the greatest ideal stress occurs in the neighbourhood of point 10, and not in the point 10 itself, which is in full agreement with the experiment.

Finally it must be remarked that our calculations only hold for gauges, the cross section of which is similar to that of our standard gauge. To get reliable results for other cross sections, the calculations given here are to be repeated.

**Medicine.** — *A new form of position nystagmus.* By D. VON DEVIVERE and A. DE KLEYN.

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

Position nystagmus is a nystagmus, developing when a certain position of the head exists; this can be a position of the head in space or a position of the head with relation to the trunk<sup>1</sup>). In such cases the stimulations caused by that special position are nearly always sufficient to elicit a nystagmus.

Only a few cases exist where the nystagmus also develops when a certain position of the head is present but where this position must be accompanied by another stimulation.

In 1936 this phenomenon was observed for the first time in a patient of 38 years of age. Therefore the medical history of this patient will be recorded somewhat more extensively. Owing to some circumstances the examination was not complete, however.

Mrs. B. consulted the clinic on October 26th 1936. She stated the following previous history:

Since August 1936 she suffered from dizziness as soon as she lay down. *It appeared that these attacks only developed when the patient turned to her left side after having lain on the right side for some time.* No dizziness developed when the patient, in dorsal position, turned immediately to the left lateral position, or, when in sitting position, turned the head to the right.

She had always been in good health and the previous medical history showed no abnormalities except the fact that about a year ago the patient had suddenly become dizzy on a station, which she did not remember, however.

The above-mentioned attacks of dizziness being of short duration, were not accompanied by nausea.

*Present history:* Internal examination: no abnormalities except a congenital vitium cordis. Both the WASSERMANN reaction and the reaction of SACHS GEORGI were negative. The blood-pressure was low (105/70); the blood-picture and sedimentation rate were normal. The basal metabolism was -18 %.

*Neurological examination:* The fundi showed no abnormalities. Sometimes the abdominal reflexes were absent, on other occasions these could be elicited. The BABINSKI reflex was present on the right, though not constantly. No further abnormalities, the lumbar fluid was completely normal.

*Acoustic examination:* The whispering voice was heard bilaterally at a normal distance.

*Vestibular examination:* No spontaneous nystagmus in different directions (patient in dorsal or sitting position); no spontaneous past-pointing, no abnormalities when walking with closed eyes, during test of ROMBERG, etc.

*Post-rotation nystagmus:* horizontal nystagmus:

10 × to the right, 28 movements in 20"

10 × to the left, 34 movements in 23".

Stimulation of the right labyrinth, either with cold or warm water gave normal results; a typical past-pointing was present.

Contrarily to this stimulation of the left labyrinth, both with cold and warm water, gave no reaction; reactive past-pointing was also absent.

Moreover the following disturbances were found:

On the first examination, a nystagmus with its quick component upward (↑), developed immediately after turning the head backward and then to the left lateral position. As is known this movement causes a disturbance of the circulation in the right arteria verte-

<sup>1</sup>) DE KLEYN, A., Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 153 (1941).

bralis<sup>2</sup>). The above-mentioned fact could be noticed once again; as for the rest every nystagmus was absent on turning the head backward and then to the right or left lateral position. Yet, under other circumstances, it was quite possible to elicit a nystagmus. Later examination on several days, gave always the following results:

I. No nystagmus developed if the patient (in sitting or dorsal position) turned the head backward and then to the right or left lateral position.

II. When the head of the patient, who was lying on a stretcher for 5 minutes, — either in the right lateral position (the head symmetrically in relation to the trunk) or in dorsal position with the head in the right lateral position — was turned backward and then to the left lateral position, a strong vertical nystagmus upward developed immediately, lasting for 14". Sometimes this nystagmus was combined with a rotatory nystagmus.

III. No nystagmus developed if the head was kept in the right lateral position for 5 minutes and after this turned backward and to the right lateral position.

IV. If the patient was completely or only with the head in the left lateral position, no nystagmus developed. The same thing took place if the patient was in the dorsal position for 5 minutes after which the head was turned backward and to the left lateral position.

That the vertical nystagmus was for the first time observed when the head was turned backward and to the left lateral position accounted for the fact that in further examinations we always brought the head into that position. As mentioned above, a disturbance in the circulation of the arteria vertebralis is then caused. An examination made to see if the nystagmus also developed when the head of the patient or the patient herself was brought into the left lateral position without turning the head backward, thus not causing the disturbances of the circulation in the arteria vertebralis, was omitted, but this development is most probable as, according to the previous history, the attacks of vertigo also developed when the patient lay in bed for some time in the right lateral position and after this turned to the left lateral position.

The complaints gradually diminished in the next half year and then they disappeared completely.

*Summary: This patient always showed a vertical nystagmus with its quick component upward, provided she kept her head for some time in the right lateral position after which it was turned backward and to the left lateral position.*

It was hardly ever possible to elicit such a nystagmus if the head was immediately turned backward and to the left lateral position, without being kept previously in the right lateral position.

#### **Patient II.**

This patient has already been described by one of us<sup>3</sup>). She suffered from a spondylitis tuberculosa. A rotatory horizontal nystagmus to the left developed with the patient in the left lateral position, provided this position was preceded by a right lateral position of the head; the same nystagmus, turned to the right, was seen after a preceding left lateral position of the head with the patient in the right lateral position.

When the head was kept in the dorsal position for some minutes and then turned to the right or left lateral position, no nystagmus developed (for further details see the article in the *Conf. Neurol.*). Owing to the general condition of the patient an extensive examination could not be performed.

#### **Patient III.**

This female achondroplastic patient, 36 years of age, showed, in 1938 symptoms analogous with those of patient I. Her previous history was also typical. *She stated*

<sup>2</sup>) DE KLEYN, A. and NIEUWENHUYSE, *Acta Oto-Laryng.*, 11, 155 (1927).

<sup>3</sup>) DE KLEYN, A., *Confinia Neurologia*, 2, 257 (1940).



*spontaneously that the attacks of dizziness only developed if she had been lying in the right lateral position and after this turned to the left lateral position. The patient also suffered from a bilateral otitis media. Extensive examination proved that a gross long-lasting horizontal nystagmus to the left only developed when the patient (either in symmetric or in non-symmetric position with relation to the trunk) kept her head in the right lateral position for some time (2 minutes or more) and then turned it to the left lateral position. It made no difference if the patient turned completely to the left lateral position or when the trunk remained in the dorsal position and the head was turned to the left lateral position. Such a nystagmus was not seen if the head was first kept in the dorsal position; neither was it seen when the head was kept for some time in the left lateral position and then turned to the right lateral position.*

Except a slight horizontal nystagmus to the left in all directions and positions, no other vestibular disturbances were found: the separate forms of post-rotation nystagmus (horizontal, vertical and rotatory) on turning to the right and to the left were symmetric and of equal duration. The tilting reactions of RADEMAKER-GARCIN showed no disturbances.

From the extensive examination we mention the following facts:

*Internal examination:* no disturbances except a typical achondroplasia.

*Extensive neurological examination* (Department of Professor BROUWER) gave the following diagnosis: achondroplasia + brachialgia<sup>4</sup>).

Since January 1941 the patient had been admitted again to the neurological Department with a left-sided hemiparesis, probably due to a thrombosis cerebri (arteriosclerosis).

*Roentgenological examination:* On neither side pneumatisation of the ossa petrosa. Examination of the extremities revealed typical achondroplastic symptoms.

*Rhinological examination:* no abnormalities.

*Acoustic examination:* On the right the whispering voice was heard at about 6 metres; there was a small perforation without secretion. On the left the whispering voice was heard ad concham; also on this side a small perforation without secretion was found. The tuning-fork tests were typical for a middle ear affection.

*Summary:* *This patient only developed a definite slow horizontal nystagmus to the left when, after having been in the right lateral position, she turned her head to the left lateral position.*

#### **Patient IV.**

This patient, 46 years of age, suffered from a middle ear deafness due to a prior otitis media. She now had heavy attacks of turning dizziness with vomiting. Extensive internal, neurological, ophthalmological and roentgenological examination revealed no disturbances except some symptoms of a vasomotoric affection. Vestibular examination proved that the right labyrinth could be more easily stimulated than the left one. Spontaneous nystagmus was absent. A rotatory nystagmus to the left developed if the head, after having been for some minutes in the right lateral position, was brought from this position into the left lateral position; a rotatory nystagmus to the right if the head took the right lateral position after having been in the left lateral position.

*Summary:* *A woman, suffering from attacks of dizziness, developed a rotatory nystagmus in both lateral positions, provided the head had been kept for some time in the opposite direction.*

#### **Patient V.**

Previous history: 4 weeks before examination, after an influenza the patient developed attacks of turning-dizziness with vomiting. The surroundings seemed to turn in the opposite way of the direction of the hands of the clock. Her gait had become unsteady. Except some childhood diseases she had never had any serious affection until she was

<sup>4</sup>) BIEMOND, A., Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 42, 370 (1939) (Patient 2).



21 years of age; she then developed pneumonia with pleuritis; when she was 27 years of age she had typhoid. Information from the "Valeriuskliniek" revealed that in 1934 the patient had a neuritis of the right plexus brachialis which complaints persisted in later years. Family history: no abnormalities.

*Internal examination:* no disturbances. Reactions of WASSERMANN, SACHS GEORGI and KAHN were negative.

*Ophthalmologic examination:* no abnormalities.

*Neurological examination* (Department of Professor Dr. BROUWER): revealed that no distinct symptoms of the right plexus brachialis were present; the following facts, however, were now noted: tongue protruded to the right; hypaesthesia of the right auricle and on the right cheek (which could not be circumscribed).

The lumbar fluid was normal.

The most probable diagnosis was a right-sided neuritis of the plexus brachialis (marked in 1934, scarcely present in 1938) and a neuritis of the cerebral nerves (right vestibularis, right trigeminus, right hypoglossus).

*Rhinological examination:* no abnormalities.

*Acoustic examination:* the whispering voice was heard bilaterally at a normal distance. Tuning-fork tests: no abnormalities.

*Vestibular examination:* neither a spontaneous nor a simple position nystagmus was found. Horizontal post-rotation nystagmus:

10 X to the right, frequent after-nystagmus during 30 minutes, to the left.

10 X to the left: less frequent after-nystagmus during 15 minutes to the right.

*Caloric examination* of both labyrinths with cold and warm water gave normal reactions and revealed that a distinct "Nystagmusbereitschaft" was present for a nystagmus with its quick component to the left, e.g.:

5 cc. 36° C. right ear: nystagmus to the left.

5 cc. 36° C. left ear: no nystagmus.

5 cc. 39° C. right ear: no nystagmus.

5 cc. 39° C. left ear: nystagmus to the left.

On examination of the singular form of position nystagmus which is the subject of this paper, the following appeared:

I. Patient in dorsal position, head in left lateral position during two minutes: no nystagmus.

II. After this the head was brought into the right lateral position: horizontal-rotatory nystagmus to the left ( $\rightarrow$ ) preceded by some movements downward ( $\downarrow$ ).

III. Patient completely in left lateral position during 2 minutes: no nystagmus.

IV. After this patient was brought into the right lateral position: horizontal nystagmus to the left ( $\rightarrow$ ), preceded by some movements downward ( $\downarrow$ ).

V. Patient in right lateral position during two minutes: no nystagmus.

VI. Patient turned in left lateral position: no nystagmus.

VII. Patient in dorsal position during 2 minutes: no nystagmus.

VIII. Head brought into right or left lateral position: no nystagmus.

*Summary:* In this case the nystagmus could only be elicited when the head was brought into the right lateral position after having been kept for some minutes in the left lateral position.

*Summarizing it appears that the common symptom shown by the 5 patients described above, is a position nystagmus developing when the head was brought into a certain lateral position after it had been in the opposite lateral position for some minutes.*

This position nystagmus showed different forms: once a horizontal, once a rotatory, once a vertical and once a rotatory-horizontal nystagmus developed while in the last case some vertical movements were followed by some horizontal ones. Of the horizontal and rotatory nystagmus the quick component was in 3 cases directed to the left with

patient in left lateral position, and to the right with patient in right lateral position. In one case (patient V) the nystagmus had its quick component horizontally to the left with the patient in right lateral position. In one case an unaltered vertical nystagmus upward was found.

It is very probable that inductive symptoms of SHERRINGTON play an important part in this form of position nystagmus.

To comprehend this symptom the patients must be supposed to have a "Bereitschaft" for a position nystagmus when being in a certain lateral position, e.g. in the left one; however, this mere lateral position offers no sufficient stimulation to elicit the nystagmus. If, however, the opposite (right) lateral position by which the irritability of the antagonistic centra is enlarged (induction of SHERRINGTON) is taken first, the changing to the left lateral position accounts sufficiently for the eliciting of a position nystagmus.

All patients showing the above-mentioned form of position nystagmus were females. However, the number (5) was too small to draw conclusions.

In literature we found only one case<sup>5)</sup> which more or less belonged to this category. In 1916 at the Otological Society of Vienna, VIKTOR URBANTSCHITSCH demonstrated a patient suffering from a chronic purulent discharge of the ear and formation of cholesteatoma together with a fistula symptom which when operated upon proved to be due to a fistula in the horizontal semi-circular canal. Some days after operation patient stated that he became dizzy and nauseated when lying on the right side. Extensive examination by URBANTSCHITSCH revealed the following facts:

Lying in dorsal or left lateral position caused no dizziness. When patient was lying in right lateral position he became dizzy, at the same time a marked rotatory nystagmus could be seen, provided pressure was brought to bear on a small spot at the back of the head near the posterior edge of the processus mastoideus. This nystagmus lasted only 5 seconds, a repeated attempt to elicit this nystagmus was only successful after  $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}$  hour. Simple pressure (Patient in dorsal or sitting position) was not sufficient to cause a nystagmus.

If patient in sitting position strongly inclined the head to the right side, in this way bringing the head into the right lateral position after which pressure was brought to bear on the above-mentioned spot, a nystagmus developed immediately. This was not the case if the pressure was exerted with the head inclined backward or to the left.

This nystagmus cannot be explained merely as a fistula symptom: chloraethyl-anaesthetization of the above-mentioned spot prevented the development of the nystagmus, whereas, as soon as the anaesthetization had ended, the nystagmus could be elicited.

Another entirely analogous case was also recorded by URBANTSCHITSCH. A woman with completely healthy ears (with the head in right lateral position) after pressure on the same above-mentioned place, also developed a rotatory nystagmus<sup>6)</sup>; this however, made the sickness so bad, that the patient had to change her position immediately.

URBANTSCHITSCH identifies these cases with those with a reflectory nystagmus, without complaining further why this nystagmus only developed in the right lateral position. His cases in so far agree with the above-mentioned cases that these patients also had a "Nystagmusbereitschaft" with the head in right lateral position, though there exists one difference: in the cases of URBANTSCHITSCH a sensible stimulation was sufficient to cause the nystagmus, whereas in our case this had to be preceded by the opposite lateral position and the accompanying inductive symptoms. The reason why in the cases of URBANTSCHITSCH pressure on a certain spot of the skull was necessary to elicit the nystagmus, has not yet been explained.

<sup>5)</sup> URBANTSCHITSCH, V., Monatschr. f. Ohrenheilk., 50, 199 (1916).

<sup>6)</sup> The direction was not mentioned.

**Physics.** — *Recherches sur quelques phénomènes d'interférence des courbes de vibration.*  
(Suite.) Par J. W. N. LE HEUX. (Communicated by Prof. P. ZEEMAN.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

1. Dans l'étude suivante, je me propose de donner une explication de la naissance des franges noires, dites isogyres principales, que l'on observe dans une lame cristalline biaxiale, coupée perpendiculairement au 1er diamètre, en lumière convergente et homogène. Cette explication résulte de l'étude de la courbe générale

$$x = a \cos \alpha \cos \varphi, \quad y = a \cos (\alpha + \theta) \cos (\varphi + \Delta),$$

déjà publiée dans mes recherches antérieures et ainsi elle diffère de la méthode usuelle, qui s'occupe de la discussion de la formule

$$I = a^2 \sin^2 2 \varphi \sin^2 \frac{\pi d}{\lambda} (n_2 - n_1)$$

exprimant l'intensité de la lumière.

2. Proposition: Apparemment, l'image d'interférence des cristaux biaxiaux ne montre qu'un système de lemniscates.

En réalité, il y a deux systèmes. Chaque exemplaire d'un système coïncide en partie avec deux exemplaires consécutifs de l'autre système. Les parties non-coïncidentes des deux systèmes forment les isogyres principales.

Dans la position normale, les grands axes des lemniscates sont croisés, dans la position diagonale, ils coïncident.

3. Dans un travail antérieur<sup>1)</sup>, j'ai fait les deux observations suivantes:

a. L'image des lemniscates se produit par la superposition de deux spirales elliptiques  $S_1$  et  $S_3$  qui satisfont à de certaines conditions.

b. Chacune de ces deux spirales n'est que la moitié d'une courbe de vibration  $C$ . Ainsi, la courbe  $C_1$  est composée d'une spirale verticale  $S_1$  et d'une spirale horizontale  $S_2$  et la courbe  $C_2$  est composée de  $S_3$  et  $S_4$ . Comme les spirales  $S_1$  et  $S_2$  (et de même  $S_3$  et  $S_4$ ) sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle droit des coordonnées et que cette bissectrice est aussi axe de symétrie pour l'image des lemniscates, il s'ensuit que les spirales  $S_2$  et  $S_4$  donneront une image d'interférence qui coïncide avec l'image des spirales  $S_1$  et  $S_3$ .

4. Les images d'interférence furent tracées à l'aide d'un appareil à quatre pendules. Cet appareil permet de dessiner par approximation un système de six ou huit lemniscates, chaque fois que les conditions trouvées sont remplies, mais il ne permet pas (à cause de l'épaisseur des traits d'encre) de dessiner une superposition de deux systèmes de lemniscates, c'est à dire de quatre spirales superposées. Donc, il faut conclure par raisonnement à l'énoncé ci-dessus, concernant la coïncidence des deux systèmes de lemniscates. Cependant, une observation plus exacte révèle deux points de vue nouveaux, savoir:

a. Dans un système de lemniscates, obtenu par la superposition de deux spirales elliptiques, les courbes suivent le mouvement de l'ellipse intérieure à l'ellipse extérieure, c'est à dire, elles semblent tourner d'un angle de  $45^\circ$ .

b. Les spirales  $S_1$  et  $S_2$  peuvent être symétriques par rapport à la bissectrice, mais en général, elles ne le sont pas.

<sup>1)</sup> Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 43, N° 1 (1940).

5. Quant à 4a, ce phénomène se présente le mieux, quand l'image d'interférence est composée d'anneaux elliptiques. (Voir Table X, fig. 1.) On voit que le grand axe de l'anneau intérieur est à peu près vertical, tandis que le grand axe de l'anneau extérieur fait un angle de  $45^\circ$  avec le vertical.

Appelons les spirales composantes et verticales  $S_1$  et  $S_3$ . Comme nous l'avons dit (3), ces spirales sont les moitiés de deux courbes de vibration  $C_1$  et  $C_2$ . Les autres moitiés sont les spirales horizontales  $S_2$  et  $S_4$ , qui donneront un système d'anneaux elliptiques, dont l'anneau intérieur est presque horizontal, tandis que l'anneau extérieur coïncide avec celui de  $C_1$  (Table X, fig. 2).

Donc: la superposition de  $C_1$  et  $C_2$  donne deux systèmes d'anneaux croisés, ou, en général, deux systèmes de lemniscates croisées.

6. Quant à 4b, il faut répéter la construction d'une spirale elliptique qui, du reste, confirme le changement de direction des ellipses.

La formule  $x = a \cos \alpha \cos \varphi$ ,  $y = a \cos (\alpha + \theta) \cos (\varphi + \Delta)$ , qui sert de base à toutes nos recherches, comprend l'ensemble des ellipses  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \cos (\varphi + \Delta)$

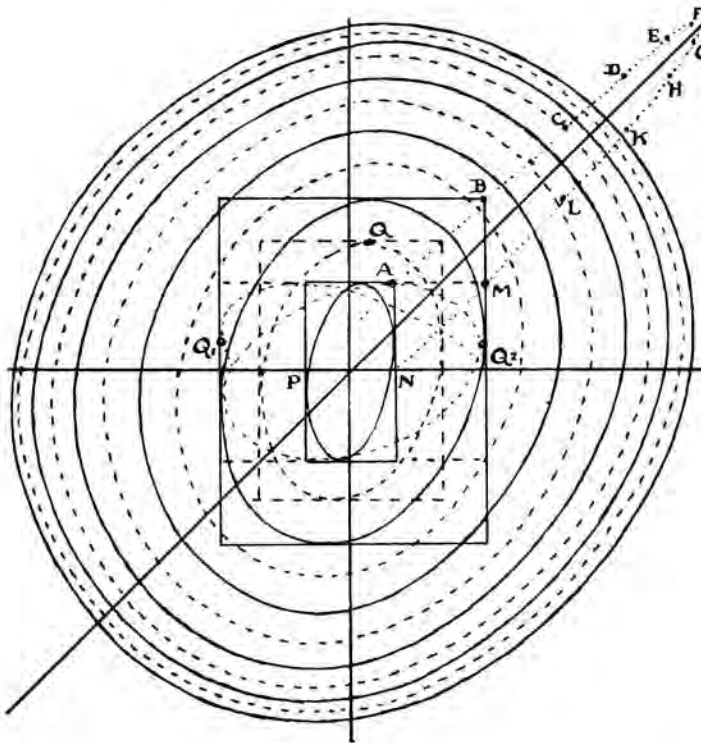


Fig. 17.

( $\Delta$  constant) inscrites dans les rectangles sur les doubles coordonnées des points de l'ellipse  $x = a \cos \alpha$ ,  $y = a \cos (\alpha + \theta)$  ( $\theta$  constant) et unies par une courbe continue  $C_1$  ou  $C_2$ .

Cette courbe est composée de deux spirales  $S_1$  et  $S_2$ .

Les ellipses qui fournissent la spirale  $S_1$  (voir fig. 17) sont inscrites dans les rectangles A, B, C, D, E et F — les ellipses de la spirale  $S_2$  sont inscrites dans les rectangles G, H, K, L, M et N.

Les ellipses, symétriques aux dernières par rapport à la bissectrice sont pointillées et l'on voit, qu'elles ne peuvent pas coïncider avec les ellipses tracées.

Il s'ensuit que les deux spirales  $S_1$  et  $S_2$  sont différentes: une est, par manière de dire, la „négative“ de l'autre.

Dans le seul cas, où les points de la partie supérieure de l'ellipse  $x = a \cos \alpha$ ,  $y = a \cos (\alpha + \theta)$  et les points de la partie inférieure sont choisis de façon à être symétriques par rapport à la bissectrice, on trouvera deux spirales égales  $S_1$  et  $S_2$ .

Pour se faire une idée nette d'une courbe  $C$ , on peut procéder de la façon suivante. Dessiner toutes les ellipses de la figure 17, copier les ellipses tracées et dessiner la spirale  $S_1$ , qui les réunit. De même, sur une autre feuille de papier transparent, copier les ellipses pointillées et dessiner la spirale  $S_2$ . Faire incliner cette spirale d'un angle de  $90^\circ$ , puis tourner le papier et faire coïncider les axes. Les deux spirales formeront ainsi une courbe continue.

Pour les spirales  $S_3$  et  $S_4$  (courbe  $C_2$ ) on peut dire la même chose: en général, ces spirales ne sont pas égales. Surtout, quand elles sont composées d'un très grand nombre d'ellipses, il est permis de dire que la spirale  $S_4$  est la „négative“ de la spirale  $S_3$ .

Cela posé, nous concluons que l'image d'interférence des spirales  $S_2$  et  $S_4$  sera la „négative“ de l'image des spirales  $S_1$  et  $S_3$ , c'est à dire: après la petite rotation, déjà mentionnée (5), les anneaux clairs d'une figure coïncideront avec les anneaux obscurs de l'autre (voir Table X, fig. 1 et 2).

7. En combinant ces deux nouvelles observations, celle du changement de direction des exemplaires d'un système et celle de la différence des deux spirales d'une même courbe de vibration, nous trouvons:

L'image des lemniscates, résultant de la superposition de deux vibrations elliptiques complètes, est composée de deux systèmes de courbes. Chaque exemplaire d'un système est situé entre deux exemplaires consécutifs de l'autre, mais un peu croisé, ce qui admet la possibilité de quatre parties communes. Pour illustrer cet énoncé, les anneaux d'interférence des figures 1 et 2 de la table X sont réunis dans la fig. 3. Les lignes „en zig-zag“ des parties non-coïncidentes forment les isogyres principales dans le cas de la position normale.

8. Etudions maintenant l'effet d'une petite rotation de la courbe  $C_2$ .

Comme la courbe  $C_1$  est composée des deux spirales  $S_1$  et  $S_2$  et la courbe  $C_2$  des deux spirales  $S_3$  et  $S_4$ , nous avons effectué cette rotation par celles des spirales  $S_3$  et  $S_4$ , toutes les deux dans le même sens et d'un angle égal (Table X, fig. 4 et 5).

L'image d'interférence des spirales  $S_1$  et  $S_3$  change un peu et devient une figure, qui est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice. L'image des spirales  $S_2$  et  $S_4$  se comporte de la même manière. Maintenant, les grands axes des anneaux ou des lemniscates coïncident avec la bissectrice. Après avoir réuni les anneaux d'interférence des fig. 4 et 5 dans la fig. 6, on voit qu'après la rotation, les parties coïncidentes sont situées sur les extrémités des deux axes des anneaux. Entre ces parties, on voit de nouveau quatre lignes „en zig-zag“, qui forment les isogyres principales dans la position diagonale.

9. Avec la théorie précédente, il devient possible de deviner les parties des courbes, cachées derrière les franges noires dans les photos usuels des phénomènes d'interférence.

Les figures 7, 8, 9 et 10 de la Table X en donnent quelques exemples, empruntés à l'ouvrage de HAUSWALDT<sup>1)</sup>.

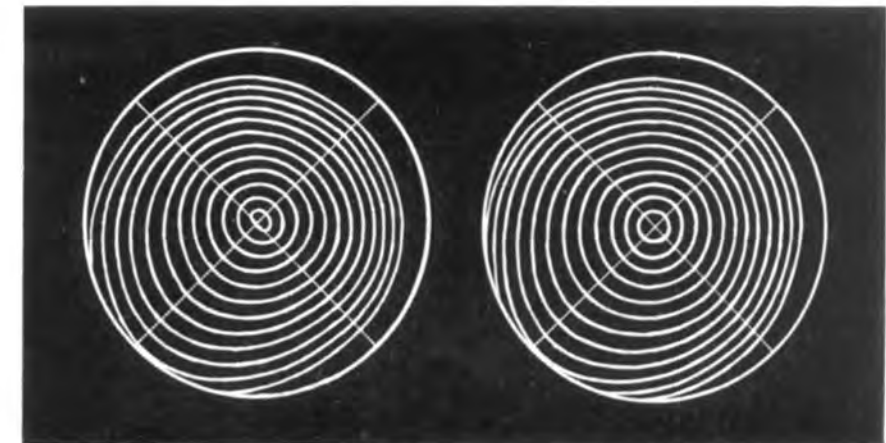
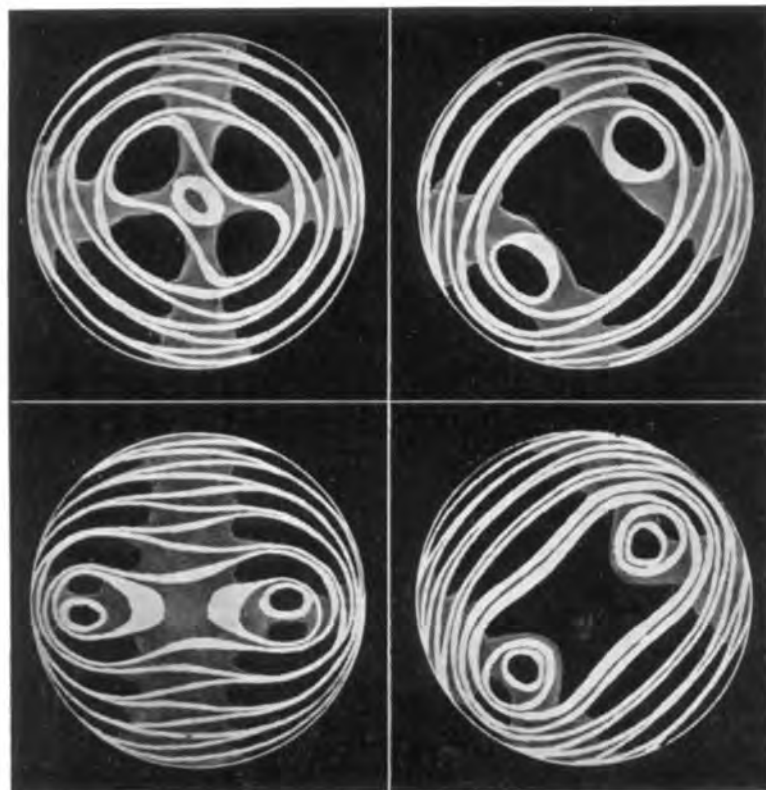
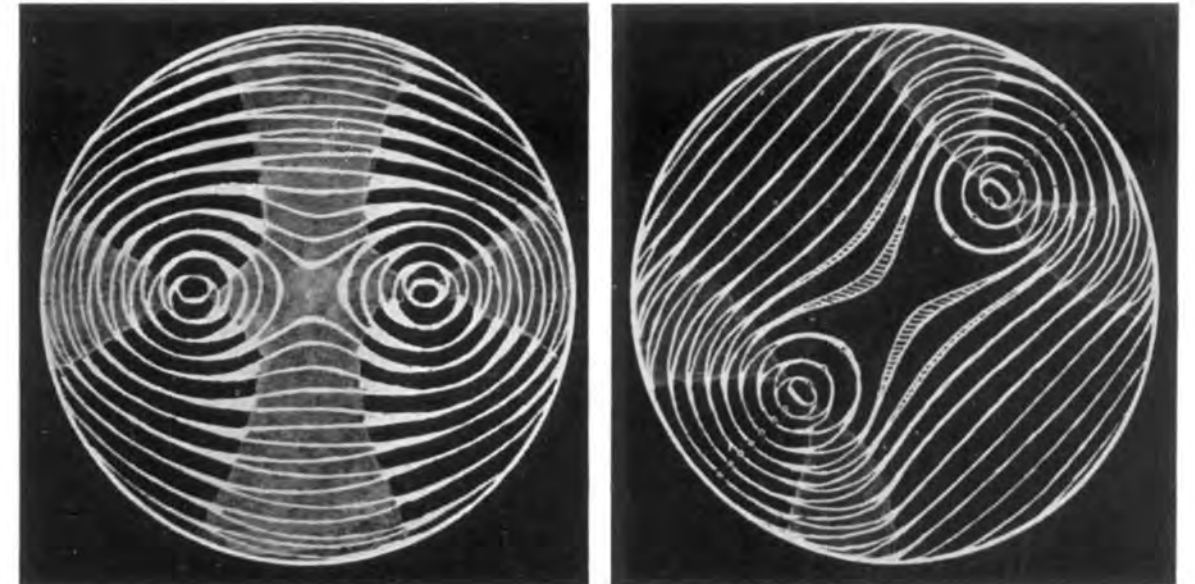
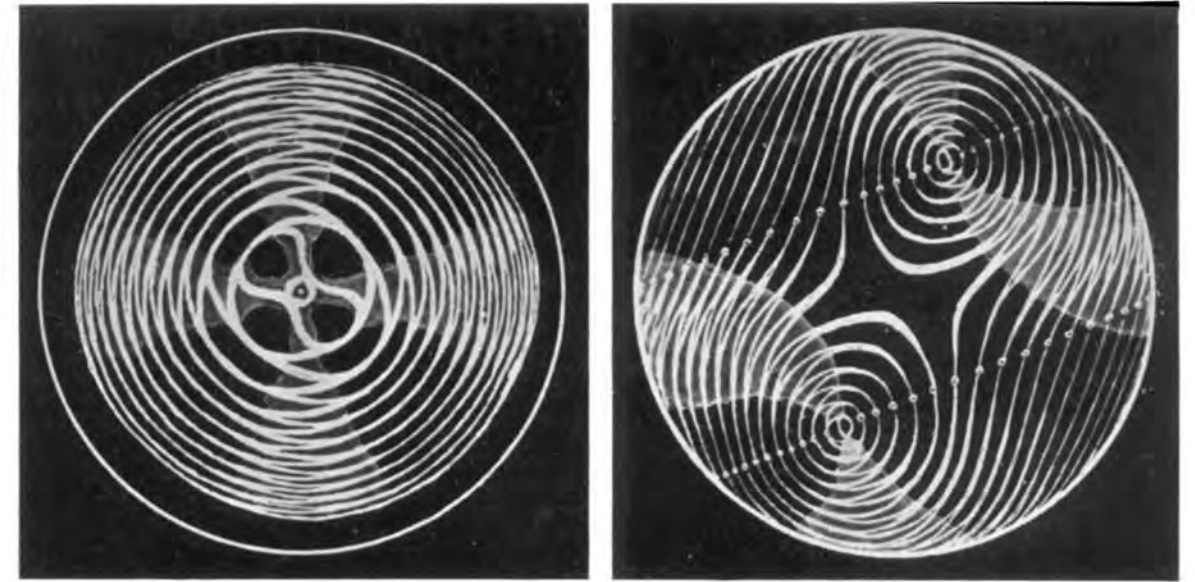
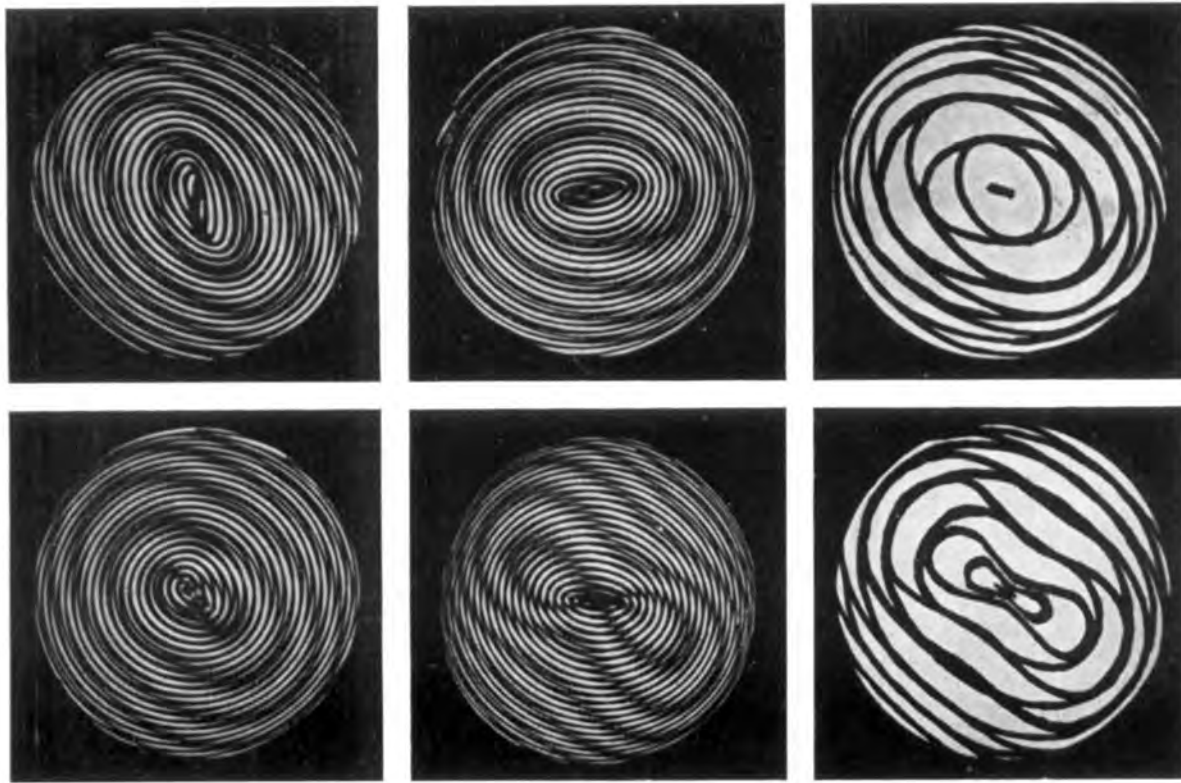
Fig. 7 et 8, qui sont les plus simples, montrent (en gris) l'image de Sanidine, à droite dans la position diagonale, à gauche dans la position normale. Dans ce dernier cas, il est également possible que la deuxième courbe intérieure est composée de deux ovales.

Dans les fig. 9 et 10 on voit un cas plus compliqué (ammonium — magnésium — phosphate), qui explique la naissance des petits traits, qui traversent les ovales les plus petits dans l'image totale. Un tel ovale, avec son diamètre apparent, consiste donc en réalité en deux ovales, dont un est la moitié de l'autre et qui se touchent à l'intérieur.

1) Interferenz-Erscheinungen an doppeltbrechenden Krystallplatten im konvergenten polarisirten Licht. Fotografisch aufgenommen von HANS HAUSWALDT in Magdeburg. Mit einem Vorwort von TH. LIEBISCH in Göttingen, Magdeburg 1902.



TABLE X





Dans la position normale les traits ne peuvent pas être en ligne droite à cause de la rotation.

Dans les photos, on constatera qu'un est situé plus bas que le prolongé de l'autre.

Les taches blanches font voir que les courbes d'interférence ont une certaine „épaisseur variable", qui dépend de l'angle, sous lequel les spires des spirales se coupent et qui contribue au contour et à l'aire des isogyres.

Fig. 11 de la table XI, zirkonium, est un exemple d'un cristal uniaxial, qui ne semble pas se distinguer de la fig. 7.

10. Maintenant, il est possible de dessiner des projets d'un grand nombre d'images d'interférence.

En augmentant le nombre des ovales autour d'un pôle, le dessin ressemble à la construction d'une famille de cercles, dont chaque exemplaire est tangent au précédent et au suivant dans les extrémités d'un diamètre. Pour beaucoup d'ovales, les parties non-coïncidentes formeront les deux franges noires de l'image d'interférence d'un cristal biaxial, coupé sous un angle droit avec une binormale en lumière convergente. J'ai discuté une telle construction dans une étude antérieure<sup>1)</sup> et pour des cercles de rayon  $r = a \cos n \alpha$  ( $\alpha$  très petit). Ici on peut remarquer, qu'en dessinant ces cercles pour les valeurs paires de  $n$  et puis séparément pour les valeurs impaires de  $n$ , la première figure est „la négative" de l'autre. Par une petite rotation (ou, ce qui revient au même, une petite translation) on voit paraître les lignes „en zig-zag", qui forment les isogyres. En répétant ce dessin pour un deuxième pôle et après avoir dessiné p.e. six ovales, il faut envelopper les deux systèmes de lemniscates. A ce moment, les isogyres, limitées jusqu'ici par des lignes droites, font une courbure et les contours de ces taches noires ressemblent quelque peu à des hyperboles.

Les dessins (fig. 12, 13 et 14) donnent en outre une explication de la variation en épaisseur des courbes que l'on voit en observant les photos des images d'interférence.

Les figures 15 et 16 montrent les deux systèmes d'ovales, qui, par superposition, donnent les deux isogyres de l'image d'une lame de topaze, coupée perpendiculairement à une binormale (position diagonale)<sup>2)</sup>.

#### LITTÉRATURE.

Pour le problème fondamental:

D. J. KORTEWEG, Verslag Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, Afd. Natuurk. Vol. 5, No. 8 (1897); Arch. Néerl., Vol. I, série 2, pp. 229—260.

Pour la théorie des courbes-enveloppes:

H. J. E. BETH, Verslag Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, Afd. Natuurk., Vol. 27 et 28 (1919/20); Phil. Mag. Aug. 1913.

Pour les images d'interférence obtenues à l'aide d'un appareil à quatre pendules, les communications suivantes de ma main:

J. W. N. LE HEUX, Verslag Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, Afd. Natuurk., Vol. 23, No. 8; Vol. 24, No. 4 et 5; Vol. 25, No. 3 et 4; Vol. 32, No. 10 (1929); Vol. 41, No. 4 (1938); Vol. 43, No. 1 (1940). Avec la littérature qui s'y rapporte.

<sup>1)</sup> Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 41, N<sup>o</sup>. 4 (1938).

<sup>2)</sup> POCKELS, Kristaloptik, Tafel V, Fig. 1.

**Physics.** — *The orientation of watermolecules round charged particles.* By J. F. VAN ELTEREN. (Communicated by Prof. J. D. VAN DER WAALS Jr.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

The question is, how watermolecules are arranged round colloidal particles or, generally speaking, round charged particles. We must distinguish between positively and negatively charged particles. No question can arise about the orientation of the watermolecules round the positive particles, for the place of the points of charge in a watermolecule is known<sup>1)</sup>. (Fig. 1.) With a positively charged particle the negative pole of the watermolecule will

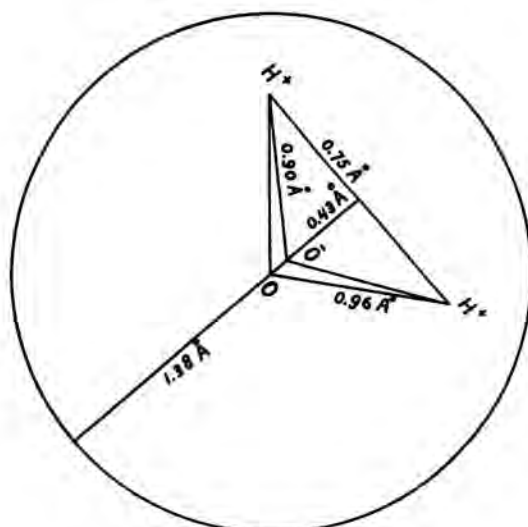


Fig. 1.

be directed to that particle; but both the positive charges are turned away. With negative particles the matter becomes more complicated. It is impossible to say at first sight, what the direction of the watermolecule will be. Two positions are possible, one symmetrical, the other non-symmetrical. In the non-symmetrical position one of the positive charges approaches as near as possible to the charged particle. We can, however, state at once, that in the non-symmetrical position the potential energy will decrease more quickly in proportion to the distance of the centre of the charged particle than in the symmetrical position. For, generally speaking, the potential energy of a dipole in its relation to a charged particle is inversely proportional to the square of the distance, whereas for a quadrupole it is inversely proportional to the cube of the distance. The forces operating between a dipole and a charged particle will cause a symmetrical orientation, but a non-symmetrical orientation in the case of a quadrupole. To show the working of this process, small rounds of blottingpaper, dipped in paraffin, on which little magnets had been placed, were brought on a surface of water. One of the poles of a magnet represented an ion,

<sup>1)</sup> FOWLER-BERNAL, *Trans. Far. Soc.*, **29**, 1049 (1933).

the diameter of which was represented by test-tubes of various sizes. It appeared, (Fig. 2, 3, 4) that with a small ionic radius the non-symmetrical position was stable, and with a greater ionic radius the symmetrical position. Hence it was clear, that between water and single-charged ions both positions were possible.



Fig. 2.  
negative ion  
small ionic radius



Fig. 3.  
negative ion  
great ionic radius



Fig. 4.  
positive ion

The potential energy of the watermolecule in relation to a charged particle was computed in dependence on the radius of the charged particle. The result of this computation is shown in the graph. (Fig. 5.) The ionic radii of F, Cl, Br and J, and of K, Na, Rb, Cs are shown on the absciss. From this graph some conclusions may be drawn.

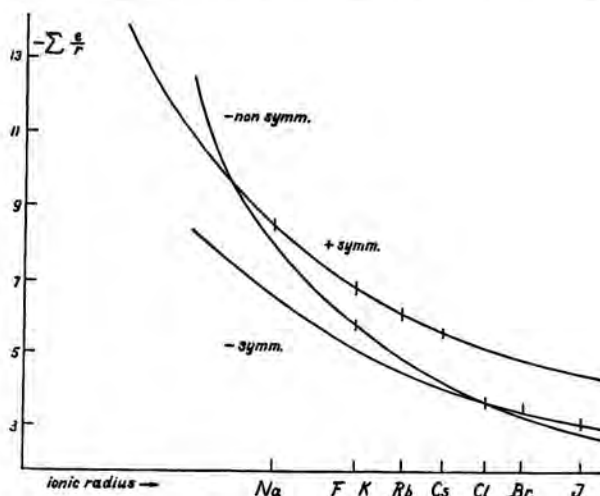


Fig. 5.

The F-ion takes up a peculiar place. In the first layer round the F-ion the watermolecule will take up a non-symmetrical position. In former computations of the hydration-energy this had never been taken into account. The lyotropic numbers are connected with this hydration-energy according to:  $I/H = aL + b$ . Here H and L are respectively the hydration-energy and the lyotropic number; a and b are constants. It often appears, that the F-ion does not correspond to the linear relation between this lyotropic number and the

effect obtained<sup>2)</sup>). The deviations can be explained by the particular position of the watermolecules.

We cannot conclude from this, how their position will be round colloidal particles. We shall have to give an answer to the question, whether the charge of these colloidal particles must be considered as points of charge which are found on the surface and each of which binds the watermolecules, or whether we are allowed to consider the charge as concentrated in the centre of the colloidal particle.

From the graph it is clear, that in the case of positive particles —  $\Sigma e/r$  is greater than in the case of negative ones. In the literature on this subject it is assumed, that with an equal ionic radius negative ions will have a greater hydration-energy than positive ones; for the positive pole of a water dipole is situated nearer to the periphery than the negative one<sup>3)</sup>. Exactly the opposite, however, appears from our own computations, as the computed numbers are a measure of this hydration-energy; which is evident from the table. Here the relations to the hydration-energy are shown. Indications of this may also be found in the literature of the colloid-chemistry. E.g. SPEELMAN<sup>4)</sup> states, that in

	$-\Sigma e/r$	H	$-\Sigma e/r/H$
F	5.8	123	0.047
Cl	3.65	84	0.044
Br	3.4	73	0.047
J	3.0	64	0.047

flocculation-experiments with serumalbumen the alcohol number appears as non-symmetrical on both sides of the iso-electric point. With a low  $p_H$ , therefore with positively charged particles, the alcohol number is greater than with a high  $p_H$ . Which points to a stronger binding of the watermantle to positive particles.

Measurements of viscosity and other properties render a similar result.

#### SUMMARY.

1. F appears to deviate from Cl, Br and J. Experiments have borne this out.
2. In case of an equal ionic radius positive ions seem to bind the watermolecules more strongly than negative ones.
3. A possibility of computing hydration-energies is offered, in which, of course, the various correcting factors must be taken into account.

In a following article we hope to speak on this subject more at large. My thanks are due to Dr. E. H. BÜCHNER, who suggested the idea on which these considerations are based.

<sup>2)</sup> BÜCHNER, *Recueil*, 59, 703 (1940).

SARLUY, Thesis, Amsterdam (1940).

<sup>3)</sup> VAN ARKEL en DE BOER, *Chemische Binding* (1930).

<sup>4)</sup> SPEELMAN, Thesis, Amsterdam (1937).

**Mathematics.** — „Sätze über topologische Erweiterung von Abbildungen“. By J. DE GROOT. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

1. *Fragestellung.* Unter einer Erweiterung topologischer Abbildungen versteht man folgendes: man betrachtet eine Punktmenge  $A$  eines Raumes und in demselben oder in einem anderen Raume eine mit  $A$  homöomorphe Punktmenge  $A'$ . Bisweilen ist es jetzt möglich zwei (zu  $A$  und  $A'$  fremde) Punktmenge  $B$  und  $B'$  zu finden von der Art, dass  $A+B$  topologisch abzubilden ist auf  $A'+B'$ , während die durch diese Abbildung induzierte Abbildung von  $A$  auf  $A'$  mit einer vorgegebenen topologischen Abbildung übereinstimmt. Die Abbildung von  $A$  auf  $A'$  ist also erweitert zu einer topologischen Abbildung von  $A+B$  auf  $A'+B'$ .

Dieses Problem ist unter verschiedenen Voraussetzungen der Mengen  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  und  $B'$  schon wiederholt bearbeitet worden. Ich nenne z.B. die Namen: L. ANTOINE (J. Math. Pures Appl. (8) 4 (1921), S. 221), H. M. GEHMANN (Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), S. 252; 31 (1929), S. 241. Am. J. of Math. 51 (1929), S. 385. Bull. Am. Math. Soc. 42 (1936), S. 79), M. LAURENTIEFF (Compt. Rend. 178 (1924), S. 187. Fund. Math. 6 (1924), S. 149), S. STOILOW (Rev. Math. Union Inter-Balkan 1 (1936), S. 97), H. WOLKENSTÖRFER (Dissertation, München 1929). Man sehe auch die Fußnote auf Seite 3.

1. 1. Wir werden im allgemeinen die Terminologie von P. ALEXANDROFF und H. HOPF verwenden <sup>1)</sup>.

Unseren Betrachtungen legen wir einen normalen Raum  $R$  mit abzählbarer Basis (bisweilen auch den  $n$ -dimensionalen Zahlenraum  $R_n$ ) zugrunde und beschränken das Problem in folgender Weise:

1°  $B$  ist eine Teilmenge der abgeschlossenen Hülle  $\bar{A}$  der Menge  $A$ , also  $B \subset \bar{A}$ . Ebenfalls gilt  $B' \subset \bar{A}'$ .

2° Es soll jede topologische Abbildung von  $A$  auf  $A'$  erweiterungsfähig sein.

2. Der denkbar einfachste Fall ist wohl der, dass  $B$  (bzw.  $B'$ ) nur einen Punkt  $P$  (bzw.  $P'$ ) enthält. Es gilt folgender einfacher Satz:

**Satz I.** In  $R$  sind gegeben zwei (in sich) kompakte Mengen  $A+P$  und  $A'+P'$ ; sind  $A$  und  $A'$  homöomorph, so kann man jede topologische Abbildung von  $A$  auf  $A'$  erweitern zu einer Abbildung von  $A+P$  auf  $A'+P'$ .

*Beweis.* Ist  $P$  ein isolierter Punkt der Menge  $A+P$ , so ist  $P$  notwendig isolierter Punkt von  $A'+P'$ . Sonst würde  $A$  kompakt und  $A'$  nicht-kompakt sein in widerspruch zur Homöomorphie. Somit liegen beide Punkte isoliert und es ist nichts zu beweisen.

Wir nehmen also an  $P \subset \bar{A}$  und  $P' \subset \bar{A}'$ . Denken wir uns jetzt eine beliebige, aber im Folgenden festgehaltene topologische Abbildung  $T$  von  $A$  auf  $A'$ . Eine gegen  $P$  konvergente, zu  $A$  gehörige Punktfolge  $a_i$  wird abgebildet auf eine Folge  $a'_i \subset A'$ , welche wenigstens einen Häufungspunkt  $Q' \subset A'+P'$  besitzt. Es ist aber  $Q' \subset A'$ , denn sonst würde es eine gegen  $Q$  ( $Q \subset A$ ) konvergente Teilfolge von  $a_i$  geben, weil  $T^{-1}$  topologisch ist. Es musz also  $Q' = P'$  sein.

Das Bild jeder gegen  $P$  konvergenten und zu  $A$  gehörigen Folge ist somit eine gegen

<sup>1)</sup> P. ALEXANDROFF, H. HOPF, Topologie I, Berlin, Springer, 1935.

$P'$  konvergente und zu  $A'$  gehörige Folge, und umgekehrt. M. a. W.: das Bild jeder Umgebung von  $P$  in der Menge  $A + P$  (abgekürzt:  $U(P/A + P)$ ) ist eine  $U(P'/A' + P')$ , und umgekehrt, wenn die Punkte  $P$  und  $P'$  einander zugeordnet werden.

2. 1. Fordert man in Satz I statt Kompaktheit zum Beispiel totale Beschränktheit<sup>1)</sup> oder Abgeschlossenheit, so verliert er seine Geltung. Man nehme etwa für  $A + P$  den zweidimensionalen Zahlenraum  $R_2$ , und setze  $A' = A$ ,  $P' = P$ ,  $\varphi' = \varphi$ ,  $r' = \frac{1}{r}$  ( $P = 0,0$ ) gibt eine topologische Abbildung von  $A$  auf  $A'$ , welche nicht erweiterbar ist. Ebenso leicht konstruiert man Abbildungen von total-beschränkten, aber nicht abgeschlossenen Mengen aufeinander, welche nicht erweiterungsfähig sind.

2. 2. Betrachten wir jetzt den Fall, dasz die Mengen  $B$  und  $B'$ , jede für sich, endlich viel Punkte enthalten. Das Analogon des Satzes I ist schon unrichtig. Dieser Tatbestand erhellt folgendermaßen: man verbiege ein Dreieck  $ABC$  in der Weise, dasz die Punkte  $B$  und  $C$  zusammenfallen; ein mit  $ABC$  kongruentes Dreieck  $A'B'C'$  verbiege man in der Weise, dasz  $A'$  und  $B'$  zusammenfallen. Aus der ersten verbogenen Figur entferne man die Punkte  $A$  und  $B (= C)$ , aus der zweiten  $C$  und  $A (= B)$ . Eine kongruente Abbildung von  $ABC$  (ohne Eckpunkte) auf  $A'B'C'$  (ohne Eckpunkte) induziert eine topologische Abbildung der beiden soeben konstruierten Figuren. Es leuchtet unmittelbar ein, dasz diese Abbildung sich nicht erweitern lässt zu einer Abbildung der beiden verbogenen Figuren.

Sind aber im  $n$ -dimensionalen Zahlenraum  $R_n$  die Punkte von  $B$  (bzw.  $B'$ ) innere Punkte der Menge  $A + B$  (bzw.  $A' + B'$ ) in bezug auf  $R_n$ , so gilt

**Satz II.** In  $R_n$  ( $n \geq 2$ ) sind gegeben zwei beschränkte abgeschlossene Mengen  $A + B$  und  $A' + B'$ ;  $A$  und  $A'$  sind homöomorph, während  $B$  (bzw.  $B'$ ) eine (endliche oder unendliche) isolierte Punktmenge ist, deren Punkte innere Punkte der Menge  $A + B$  (bzw.  $A' + B'$ ) in bezug auf  $R_n$  sind. Jede topologische Abbildung von  $A$  auf  $A'$  ist jetzt erweiterbar zu einer Abbildung von  $A + B$  auf  $A' + B'$ .

Der Beweis folgt nachher.

Dieser Satz gilt nicht für  $n = 1$ , da  $A$  und  $A'$  in diesem Falle nicht zusammenhängend sind. Man nehme zum Beispiel in  $R_1$  nacheinander die Punkte  $A, P_1, P_2, B$  und  $B', Q_1, Q_2, A'$ . Das lineare Bild von  $AP_1$  (ohne  $P_1$ ) sei  $A'Q_2$  (ohne  $Q_2$ ), von  $P_1P_2$   $Q_1Q_2$ , und von  $P_2B$  (ohne  $P_2$ )  $Q_1B'$  (ohne  $Q_1$ ). Entfernt man aus den Strecken  $AB$  und  $B'A'$  die Punkte  $P_1, P_2, Q_1$  und  $Q_2$ , so hat man durch diese Abbildungen zusammen eine topologische Abbildung der Restmengen aufeinander. Man kann aber nicht die Punkte  $P$  und  $Q$  einander zuordnen in der Art, dasz die genannte Abbildung erweiterbar ist.

2. 3. Es erhebt sich jetzt die Frage nach Aussagen für den Fall, dasz  $B$  und  $B'$  allgemeinere Punktmenge sind. In 3 werden wir diese Frage beantworten.  $B$  und  $B'$  werden dabei nulldimensionale<sup>2)</sup> Punktmenge sein. Für  $n$ -dimensionale ( $n > 0$ ) Punktmenge  $B$  und  $B'$  wird es aber schwer, wenn nicht unmöglich sein, etwas Allgemeines und Positives anzusagen. Wir erläutern diesen Tatbestand an folgendem einfachem Beispiel, wobei  $B$  und  $B'$  zwei eindimensionale Simplices sind, welche sogar ganz im Inneren der Mengen  $A$  und  $A'$  liegen. In der gezeichneten Figur sind die beiden von den Rechtecken berandeten Flächenstücke die Mengen  $A + B$  und  $A' + B'$ ;  $B$  und  $B'$  sind die Strecken  $XY$  und  $X'Y'$ . Man konstruiert leicht eine topologische Abbildung von  $A$  auf  $A'$ , bei der das Dreieck  $SPA$  (ohne  $A$ ) übergeführt wird in das Rechteck  $S'P'Q'R'$  (ohne  $R'Q'$ ). Diese Abbildung ist aber nicht erweiterbar, denn sie kann nicht einmal eineindeutig sein.

<sup>1)</sup> Eine Menge heiszt total beschränkt, wenn sie sich für jedes  $\delta > 0$  als Summe endlich vieler Mengen von Durchmessern  $\leq \delta$  darstellen lässt.

<sup>2)</sup> Im BROUWER-URYSONNSchen Sinne.



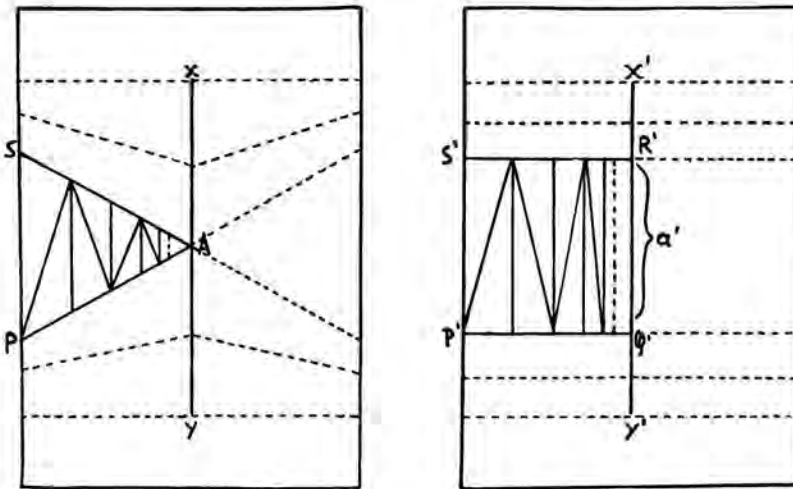


Fig. 1.

3. Wir brauchen folgendes Lemma.

*Lemma.* In  $R$  ist gegeben eine Menge  $A + B$ ; es gilt  $B \subset \bar{A}$ .

Wenn eine eindeutige Abbildung  $f$  von  $A + B$  auf eine Menge  $A' + B'$  in jedem Punkte von  $A + B$  stetig in bezug auf  $A$  ist, so ist  $f$  eine stetige Abbildung von  $A + B$  auf  $A' + B'$ .

*Beweis.*  $f$  ist eine stetige Abbildung von  $A + B$  auf  $A' + B'$ , wenn es zu jeder Umgebung  $U(P/A' + B')$  eines Punktes  $P' \in A' + B'$  eine Umgebung  $U(P/A + B)$  gibt, deren Bild zu der  $U(P/A' + B')$  gehört. Wir dürfen annehmen, dass die Umgebung  $U(P/A' + B')$  eine abgeschlossene Menge ist. Der Durchschnitt von  $U(P/A' + B')$  und  $A' + P'$  ist eine Umgebung  $U(P'/A' + P')$ . Da  $f$  in  $P$  stetig in bezug auf  $A$  ist, gibt es eine Umgebung  $U(P/A + P)$ , deren Bild in der  $U(P'/A' + P')$  enthalten ist.

Die Menge  $U(P/A + P)$  und die Menge der zu  $A + B$  gehörigen Häufungspunkte von  $U(P/A + P)$  geben zusammen — wie man leicht einsieht — eine Umgebung  $U(P/A + B)$ . Jede gegen den Punkt  $Q \in A + B$  konvergierende Punktfolge  $a_i \in A$  wird aber abgebildet auf eine gegen  $Q'$  konvergierende Folge  $a'_i$ . Aus dem Obigen geht also jetzt hervor, dass das Bild der konstruierten  $U(P/A + B)$  zu der  $U(P'/A' + B')$  gehört, was zu beweisen war.

*Bemerkung.* Wenn ausserdem  $A + B$  (in sich) kompakt und  $f$  eineindeutig ist, so leitet man — mit Hilfe eines bekannten Satzes — sofort ab, dass  $f$  topologisch ist.

3.1. Mit Hilfe dieses Lemma beweisen wir folgenden Satz.

**Satz III.** In  $R$  sind gegeben zwei kompakte Mengen  $A + B$  und  $A' + B'$ ;  $A$  und  $A'$  sind homöomorph, und es gilt  $B \subset \bar{A}$ ,  $B' \subset \bar{A}'$ .

Wenn die Mengen  $A + B$  und  $A' + B'$  die Eigenschaften 1 und 2 besitzen, so ist jede topologische Abbildung von  $A$  auf  $A'$  erweiterbar zu einer Abbildung von  $A + B$  auf  $A' + B'$ .

Die Eigenschaften <sup>1)</sup>, ausgesprochen für die Mengen  $A$  und  $B$ , sind:

<sup>1)</sup> H. FREUDENTHAL — dem ich an dieser Stelle herzlichst danke für seinen wertvollen Rat — war so freundlich, meine Aufmerksamkeit zu lenken auf seine Dissertation „Ueber die Enden topologischer Räume und Gruppen“ (Math. Z.schr. 33 (1931)), insbesondere Satz 7, und auf einen Aufsatz von L. ZIPPIN „On semicomact spaces“ (Am. J. of Math.

1. die Menge  $A$  ist zusammenhängend im kleinen in der Nähe der Menge  $B$ . Das heisst: für jeden Punkt  $P \in B$  gibt es beliebig kleine Umgebungen  $U(P/A)$ , welche zusammenhängend sind<sup>1)</sup>.
2.  $B$  ist eine nulldimensionale Punktmenge (zum Beispiel:  $B$  ist eine diskontinuierliche  $F_\sigma$ -Menge<sup>2)</sup>).

*Beweis.* Wenn  $B$  nulldimensional ist, so gibt es offenbar zu jedem Punkt  $P \in B$  beliebig kleine (offene) Umgebungen  $U(P/R)$ , deren Begrenzungen keine Punkte von  $B$  enthalten.

Unser Ziel ist jetzt zu beweisen, dass eine beliebige Umgebung  $U(P/A + P)$  eines Punktes  $P \in B$  übergeführt wird in eine  $U(P'/A' + P')$ , wenn wir eine gewisse topologische Abbildung von  $A$  auf  $A'$  betrachten, und die Punkte  $P \in B$  und  $P' \in B'$  einander in geeigneter Weise zuordnen. Wir brauchen dazu folgenden bekannten Satz: Wenn eine zusammenhängende Menge  $S$  sowohl mit der offenen Menge  $U$  wie auch mit der Menge  $R - U$  wenigstens einen Punkt gemein hat, so hat  $S$  wenigstens einen Punkt mit der Begrenzung von  $U$  gemeinsam.

Eine beliebige  $U'(P/A + P)$  ist Durchschnitt von  $A + P$  und einer  $U'(P/R)$ . Wir nehmen eine (offene)  $U(P/R)$  mit  $U(P/R) \subset U'(P/R)$ , deren Begrenzung  $G$  zu  $B$  fremd ist. Der Durchschnitt von  $U(P/R)$  und  $U'(P/A + P)$  ist wieder eine  $U(P/A + P)$ .

$G$  und  $A + B$  sind abgeschlossene Mengen; die Menge  $N = (A + B) \cdot G$  ist also ebenfalls eine (vielleicht leere) abgeschlossene Menge. Das Bild  $N' \subset A'$  ist wieder abgeschlossen.

Betrachten wir eine zu  $U(P/A + P)$  gehörige und gegen  $P$  konvergente Punktfolge  $a_i$ . Die Bildfolge  $a'_i$  hat wenigstens einen Häufungspunkt  $P'$  mit  $P' \in B'$ . Wir ordnen  $P'$  dem Punkte  $P$  zu (später wird hervorgehen, dass  $P$  diesen Punkt  $P'$  eindeutig bestimmt). Angenommen, das Bild von  $U(P/A + P)$  sei keine Umgebung  $U(P'/A' + P')$ ; dann gibt es in jeder Nähe von  $P'$  einen Punkt  $Q' \in A'$ , der nicht zum Bilde von  $U(P/A + P)$  gehört. Der Originalpunkt  $Q$  von  $Q'$  gehört also nicht zu  $U(P/A + P)$  und auch nicht zu  $U(P/R)$ , weil  $Q$  zu  $A$  gehört. Wegen Eigenschaft 1 gibt es beliebig kleine zusammenhängende Umgebungen  $U(P'/A')$ . Wir wählen diese  $U'(P'/A')$  in der Weise, dass der Durchschnitt von  $U(P'/A')$  und  $N'$  leer ist (die Menge  $N'$  ist abgeschlossen!).

In  $U(P'/A')$  liegt ein Punkt  $Q'$  der oben erwähnten Art und ein Punkt  $a'_k$ ; diese beiden Punkte sind also verbunden durch die Menge  $U(P'/A')$ . Die inverse topologische Abbildung bildet  $U(P'/A')$  ab auf eine zusammenhängende Menge  $M \subset A$ , welche  $Q$  und  $a_k$  enthält. Es gilt offenbar  $Q \in R - U(P/R)$ ,  $a_k \in U(P/R)$ ;  $M$  hat also wenigstens einen Punkt mit  $N$  gemeinsam in Widerspruch zu der Tatsache, dass das Bild  $U(P'/A')$  von  $M$  keinen

57 (1935)), welcher Erweiterungen von FREUDENTHALS Arbeit enthält. Durch ZIPPIN wird u.a. ein Satz abgeleitet, welcher, an Stelle der Bedingungen 1 und 2, die folgenden Bedingungen fordert: a.  $A$  ist zusammenhängend; b.  $A$  ist im kleinen zusammenhängend; c.  $B$  ist eine diskontinuierliche  $F_\sigma$ -Menge; d.  $B$  ist „totally avoidable“, d.h. in jeder zusammenhängenden, in  $A + B$  offenen Menge  $D$  mit  $D \subset A + B$  ist  $D \cdot A$  zusammenhängend. Aus diesen vier Bedingungen sind sofort die Bedingungen 1 und 2 abzuleiten; das Umgekehrte ist aber nicht der Fall. Tatsächlich ist es möglich, Beispiele ausfindig zu machen, welche den Anforderungen 1 und 2, aber nicht a und (oder) b entsprechen. Unser Satz III sagt also wesentlich Neues aus.

Von diesem Berührungspunkt abgesehen kann man ZIPPINS und unsere Resultate nicht miteinander vergleichen, da wir verschiedene Ausgangspunkte und Ziele haben.

1) Man bemerke, dass  $U(P/A)$  den Punkt  $P$  nicht enthält.

2)  $F_\sigma = \sum_n F_n$ , jedes  $F_i$  abgeschlossen. Eine abzählbare Menge ist z.B. ein  $F_\sigma$ .

Ein diskontinuierliches  $F_\sigma$  ist eine nulldimensionale Menge, denn jede Menge  $F_i$  ist eine abgeschlossene und diskontinuierliche, also eine nulldimensionale Menge (siehe z.B.: K. MENGER, Dimensionstheorie, S. 213). Aus dem „Summensatz“ der Dimensionstheorie geht jetzt die Behauptung hervor.

Punkt von  $N'$  enthält. Das Bild jeder  $U(P/A + P)$  ist also eine  $U(P'/A' + P')$ . Es geht jetzt auch unmittelbar hervor, dass  $P'$  der einzige Häufungspunkt der Folge  $a'_i$  ist. Gäbe es nämlich zwei Häufungspunkte  $P'$  und  $P''$ , so könnte man die inverse topologische Abbildung von  $A'$  auf  $A$  betrachten, und genau wie oben nachweisen, dass jede  $U(P''/A' + P'')$  und jede  $U(P'/A' + P')$  übergeführt wird in Umgebungen  $U(P/A + P)$ . Wählt man die Umgebungen von  $P'$  und  $P''$  fremd zueinander, so erhält man leicht einen Widerspruch. Die Beziehung zwischen den Punkten  $P \subset B$  und  $P' \subset B'$  ist also eindeutig.

Mit Hilfe des Lemmas schlieszen wir jetzt sofort auf die Erweiterungsfähigkeit der Abbildung.

4. Als erste Anwendung des soeben bewiesenen Satzes nennen wir Satz II. Es ist einleuchtend, dass die Daten den Anforderungen entsprechen. Uebrigens kann man Satz II auch direkt — ohne Hilfe des Lemmas — beweisen; dazu braucht man nur eine Vereinfachung der im Satze III angewendeten Beweisführung.

4.1. Um zu einer zweiten Anwendung zu gelangen, teilen wir die Punkte des Zahlenraumes  $R_n$  in zwei Klassen ein: in die erste Klasse die Punkte mit ausschliesslich rationalen Koordinaten, das sind die „rationalen“ Punkte; in die zweite Klasse die übrigen, das sind die „irrationalen“ Punkte.

**Satz IV.** *Jede topologische Abbildung der irrationalen Punkte zweier  $n$ -dimensionaler Elemente in  $R_n$  ( $n > 1$ ) aufeinander ist erweiterbar zu einer Abbildung der beiden  $n$ -dimensionalen Elemente.*

*Beweis.* Die rationalen Punkte bilden eine abzählbare, also gewisz eine nulldimensionale Punktmenge. Wir haben also nur mehr Eigenschaft 1 nachzuprüfen. Diese Eigenschaft ist aber unmittelbar klar für die inneren Punkte eines  $n$ -dimensionalen Elementes  $E$ .

Zum Nachweis für die (rationalen) Randpunkte bilden wir  $E$  topologisch ab auf eine  $n$ -dimensionalen Vollkugel  $E'$ . Das Bild  $U(P'/E')$  einer Umgebung  $U(P/E)$  eines rationalen Randpunktes  $P \subset E$  enthält eine  $U_\xi(P'/E')$ . Je zwei zu dieser Umgebung gehörigen Punkte kann man verbinden durch eine in der Umgebung liegende Strecke. Die Originalmenge  $U'(P/E)$  von  $U_\xi(P'/E')$  ist also ebenfalls stetig zusammenhängend. Wir haben jedoch nachzuweisen, dass jede zwei zu  $U'(P/E)$  gehörigen irrationalen Punkte zu verbinden sind durch einen nur irrationalen Punkte enthaltenden einfachen Jordanbogen. Wir erreichen jetzt unser Ziel durch eine Approximation.

Angenommen die zwei irrationalen Punkte, welche wir verbinden wollen, gehören nicht zum Rande  $S$  von  $E$ . Ein die zwei Punkte verbindender zu  $U'(P/E)$  gehöriger Jordanbogen hat eine positive Entfernung  $\delta$  von der Menge  $S + G$  ( $G$  bedeutet die Begrenzung der offenen Menge  $U'(P/E)$ ). Wir konstruieren jetzt eine Einteilung des  $R_n$  in  $n$ -dimensionale Würfel, deren Randpunkte alle irrational sind. Die Kantenlänge jedes Würfels wählen wir  $< \frac{\delta}{n}$ . Betrachten wir die Menge der Würfel, welche wenigstens einen Punkt mit dem Jordanbogen gemeinsam haben. Man ist nun sofort im Stande einen zur Menge der Würfel und deshalb zu  $U'(P/E)$  angehörigen Weg von irrationalen Punkten zu bestimmen, welcher die zwei irrationalen Punkte verbindet.

Wenn einer der beiden irrationalen Endpunkte  $K$  des Jordanbogens  $b$  zum Rande  $S$  von  $E$  gehört, so bestimmen wir eine Einteilung von  $b$  in eine Folge von einfachen Jordanbogen  $b_i$

$$b = b_1 + b_2 + \dots$$

derart, dass  $b_k$  und  $b_{k+1}$  genau einen Punkt gemeinsam haben und die Folge der Bogen  $b_i$  gegen  $K$  konvergiert. Jetzt approximieren wir jeden Bogen  $b_i$  durch einen Weg  $w_i$  in der oben angegebenen Weise. Setzen wir

$$w = w_1 + w_2 + \dots$$

so konvergieren die  $w_i$  gegen den Punkt  $K$ . Die Menge  $w + K$  ist also ein Jordanbogen, der den Anforderungen entspricht.

Gehören die beiden irrationalen Endpunkte des Jordanbogens  $b$  zum Rande  $S$ , so führt natürlich eine analoge Betrachtung zum Ziel.

4.2. Bekannt ist folgender Satz: jede abzählbare überall dichte Menge  $A$  im  $R_n$  ist der Menge  $A'$  der rationalen Punkte des  $R_n$  homöomorph. Man kann sogar eine topologische Abbildung von  $A$  auf  $A'$  bestimmen, welche sich erweitern lässt zu einer Selbstabbildung des ganzen Raumes  $R_n$ . Diese Behauptung gilt aber nicht für jede topologische Abbildung von  $A$  auf  $A'$ <sup>1)</sup>. Ebensovienig gilt Satz IV, wenn wir das Wort irrational durch das Wort rational ersetzen. Erläutern wir diesen Tatbestand durch folgendes Beispiel<sup>2)</sup>:

Ein Quadrat mit irrationalen Seiten teile man durch eine irrationale Strecke in zwei irrationale Rechtecke  $ABCD$  und  $CDEF$ . Wir dürfen annehmen, dass bei der kongruenten Abbildung von  $ABCD$  auf  $DCBA$  die rationalen Punkte in rationale Punkte übergeführt werden. Diese Abbildung gibt zusammen mit der identischen Abbildung des Rechteckes  $CDEF$  eine topologische Abbildung der rationalen Punkte des Quadrates, welche offenbar nicht erweiterungsfähig ist.

Jetzt bringen wir noch eine einfache Anwendung des Satzes IV.

*Korollar.* Jede topologische Abbildung der irrationalen Punkte zweier  $n$ -dimensionalen Elemente in  $R_n$  ( $n > 1$ ) aufeinander ist eine gleichmäßig stetige Abbildung.

Die Abbildung ist nämlich erweiterbar zu einer Abbildung von zwei beschränkten abgeschlossenen Mengen. Diese letzte Abbildung, und also auch die erste, ist gleichmäßig stetig.

4.3. Erwähnen wir noch eine letzte Anwendung des Satzes III.

**Satz V.** In der Ebene  $R_2$  sind gegeben zwei beschränkte abgeschlossene Mengen  $A + B$  und  $A' + B'$ ;  $A$  und  $A'$  sind homöomorph,  $B$  (bzw.  $B'$ ) ist eine (beschränkte) abgeschlossene diskontinuierliche Punktmenge, während die Punkte von  $B$  (bzw.  $B'$ ) innere Punkte der Menge  $A + B$  (bzw.  $A' + B'$ ) in bezug auf  $R_2$  sind.

Es ist jetzt jede topologische Abbildung von  $A$  auf  $A'$  erweiterbar zu einer topologischen Abbildung von  $A + B$  auf  $A' + B'$ .

*Beweis.* Ein bekannter Satz besagt, dass man durch  $B$  (bzw.  $B'$ ) eine Jordankurve  $J$  legen kann. Zu jedem Punkte  $P \in B$  gibt es auf beiden Seiten von  $P$  auf  $J$  eine nach  $P$  konvergente und zu  $A$  gehörige Punktfolge, da  $B$  eine diskontinuierliche Menge ist. Ausserdem ist eine Jordankurve in jedem ihrer Punkte glatt und erreichbar, sowohl für das Innere wie auch für das Aeuszere der Kurve<sup>3)</sup>; mit Hilfe dieser Eigenschaften leuchtet sofort ein, dass die Eigenschaft 1 vorhanden ist.

<sup>1)</sup> Für den Beweis dieser und analoger Sätze sehe man L. E. J. BROUWER, *Some remarks on the coherence type  $\eta$* . Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 15, S. 1256—1263 (1913), 16, S. 336 (1913).

<sup>2)</sup> Andere Beispiele gibt L. E. J. BROUWER, l.c., S. 1262.

<sup>3)</sup> Siehe: A. SCHOENFLIES, Math. Ann. 62 (1906), S. 296 oder B. v. KERÉKJÁRTÓ, Vorlesungen über Topologie, S. 65.

**Mathematics.** — *Sur la représentation des fonctions harmoniques.* Par A. F. MONNA.  
(Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE).

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

1. Dans le numéro précédent de ce journal j'ai fait quelques remarques concernant la possibilité de la représentation des fonctions harmoniques dans un domaine par une intégrale de STIELTJES—RADON. Aucune condition ne fut imposée au domaine  $\Omega$  et les fonctions harmoniques ne furent supposées que d'être bornées supérieurement. Cependant une étude de plus près m'a fait voir qu'il est difficile à rendre la démonstration exacte sans quelques conditions, qui sont données dans ce qui suit.

On remarque d'abord que les fonctions d'ensemble  $\mu_n^P, \theta_n^{P_0}$ , etc, peuvent être considérées comme définies sur tous les ensembles de l'espace trois-dimensionnel (pour autant qu'ils sont mesurables relativement à  $\mu_n^P$ , etc.), en les posant zéro hors  $\Sigma$ .

2. Dans la démonstration est utilisée que les intégrales

$$\int_e \gamma^P(Q) d\theta^{P_0}(Q), \int_{e_n} \gamma_n^P(Q) d\theta_n^{P_0}(Q). \dots \dots (1)$$

où  $e$  et  $e_n$  désignent respectivement des sous-ensembles de  $\Sigma$  et de  $\Sigma_n$ , tendent vers zéro avec la mesure harmonique de  $e$  et de  $e_n$ <sup>1)</sup>. Puisque  $\gamma^P$  et  $\gamma_n^P$  sont bornés et positifs, il faut et il suffit pour cela que  $\theta^{P_0}$  et  $\theta_n^{P_0}$  s'annulent sur les ensembles de mesure harmonique nulle. Posons alors  $u(P) = -v(P)$ . On a alors

$$\theta_n^{P_0}(e) = \int_{e_n} v(Q) d\mu_n^{P_0}(Q). \dots \dots (2)$$

$v(Q)$  est continu sur  $\Sigma_n$  fermé, et donc borné:  $v \leq M_n$ . Donc

$$0 \leq \theta_n^{P_0}(e_n) \leq M_n \mu_n^{P_0}(e_n).$$

Par conséquent  $\theta_n^{P_0}(e_n) \rightarrow 0$  si  $\mu_n^{P_0}(e_n) \rightarrow 0$ . Si  $v$  est borné dans  $\Omega$  (donc si  $u$  est non seulement borné supérieurement, mais aussi borné inférieurement),  $M_n \leq M$ , un passage à la limite montre que le même est vrai pour  $\theta^{P_0}$ . Cependant, pour conclure que  $\theta^{P_0}(e) \rightarrow 0$  si  $\mu^{P_0}(e) \rightarrow 0$ , il n'est pas nécessaire que  $v$  est borné.

Il faut et il suffit que les intégrales (2) sont uniformément et absolument continues par rapport à la mesure harmonique sur le  $\Sigma_n$  correspondant, c. a. d. s'il existe pour tout  $\varepsilon > 0$  donné un nombre  $\delta(\varepsilon) > 0$  tel que

$$\theta_n^{P_0}(e) = \int_e v(Q) d\mu_n^{P_0}(Q) < \varepsilon$$

pour  $n > N(\varepsilon)$  dès que  $\mu_n^{P_0}(e) < \delta(\varepsilon)$ .

<sup>1)</sup> On ne l'a utilisé que pour les ensembles  $e = \Sigma - \Sigma'$  et  $e_n = \Sigma_n - \Sigma'_n$ .



Ceci résulte immédiatement de ce qu'on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{P_0}(e) = \mu^P(e)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n^{P_0}(e) = \theta^{P_0}(e)$  pour tout  $e$  ainsi dit „régulier“.

Remarquons que toute intégrale (2) est absolument continue sur le  $\Sigma_n$  correspondant ( $u$  étant supposé seulement borné supérieurement), de sorte que seulement l'uniformité de cette continuité désigne une restriction.

La condition imposée à  $u(P)$  est superflue si la dérivée de  $\mu^P(e)$  par rapport à  $\mu^{P_0}(e)$  existe en chaque point  $Q$  de  $\Sigma$ .

3. Pour pouvoir conclure à la convergence de  $\gamma_n^P(Q_n)$  vers  $\gamma^P(Q)$  sur les  $\Sigma_n'$  il faut imposer une condition à  $\Omega$ . A savoir, il n'est pas certain sans plus qu'il existe un ensemble  $e$  de mesure harmonique positive, tel qu'on a

$$\left| \frac{\mu^P(e)}{\mu^{P_0}(e)} - \gamma^P(Q) \right| < \frac{1}{3} \varepsilon; \quad \left| \frac{\mu_n^P(e)}{\mu_n^{P_0}(e)} - \gamma_n^P(Q_n) \right| < \frac{1}{3} \varepsilon \dots \dots (3)$$

et la possibilité de ceci est essentielle dans la démonstration.

On peut arriver à une condition suffisante comme il suit.

A. Supposons que la frontière  $\Sigma$  de  $\Omega$  est telle que la portion de  $\Sigma$  contenue dans une sphère de rayon  $\varrho$  et centrée dans un point  $Q$  quelconque de  $\Sigma$ , a une mesure harmonique positive.

Soit alors  $\{Q_n\}$  une suite de points de  $\{\Sigma_n\}$  tendant vers  $Q$ . Désignons par  $e_n$  l'intérieure de la sphère de rayon  $\varrho$  et de centre  $Q_n$ ; de même par  $e$  l'intérieur de la sphère de rayon  $\varrho$  et de centre  $Q$ . Pour  $\varepsilon > 0$  donné arbitrairement il existe un nombre  $\varrho_n(\varepsilon) > 0$  tel que pour  $\varrho \leq \varrho_n$

$$\left| \frac{\mu_n^P(e_n)}{\mu_n^{P_0}(e_n)} - \gamma_n^P(Q_n) \right| < \frac{1}{3} \varepsilon. \dots \dots \dots (4)$$

De même il existe un nombre  $\varrho^*(\varepsilon) > 0$  tel que pour  $\varrho \leq \varrho^*$

$$\left| \frac{\mu^P(e)}{\mu^{P_0}(e)} - \gamma^P(Q) \right| < \frac{1}{3} \varepsilon. \dots \dots \dots (5)$$

On a supposé ici que les dérivés de  $\mu^P$  et  $\mu_n^P$  existent en  $Q$  et  $Q_n$  (en vertu de no. 1 les autres points n'ont pas d'importance). Remarquons que ceci est, comme conséquence de la condition A, compatible avec la supposition que  $Q_n \rightarrow Q$ . Supposons maintenant que

B. Pour  $n > N(\varepsilon)$  on a  $\varrho_n > \eta > 0$ .

Alors, à partir d'un certain nombre  $n$ , les sphères de rayon  $\varrho_n$  contiennent tous  $Q$ . En prenant les  $\varrho_n$  suffisamment petits, on peut arranger que toutes ces sphères sont contenues dans la sphère de rayon  $\varrho^*$  et de centre  $Q$ . Alors évidemment l'intérieur  $e_0$  de la sphère de rayon  $\eta > 0$  et de centre  $Q$  satisfait aux inégalités (3); en vertu de A cet ensemble a une mesure harmonique positive.

La condition B doit être vérifié dans tous les points de  $\Sigma'$ , c.a.d. partout sur  $\Sigma$  sauf aux points d'un ensemble de mesure harmonique nulle. Alors  $\gamma^P(Q)$  est presque partout continu sur  $\Sigma$ , donc sauf aux points d'un ensemble de mesure harmonique nulle.

La condition B, de même que A, signifie une restriction pour  $\Omega$  et non pour la fonction harmonique considérée.

4. La condition A est certainement vérifiée en tout point de  $\Sigma$  si  $\Omega$  n'a qu'une frontière extérieure. Pour montrer cela, soit  $S_\varrho$  la partie (fermée) de la surface de la sphère de rayon  $\varrho$ , située dans  $\Omega + \Sigma$  et soit  $\Sigma_\varrho$  la partie de  $\Sigma$  située dans cette sphère.  $\Sigma_\varrho$  et  $S_\varrho$  constituent la frontière d'un domaine  $\Omega_\varrho$ . La mesure harmonique de  $\Sigma_\varrho$  relativement à



$\Omega$  vaut au moins la mesure harmonique de  $\Sigma_\varrho$  relativement à  $\Omega_\varrho$  (principe de CARLEMAN de l'extension du domaine). Il suffit donc de montrer que cette dernière mesure est positive. Or, on a, en désignant la mesure par rapport à  $\Omega_\varrho$  par  $\mu$ ,

$$\begin{aligned}\mu(\Sigma_\varrho + S_\varrho) &= 1, \\ \mu(\Sigma_\varrho) + \mu(S_\varrho) &= 1.\end{aligned}$$

Il faut donc montrer que  $\mu(S_\varrho) < 1$ . Désignons par  $\mu^*(S_\varrho)$  la mesure harmonique de  $S_\varrho$  relativement à l'intérieur de la sphère. Par le même principe on a  $\mu^*(S_\varrho) \geq \mu(S_\varrho)$ . Maintenant  $\mu^*(S_\varrho)$  est  $< 1$ , puisque le complément de  $S_\varrho$  par rapport à la surface de la sphère a des points intérieurs (la frontière est extérieure) et a donc une mesure harmonique positive (la somme des mesures des deux parties de la surface vaut 1).

Il est aisé de généraliser ce résultat pour des cas particuliers de domaines ayant une frontière intérieure.

La condition  $B$  n'a qu'un rapport très indirecte aux propriétés de  $\Sigma$ . Le problème se pose donc de chercher des conditions d'un caractère plus géométrique. Des conditions nécessaires et suffisantes (s'il faut poser des conditions) ne sont pas connues. Il semble cependant que la condition  $B$ , qui doit être vérifiée presque partout, ne signifie pas une restriction grave pour  $\Omega$ . L'exemple facile suivant montre p. ex. que la régularité de  $\Omega$ , c.a.d. la possibilité de la résolution du problème de DIRICHLET, pour des valeurs-frontière continues quelconques, n'est pas nécessaire pour la représentation intégrale. Il suffit de prendre, si  $E \subset \Sigma$ ,

$$\mu^P(E) = \int_{\Sigma} \gamma^P(Q) d\bar{\mu}^{P_0}(e_Q)$$

si

$$\bar{\mu}^{P_0}(e) = \begin{cases} \mu^{P_0}(e) & \text{pour } e \subset E \\ 0 & \text{pour } e \subset \Sigma - E \end{cases}$$

et de remarquer que  $\mu^P(E)$  est une fonction harmonique de  $P$ .

On peut voir comme il suit que la condition  $B$  est compatible avec l'irrégularité de  $\Omega$ . Montrons cela d'abord pour la condition plus restrictive.

$B'$ . Pour  $n > N(\varepsilon)$  on a  $\varrho_n > \eta > 0$  quelque soit la suite croissante  $\{\Omega_n\}$  tendant vers  $\Omega$ .

Supposons donc que  $B'$  est vérifié dans le point  $Q_0$ . Soit alors  $B_\varrho$  la sphère fermée de rayon  $\varrho$  arbitrairement petit et de centre  $Q$ . Soit  $\{\Omega_n\}$  une suite quelconque de domaines croissants, tendant vers  $\Omega$ , et telle que  $\Omega_n + \Sigma_n \subset \Omega + \Sigma$ ; supposons de plus que  $\Omega_n$  et  $\Omega$ , donc aussi  $\Sigma_n$  et  $\Sigma$ , coïncident dans  $B_\varrho$ . Pour  $\Omega_n$  les fonctions  $\mu_n^{P_0}(e)$  et  $\gamma_n^P(Q)$  sont bien définies. Par un raisonnement comme dans l'article précédent on voit alors que  $\gamma_n^P(Q_0)$  tend vers  $\gamma^P(Q_0)$  si  $n \rightarrow \infty$ ; la restriction dans  $B'$  „quelque soit la suite croissante  $\{\Omega_n\}$  tendant vers  $\Omega$ ” est ici essentielle.  $\gamma^P(Q)$  est donc une fonctionnelle continue du domaine dans le sens mentionné.

Le même est vrai pour le quotient  $\frac{\mu_n^P(e)}{\mu_n^{P_0}(e)}$  (si la mesure harmonique est positive). On en tire que la condition  $B'$ , vérifié dans  $Q_0$ , a un caractère local, c.a.d. reste vérifié si le domaine hors  $B_\varrho$  diminue tandis que  $\varrho$  est arbitrairement petit. En effet. Soit  $\bar{\Omega}$  le domaine varié et  $d \neq 0$  la plus grande distance de sa frontière  $\bar{\Sigma}$  à  $\Sigma$ . On peut choisir  $\bar{\Omega}$ , en prenant  $d$  assez petit, tel que pour  $n > N(d)$  les quotients

$$\frac{\bar{\mu}_n^P(e_0)}{\bar{\mu}_n^{P_0}(e_0)} \quad \text{et} \quad \frac{\mu_n^P(e_0)}{\mu_n^{P_0}(e_0)}$$

différent moins que le nombre  $\lambda > 0$ , donné arbitrairement; remarquons seulement qu'on peut arranger que les suites croissantes de domaines tendant vers  $\overline{\Omega}$  et  $\Omega$  coïncident dans  $B_\varrho$ . Pour  $n$  suffisamment grand,  $n > N(\alpha)$ , et  $d$  suffisamment petit la quantité

$$\left| \frac{\mu_n^P(e_n)}{\mu_n^{P_0}(e_n)} - \gamma_n^P(Q_n) \right|$$

varie donc moins qu'un nombre  $\alpha > 0$ , donné arbitrairement. Remarquons alors qu'on peut choisir dès le début les rayons  $\varrho(\varepsilon)$  tels qu'on a, pour tous les  $n$  suffisamment grand,<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{3} \varepsilon - \left| \frac{\mu_n^P(e_n)}{\mu_n^{P_0}(e_n)} - \gamma_n^P(Q_n) \right| > \alpha.$$

Alors les inégalités (4) subsistent pour le domaine varié  $\overline{\Omega}$ .

En partant de  $\overline{\Omega}$  on peut répéter le procédé.

Il suit de ce qui précède que, serait-il donc impossible que  $B'$  soit vérifié dans un point irrégulier, il est cependant possible que  $\Omega$  a des points irréguliers: par une diminution convenable de  $\Omega$  hors  $B_\varrho$  on peut arranger que le domaine a un point irrégulier hors  $B_\varrho$  et la condition  $B'$ , si vérifiée dans  $Q_0$ , reste alors vérifiée.

A fortiori, la condition  $B$ , qui est moins restrictive, est donc compatible avec l'irrégularité de  $\Omega$ .

La possibilité de la représentation intégrale fut démontrée en admettant que  $B$  est vérifié presque partout ( $\mu$ ) sur  $\Sigma$ . Cela signifie cependant par une restriction quant à la possibilité de points irréguliers sur  $\Sigma$ , puisque les points irréguliers constituent un ensemble de capacité nulle, donc de mesure harmonique nulle. Il est donc probable que la représentation intégrale des fonctions harmoniques qui vérifient la condition donnée ci-dessus de continuité uniforme est possible pour des domaines très généraux.

Pour des domaines à frontière suffisamment régulière (p. ex. l'intérieure ou l'extérieure d'une sphère) la condition  $B$  est satisfaite en tout point<sup>2)</sup>. Ceci résulte de ce qu'on a alors

$$\mu^P(e) = \frac{1}{4\pi} \int_e \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma$$

$G$  étant la fonction de GREEN de  $\Omega$  avec pôle  $P$ ;  $n$  la normale intérieure. Il s'en suit que la représentation intégrale est possible pour tout domaine dont la frontière, entièrement extérieure, consiste en un nombre fini ou une infinité dénombrable de parties de telles surfaces, puisque les points où  $B$  n'est peut être pas vérifié constituent alors au plus un ensemble dénombrable d'ensembles de mesure harmonique nulle, qui a donc lui même une mesure nulle.

*Dordrecht, août 1941.*

1) En effet, si cette inégalité n'est pas vérifiée, on change la correspondance de  $\varrho_n$  et  $\varepsilon$  en faisant correspondre les ensembles de rayon  $\varrho_n$  au nombre  $\varepsilon + 3\alpha$  et donc les ensembles de rayon  $\varrho_n(\varepsilon - 3\alpha)$  à  $\varepsilon$  (prendre  $\alpha$  tel que  $\varepsilon - 3\alpha > 0$ ).

2) Dans le cas deux dimensionnel p. ex. la condition  $B$  est satisfaite si  $\Sigma$  est une courbe analytique sans points singuliers.

**Mathematics.** — *Eine Verallgemeinerung des SCHURschen Satzes.* Von W. WRONA.  
(Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> haben wir den Begriff der skalaren Krümmung einer  $m$ -Richtung in einer RIEMANNschen Mannigfaltigkeit  $V_n$  eingeführt. Unter die skalare Krümmung einer  $m$ -Richtung verstehen wir nämlich die erzwungene skalare Krümmung einer in  $V_n$  eingebetteten  $V_m$ , die diese  $m$ -Richtung enthält. Für  $m = 2$  fällt dieser Begriff mit dem des RIEMANNschen Krümmungsmasses<sup>2)</sup> zusammen.

Eine wichtige Eigenschaft des RIEMANNschen Krümmungsmasses drückt der bekannte Satz von F. SCHUR aus. Dieser Satz lautet: *Ist das RIEMANNsche Krümmungsmass einer  $V_n$  örtlich konstant (d.h. unabhängig von der gegebenen 2-Richtung), so ist es auch unabhängig vom Ort*<sup>3)</sup>.

Im Folgenden werden wir mit Hilfe des Begriffes der skalaren Krümmung eine Verallgemeinerung des SCHURschen Satzes beweisen.

**Hauptsatz.** I. *Ist in einer  $V_n$  für ein bestimmtes  $m$ , wobei  $1 < m < n$  ist, die skalare Krümmung einer  $m$ -Richtung örtlich konstant, so ist sie auch unabhängig vom Ort.*

II. *Darüber hinaus folgt unter derselben Voraussetzung, dass*

- 1) *für  $m < n - 1$  die  $V_n$  eine  $S_n$  (eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung) ist,*
- 2) *für  $m = n - 1$  die  $V_n$  eine EINSTEINSche Mannigfaltigkeit ist.*

**Beweis.** Den Fall  $n = 3$  brauchen wir nicht zu betrachten, weil in diesem Falle unser Satz mit dem SCHURschen zusammenfällt.

Für  $n > 3$  müssen wir zwei Möglichkeiten unterscheiden und zwar: 1)  $m < n - 1$  und 2)  $m = n - 1$ .

1)  $m < n - 1$ . Betrachten wir in einem Punkte der  $V_n$  zwei  $m$ -Richtungen, welche eine gemeinsame  $(m - 1)$ -Richtung besitzen. Die diesen zwei  $m$ -Richtungen entsprechenden Fundamentaltensoren bezeichnen wir mit  $b^{\mu\lambda}$  und  $\bar{b}^{\mu\lambda}$ . Man kann sie in folgender Form ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} b^{\mu\lambda} &= c^{\mu\lambda} + \varepsilon \underset{p}{p}^{\mu} \underset{p}{p}^{\lambda} & \varepsilon &= \underset{p}{p}^x \underset{p}{p}^x \\ \bar{b}^{\mu\lambda} &= c^{\mu\lambda} + \varepsilon \underset{q}{q}^{\mu} \underset{q}{q}^{\lambda} & \varepsilon &= \underset{q}{q}^x \underset{q}{q}^x \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (1)$$

wo  $\underset{p}{p}^x$  und  $\underset{q}{q}^x$  zur  $(m - 1)$ -Richtung senkrechte Einheitsvektoren sind und der Fundamentaltensor der  $(m - 1)$ -Richtung mit  $c^{x\lambda}$  bezeichnet ist. Die skalaren Krümmungen dieser zwei  $m$ -Richtungen sind entsprechend gleich:

$$k_m = \frac{1}{m(m-1)} K_{\nu\mu\lambda x} b^{\mu\lambda} b^{\nu x}, \quad \bar{k}_m = \frac{1}{m(m-1)} K_{\nu\mu\lambda x} \bar{b}^{\mu\lambda} \bar{b}^{\nu x} \quad *) \quad (2)$$

1) J. HAANTJES und W. WRONA, Ueber konformeuklidische und EINSTEINSche Räume gerader Dimension. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., 42, 7, 626—636 (1939).

2) J. A. SCHOUTEN und D. J. STRUIK, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I, Noordhoff Groningen, S. 117 und II, S. 134. Weiter zitiert als Einführung, L. P. EISENHART, RIEMANNian Geometry, S. 79—81.

3) T. LEVI-CIVITA, Der absolute Differentialkalkül. Springer Berlin, S. 136. L. P. EISENHART, l.c. S. 82.

4) J. HAANTJES und W. WRONA, l.c. S. 626.

Nach Voraussetzung bekommen wir aus (1) und (2):

$$K_{\nu\mu\lambda x} (c^{\mu\lambda} c^{\nu x} + 2 \underset{p}{\varepsilon} c^{\mu\lambda} p^\nu p^x + p^\mu p^\lambda p^\nu p^x) = \\ = K_{\nu\mu\lambda x} (c^{\mu\lambda} c^{\nu x} + 2 \underset{q}{\varepsilon} c^{\mu\lambda} q^\nu q^x + q^\mu q^\lambda q^\nu q^x)$$

und daraus

$$\underset{p}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda x} c^{\mu\lambda} p^\nu p^x = \underset{q}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda x} c^{\mu\lambda} q^\nu q^x. \dots \dots \dots (3)$$

Die letzte Gleichung gilt für alle zu der  $(m-1)$ -Richtung senkrechte Einheitsvektoren  $p^\lambda$  und  $q^\lambda$ . Daraus geht hervor<sup>6)</sup>, dass

$$K_{\nu\mu\lambda x} c^{\mu\lambda} r^\nu s^x = 0 \dots \dots \dots (4)$$

ist, wo  $r^\nu$  und  $s^\nu$  zwei beliebige, gegenseitig und zu der betrachteten  $(m-1)$ -Richtung senkrechte Vektoren sind. Diese Gleichung kann man nun wieder für  $m-1 \geq 2$  für verschiedene  $\bar{c}^{\lambda x}$  und  $\bar{c}^{\lambda x}$ , die zwei  $(m-1)$ -Richtungen mit gemeinsamer  $(m-2)$ -Richtung entsprechen, anschreiben:

$$K_{\nu\mu\lambda x} \bar{c}^{\mu\lambda} r^\nu s^x = 0, \quad K_{\nu\mu\lambda x} \bar{\bar{c}}^{\mu\lambda} r^\nu s^x = 0.$$

Wenn wir die letzten zwei Gleichungen voneinander subtrahieren, ergibt sich in ähnlicher Weise wie oben

$$K_{\nu(\mu\lambda)x} u^\nu v^\mu r^\lambda s^x = 0 \dots \dots \dots (5)$$

für jedes System von vier gegenseitig senkrechten Vektoren  $u^\nu, v^\nu, r^\nu, s^\nu$ . Im Falle  $m=2$  ist die Beziehung (5) eine unmittelbare Folge der Gleichung (4); dieser Fall wurde aber schon von SCHUR erledigt.

Aus (5) geht durch Verwechslung von  $v^\mu$  und  $s^x$

$$K_{\nu(\mu x)\lambda} u^\nu v^\mu r^\lambda s^x = 0 \dots \dots \dots (6)$$

hervor. Subtraktion der letzten zwei Gleichungen ergibt wegen  $K_{[\nu\mu\lambda]x} = 0$

$$3 K_{\nu\mu\lambda x} u^\nu v^\mu r^\lambda s^x = 0, \dots \dots \dots (7)$$

Für jedes orthogonale Bezugssystem verschwinden also alle Bestimmungszahlen des Krümmungsaffinors mit vier ungleichen Indizes. Die  $V_n$  ist demzufolge konformeuklidisch<sup>8)</sup> und der Krümmungsaffinor nimmt folgende Gestalt an<sup>7)</sup>

$$K_{\nu\mu\lambda x} = \frac{4}{n-2} a_{[\nu [\lambda L_{\mu] x]}. \left( L_{\mu x} = -K_{\mu x} + \frac{1}{2(n-1)} K a_{\mu x} \right). \quad (8)$$

Für die skalare Krümmung  $k_m$  einer  $m$ -Richtung bekommen wir jetzt folgenden Ausdruck

$$k_m = \frac{4}{(n-2)(m-1)m} a_{[\nu [\lambda L_{\mu] x]} b^{\nu x} b^{\mu\lambda} = \frac{-2}{m(n-2)} L_{\mu x} b^{\mu x}, \dots (9)$$

wo  $b^{\mu x}$  der Fundamentaltensor der betrachteten  $m$ -Richtung darstellt.

Um jetzt zu schliessen, dass unsere  $V_n$  eine  $S_n$  ist, würde es nach dem bekannten Resultat von SCHOUTEN und STRUIK<sup>8)</sup> genügen noch nachzuweisen, dass unsere  $V_n$  EINSTEINSCH ist. Wir kommen aber schneller zum Ziel indem wir direkt zeigen werden, dass  $L_{\mu x}$  proportional zu  $a_{\mu x}$  ist. Zu diesem Zweck schreiben wir nun den Ausdruck (9)

<sup>6)</sup> J. HAANTJES, Eine Charakterisierung der konformeuklidischen Räume. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 43, 1, 91—94 (1940).

<sup>8)</sup> Einführung II, S. 204.

<sup>7)</sup> Einführung II, S. 202.

<sup>8)</sup> L. P. EISENHART, l.c., S. 93.

für beide in (1) angegebenen Fundamentaltensoren  $b^{\mu\nu}$  und  $\bar{b}^{\mu\nu}$  an. Nach der Voraussetzung ( $k_m = \bar{k}_m$ ) erhalten wir

$$\varepsilon \underset{p}{L}_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \varepsilon \underset{q}{L}_{\mu\nu} q^\mu q^\nu \dots \dots \dots (10)$$

für jede zwei Einheitsvektoren  $p^\nu$  und  $q^\nu$ . Aus (10) folgt, dass die mit  $L_{\mu\nu}$  gemessene Länge der Vektoren proportional zu der mit  $a_{\mu\nu}$  gemessenen Länge ist. Es ist also

$$L_{\mu\nu} = \sigma a_{\mu\nu} \dots \dots \dots (11)$$

Der Krümmungsaffinor nimmt also folgende Gestalt an:

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} = \frac{4}{n-2} \sigma a_{[\nu[\lambda a_{\mu]}\kappa]} \dots \dots \dots (12)$$

Setzen wir nun in (12)

$$\sigma = -\frac{n-2}{2} \varkappa \dots \dots \dots (13)$$

so erhalten wir

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} = -2 \varkappa a_{[\nu[\lambda a_{\mu]}\kappa]} \dots \dots \dots (14)$$

Die  $V_n$  ist daher eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung<sup>9)</sup> und folglich ist  $\varkappa$  eine Konstante. Aus (9), (11) und (13) finden wir

$$k_m = \varkappa \dots \dots \dots (15)$$

Die skalare Krümmung einer  $m$ -Richtung ist daher eine Konstante, die auch von  $m$  unabhängig und gleich der skalaren Krümmung der  $V_n$  ist. Damit haben wir den ersten Teil des Satzes bewiesen.

2)  $m = n - 1$ . In diesem Falle können wir die Fundamentaltensoren  $d^{\mu\nu}$  und  $\bar{d}^{\mu\nu}$  zweier beliebigen  $(n - 1)$ -Richtungen in folgender Form ausdrücken

$$\left. \begin{aligned} d^{\mu\nu} &= a^{\mu\nu} - \varepsilon \underset{p}{p}^\mu p^\nu & \varepsilon &= p^\mu p_\mu = \pm 1 \\ \bar{d}^{\mu\nu} &= a^{\mu\nu} - \varepsilon \underset{q}{q}^\mu q^\nu & \varepsilon &= q^\mu q_\mu = \pm 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Nach Voraussetzung bekommen wir

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} d^{\nu\kappa} d^{\mu\lambda} = K_{\nu\mu\lambda\kappa} \bar{d}^{\nu\kappa} \bar{d}^{\mu\lambda} \dots \dots \dots (17)$$

woraus nach (16)

$$K - 2 \varepsilon \underset{p}{K}_{\mu\lambda} p^\mu p^\lambda = K - 2 \varepsilon \underset{q}{K}_{\mu\lambda} q^\mu q^\lambda \dots \dots \dots (18)$$

also

$$\varepsilon \underset{p}{K}_{\mu\lambda} p^\mu p^\lambda = \varepsilon \underset{q}{K}_{\mu\lambda} q^\mu q^\lambda \dots \dots \dots (19)$$

hervorgeht. Aus (19) folgt (vgl. (10))

$$K_{\mu\lambda} = \lambda a_{\mu\lambda} \dots \dots \dots (20)$$

Die  $V_n$  ist daher eine EINSTEINSche und  $\lambda$  ist bekanntlich eine Konstante. Rechnen wir

<sup>9)</sup> Einführung I, S. 126.

jetzt die skalare Krümmung  $k_{n-1}$  einer  $(n-1)$ -Richtung aus. Nach (18) erhalten wir

$$k_{n-1} = \frac{1}{(n-1)(n-2)} [K - 2 \varepsilon_{\rho}^{\lambda} a_{\mu\lambda} p^{\mu} p^{\lambda}] = \frac{1}{(n-1)(n-2)} (K - 2\lambda). \quad (21)$$

Aus (20) folgt aber, dass

$$\lambda = \frac{K}{n} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (22)$$

ist, daher

$$k_{n-1} = \frac{K}{n(n-1)} = \varkappa$$

ist, wo  $\varkappa$  die skalare Krümmung der  $V_n$  bezeichnet. Daraus sehen wir, dass die skalare Krümmung der  $(n-1)$ -Richtung konstant ist. Damit haben wir auch den Fall  $m = n-1$  erledigt.

Bemerkung 1. Den Fall  $n = 3$  haben wir vom vornherein ausgeschlossen, da er durch den SCHURschen Satz erledigt ist. Das obige Verfahren gilt aber auch für  $n = 3$  und zwar deswegen, da eine EINSTEINSche  $V_3$  immer konformeuklidisch, also auch von konstanter Krümmung ist.

Bemerkung 2. Aus obigem Beweise kann man sofort folgende zwei Sätze schliessen.

I. *Ist in jedem Punkte einer  $V_n$  für ein bestimmtes  $m$  ( $1 < m < n$ ) die skalare Krümmung einer  $m$ -Richtung von der besonderen Wahl dieser  $m$ -Richtung unabhängig, so ist die  $V_n$  EINSTEINSch.*

II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine  $V_n$  ( $n \geq 3$ ) EINSTEINSch sei, besteht darin, dass in jedem Punkte die skalaren Krümmungen aller  $(n-1)$ -Richtungen einander gleich seien.*



**Mathematics.** — *Likelihood as conditioned probability.* By Prof. M. J. VAN UVEN. (Communicated by Prof. H. A. KRAMERS.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

In his paper "On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics" <sup>1)</sup> Prof. R. A. FISHER has recommended the "Method of maximum Likelihood" for determining the likeliest values of the *a-priori* probabilities ruling a given frequency distribution, c.q. of the variables on which these probabilities depend. Here Prof. FISHER emphasizes the distinction between the concept of probability and the concept of "likelihood", which, according to him, only formally agrees with inverse frequency distribution. However, likelihood may be considered as (the density of) conditioned probability, and the efficacy of the method of maximum likelihood is due, as it appears to us, to the circumstance, that this conditioned probability is independent of the choice of the variables on which the *a-priori* probabilities are considered to depend, and that the formulae for the most probable values and their accuracy are proof against transition from one set of variables to another.

An experiment may have  $n$  different events  $E_h$  ( $h = 1, \dots, n$ ) mutually excluding each other and having the *a-priori* probabilities

$$p_h \quad (h = 1, \dots, n, \sum_{h=1}^n p_h = 1).$$

Then the probability that out of  $N$  experiments  $F_h$  have the event  $E_h$ , is

$$w(F) = w(F_1, \dots, F_n; p_1, \dots, p_n) = \frac{N!}{\prod F_h!} \prod p_h^{F_h} \dots \quad (1)$$

Hence  $w(F_1, \dots, F_n; p_1, \dots, p_n)$ , or, abbreviated,  $w(F; p)$ , is the probability of the frequency set  $[F_h]$  ( $\sum_{h=1}^n F_h = N$ ).

$w(F; p)$  satisfies

$$\sum_{F_1=0}^N \sum_{F_2=0}^{N-F_1} \dots \sum_{F_{n-1}=0}^{N-F_1-\dots-F_{n-2}} w(F_1, \dots, F_n; p_1, \dots, p_n) = 1 \dots \quad (2)$$

The *a-priori* probabilities  $p_h$  may be connected, besides by  $\sum p_h = 1$ , by some other relations; then they may be (univalent) functions of a set of  $s$  independent continuous variables  $\zeta_k$  ( $k = 1, \dots, s; s \leq n - 1$ ); these functions  $p_h(\zeta_1, \dots, \zeta_s)$ , or, shorter,  $p_h(\zeta)$ , must satisfy the identity

$$\sum_{h=1}^n p_h(\zeta) \equiv 1 \dots \dots \dots \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Phil. Trans. Ser. A, Vol. 222 (1922), pp. 309—368.

The  $\zeta_k$ , being continuous, have infinitesimal probabilities. We suppose that the set  $[\zeta]$  has the *a-priori* probability (irrespective of  $F_h$ ):

$$dw_{\zeta} = \chi(\zeta_1, \dots, \zeta_s) d\zeta_1 \dots d\zeta_s,$$

or, briefly,

$$dw_{\zeta} = \chi(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_s. \dots \dots \dots (4)$$

If  $\zeta_k$  ranges from  $\alpha_k$  unto  $\beta_k$ , we have

$$\int_{\zeta_1=\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\zeta_s=\alpha_s}^{\beta_s} \chi(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_s = 1. \dots \dots \dots (5)$$

The probability differential (4) is also the probability of the set  $p_h(\zeta)$ , as  $p_h(\zeta)$  is wholly determined by  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ . It is the *a-priori* probability of the set  $[\zeta]$  (or of the set  $[p_h(\zeta)]$ ) without any supposition concerning the (empirical) frequencies  $F_h$ .

The compound probability 1<sup>o</sup> that the variables  $\zeta_k$  assume given values (with ranges  $d\zeta_k$ ), 2<sup>o</sup> that, with these values of  $\zeta_k$ , the frequencies  $F_h$  occur, amounts to

$$dw_{F; \zeta} = dw_{\zeta} \cdot w_F^{(\zeta)} = w(F; p(\zeta)) \cdot \chi(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_s. \dots \dots (6)$$

Denoting the probability  $w_F$  of the frequency set  $[F_h]$ , occurring with any set  $[\zeta]$ , by  $g(F_1, \dots, F_n)$ , or, shorter, by  $g(F)$ , we obtain this *a-priori* probability of the set  $[F_h]$  by integrating (6) over  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ ; hence

$$w_F = g(F) = \int_{\zeta_1=\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\zeta_s=\alpha_s}^{\beta_s} w(F; p(\zeta)) \cdot \chi(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_s. \dots \dots (7)$$

Of course  $g(F)$  satisfies

$$\sum_{F_1=0}^N \sum_{F_2=0}^{N-F_1} \dots \sum_{F_{n-1}=0}^{N-F_1, \dots, -F_{n-2}} g(F) = 1. \dots \dots \dots (8)$$

Now we consider the (infinitesimal) probability  $dw_{\zeta}^{(F)}$  of the set  $[\zeta]$  with given frequencies  $F_h$ , hence the conditioned probability of the set  $[\zeta]$ . Its density being  $\omega(\zeta_1, \dots, \zeta_s; F_1, \dots, F_n)$ , or, abbreviated,  $\omega(\zeta; F)$ , we have

$$dw_{\zeta}^{(F)} = \omega(\zeta; F) d\zeta_1 \dots d\zeta_s. \dots \dots \dots (9)$$

So we find for the compound probability: 1<sup>o</sup> that the frequencies  $F_h$  assume a given set of values, 2<sup>o</sup> that these frequencies are accompanied by the values  $\zeta_k$ , the expression:

$$dw_{\zeta; F} = w_F \cdot dw_{\zeta}^{(F)} = g(F) \cdot \omega(\zeta; F) d\zeta_1 \dots d\zeta_s. \dots \dots (6 bis)$$

Now this compound probability equals the compound probability (6).

For the probability  $dw_{\zeta}$  of the set  $[\zeta]$ , irrespective of the frequency set  $[F_h]$ , we have

$$dw_{\zeta} = \sum_{F_1=0}^N \sum_{F_2=0}^{N-F_1} \dots \sum_{F_{n-1}=0}^{N-F_1-\dots-F_{n-2}} dw_{\zeta; F}$$

or, by (4) and (6 bis),

$$\chi(\zeta) = \sum_{F_1=0}^N \sum_{F_2=0}^{N-F_1} \dots \sum_{F_{n-1}=0}^{N-F_1-\dots-F_{n-2}} g(F) \cdot \omega(\zeta; F) \dots \dots (10)$$

As  $w(F; p(\zeta))$  has a well-defined shape, the equation (7) determines  $g(F)$  when  $\chi(\zeta)$  is known, whereas  $\chi(\zeta)$ ,  $g(F)$  being given, can be computed by solving (7) as integral equation.

The conditioned probability of the set  $[\zeta]$ , with given frequencies  $F_h$ , follows by equating (6) and (6 bis). Its density is

$$\omega(\zeta; F) = \frac{w(F; p(\zeta))}{g(F)} \cdot \chi(\zeta) \dots \dots \dots (11)$$

As a rule the function  $\chi(\zeta)$ , hence also the function  $g(F)$ , is unknown. So the density  $\omega(\zeta; F)$  of the conditioned probability, depending, by (11), on the *a-priori* probability distribution  $\chi(\zeta)$  of the set  $[\zeta]$ , also contains an element of uncertainty.

The problem: to find the most probable values  $\zeta_k^*$  of  $\zeta_k$ , when the frequencies  $F_h$  are given, might be solved by postulating that the most probable set  $[\zeta]$  makes the (conditioned) probability density  $\omega(\zeta; F)$  a maximum. But then the transition from one set of variables  $[\zeta]$  into another set  $\tau_i = \theta_i(\zeta_1, \dots, \zeta_s)$  ( $i=1, \dots, s$ ) would alter the probability density, and so also its maximum, and the most probable values  $\tau_i^*$  of  $\tau_i$  would not correspond to the most probable values  $\zeta_k^*$  in virtue of the relations  $\tau_i = \theta_i(\zeta_1, \dots, \zeta_s)$ .

We may avoid this drawback by passing from the general variables  $\zeta_k$  to particular, so-called "canonical" variables  $z_1, \dots, z_s$ , which range from 0 to 1 with constant probability density, so that the probability that  $z_i$  lies within the interval  $dz_i$  precisely equals  $dz_i$ :

$$dw_{z_i} = dz_i \dots \dots \dots (12)$$

So the probability of the set  $[z]$  is

$$dw_z = dz_1 \dots dz_s.$$

From  $dw_{\zeta} \gtrsim dw_z$  follows, that the canonical variables are such functions  $z_i(\zeta_1, \dots, \zeta_s)$  of  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ , that

$$dz_1 \dots dz_s \gtrsim \chi(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_s,$$

or

$$\frac{\partial(z_1, \dots, z_s)}{\partial(\zeta_1, \dots, \zeta_s)} = \chi(\zeta) \dots \dots \dots (13)$$

In order to provide an example of canonical variables, we suppose, that the variables  $\zeta_k$  are the probabilities  $p_1, \dots, p_{n-1}$  themselves, and

that  $p_h$  runs through the interval  $1 - p_1 \dots - p_{h-1}$  with constant probability density. Then we put

$$p_1 = z_1, p_2 = (1 - p_1) z_2, p_3 = (1 - p_1 - p_2) z_3, \dots, p_{n-1} = (1 - p_1 - \dots - p_{n-2}) z_{n-1},$$

whence

$$p_1 = z_1, p_2 = (1 - z_1) z_2, p_3 = (1 - z_1) (1 - z_2) z_3, \dots, p_{n-1} = (1 - z_1) (1 - z_2) \dots (1 - z_{n-2}) z_{n-1}.$$

The equation (11) must now be replaced by

$$u(z; F) = \frac{w(F; p(z))}{g(F)} \dots \dots \dots (14)$$

Reintroducing the former (general) variables  $\zeta_k$ , the function  $u(z; F)$  is transformed into the function

$$\varphi(\zeta; F) = \frac{w(F; p(\zeta))}{g(F)} \dots \dots \dots (14')$$

Before we attack the main problem: to obtain the most probable values of  $\zeta_k$ , and, moreover, to compute their accuracy (represented by the asymptotically averaged error-squares (variances) and error-products), we will derive a preparatory theorem.

We consider a function  $y = \psi(\zeta)$  of the  $s$  quantities  $\zeta_k$ . This function may, by the substitution  $\zeta_k \rightarrow z_l (\zeta_1, \dots, \zeta_s)$ , be transformed into the function  $y = v(z_1, \dots, z_s)$ , or, briefly,  $y = v(z)$ . Hence

$$y = \psi(\zeta) = v(z) \dots \dots \dots (15)$$

In the following we make use of the notation with lower and upper indices, applied in Tensor Analysis, and drop the summation sign  $\Sigma$  over corresponding upper and lower indices (contraction). The covariant forms are denoted with upper indices, the contravariant forms with lower indices.

So we put <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \psi^k &\equiv \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_k}, \psi^{kl} \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta_k \partial \zeta_l}, \Psi \equiv |\psi^{kl}|, \Psi_{kl} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \psi^{kl}} \\ &\quad \text{(complementary minor of } \psi^{kl}) \\ v^l &\equiv \frac{\partial v}{\partial z_l}, v^{lj} \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial z_l \partial z_j}, V \equiv |v^{lj}|, V_{lj} \equiv \frac{\partial V}{\partial v^{lj}} \\ &\quad \text{(complementary minor of } v^{lj}) \\ z_l^k &\equiv \frac{\partial z_l}{\partial \zeta_k}, z_l^{kl} \equiv \frac{\partial^2 z_l}{\partial \zeta_k \partial \zeta_l}, Z \equiv |z_l^k| \end{aligned} \right\} (16)$$

<sup>1)</sup> The determinants  $\Psi$  and  $V$  are written without indices, though they are not invariant; but there is no danger of misunderstanding, as we are mainly concerned with the quotients  $\psi_{kl} = \frac{\Psi_{kl}}{\Psi}$  and  $v_{lj} = \frac{V_{lj}}{V}$ , which are really contravariant with respect to  $\zeta_k, \zeta_l; z_l, z_j$ .

whence

$$Z = \frac{\partial (z_1, \dots, z_s)}{\partial (\zeta_1, \dots, \zeta_s)} \dots \dots \dots (17)$$

Moreover

$$\psi^k = v^i z_i^k, \quad \psi^{kl} = v^i z_i^{kl} + v^{ij} z_i^k z_j^l.$$

At the extremum of  $y = \psi(\zeta) = v(z)$  we have

$$\psi^k = 0 \quad (k = 1, \dots, s) \quad \text{and} \quad v^i = 0 \quad (i = 1, \dots, s).$$

Therefore

At  $y$  extr.  $\psi^{kl} = v^{ij} z_i^k z_j^l \dots \dots \dots (18)$

whence

At  $y$  extr.  $\Psi = VZZ \dots \dots \dots (19)$

Let  $\zeta_k^*$ , resp.  $z_i^*$ , be the values of  $\zeta_k$ , resp.  $z_i$ , for which  $y$  has its extremum, and  $\Delta \zeta_k = \zeta_k - \zeta_k^*$ ,  $\Delta z_i = z_i - z_i^*$  the deviations (errors) in the neighbourhood of the centre  $\zeta_k^*(z_i^*)$ . Then, for small deviations, we have approximately

$$\Delta z_i = z_i^k \Delta \zeta_k;$$

here  $z_i^k$  represents the value of  $\frac{\partial z_i}{\partial \zeta_k}$  at the centre.

The asymptotic error-products are respectively

$$\mu_{kl} \equiv \langle \Delta \zeta_k \cdot \Delta \zeta_l \rangle, \quad m_{ij} \equiv \langle \Delta z_i \cdot \Delta z_j \rangle;$$

they are connected by the relation  $\langle \Delta z_i \cdot \Delta z_j \rangle = z_i^k z_j^l \langle \Delta \zeta_k \cdot \Delta \zeta_l \rangle$ , or

$$m_{ij} = \mu_{kl} z_i^k z_j^l \dots \dots \dots (20)$$

Putting

$$M = |m_{ij}|, \quad \mathbf{M} = |\mu_{kl}|,$$

we derive from (20)

$$M = \mathbf{MZZ} \dots \dots \dots (21)$$

whence, by (19),

$$VM = \Psi \mathbf{M}^{-1} \dots \dots \dots (22)$$

By differentiating  $\Psi$  with respect to  $v^{ij}$  we find on the one hand, by (19),

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v^{ij}} = ZZ \frac{\partial V}{\partial v^{ij}} = ZZV_{ij},$$

on the other hand, by (18),

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v^{ij}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \psi^{kl}} \cdot \frac{\partial \psi^{kl}}{\partial v^{ij}} = \Psi_{kl} \cdot z_i^k z_j^l.$$

<sup>1)</sup> Another simple relation follows from (18) and (20):

$$m_{ij} v^{ij} = \mu_{kl} v^{ij} z_i^k z_j^l = \mu_{kl} \psi^{kl}.$$

Hence

$$\text{At } y \text{ extr. } \quad V_{ij} = \frac{1}{ZZ} \Psi_{kl} z_i^k z_j^l, \dots \dots \dots (23)$$

or

$$\frac{V_{ij}}{V} = \frac{1}{VZZ} \Psi_{kl} z_i^k z_j^l,$$

so, by (19),

$$\text{At } y \text{ extr. } \quad \frac{V_{ij}}{V} = \frac{\Psi_{kl}}{\Psi} z_i^k z_j^l. \dots \dots \dots (23 \text{ bis})$$

Let  $\varrho$  be an invariant function, c.q. a constant. Then from (20) and (23 bis) follows

$$\text{At } y \text{ extr. } \quad m_{ij} - \varrho \frac{V_{ij}}{V} = \left( \mu_{kl} - \varrho \frac{\Psi_{kl}}{\Psi} \right) z_i^k z_j^l. \dots \dots \dots (24)$$

Therefore, if for one set  $[\zeta]$

$$\text{At } y \text{ extr. } \quad \mu_{kl} - \varrho \frac{\Psi_{kl}}{\Psi} = 0 \quad \left( \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right) = 1, \dots, s,$$

then also for any other set  $[z]$

$$\text{At } y \text{ extr. } \quad m_{ij} - \varrho \frac{V_{ij}}{V} = 0 \quad \left( \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right) = 1, \dots, s$$

holds. Hence

At  $y = \psi(\zeta) = v(z)$  extr.:

From  $\mu_{kl} - \varrho \frac{\Psi_{kl}}{\Psi} = 0 \left( \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right) = 1, \dots, s$  follows

$$m_{ij} - \varrho \frac{V_{ij}}{V} = 0 \left( \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right) = 1, \dots, s, \left. \vphantom{\frac{V_{ij}}{V}} \right\} \dots (25)$$

where

$$\begin{aligned} \mu_{kl} &\equiv \langle \Delta \zeta_k \cdot \Delta \zeta_l \rangle; \psi^{kl} \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta_k \partial \zeta_l}, \Psi \equiv |\psi^{kl}|, \Psi_{kl} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \psi^{kl}}, \\ m_{ij} &\equiv \langle \Delta z_i \cdot \Delta z_j \rangle; v^{ij} \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial z_j}, V \equiv |v^{ij}|, V_{ij} \equiv \frac{\partial V}{\partial v^{ij}}. \end{aligned}$$

This is the preparatory theorem alluded to above.

We now return to the (conditioned) probability density  $\varphi(\zeta; F)$ , and we suppose, that, at its maximum, it has approximately the character of normal correlation. This supposition is, as a rule, the more justified the larger the total sum  $N$  of the frequencies is.

Introducing the true errors  $\tau_k = \zeta_k - \zeta_k^*$ , we may represent  $\varphi(\zeta; F)$ , at its maximum, by

$$\varphi(\zeta; F) \simeq \sqrt{\frac{A}{(2\pi)^s}} \cdot e^{-\frac{1}{2} a^{\lambda\lambda} \tau_\lambda \tau_\lambda} \text{ with } A = |a^{\lambda\lambda}|. \dots (26)$$



In order to derive our conclusions more easily, we shall sometimes distinguish formally  $a^{kl}$  from  $a^{lk}$  (resp.  $a^{\lambda\lambda}$  from  $a^{\lambda\lambda}$ ).

Putting  $\psi(\zeta) = -\log \varphi(\zeta)$ , we have

$$\begin{aligned}\psi(\zeta) &= \frac{s}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log A + \frac{1}{2} a^{\lambda\lambda} \tau_\lambda \tau_\lambda = \\ &= \frac{s}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log A + \frac{1}{2} \{ a^{11} \tau_1 \tau_1 + (a^{12} + a^{21}) \tau_1 \tau_2 + \dots + a^{ss} \tau_s \tau_s \};\end{aligned}$$

hence

$$\psi^k \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_k} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_k} = \frac{1}{2} \{ 2 a^{kk} \tau_k + \sum_{\lambda \neq k} (a^{k\lambda} + a^{\lambda k}) \tau_\lambda \} = \sum_{\lambda=1}^s a^{k\lambda} \tau_\lambda = a^{k\lambda} \tau_\lambda$$

and

$$\psi^{kl} \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta_k \partial \zeta_l} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau_k \partial \tau_l} = a^{kl},$$

whence

$$\Psi = A, \Psi_{kl} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \psi^{kl}} = \frac{\partial A}{\partial a^{kl}} \equiv A_{kl}.$$

Here we have

$$\begin{aligned}\mu_{kl} &\equiv \langle \Delta \zeta_k \cdot \Delta \zeta_l \rangle = \langle \tau_k \tau_l \rangle = \int_{\tau_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\tau_s=-\infty}^{+\infty} \tau_k \tau_l \varphi(\zeta; F) d\tau_1 \dots d\tau_s = \\ &= \sqrt{\frac{A}{(2\pi)^s}} \cdot \int_{\tau_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\tau_s=-\infty}^{+\infty} \tau_k \tau_l e^{-\frac{1}{2} a^{\lambda\lambda} \tau_\lambda \tau_\lambda} d\tau_1 \dots d\tau_s.\end{aligned}$$

As

$$\frac{\partial (e^{-\frac{1}{2} a^{\lambda\lambda} \tau_\lambda \tau_\lambda})}{\partial a^{kl}} = -\frac{1}{2} \tau_k \tau_l e^{-\frac{1}{2} a^{\lambda\lambda} \tau_\lambda \tau_\lambda},$$

we may write

$$\mu_{kl} = \sqrt{\frac{A}{(2\pi)^s}} \cdot -2 \frac{\partial}{\partial a^{kl}} \int_{\tau_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\tau_s=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} a^{\lambda\lambda} \tau_\lambda \tau_\lambda} d\tau_1 \dots d\tau_s. \quad (27)$$

Now

$$\int_{\tau_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\tau_s=-\infty}^{+\infty} \varphi(\zeta; F) d\tau_1 \dots d\tau_s = 1,$$

or, by (26),

$$\int_{\tau_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\tau_s=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} a^{\lambda\lambda} \tau_\lambda \tau_\lambda} d\tau_1 \dots d\tau_s = (2\pi)^{\frac{s}{2}} A^{-\frac{1}{2}};$$

hence

$$\frac{\partial}{\partial a^{kl}} \int_{\tau_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\tau_s=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} a^{kl} \tau_k \tau_l} d\tau_1 \dots d\tau_s = (2\pi)^{\frac{s}{2}} \cdot -\frac{1}{2} A^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial A}{\partial a^{kl}} = -\frac{1}{2} (2\pi)^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{A_{kl}}{A};$$

so equation (27) furnishes the well-known result

$$\mu_{kl} = \frac{A_{kl}}{A},$$

or, in the  $\psi$ -notation

$$\mu_{kl} = \frac{\Psi_{kl}}{\Psi}.$$

Since  $\varphi(\zeta; F)$  maximum corresponds with  $\psi(\zeta)$  minimum, we may apply (25), and so obtain, with  $\rho = 1$ ,

$$m_{ij} - \frac{V_{ij}}{V} = 0 \quad \left( \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right) = 1, \dots, s,$$

where

$$m_{ij} = \langle \Delta z_i \cdot \Delta z_j \rangle; \quad v(z) = -\log u(z; F),$$

$$v^{ij} = \frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial z_j}, \quad V = |v^{ij}|, \quad V_{ij} = \frac{\partial V}{\partial v^{ij}},$$

$u(z; F)$  being the function into which  $\varphi(\zeta; F)$  passes by changing the variables  $\zeta_k$  into the variables  $z_i$ .

Therefore:

If  $\varphi(\zeta; F)$  at its maximum behaves as the probability density of normal correlation, we have for any other system of variables, c.q.  $[z]$ :

$$\text{At } u \text{ max.} \quad m_{ij} = \frac{V_{ij}}{V} \quad \left( \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right) = 1, \dots, s,$$

where

$$m_{ij} = \langle \Delta z_i \cdot \Delta z_j \rangle; \quad v(z) = -\log u(z; F),$$

$$v^{ij} = \frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial z_j}, \quad V = |v^{ij}|, \quad V_{ij} = \frac{\partial V}{\partial v^{ij}}.$$

(28)

Now for canonical variables the density of conditioned probability coincides with the density of unconditioned probability ( $dw_z = dz_1 \dots dz_s$ ).

Hence, using canonical variables  $z_i$ , we may safely consider that set  $[z]$  as the most probable one, which maximizes the probability density  $u(z; F)$ , and thus minimizes the function  $v(z) = -\log u(z; F)$ .

So the most probable values  $z_i^*$  derive from

$$v^i \equiv \frac{\partial v}{\partial z_i} \equiv \frac{\partial (-\log u(z; F))}{\partial z_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, s), \dots \quad (29)$$

and their error-products from

$$m_{ij} \equiv \langle \Delta z_i, \Delta z_j \rangle = \left( \frac{V_{ij}}{V} \right)_{\nu \min.} \left( \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right) = 1, \dots, s. \quad (30)$$

The formulae (29) and (30) have been deduced for the canonical variables. But the theorem (25) enables us to apply the formulae (29) and (30) also to any set  $[\zeta]$  of (independent) variables  $\zeta_k$ . Hence:

The most probable values  $\zeta_k^*$  of  $\zeta_k$  are those for which

$$\psi^k \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_k} \equiv \frac{\partial (-\log \varphi(\zeta; F))}{\partial \zeta_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, s),$$

where

$$\varphi(\zeta; F) \equiv \frac{w(F; p(\zeta))}{g(F)} \quad (1) \dots \dots \dots (31)$$

Here the solution-values  $\zeta_k^*$  and  $z_i^*$  are really connected by the general substitution-formulae  $z_i(\zeta_1, \dots, \zeta_s)$ :  $z_i^* = z_i(\zeta_1^*, \dots, \zeta_s^*)$ .

The error-products (c.q. variances) are furnished by

$$\mu_{kl} \equiv \langle \Delta \zeta_k, \Delta \zeta_l \rangle = \left( \frac{\Psi_{kl}}{\Psi} \right)_{\psi \min.} \left( \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right) = 1, \dots, s. \quad (32)$$

The equations (31) and (32) are the well-known formulae of Prof. R. A. FISHER's method of maximum likelihood.

It is particularly the property (25) at the extremum of a function  $y = \psi(\zeta) = v(z)$ , which releases us from distinguishing between the concept "likelihood" and the concept "conditioned probability (density)", in such cases where the frequency distribution  $[F_h]$  is given, and where we are concerned with the most probable values of the variables  $\zeta_k$ , on which the *a-priori* probabilities  $p_h$  depend, and with their error-products, c.q. variances.

---

1) The particular from (14') of  $\varphi(\zeta; F)$  is irrelevant.

**Mathematics.** — *Inégalités remplies par les fonctions univalentes.* Par Prof. J. WOLFF,  
(Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

Dans la présente communication on suppose que  $f(z) = f(x + iy)$  soit holomorphe, bornée et univalente dans le demi-plan  $D(x > 0)$ , d'où

$$\iint_D |f'|^2 dx dy < \infty \dots \dots \dots (1)$$

**THÉOREME I.**  $x f'(z)$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers zéro, c'est à dire: toute suite  $z_n$  dans  $D$ , sur laquelle  $x_n \rightarrow 0$ , satisfait à  $x_n f'(z_n) \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* Dans le cas contraire il existerait un nombre  $\varepsilon > 0$  et une suite  $z_n$  dans  $D$  satisfaisant à  $x_n \rightarrow 0$  et  $x_n |f'(z_n)| > \varepsilon$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Dans le cercle de centre  $z_n$  et de rayon  $x_n$   $f(z)$  est holomorphe et univalente. Le théorème de KOEBE permet de conclure que dans le cercle  $\gamma_n$  de centre  $z_n$  et de rayon  $x_n/2$

$$|f'(z_n)| > \frac{k\varepsilon}{x_n}, \quad k = \text{constante positive.}$$

Donc

$$\iint_{\gamma_n} |f'|^2 dx dy > \pi \cdot \frac{x_n^2}{4} \cdot \frac{k^2 \varepsilon^2}{x_n^2} = \frac{k^2 \pi \varepsilon^2}{4} \dots \dots \dots (2)$$

Parce que  $x_n \rightarrow 0$ , (2) est valable pour une infinité de cercles  $\gamma_n$  extérieurs l'un à l'autre, en contradiction avec (1).

Il est clair que dans l'énoncé on peut remplacer  $x_n \rightarrow 0$  par  $z_n \rightarrow \infty$ .

Pour les fonctions  $\varphi(z)$  holomorphes, bornées et univalentes dans le cercle-unité  $|z| < 1$  le théorème équivaut au

**THÉOREME IA.**  $(1 - |z|) \varphi'(z) \rightarrow 0$  quand  $|z| \rightarrow 1$ .

On le voit au moyen d'une homographie. Ce dernier théorème entraîne une propriété de la longueur  $L(\varrho)$  de l'image du cercle  $|z| = \varrho$ ,  $0 < \varrho < 1$  réalisée par la représentation conforme  $w = \varphi(z)$ . En effet

$$(1 - \varrho) L(\varrho) = (1 - \varrho) \int_0^{2\pi} |\varphi'(\varrho e^{i\tau})| \varrho d\tau,$$

donc, parce que  $(1 - \varrho) \varphi'(\varrho e^{i\tau}) \rightarrow 0$  uniformément ( $0 \leq \tau \leq 2\pi$ ) pour  $\varrho \rightarrow 1$ , il vient

$$(1 - \varrho) L(\varrho) \rightarrow 0 \text{ pour } \varrho \rightarrow 1.$$

Cependant, tout en restant dans le même ordre d'idées nous allons améliorer ce résultat en montrant le

**THÉOREME II.**  $(1 - \varrho)^{\frac{1}{2}} L(\varrho) \rightarrow 0$  pour  $\varrho \rightarrow 1$  <sup>1)</sup>.

1) M. A. DENJOY (Comptes Rendus de l'Ac. des Sc., Paris, 23 Juin 1941, p. 1072) a montré que  $(1 - \varrho)^{\frac{1}{2}} L(\varrho) \rightarrow 0$  approximativement. La même page contient le théorème IA.

*Démonstration.* Remarquons d'abord que

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |\Phi'|^2 \varrho \, d\varrho \, d\varphi < \infty, \dots \dots \dots (3)$$

D'autre part, en vertu de l'inégalité de SCHWARZ:

$$\{L(\varrho)\}^2 = \left\{ \int_0^{2\pi} |\Phi'(\varrho e^{i\varphi})| \varrho \, d\varphi \right\}^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} |\Phi'|^2 \varrho^2 \, d\varphi \dots (4)$$

D'après (3) et (4):

$$\int_0^1 \{L(\varrho)\}^2 \, d\varrho < \infty \dots \dots \dots (5)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Admettons pour un instant qu'il existe une suite  $\varrho_n \rightarrow 1$  telle que

$$(1 - \varrho_n)^4 L(\varrho_n) > \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots \dots \dots (6)$$

Soit  $a = \varrho_n e^{i\gamma}$  un point arbitraire du cercle  $|z| = \varrho_n$ . Dans le cercle de centre  $a$  et de rayon  $1 - \varrho_n$  la fonction  $\Phi(z)$  est holomorphe et univalente, donc dans le cercle de centre  $a$  et de rayon  $(1 - \varrho_n)/2$  on a en vertu du théorème de KOEBE

$$|\Phi'(z)| > k |\Phi'(a)|, \dots \dots \dots (7)$$

En vertu de (6) et (7), pour  $\varrho_n \leq \varrho \leq (1 + \varrho_n)/2$ :

$$\begin{aligned} L(\varrho) &> k L(\varrho_n) > k\varepsilon (1 - \varrho_n)^{-4} \\ \int_{\varrho_n}^{\frac{1+\varrho_n}{2}} \{L(\varrho)\}^2 \, d\varrho &> \frac{k^2 \varepsilon^2}{1 - \varrho_n} \cdot \frac{1 - \varrho_n}{2} = \frac{k^2 \varepsilon^2}{2} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

Cela étant pour une infinité de nombres  $0 < \varrho_n \rightarrow 1$  nous aboutissons à une contradiction avec (5), ce qui démontre le théorème II.

Revenons au demi-plan  $D$ . Considérons une droite verticale  $x = c > 0$ . Admettons pour un instant que sur  $x = c$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'|^2 \, dy = \infty, \dots \dots \dots (9)$$

Le théorème de KOEBE montre immédiatement que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'|^2 \, dy = \infty \text{ sur } x = c', \frac{1}{2}c \leq c' \leq \frac{3}{2}c, \dots \dots (10)$$

Or (1) contredit (10). Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(c + iy)|^2 \, dy < \infty, c > 0, \dots \dots \dots (11)$$

Indiquons par  $L(n)$  la longueur de l'image du segment rectiligne  $x = c, 0 \leq y \leq n$ .

Alors d'après l'intégralité SCHWARZ,  $N$  étant un nombre positif fixe,

$$L(n) = \int_0^n |f'| dy = L(N) + \int_N^n |f'| dy \leq L(N) + (n-N) \left\{ \int_N^n |f'|^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad n > N.$$

$\varepsilon > 0$  étant donné, fixons  $N$  tel que

$$\int_N^\infty |f'|^2 dy < \varepsilon^2$$

Alors

$$L(n) \leq L(N) + \varepsilon(n-N)^{\frac{1}{2}}, \quad n > N, \text{ d'où} \\ n^{-\frac{1}{2}} L(n) < 2\varepsilon \text{ pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

Nous avons démontré le

**THÉORÈME III.** Sur toute droite  $x = c > 0$  la longueur  $L(y)$  de l'image du segment  $[c, c + y]$  satisfait à

$$L(y) = o(|y|^{\frac{1}{2}}) \text{ pour } |y| \rightarrow \infty.$$

Pour les fonctions  $\phi(z)$  holomorphes, bornées et univalentes dans le cercle-unité  $|z| < 1$  nous avons donc le

**THÉORÈME IIIA.** Sur toute circonférence tangente intérieurement à la circonférence  $|z| = 1$  la longueur  $L(z)$  de l'image de l'arc entre un point initial  $z_0$  et un point  $z$  tendant vers le point de contact  $a$  satisfait à

$$L(z) = o(|z-a|^{-\frac{1}{2}})$$

Considérons dans  $D$  une demi-droite  $d(y = mx)$ ,  $-\infty < m < \infty$ . Indiquons par  $L(z)$  la longueur de l'image d'un segment  $z_0z$  de  $d$ . Du théorème I résulte immédiatement le

**THÉORÈME IV.**  $z_0$  étant fixe et  $z$  tendant vers zéro on a

$$L(z) = o|\log|z||.$$

Même majoration pour  $z \rightarrow \infty$ .

Pour  $\phi(z)$  holomorphe, bornée et univalente dans le cercle-unité  $|z| < 1$  il vient

**THÉORÈME IVA.** Sur toute corde  $\alpha\beta$  du cercle-unité la longueur  $L(z)$  de l'image du segment  $z_0z$ ,  $z_0$  étant fixe et  $z$  tendant vers  $\alpha$ , satisfait à

$$L(z) = o(|\log|z-\alpha||),$$

Soit  $p > 0$ ,  $a > 0$  et considérons dans  $D$  les courbes  $F_t$  d'équations

$$y = ax^{-p} + t, \quad -\infty < t < \infty. \dots \dots \dots (12)$$

L'inégalité (1) exige que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{F_t} |f'|^2 dx < \infty. \dots \dots \dots (13)$$

Montrons que

$$\int_{F_t} |f'|^2 dx < \infty, \quad -\infty < t < \infty. \dots \dots \dots (14)$$



En admettant que pour une certaine valeur de  $t$

$$\int_{\Gamma_t} |f'|^2 dx = \infty, \dots \dots \dots (15)$$

soit  $z = x + iy$  un point de  $\Gamma_t$  et  $z_1 = x_1 + iy$  un point de  $\Gamma_{t_1}$ ,  $t_1 \neq t$ , ayant même ordonnée  $y$  que  $z$ . Alors le rapport  $x_1/x = (y - t/y - t_1)^{\frac{1}{p}}$  tend vers l'unité quand  $y \rightarrow +\infty$ , c'est à dire quand  $x \rightarrow 0$ . Le théorème de KOEBE assure l'existence d'une constante positive  $K$  telle que  $|f'(z_1)| > K |f'(z)|$  pour les valeurs suffisamment petites de  $x$ . D'autre part considérons sur  $\Gamma_{t_1}$  un point  $z' = x + iy'$  ayant même abscisse  $x$  que  $z$ . Pour  $x$  suffisamment grand le disque circulaire de centre  $z$  et de rayon  $x/2$  contient  $z'$ ; le théorème de KOEBE assure l'existence d'une autre constante positive  $\bar{K}$  telle que  $|f'(z')| > \bar{K} |f'(z)|$  pour les valeurs suffisamment grandes de  $x$ . Donc (15) entraîne la divergence de cette intégrale pour toutes les valeurs de  $t$ , en contradiction avec (13); par suite (14) est démontré.

Soit  $L(n)$  la longueur de l'image de l'arc  $[y - t = ax^{-p}, t + 1 \leq y \leq n]$  de  $\Gamma_t$ , réalisée par la représentation conforme  $w = f(z)$ . Etant fixé un nombre  $\varepsilon > 0$ , fixons un nombre  $N > t$  tel que sur  $\Gamma_t$

$$\int_{y=N}^{\infty} |f'|^2 dx < \varepsilon^2.$$

Alors sur  $\Gamma_t$  pour  $n \rightarrow \infty$  il vient en vertu de l'inégalité de SCHWARZ

$$\begin{aligned} L(n) &= L_N + O \left\{ \int_N^n |f'| dy \right\} = L_N + O \left\{ \int_{y=N}^n |f'| x^{-p-1} | dx \right\} = \\ &= L_N + O \left\{ \int_{y=N}^{\infty} |f'|^2 | dx | \cdot \int_{y=N}^n x^{-2p-2} | dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= L_N + \varepsilon O \left\{ \int_N^n y^{1+\frac{1}{p}} dy \right\}^{\frac{1}{2}} = \varepsilon O \left( n^{1+\frac{1}{2p}} \right), \end{aligned}$$

$\varepsilon$  étant arbitraire nous concluons que  $L(n) = o \left( n^{1+\frac{1}{2p}} \right)$ .

Nous avons démontré le

**THÉORÈME V.** La longueur  $L(z)$  de l'image de l'arc de  $\Gamma_t$  entre un point initial  $z_0$  et un point  $z$ , dont l'abscisse  $x$  tend vers zéro, satisfait à

$$L(z) = o \left( |z|^{1+\frac{1}{2p}} \right).$$

Une homographie conduit au théorème correspondant pour les fonctions holomorphes, bornées et univalentes dans le cercle-unité  $|z| < 1$ :

**THÉORÈME VA.** Sur toute courbe dans  $|z| < 1$  tangente au cercle  $|z| = 1$  et dont l'équation au voisinage du point de contact  $a$  est

$$|z - a| = b(1 - |z|)^q, \quad 0 < q < \frac{1}{2}, \quad b > 0,$$

la longueur  $L(z)$  de l'image de l'arc entre un point initial  $z_0$ , et un point  $z$  tendant vers  $a$ , satisfait à

$$L(z) = o \left( |z - a|^{-\frac{1}{2q}} \right).$$

Dans ce qui précède les majorations sont valables au voisinage de chaque point de la frontière  $x = 0$  ou  $|z| = 1$ . Nous allons montrer que la frontière contient toujours un ensemble considérable de points, aux voisinages desquels les majorations peuvent être améliorées et où en outre  $f(z)$ ,  $\phi(z)$  respectivement, montre une conduite assez régulière.

Appelons avec M. DENJOY „plénitude” d'un ensemble  $E$  tout sous-ensemble  $e$  de  $E$  tel que  $E - e$  est de mesure nulle.

Considérons dans  $D$  les courbes  $\Gamma_t$  convexes vers la gauche d'équations

$$y = \psi(x) + t, \psi(x) > 0 \text{ pour } x > 0, \psi(0) = 0, -\infty < t < \infty.$$

L'inégalité (1) exige que l'axe imaginaire contienne une plénitude de points  $it$  tels que

$$\int_{\Gamma_t} |f'|^2 dx < \infty \dots \dots \dots (16)$$

D'autre part l'axe imaginaire contient, en vertu d'un théorème de FATOU, une plénitude de points  $it$  tels que la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x + it) = l(t) \text{ existe } \dots \dots \dots (17)$$

Sur la plénitude  $e$  commune aux deux plénitudes  $> <$  (16) et (17) sont vrais. Sans perte de généralité supposons que l'origine  $O(z = 0)$  appartienne à  $e$ .

Admettons pour un instant que  $\Gamma_0$  contienne une suite  $z_n \rightarrow 0$  telle que

$$|f'(z_n)| \geq \frac{\varepsilon \sqrt{y_n}}{x_n}, n = 1, 2, \dots \dots \dots (18)$$

Soit  $Q_n$  le carré  $[|x - x_n| \leq x_n/2, |y - y_n| \leq x_n/2]$ . Le segment de droite  $Oz_n$  coupe la droite  $y = y_n - x_n/2$  au point d'abscisse  $x - (x_n^2/2y_n)$ . Or de la convexité de  $\Gamma_0$  il suit que sur l'arc  $\gamma_n$  de  $\Gamma_0$ , qui traverse  $Q_n$ , la variation de  $x$  surpasse la quantité  $x_n^2/2y_n$ . Il existe par conséquent en vertu du théorème de KOEBE une constante positive  $k$  indépendante de  $n$ , telle que sur  $\gamma_n: |f'| > k|f'(z_n)|$ , donc d'après (18)

$$\int_{\gamma_n} |f'|^2 dx \geq k^2 \varepsilon^2 \frac{x_n^2}{2y_n} \cdot \frac{y_n}{x_n^2} = \frac{k^2 \varepsilon^2}{2}, n = 1, 2, \dots \dots \dots (19)$$

Cela étant sur une infinité d'arcs  $\gamma_n$  extérieurs l'un à l'autre, nous rencontrons une contradiction avec (16). Nous avons donc démontré le

**THÉORÈME VI.** *L'axe imaginaire contient une plénitude  $e$  de points  $it$  tels que,  $z$  tendant vers  $it$  sur une courbe convexe vers la gauche,*

$$f'(z) = o\left(\frac{\sqrt{|y-t|}}{x}\right).$$

Pour les fonctions  $\phi(z)$  holomorphes, bornées et univalentes dans le cercle-unité nous avons donc le théorème

**THÉORÈME VIA.** *La circonférence  $C(|z| = 1)$  contient une plénitude de points  $\alpha$  tels que,  $z$  tendant vers  $\alpha$  sur un arc de courbe qui est convexe dans la direction  $O\alpha$*

$$\phi'(z) = o\left(\frac{\sqrt{|z-\alpha|}}{1-|z|}\right), ^1)$$

<sup>1)</sup> M. DENJOY a acquis ce résultat pour les courbes satisfaisant à

$$\limsup_{z \rightarrow \alpha} \frac{\log(1-|z|)}{\log|z-\alpha|} \leq 2,$$

(Comptes rendus de l'Ac. des Sc., Paris, 21 Juillet 1941, p. 117).

Prenons, comme exemple, pour cette courbe convexe un arc de cercle tangent à  $C$  en un point  $\alpha$  de la plénitude. Nous trouvons

$$\Phi'(z) = o(|z - \alpha|^{-3}),$$

donc, en utilisant la notation du théorème IIIA,

$$L(z) = o(|z - \alpha|^{-1}).$$

Nous ne trouvons rien de nouveau, car le théorème IIIA est beaucoup plus général. Mais prenons une corde  $\alpha\beta$ ,  $\alpha$  étant sur la plénitude. Nous trouvons

$$\Phi'(z) = o(|z - \alpha|^{-1}),$$

donc, en utilisant la notation du théorème IVA,

$$L(z) \text{ est finie, } ^2)$$

résultat dépassant largement celui énoncé par le théorème IVA pour toutes les cordes du cercle.

Prenons les courbes du théorème VA;  $\alpha$  étant sur la plénitude, nous trouvons pour  $z \rightarrow \alpha$

$$\Phi'(z) = o(|z - \alpha|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}),$$

donc

$$L(z) = o(|z - \alpha|^{\frac{3}{2} - \frac{1}{q}}).$$

Or, si  $q > \frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2} - \frac{1}{q} > -\frac{1}{2q}$ , donc la majoration dépasse alors celle du théorème VA.

Enfin considérons dans  $D$  les courbes  $\Gamma_t$  d'équations

$$y = ax^q + t, \quad a > 0, \quad 1 \cong q \cong \frac{1}{2}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Sur une plénitude  $e$  de points  $it$  de l'axe imaginaire (16) et (17) sont vrais. Supposons que l'origine appartienne à  $e$ . Ecrivons l'inégalité (1) en coordonnées polaires:

$$\int_D |f'|^2 \varrho \, d\varrho \, d\varphi < \infty \quad \dots \quad (20)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrons que, pour  $\varrho$  suffisamment petit, le segment d'extrémités  $\varrho/2$  et  $\varrho$  contient au moins un point  $\varrho'$  tel que la longueur  $L(\varrho')$  de l'image du demi-cercle  $|z| = \varrho'$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$  soit  $< \varepsilon$ , donc que

$$L(\varrho') = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f'(\varrho' e^{i\varphi})| \varrho' \, d\varphi < \varepsilon. \quad \dots \quad (21)$$

En effet, dans le cas contraire il existerait une suite  $\varrho_n \rightarrow 0$  telle que

$$\int_{\frac{\varrho_n}{2}}^{\varrho_n} \{L(\varrho)\}^2 \, d\varrho \cong \frac{\varepsilon^2 \varrho_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \dots \quad (22)$$

<sup>2)</sup> Voir les notes de DENJOY et de WOLFF, Comptes rendus de l'Ac. des Sc., 23 Juin 1941.

Donc, en vertu de l'inégalité de SCHWARZ,  $C_n$  étant la couronne  $\frac{\varrho_n}{2} \leq \varrho \leq \varrho_n$ ,

$$\frac{\varepsilon^2 \varrho_n}{2} \equiv \int_{\frac{\varrho_n}{2}}^{\varrho_n} \{L(\varrho)\}^2 d\varrho = \int_{\frac{\varrho_n}{2}}^{\varrho_n} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f'| \varrho d\varphi \right\}^2 d\varrho \equiv \pi \varrho_n \iint_{C_n} |f'|^2 \varrho d\varrho d\varphi. \quad (23)$$

De (23) on conclut que les aires des images des couronnes  $C_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , surpassent  $\varepsilon^2/2\pi$  ce qui contredit (20). Par suite l'énoncé est vrai.

Cela posé, soient  $z_1$  et  $z_2$  deux points sur  $\Gamma_0$ . Posons  $|z_1| = \varrho_1$ ,  $|z_2| = \varrho_2$ . Aux valeurs suffisamment petites de  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  correspondent des nombres  $\varrho'_1$  et  $\varrho'_2$  satisfaisant à

$$\frac{\varrho_1}{2} \equiv \varrho'_1 \equiv \varrho_1, \quad \frac{\varrho_2}{2} \equiv \varrho'_2 \equiv \varrho_2, \quad L(\varrho'_1) < \varepsilon, \quad L(\varrho'_2) < \varepsilon. \quad \dots \quad (24)$$

Les demi-cercles dans  $D$  de rayons  $\varrho'_1$  et  $\varrho'_2$  coupent  $\Gamma_0$  en deux points  $z'_1$  et  $z'_2$ . Il vient

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_{z_1}^{z_2} f' dz \right| = \left| \left( \int_{\varrho'_1}^{\varrho'_2} + \int_{z'_1}^{\varrho'_1} + \int_{\varrho'_2}^{z'_2} + \int_{z'_2}^{\varrho'_2} + \int_{z'_1}^{z'_2} \right) f' dz \right|. \quad (25)$$

Supposons dorénavant  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  suffisamment petits. Alors d'après (17)

$$\left| \int_{\varrho'_1}^{\varrho'_2} f' dz \right| = |f(\varrho'_2) - f(\varrho'_1)| < \varepsilon. \quad \dots \quad (26)$$

D'après (21) et (24):

$$\left| \left( \int_{z'_1}^{\varrho'_1} + \int_{\varrho'_2}^{z'_2} \right) f' dz \right| < L(\varrho'_1) + L(\varrho'_2) < 2\varepsilon. \quad \dots \quad (27)$$

Enfin calculons les deux dernières intégrales dans (25) sur  $\Gamma_0$ , en utilisant l'inégalité de SCHWARZ et l'hypothèse  $1 \geq q \geq \frac{1}{2}$ . Il vient

$$\begin{aligned} \left| \int_{z_1}^{z'_1} f' dz \right| &\equiv 2 \int_{z'_1}^{z_1} |f'| dy = 2 \int_{z'_1}^{z_1} y^{\frac{1}{2}} |f'| \cdot \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} \equiv 2 \left\{ \int_{z'_1}^{z_1} |f'|^2 y dy \cdot \int_{z'_1}^{z_1} \frac{dy}{y} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 a q^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \log \frac{y_1}{y'_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_{z'_1}^{z_1} |f'|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'après (16) et (24) il vient donc

$$\left| \int_{z'}^{z'_1} f' dz \right| < \varepsilon \text{ et de la même manière } \left| \int_{z'_2}^{z_2} f' dz \right| < \varepsilon. \quad \dots \quad (28)$$

De (25), (26), (27) et (28) résulte que, pour  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  assez petits,

$$|f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon.$$

Nous avons donc démontré que,  $z$  tendant vers  $O$  sur  $\Gamma_0$ ,  $f(z)$  tend vers une limite. De même sur la courbe  $\tilde{\Gamma}_0$  d'équation  $y = -axq$ . Par suite,  $z$  tendant vers  $O$ , en restant

dans le domaine  $y^2 < a^2 x^{2q}$ ,  $f(z)$  tend vers une limite unique  $l(0)$ . Nous avons démontré le

**THÉORÈME VII.** *L'axe imaginaire contient une plénitude de points  $it$  tels que,  $z$  tendant vers  $it$  dans le domaine  $|y - t| < a x^q$ ,  $q \geq \frac{1}{2}$ ,  $f(z)$  tend vers une limite unique  $l(t)$ <sup>1)</sup>.*

Traduisons ce théorème en un théorème sur les fonctions holomorphes, bornées et univalentes dans le cercle-unité, en nous bornant au cas  $q = \frac{1}{2}$ . Faisons d'abord une remarque:  $q$  étant fixé, la plénitude figurant dans le théorème VII dépend de  $a$ . Mais soit  $a_n$  une suite de nombres positifs tendant vers l'infini. Les plénitudes correspondantes  $e_n$  ont en commun une plénitude  $e$ , et sur  $e$  l'énoncé VII est vrai, quelque soit  $a > 0$ . Il est clair que dans la traduction les nouvelles courbes peuvent être remplacées par des cercles tangent au cercle-unité.

Nous avons donc le

**THÉORÈME VIIA.** *Etant donnée une fonction  $\phi(z)$  holomorphe, bornée et univalente dans le cercle-unité, la frontière  $C(|z| = 1)$  contient une plénitude de points  $\alpha$  tels que,  $z$  tendant vers  $\alpha$  dans un cercle quelconque tangent à  $C$  en  $\alpha$ ,  $\phi(z)$  tend vers une limite unique  $l(\alpha)$ .*

<sup>1)</sup> M. DENJOY a obtenu ce résultat pour les courbes satisfaisant à

$$\limsup_{z \rightarrow it} \frac{\log x}{\log |y-t|} < 2.$$

(Comptes rendus de l'Ac. des Sc. Paris, 7 Juillet 1941, p. 15). Cet ensemble de courbes ne contient pas les courbes du théorème VII correspondant à  $q = 2$ .

Les théorèmes VI et VII se trouvent dans deux notes de J. WOLFF, à paraître aux Comptes rendus.

**Mathematics.** — *Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art. I.* Von S. C. VAN VEEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

*Einleitung.*

Seit den bahnbrechenden Arbeiten von JACOBI und WEIERSTRASS in Bezug auf die Theorie der Theta-Funktionen ist es üblich geworden, speziell bei numerischen Rechnungen, die älteren hypergeometrischen Reihenentwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art, nämlich

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

und

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right),$$

wegen ihrer oft ungenügend starken Konvergenz, durch ein unvergleichlich stärkeres konvergentes Rechnungsverfahren mittels der Theta-Reihen zu ersetzen.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass die obengenannten hypergeometrischen Reihen in prinzipiell einfacher Weise in andere, ebenfalls hypergeometrische Reihen, deren Konvergenzstärke der der Theta-Reihen nicht nur gleichkommt, sondern beliebig weit übersteigen kann, transformiert werden können. Dazu kommt, dass in formeller Hinsicht diese Entwicklungen, als hypergeometrische Reihen, einfacher und regelmässiger als die notwendigen Umkehrungen der Theta-Reihen gebildet sind.

Diese Konvergenz ist dermassen stark, dass schon das sehr einfach gebildete Hauptglied in allen vorkommenden Fällen für reelles  $k$  eine zehnstellige, ja sogar oft eine neunzehnstellige Genauigkeit verbürgt.

Im § 1 betrachten wir den Fall, dass  $k$  nicht in der Nähe von 1 liegt. Vorläufig wird  $k$  reell vorausgesetzt, mit  $0 \leq k < 1$ . Unter wiederholter Anwendung der LANDENSchen Transformation wird die hypergeometrische Reihe  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$  in  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k_n^2\right)$  transformiert, wo  $k_n$  nach einigen Transformationen sehr klein ist, selbst wenn die Differenz zwischen 1 und  $k$  ziemlich klein ist. Das Bildungsverfahren der Grössen  $k_n$  wird dabei wesentlich auf das klassische Verfahren des arithmetisch-geometrischen Mittels von GAUSS zurückgeführt. (Satz I).

Als Beispiel dieser Entwicklungen nennen wir

$$K(k) = \frac{2\pi}{(1 + \sqrt[4]{1-k^2})^2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left(\frac{1 - \sqrt[4]{1-k^2}}{1 + \sqrt[4]{1-k^2}}\right)^4\right). \quad (K III)$$

Noch viel stärker konvergiert die Reihe

$$K(k) = \frac{2\pi}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt[4]{\cos \alpha}\right)^2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sqrt[4]{\cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt[4]{\cos \alpha}}\right)^4\right),$$

mit  $\sin \alpha = k$ . (K IV)



deren Hauptglied

$$K(k) \approx \frac{2\pi}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\cos \alpha}\right)^2}$$

für  $0 \approx \alpha \approx \frac{\pi}{4}$  eine zehnstellige Genauigkeit verbürgt. Im Allgemeinen ist für kleines  $k$

$$k_n \approx \frac{\sin^{2^{n-1}} \alpha}{2^{2^{n-2}}}.$$

Dieses Verfahren kann in sehr einfacher Weise beliebig weit fortgesetzt werden und liefert im Hauptgliede bei jeder neuen Transformation ungefähr eine Genauigkeit in verdoppelter Stellenzahl. Die Reihen des § 1 konvergieren somit sehr stark für  $0 \leq k < a < 1$ . Die Konvergenz hört jedoch auf für  $k = 1$ , und ist unbefriedigend für  $k$  in der Nähe von 1.

Im § 2 betrachten wir den Fall, dass  $k$  in der Nähe von 1 liegt. Unter Anwendung eines klassischen Hilfssatzes von GAUSS wird  $F(a, b; c; z)$  in eine Potenzreihe nach  $(1-z)$  transformiert, in der überdies noch ein logarithmisches Glied auftritt in dem hier interessierenden Fall, wo  $c - a - b$  ganz  $\geq 0$  ist. (Hilfssatz 1).

Es ergibt sich dann die allgemeine Entwicklung

$$K(k) = \frac{1}{2^{q-1} c_q} \log \frac{4}{l_q} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; l_q^2\right) - \frac{1}{2^{q-2} c_q \pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)2m} \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{n!} \right\}^2 l_q^{2n}$$

(Satz IV), mit einfach gebildeten  $l_q$  und  $c_q$ , die nach der Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels berechnet werden.

Wichtige Sonderfälle sind die stark konvergenten Gegenstücke von (K III) und (K IV), nämlich (K\* III) und (K\* IV) mit

$$q=3: c_q = \left(\frac{1 + \sqrt{\sin a}}{2}\right)^2; l_q = \left(\frac{1 - \sqrt{\sin a}}{1 + \sqrt{\sin a}}\right)^2;$$

$$q=4: c_q = \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) + \sqrt{\sin a}}{2}\right)^2; l_q = \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) - \sqrt{\sin a}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) + \sqrt{\sin a}}\right)^2;$$

deren einfache Hauptglieder

$$K(k) \approx \frac{2}{(1 + \sqrt{\sin a})^2} \log 2 \left(\frac{1 + \sqrt{\sin a}}{1 - \sqrt{\sin a}}\right),$$

und

$$K(k) \approx \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) + \sqrt{\sin a}\right)^2} \log 2 \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) + \sqrt{\sin a}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) - \sqrt{\sin a}}\right)$$

dieselbe Genauigkeit verbürgen für  $\frac{\pi}{4} \leq a < \frac{\pi}{2}$  wie die Hauptglieder von (K III) und

(K IV) für  $0 \leq a \leq \frac{\pi}{4}$ .

Im § 3 werden die Untersuchungen auf die Entwicklung der vollständigen elliptischen Integrale zweiter Art erweitert. Erst wird dazu im Hilfssatz 2 die (bekannte) Anwendung der LANDENSCHEN Transformation auf die elliptischen Integrale zweiter Art vorgenommen. Endlich ergibt sich im Satz VI eine allgemeine Entwicklung folgender Art

$$E(k) = p_n F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; k_n^2\right) + q_n F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k_n^2\right), \quad n \geq 2,$$

wo  $p_n$  und  $q_n$  in einfacher Weise bestimmt werden.

Als sehr genaue Approximation geben wir das Hauptglied von  $E$  (IV)

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt[4]{\cos \frac{\alpha}{2}}\right)^4 - 4\sqrt{\cos \alpha} (1 + \sqrt{\cos \alpha + \cos \alpha})}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt[4]{\cos \frac{\alpha}{2}}\right)^2}$$

Die letzten Entwicklungen gelten für kleines  $k$ , also  $k$  nicht in der Nähe von 1. Wenn  $k$  in der Nähe von 1 liegt, wird im Satz VII eine allgemeine Entwicklung der folgenden Form abgeleitet:

$$E(k) = c_n F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; l_n^2\right) + \frac{c_n}{2} l_n^2 \log \frac{4}{l_n} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 2; l_n^2\right) - \frac{2c_n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} r_m \sum_{q=m}^{\infty} s_q l_n^{2q+2} + A_n K(k)$$

wo die Koeffizienten  $A_n, c_n, l_n, r_m$  und  $s_q$  in einfacher Weise bestimmt werden.

Das Hauptglied im Falle  $n=3$  wird

$$E(k) \approx \left(\frac{1 + \sqrt{\sin \alpha}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{(1 - \sin \alpha)(3 + \sin \alpha)}{(1 + \sqrt{\sin \alpha})^2} \log 2 \left(\frac{1 + \sqrt{\sin \alpha}}{1 - \sqrt{\sin \alpha}}\right).$$

Im § 4 wird gezeigt, dass alle Entwicklungen für  $K$  und  $E$  der §§ 1 und 2 (mit einer Ausnahme) bei gehöriger Definition der Argumente der in Betracht kommenden Grössen für alle komplexen Werte von  $k$  in der von  $k=+1$  nach  $+\infty$  aufgeschlitzten rechten Halbebene  $R(k) \geq 0$  gelten.

Schliesslich wird gezeigt, dass man bei geeigneter Wahl der Reihen  $K$  und  $E$  nach einigen Transformationen immer für alle komplexen Werte von  $k$  mit  $R(k) \geq 0$  eine starke Konvergenz erzeugen kann.

Die in dieser Arbeit enthaltenen Ergebnisse und Methoden sind auf ein weiteres Gebiet anwendbar. Insbesondere die von F. EMDE<sup>1)</sup> betrachteten vollständigen elliptischen Integrale

$$D(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

und

$$C(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

<sup>1)</sup> F. EMDE. Zur Zahlenrechnung bei vollständigen elliptischen Integralen. Archiv für Elektrotechnik XXX, 1936, S. 243.

können mit grosser Genauigkeit in ähnlicher Weise entwickelt werden. Ueber diese Ergebnisse hoffen wir an gegebener Stelle zu berichten.

**Die Entwicklung des vollständigen elliptischen Integrals erster Art.**

§ 1. *k* liegt nicht in der Nähe von 1.

Im folgenden wird vorläufig *k* reell vorausgesetzt, mit  $0 \leq k < 1$ .

Wir setzen

$$k = \sin \alpha, \text{ mit } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2},$$

und definieren erst die doppelte Zahlenfolge  $(a_n, b_n)$  durch

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 + k = 1 + \sin \alpha; & b_0 &= 1 - k = 1 - \sin \alpha; \\ a_n &= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} & ; & b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}; \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

(arithmetisches und geometrisches Mittel).

Für  $n \geq 2$  ist

$$a_n = \frac{a_{n-2} + b_{n-2} + 2 \sqrt{a_{n-2} b_{n-2}}}{4} = \left( \frac{\sqrt{a_{n-2}} + \sqrt{b_{n-2}}}{2} \right)^2. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1 & ; & b_1 = \sqrt{1 - k^2} = \cos \alpha; \\ a_2 &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} & ; & b_2 = \sqrt{\cos \alpha}; \\ a_3 &= \left( \frac{1 + \sqrt{\cos \alpha}}{2} \right)^2 & ; & b_3 = \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt[4]{\cos \alpha}; \\ a_4 &= \left( \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt[4]{\cos \alpha}}{2} \right)^2 & ; & b_4 = \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt[8]{\cos \alpha} \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{\cos \alpha}}{2} \right); \\ a_5 &= \left( \frac{1 + \sqrt{\cos \alpha} + 2 \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt[4]{\cos \alpha}}{4} \right)^2 & ; & \\ & & & b_5 = \sqrt[4]{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt[16]{\cos \alpha} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\cos \alpha}}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt[4]{\cos \alpha}}{2}; \end{aligned} \right\} (3)$$

u. s. w.

Weiter definieren wir

$$\left. \begin{aligned} k_n &= \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \quad (n \geq 1) \\ &= \left( \frac{\sqrt{a_{n-2}} - \sqrt{b_{n-2}}}{\sqrt{a_{n-2}} + \sqrt{b_{n-2}}} \right)^2 \quad (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

also, wegen (3)

$$\begin{aligned}
 k_1 &= k = \sin \alpha & ; \\
 k_2 &= \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{1 + \sqrt{1-k^2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} & ; \\
 k_3 &= \left( \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{1 + \sqrt{1-k^2}} \right)^2 = \left( \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \right)^2 & ; \\
 k_4 &= \left( \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\cos \alpha}} \right)^2 & ; \dots (5) \\
 k_5 &= \left( \frac{1 + \sqrt{\cos \alpha} - 2 \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\cos \alpha}}}{1 + \sqrt{\cos \alpha} + 2 \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\cos \alpha}}} \right)^2 ; \\
 & \text{u. s. w.}
 \end{aligned}$$

Weiter ist zu bemerken, dass, wegen (4) und (1), für  $n \geq 1$

$$1 + k_n = \frac{2 a_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}; \dots (6)$$

$$1 - k_n = \frac{2 b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} = \frac{b_{n-1}}{a_n}; \dots (7)$$

$$\sqrt{1-k_n^2} = \sqrt{\frac{a_{n-1} b_{n-1}}{a_n^2}} = \frac{b_n}{a_n}; \dots (8)$$

$$\frac{1 - \sqrt{1-k_n^2}}{1 + \sqrt{1-k_n^2}} = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = k_{n+1}; \dots (9)$$

$$\frac{1 - k_n}{1 + k_n} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} = \sqrt{1-k_{n-1}^2}; \dots (10)$$

$$k_{n-1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1 + k_n}; \dots (11)$$

ist.

**Satz I:** Setzt man für ganzes  $n \geq 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_n^2 \sin^2 \varphi}} = K(k_n),$$

so ist

$$K(k_1) = \frac{K(k_2)}{a_2} = \dots = \frac{K(k_n)}{a_n} = \frac{\pi}{2 a_n} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k_n^2\right), \dots (12)$$

**Beweis:** Wegen (9) ist  $0 \leq k_n < 1$  ( $n \geq 1$ ). Durch die LANDENSche Transformation

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin 2 \omega}{p + \cos 2 \omega}$$

geht

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 \varphi}}$$

über in

$$\frac{2}{1+p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{4p}{(1+p)^2} \sin^2 \omega}}$$

mit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2 \beta}{p + \cos 2 \beta}$$

(vgl. I, Proceedings XLIV, S. 607, Hilfssatz 1).

Wenn  $\omega$  das Intervall  $(0, \frac{\pi}{2})$  durchläuft, so durchläuft  $\varphi$  das Intervall  $(0, \pi)$  und findet man

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{1+p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{4p}{(1+p)^2} \sin^2 \omega}}$$

also

$$2 K(p) = \frac{2}{1+p} K\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}\right), \dots (13)$$

Setzt man

$$\frac{2\sqrt{p}}{1+p} = k_{n-1},$$

somit

$$p = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}} = k_n \quad (\text{wegen (9)})$$

so geht (13) über in

$$K(k_n) = \frac{a_n}{a_{n-1}} K(k_{n-1}), \dots (14)$$

sodass

$$\frac{K(k_n)}{a_n} = \frac{K(k_{n-1})}{a_{n-1}} = \dots = \frac{K(k_1)}{a_1}$$

ist. Endlich hat man

$$K(k_n) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k_n^2\right).$$

**Bemerkung:** (14) ist gleichwertig mit

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k_{n-1}^2\right) &= (1 + k_n) \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k_n^2\right) = \\ &= \frac{2}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left(\frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist ein Sonderfall einer allgemeinen KUMMERSchen Transformationsformel der hypergeometrischen Funktion<sup>1)</sup>

$$F(\alpha, \beta; 2\beta; x) = \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1-x}}\right)^{2\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \beta + \frac{1}{2}; \beta + \frac{1}{2}; \left(\frac{1 - \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}\right)^2\right).$$

Zu bemerken ist, dass die Reihe im rechten Gliede erheblich schneller konvergiert als die Reihe im linken Gliede, wegen

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}\right)^2 \approx \frac{k_{n-1}^4}{16}.$$

Aus (12), (5) und (3) ergeben sich für  $n = 1, \dots, 5$  die wichtigen Sonderfälle, die eine Folge immer stärker konvergenter Reihen für  $K(k)$  bilden, nämlich

$$K(k) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \sin^2 \alpha\right); \quad (K. I)$$

$$K(k) = \frac{\pi}{1 + \sqrt{1 - k^2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left(\frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}}\right)^2\right) = \frac{\pi}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}\right); \quad (K. II)$$

$$K(k) = \frac{2\pi}{(1 + \sqrt[4]{1 - k^2})^2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left(\frac{1 - \sqrt[4]{1 - k^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - k^2}}\right)^2\right) = \frac{2\pi}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left(\frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}}\right)^4\right); \quad (K. III)$$

$$K(k) = \frac{2\pi}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt[4]{\cos \alpha}\right)^2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sqrt[4]{\cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt[4]{\cos \alpha}}\right)^4\right); \quad (K. IV)$$

<sup>1)</sup> CRELLE's Journal. Bd. 15, 1836, S. 77, Formel (43), mit Druckfehler im rechten Gliede. ( $2\alpha - 2\beta + 1$  statt  $\beta + \frac{1}{2}$ ).

Uebrigens findet sich dieses Ergebnis schon wesentlich in GAUSS' Nachlass. Er ist vermutlich  $\pm 1812$  zu diesem Ergebnis gelangt, aber es wurde erst 1870 von SCHERING publiziert. (GAUSS, Werke III, S. 225, [101]).



$$K(k) = \frac{8\pi}{\left(1 + \sqrt{\cos \alpha} + 2 \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt[4]{\cos \alpha}}\right)^2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left(\frac{1 + \sqrt{\cos \alpha} - 2 \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt[4]{\cos \alpha}}}{1 + \sqrt{\cos \alpha} + 2 \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt[4]{\cos \alpha}}}\right)^4\right).$$

u. s. w. (K. V)

Wegen (9) ist

$$k_{n+1} = \frac{k_n^2}{(1 + \sqrt{1 - k_n^2})^2},$$

also

$$\frac{k_n^2}{4} \leq k_{n+1} < k_n^2$$

und für kleine Werte von  $k$  ist

$$k_{n+1} \approx \frac{k_n^2}{4}$$

allgemein

$$k_n \approx \frac{\sin^{2^{n-1}} \alpha}{2^{2^n - 2}}.$$

Die Konvergenz der Reihen ist somit ausserordentlich stark, sodass man sich, zumal bei den Reihen III, IV und V, bei fast allen praktischen Rechnungen mit dem Gebrauche des ersten (Haupt-)Gliedes begnügen kann.

Diese Hauptglieder sind

$$K(k) \approx \frac{2\pi}{(1 + \sqrt{1 - k^2})^2} = \frac{2\pi}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \quad (K. III')$$

$$K(k) \approx \frac{2\pi}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt[4]{\cos \alpha}\right)^2} \quad (K. IV')$$

$$K(k) \approx \frac{2\pi}{\left(1 + \sqrt{\cos \alpha} + 2 \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt[4]{\cos \alpha}}\right)^2} \quad (K. V').$$

Die gemachten Fehler sind aus der folgenden Tabelle abzulesen.

$\alpha$	$k_1 = \sin \alpha$	Fehler in		
		$K III'$	$K IV'$	$K V'$
$\leq 45^\circ$	$\leq 0,70711$	$\leq 2,6 \cdot 10^{-5}$	$\leq 9,3 \cdot 10^{-11}$	$\leq 1,1 \cdot 10^{-20}$
$60^\circ$	0,86603	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$7,5 \cdot 10^{-17}$
$70^\circ$	0,93969	$3 \cdot 10^{-3}$	$8,7 \cdot 10^{-7}$	$7,6 \cdot 10^{-14}$
$80^\circ$	0,98481	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-10}$
$85^\circ$	0,99619	$8,5 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$
$89^\circ$	0,99985	$5 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$

Obgleich die Reihen  $KI - KV$  für  $k = \sin \alpha = 1$  zu konvergieren aufhören, ist aus dieser Tabelle ersichtlich, dass die Reihen  $KIII - KV$  noch ausgezeichnet verwendbar sind, wenn der Unterschied zwischen  $k$  und 1 sehr gering ist.

**Bemerkung:** Die Formel (K III') als Approximationsformel wird aus der Theorie der Thetafunktionen in SCHWARZ-WEIERSTRASS: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, S. 62, Formel (4) abgeleitet. Auch die vollständige hypergeometrische Entwicklung (K III) wird da, allerdings ohne Beweis, auf S. 68, Formel (10), angegeben.

Uebrigens ist (K III) ein Sonderfall der allgemeinen Transformationsformel von KUMMER (l.c. S. 129, Formel (13)):

$$F\left(a, \frac{4a+1}{6}; \frac{4a+1}{3}; x\right) = \left(\frac{1+\sqrt[4]{1-x}}{2}\right)^{-4a} F\left(a, \frac{4a+1}{6}; \frac{2a+5}{6}; \left(\frac{1-\sqrt[4]{1-x}}{1+\sqrt[4]{1-x}}\right)^4\right).$$

Wendet man auf (12) die bekannte Transformationsformel

$$F(a, \beta; \gamma; x) = (1-x)^{-a} F\left(a, \gamma-\beta; \gamma; -\frac{x}{1-x}\right) \dots (15)$$

an, so ergibt sich, wegen (8)

**Satz II:** Für ganzes  $n \geq 1$  ist

$$K(k) = \frac{\pi}{2b_n} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\left(\frac{k_n a_n}{b_n}\right)^2\right) \dots (16)$$

Aus (16) und (5) ergeben sich nach einfacher Reduktion für  $n = 1, \dots, 5$  die wichtigen Sonderfälle mit ziemlich einfach gebildeten Hauptgliedern

$$K(k) = \frac{\pi}{2 \cos a} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\operatorname{tg}^2 a\right); \tag{K. K. I}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2\sqrt{\cos a}} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{\sin^4 \frac{a}{2}}{\cos a}\right); \tag{K. K. II}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2 \cos \frac{a}{2} \sqrt[4]{\cos a}} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{\sin^8 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\cos a} \cdot (1 + \sqrt{\cos a})^4}\right); \tag{K. K. III}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{\sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[8]{\cos a} \cdot (1 + \sqrt{\cos a})} \times \\ \times F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{4 \sin^{16} \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} \cdot \sqrt[4]{\cos a} \cdot (1 + \sqrt{\cos a})^{10} \left(\cos \frac{a}{2} + \sqrt[4]{\cos a}\right)^4}\right); \tag{K. K. IV}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{\sqrt[4]{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[16]{\cos a} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\cos a}}{2}} \cdot \left(\cos \frac{a}{2} + \sqrt[4]{\cos a}\right)} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \right. \\ \left. -\frac{2^7 \sin^{32} \frac{a}{2}}{\sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[8]{\cos a} \cdot (1 + \sqrt{\cos a})^{17} \cdot \left(\cos \frac{a}{2} + \sqrt[4]{\cos a}\right)^{10} \left(1 + \sqrt{\cos a} + 2\sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[8]{\cos a}\right)^4}\right); \tag{K. K. V}$$

Wegen  $\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{1-k_n^2}$  ist die Stärke der Konvergenz der Reihen (K) und (KK) fast dieselbe. Die Konvergenzbereiche sind jedoch nicht gleich. Während die Reihen (K) für reelles  $k$  im Gebiet  $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$  konvergieren, konvergiert die Reihe (15), bzw. (16) im Gebiet  $0 \leq k_n^2 \leq \frac{1}{2}$ .

Wegen (11) bestätigt man ohne Schwierigkeit, dass

die Reihe (KKI)	nur konvergiert für $a \leq 45^\circ$
(KK II)	$a \leq 80^\circ .6'$
(KK III)	$a \leq 89^\circ .59' 54''$
(KK IV)	$a \leq 89^\circ .59' 59,99997''$

u. s. w.

W. v. IGNATOWSKI<sup>1)</sup> hat die folgende Approximationsformel aufgestellt

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2 \cos \frac{a}{2} (\cos a)^{\frac{1}{4}}} \left\{ 1 - \frac{\left(\sin \frac{a}{2}\right)^8}{64 \left(\cos \frac{a}{2}\right)^4 \cos a} \right\} \dots \quad (17),$$

die fast mit (KK III) übereinstimmt. Diese Übereinstimmung wird vollständig unter Anwendung der Transformationsformel<sup>2)</sup>

$$(1+y)^{2\alpha} F(2\alpha, 2\alpha+1-\gamma; \gamma; y) = F\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}; \gamma; \frac{4y}{(1+y)^2}\right)$$

auf (K III). Man findet für  $a = \frac{1}{2}, \gamma = 1$

$$K(k) = \frac{2\pi(1+y)^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{\cos a})^2} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; \frac{4y}{(1+y)^2}\right).$$

Wendet man nachher (15) an, so findet man für  $y = \left(\frac{1-\sqrt{\cos a}}{1+\sqrt{\cos a}}\right)^2$

$$\left. \begin{aligned} K(k) &= \frac{2\pi(1+y)^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{\cos a})^2} \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{-\frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 1; -\frac{4y}{(1+y)^2}\right) = \\ &= \frac{\pi}{2 \cos \frac{a}{2} \cdot (\cos a)^{\frac{1}{4}}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 1; -\frac{\sin^8 \frac{a}{2}}{4 \cos a \cdot \left(\cos \frac{a}{2}\right)^4}\right), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

also eine Formel, von der (17) die ersten beiden Glieder bildet.

Jedoch ist (18), und somit auch (17), nur der Sonderfall mit  $a = \frac{1}{2}, x = \sin^2 a$  der fast um ein Jahrhundert älteren Formel von KUMMER<sup>3)</sup>

$$\begin{aligned} F\left(\alpha, \frac{4\alpha+1}{6}; \frac{4\alpha+1}{3}; x\right) &= \left(\frac{\sqrt{1-x} \cdot (1+\sqrt{1-x})}{2}\right)^{-\alpha} \times \\ &\times F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{2-\alpha}{6}; \frac{2\alpha+5}{6}; -\frac{(1-\sqrt{1-x})^4}{16\sqrt{1-x} \cdot (1+\sqrt{1-x})^2}\right), \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Acad. des sc. de l'U. R. S. S., III, 1 (Leningrad 1933), S. 88. (Zitat nach JAHNKE—EMDE, Funktionentafeln, 2e Aufl. S. 145).

<sup>2)</sup> GAUSS, Werke III, S. 225, [100].

<sup>3)</sup> l.c. S. 130, Formel 21.

(Fortsetzung folgt.)

**Mathematics.** — Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergenten Reihen. I. Von S. C. VAN VEEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

Die Reihenentwicklung der beiden unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art

$$F(\sin \alpha, \beta) = \int_0^{\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi}}$$

und

$$E(\sin \alpha, \beta) = \int_0^{\beta} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi} d\varphi$$

für beliebige reelle Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  ist bisher, soviel mir bekannt ist, selten eingehend untersucht worden. Zwar gibt u.a. HOÛEL<sup>1)</sup> für alle vorkommenden Fälle ziemlich einfache Reihenentwicklungen, aber ihre Konvergenz ist nur dann befriedigend, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  entweder sehr wenig von 0 oder von  $\frac{\pi}{2}$  verschieden sind.

Zweck der vorliegenden Untersuchungen ist, für alle vorkommenden Fälle Reihenentwicklungen für  $E$  und  $F$  abzuleiten, deren Konvergenz dermassen stark ist, dass man sich in weitaus den meisten praktischen Rechnungen mit den Hauptgliedern begnügen kann.

Es ergibt sich nun, dass drei verschiedene Entwicklungen notwendig sind, je nachdem

- 1)  $\alpha$  klein ist (nicht in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$ ),
- 2)  $\alpha$  in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$  liegt und  $\beta$  klein ist,
- 3)  $\alpha$  und  $\beta$  beide in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$  liegen

Im § 1 wird der erste Fall eingehend betrachtet. Unter wiederholter Anwendung der LANDENSchen Transformation ergibt sich in (11) eine stark konvergente Entwicklung, deren erste Glieder sind:

$$\begin{aligned} F(\sin \alpha, \beta) &= \frac{1}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \{ \beta + \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\cos \alpha \operatorname{tg} \beta) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \beta) \} \\ &+ \frac{1}{2(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \left( \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \right)^4 \left( \frac{\beta_3}{2} - \frac{\sin 2\beta_3}{4} \right) + \\ &+ \frac{3}{8(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \left( \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \right)^8 \left( \frac{3\beta_3}{8} - \frac{\sin 2\beta_3}{4} + \frac{\sin 4\beta_3}{32} \right) \\ &+ \frac{5}{16(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \left( \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \right)^{12} \left( \frac{5\beta_3}{16} - \frac{15 \sin 2\beta_3}{64} + \frac{3 \sin 4\beta_3}{64} - \frac{\sin 6\beta_3}{192} \right) + \dots \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Recueil de formules et de tables numériques, 3<sup>me</sup> Ed. Paris 1885, S XLV u.f.

wo

$$\beta_3 = \beta + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\cos a \operatorname{tg} \beta) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{\cos a} \cdot \operatorname{tg} \beta)$$

$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;  $\beta$  ist beliebig; jedoch kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  genommen werden. Dann sind für  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (\cos a \operatorname{tg} \beta)$  und  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{\cos a} \operatorname{tg} \beta)$  die Hauptwerte zu wählen.

Diese Reihe konvergiert nicht für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Jedoch ist sie noch sehr gut brauchbar für Werte von  $\alpha$ , die ziemlich in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$  liegen. Das Hauptglied (12)

$$F(\sin \alpha, \beta) \approx \frac{1}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \{ \beta + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\cos a \cdot \operatorname{tg} \beta) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{\cos a} \cdot \operatorname{tg} \beta) \}$$

wird für die meisten praktischen Zwecke genügen.

In (23) wird das analoge, jedoch weniger einfache Ergebnis für  $E(\sin \alpha, \beta)$  angegeben. Diese Reihe hat als Hauptglied (24)

$$E(\sin \alpha, \beta) \approx \frac{\sin 2\beta \cdot \sin^2 \alpha}{8 \Delta} + \frac{\operatorname{tg} \beta \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \Delta}{1 + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta} \\ + \frac{\cos^4 \frac{\alpha}{2}}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \{ \beta + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\cos a \operatorname{tg} \beta) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{\cos a} \cdot \operatorname{tg} \beta) \}$$

mit

$$\Delta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Im § 2 wird der Fall, dass  $\alpha$  in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$  liegt und  $\beta$  klein ist, näher betrachtet. In (27) ergibt sich die in diesem Gebiet besonders stark konvergente Entwicklung

$$F(\sin \alpha, \beta) = \frac{1}{2 \sqrt{\sin \alpha}} \log w \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \left( \frac{x}{2} \right)^{2n} \\ + \frac{1}{4 \sqrt{\sin \alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \left( \frac{xw}{4} \right)^{2n} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{w^{-2p}}{n-p},$$

wo

$$x = \frac{1 - \sin \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}}; \quad w = \frac{1 + \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}}{1 - \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}}.$$

Das Hauptglied ist

$$F(\sin \alpha, \beta) \approx \frac{1}{2 \sqrt{\sin \alpha}} \log \frac{1 + \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}}{1 - \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}}.$$

In (33) findet sich das analoge, weniger einfache Ergebnis für  $E(\sin \alpha, \beta)$  mit dem Hauptglied

$$E(\sin \alpha, \beta) \approx \frac{1 - \sin \alpha}{2\sqrt{\sin \alpha}} \log \frac{1 + \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}}{1 - \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}} + \sin \beta \sin \alpha.$$

Als *hinreichende* Bedingung für die Konvergenz der beiden Reihen (27) und (33) findet sich

$$0 \leq \sin^2 \beta < \frac{1}{\sin \alpha} \left( \frac{2 - x}{2 + x} \right).$$

Im § 3 wird endlich der letzte und schwierigste Fall, wobei  $\alpha$  und  $\beta$  beide in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$  liegen, eingehend betrachtet. In (46) findet sich die gesuchte Entwicklung für  $F(\sin \alpha, \beta)$ , nämlich

$$\begin{aligned} (F \sin \alpha, \beta) = & K(\alpha) - \frac{1}{2\sqrt{\sin \alpha}} \log y \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right)^2 \left( \frac{x}{2} \right)^{2n} \\ & - \frac{1}{4\sqrt{\sin \alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right) \left\{ \frac{(\Delta + \cos \beta \sqrt{\sin \alpha})^2}{4\sqrt{\sin \alpha} (1 + \sin \alpha \sin^2 \beta)} \right\}^{2n} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{y^{-2p}}{n-p}, \end{aligned}$$

wo

$$x = \frac{1 - \sin \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}}; \quad y = \frac{\Delta + \cos \beta \sqrt{\sin \alpha}}{\Delta - \cos \beta \sqrt{\sin \alpha}}.$$

$K(\alpha)$  ist das *vollständige* elliptische Integral erster Art, dessen Wert bestimmt, bzw. approximiert werden kann nach den Vorschriften meiner Arbeit „Stark konvergente Entwicklungen für die *vollständigen* elliptischen Integrale erster und zweiter Art“<sup>1)</sup> (weiter zitiert als; V. E. I.; I u.s.w.). Das Hauptglied dieser Entwicklung ist

$$F(\sin \alpha, \beta) \approx K(\alpha) - \frac{1}{2\sqrt{\sin \alpha}} \log \frac{\Delta + \cos \beta \sqrt{\sin \alpha}}{\Delta - \cos \beta \sqrt{\sin \alpha}}$$

In (55) wird die analoge Entwicklung für  $E(\sin \alpha, \beta)$  mit dem Hauptglied

$$E(\sin \alpha, \beta) \approx E(\alpha) - \cot \beta \cdot \Delta + \frac{\cos^2 \alpha}{8 \sin \alpha} (1 - 2\sqrt{\sin \alpha}) \log y + \frac{\Delta \cdot \cos \beta \cdot (1 + \sin \alpha)}{2(1 + \sin \alpha \cdot \sin^2 \beta)}$$

gegeben, wo  $E(\alpha)$  das *vollständige* elliptische Integral zweiter Art ist, dessen Wert in V. E. I. bestimmt wurde.

*Hinreichende* Bedingung für die Konvergenz der beiden Entwicklungen (46) und (55) ist

$$1 \geq \sin^2 \beta > \frac{1}{\sin \alpha} \left( \frac{\bar{x} - 2}{\bar{x} + 2} \right)$$

mit

$$\bar{x} = \frac{1 + \sin \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} (\geq 2)$$

<sup>1)</sup> Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 964 (1941).



In der untenstehenden Figur sind die Konvergenzgebiete der Reihen angegeben,

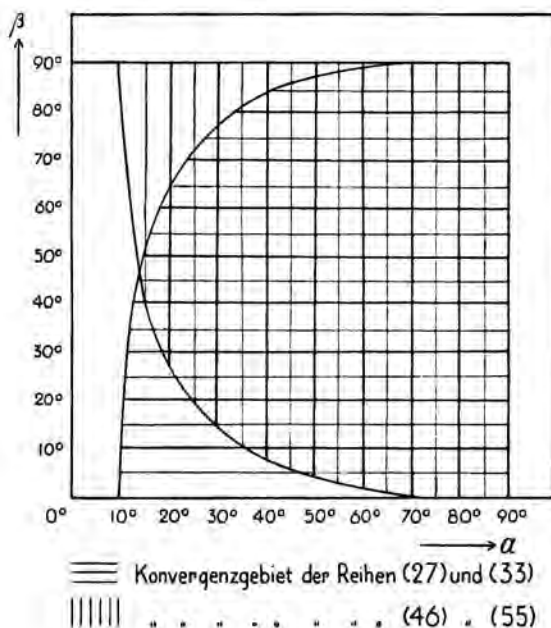


Fig. 1

Das horizontal schraffierte Gebiet stellt das Konvergenzgebiet der Reihen (27) und (33) da. ( $\alpha$  in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\beta$  nicht zu gross). Das vertikal schraffierte Gebiet stellt ebenso das Konvergenzgebiet der Reihen (45) und (55) da. Die Reihen (11) und (23) konvergieren im ganzen Quadrat ( $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ ), die rechte Seite  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ausgeschlossen.

Um die grösste Genauigkeit mit möglichst wenig Rechenarbeit zu erzielen, verfährt man am besten, wenn man die Reihen (11) und (23) aus § 1 bis etwa  $\alpha = 70^\circ$  benutzt. Die Reihen (27) und (33) aus § 2 verwendet man am besten für  $70^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ;  $0^\circ \leq \beta \leq 70^\circ$ . Die Anwendung der Reihen (46) und (55) aus § 3 bleibt dann auf das Quadrat ( $70^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ;  $70^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ ) beschränkt.

Schliesslich ist zu bemerken, dass im folgenden überall:  
 eine leere Summe = 0  
 und ein leeres Produkt = 1 bedeutet.

(Fortsetzung folgt).

**Mathematics.** — *Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL.* V. By J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

La substitution  $\mu = \frac{1}{2}$  resp.  $\mu = \frac{3}{4}$  dans (298) et (299) ou  $\mu = \frac{1}{2}$  resp.  $\mu = 1$  dans (300) et (301) donne après une légère réduction :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) I_{n-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x-a) \cos 2a \frac{da}{\sqrt{a}} = \\ &= I_{\frac{1}{2}}(x) I_{-\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x-a) \sin 2a \frac{da}{\sqrt{a}} = \\ &= \frac{1}{2} I_{\frac{1}{2}}(x) I_{-\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{\pi \sqrt{2x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x+a) \frac{da}{\sqrt{a}} \end{aligned} \right\} (306)$$

(comme la demie somme des membres précédents).

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) I_{n+\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x-a) \cos 2a \frac{da}{\sqrt{a}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x-a) \sin 2a \frac{da}{\sqrt{a}} = \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{2x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x+a) \frac{da}{\sqrt{a}} \end{aligned} \right\} (307)$$

(comme la demie somme des membres précédents).

De l'égalité des membres intermédiaires de (306) et (307) suivent :

$$\int_0^x I_0(x-a) \cos(3a-x) \frac{da}{\sqrt{a}} = \pi \sqrt{\frac{x}{2}} I_{\frac{1}{2}}(x) I_{-\frac{1}{2}}(x), \dots (308)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) \sin(3a-x) \frac{da}{\sqrt{a}} = 0, \dots (309)$$

La substitution  $\mu = \frac{1}{2}$  dans (298) et (299) donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) I_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(2a) I_0(x-a) \cos(x-a) da, \quad (310)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+1}(x) I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(2a) I_0(x-a) \sin(x-a) da. \quad (311)$$

Ainsi la substitution  $\mu = \frac{1}{4}$  resp.  $\mu = \frac{3}{4}$  dans (302) et (303) ou  $\mu = \frac{1}{2}$  resp.  $\mu = 1$  dans (304) et (305) donne les formules particulières :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_{n-\frac{1}{2}}(x) - \cos x I_{n+\frac{1}{2}}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos 2a \sin a \frac{da}{\sqrt{a}}, \end{aligned} \right\} \dots (312)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_{n-\frac{1}{2}}(x) + \sin x I_{n+\frac{1}{2}}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos 2a \cos a \frac{da}{\sqrt{a}}, \end{aligned} \right\} \dots (313)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_{n+\frac{1}{2}}(x) - \cos x I_{n+\frac{3}{2}}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin 2a \sin a \frac{da}{\sqrt{a}}, \end{aligned} \right\} \dots (314)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_{n+\frac{1}{2}}(x) + \sin x I_{n+\frac{3}{2}}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin 2a \cos a \frac{da}{\sqrt{a}}, \end{aligned} \right\} \dots (315)$$

tandis que la substitution  $\mu = \frac{3}{4}$  dans (304) et (305) donne :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_n(x) - \cos x I_{n+1}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) I_0(2a) \sin a da, \end{aligned} \right\} \dots (316)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_n(x) + \sin x I_{n+1}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) I_0(2a) \cos a \, da. \end{aligned} \right\} \quad (317)$$

Par addition resp. soustraction de (312) et (315), ainsi de (313) et (314), on obtient:

$$\int_0^x I_0(x-a) \sin 3a \frac{da}{\sqrt{a}} = \pi \sqrt{\frac{x}{2}} \sin x I_{-\frac{1}{2}}(x) I_{\frac{1}{2}}(x), \quad (318)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_{n+\frac{1}{2}}(x) + \sin x I_{n+\frac{3}{2}}(x) \} - \\ - \sin x I_{-\frac{1}{2}}(x) I_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin a \frac{da}{\sqrt{a}}, \end{aligned} \right\} \quad (319)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_{n+\frac{1}{2}}(x) - \cos x I_{n+\frac{3}{2}}(x) \} + \\ + \cos x I_{-\frac{1}{2}}(x) I_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos a \frac{da}{\sqrt{a}}, \end{aligned} \right\} \quad (320)$$

$$\int_0^x I_0(x-a) \cos 3a \frac{da}{\sqrt{a}} = \pi \sqrt{\frac{x}{2}} \cos x I_{-\frac{1}{2}}(x) I_{\frac{1}{2}}(x). \quad (321)$$

Enfin la substitution  $\mu = \frac{1}{2}$  resp.  $\mu = 1$  dans (304) et (305) donne les formules particulières:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin 2x I_{n-\frac{1}{2}}(x) - \cos 2x I_{n+\frac{1}{2}}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(a) \sin 2a \cos a \frac{da}{\sqrt{x-a}}, \end{aligned} \right\} \quad (322)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos 2x I_{n-\frac{1}{2}}(x) + \sin 2x I_{n+\frac{1}{2}}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(a) \cos 2a \cos a \frac{da}{\sqrt{x-a}}, \end{aligned} \right\} \quad (323)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin 2x I_{n+\frac{1}{2}}(x) - \cos 2x I_{n+\frac{3}{2}}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(a) \sin 2a \sin a \frac{da}{\sqrt{x-a}}, \end{aligned} \right\} \quad (324)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos 2x I_{n+\frac{1}{2}}(x) + \sin 2x I_{n+\frac{3}{2}}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(a) \cos 2a \sin a \frac{da}{\sqrt{x-a}}, \end{aligned} \right\} \quad (325)$$

tandis que l'addition resp. la soustraction des membres correspondants de (322) et (325), ainsi de (323) et (324) donne :

$$\int_0^x I_0(a) \sin 3a \frac{da}{\sqrt{x-a}} = \pi \sqrt{\frac{x}{2}} \sin 2x I_{-\frac{1}{2}}(x) I_{\frac{1}{2}}(x), \dots \quad (326)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 2x I_{-\frac{1}{2}}(x) I_{\frac{1}{2}}(x) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos 2x I_{n+\frac{1}{2}}(x) + \sin 2x I_{n+\frac{3}{2}}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(a) \sin a \frac{da}{\sqrt{x-a}}, \end{aligned} \right\} \quad (327)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 2x I_{-\frac{1}{2}}(x) I_{\frac{1}{2}}(x) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin 2x I_{n+\frac{1}{2}}(x) - \cos 2x I_{n+\frac{3}{2}}(x) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(a) \cos a \frac{da}{\sqrt{x-a}}, \end{aligned} \right\} \quad (328)$$

$$\int_0^x I_0(a) \cos 3a \frac{da}{\sqrt{x-a}} = \pi \sqrt{\frac{x}{2}} \cos 2x I_{-\frac{1}{2}}(x) I_{\frac{1}{2}}(x), \dots \quad (329)$$

§ 13. En remplaçant dans (263)  $\varrho$  par  $m + \frac{1}{2}$  resp.  $m$  ( $m$  entier positif ou nulle) et en multipliant les deux membres par  $2(-1)^m$  resp.  $\varepsilon_{2m}(-1)^m$  ou  $\varepsilon_{2m}$ , alors nous trouvons après la sommation sur  $m$  de 0 à  $\infty$ , à cause des séries connues  $2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m I_{2m+\frac{1}{2}}(x) = \sin x$ ,  $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m}(-1)^m I_{2m}(x) = \cos x$  et  $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} I_{2m}(x) = 1$ , en appliquant le théorème de CAUCHY

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(m, n) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^s \varphi(p, s-p), \dots \dots \dots (g)$$

où  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(m, n) = \psi(m)$  et  $\sum_{m=0}^{\infty} \psi(m)$  sont des séries absolument convergentes :

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{v+s+1}(x) I_{v+s+\frac{1}{2}}(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_v(a) I_{v-1}(a) \sin 2(x-a) \cdot \sqrt{a} da, \quad R(v) > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (330)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1) I_{v+s+\frac{1}{2}}(x) I_{v+s}(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_v(a) I_{v-1}(a) \cos 2(x-a) \cdot \sqrt{a} da, \quad R(v) > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (331)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} I_{v+s+\frac{1}{2}}(x) I_{v+s}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_v(a) I_{v-1}(a) \cdot \sqrt{a} da, \quad R(v) > -\frac{1}{2}. \quad (332)$$

Si nous multiplions les deux membres de (331) par  $\sin 2x$  resp.  $\cos 2x$  et ceux de (330) par  $\cos 2x$  resp.  $\sin 2x$ , alors nous obtenons après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{v+s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \sin 2x I_{v+s}(x) - (2s+2) \cos 2x I_{v+s+1}(x) \} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_v(a) I_{v-1}(a) \sin 2a \cdot \sqrt{a} da, \quad R(v) > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (333)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{v+s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \cos 2x I_{v+s}(x) + (2s+2) \sin 2x I_{v+s+1}(x) \} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_v(a) I_{v-1}(a) \cos 2a \cdot \sqrt{a} da, \quad R(v) > -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (334)$$

Par addition et soustraction des membres correspondants de (331) et (332) on trouve :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) \{ I_{v+2s+\frac{1}{2}}(x) I_{v+2s}(x) - I_{v+2s+\frac{1}{2}}(x) I_{v+2s+1}(x) \} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_v(a) I_{v-1}(a) \cos^2(x-a) \cdot \sqrt{a} da, \quad R(v) > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (335)$$



$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+2) \{ I_{\nu+2s+\frac{3}{2}}(x) I_{\nu+2s+1}(x) - I_{\nu+2s+\frac{3}{2}}(x) I_{\nu+2s+2}(x) \} = \\ = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_{\nu}(a) I_{\nu-1}(a) \sin^2(x-a) \cdot \sqrt{a} da, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (336)$$

La substitution  $\nu=0$ ,  $\nu=\frac{1}{2}$  et  $\nu=1$  dans (330) jusqu'à (336) nous donne les formules particulières:

$$2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_{s+\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a \sin 2(x-a) da, \quad (337)$$

$$2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{s+\frac{3}{2}}(x) I_{s+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin a \sin 2(x-a) da, \quad (338)$$

$$2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{s+2}(x) I_{s+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_1(a) \sin a \sin 2(x-a) da, \quad (339)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a \cos 2(x-a) da, \quad (340)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1) I_{s+1}(x) I_{s+\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin a \cos 2(x-a) da, \quad (341)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1) I_{s+\frac{3}{2}}(x) I_{s+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_1(a) \sin a \cos 2(x-a) da, \quad (342)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_s(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_0(a) \cos a da = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin x I_0(x) + \int_0^x I_1(a) \sin a da \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (343)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} I_{s+1}(x) I_{s+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin a da, \quad (344)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \sin 2x I_s(x) - (2s+2) \cos 2x I_{s+1}(x) \} dx &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a \sin 2a da, \end{aligned} \right\} \quad (345)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+1}(x) \{ (2s+1) \sin 2x I_{s+\frac{1}{2}}(x) - (2s+2) \cos 2x I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} dx &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin a \sin 2a da, \end{aligned} \right\} \quad (346)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \sin 2x I_{s+1}(x) - (2s+2) \cos 2x I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} dx &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_1(a) \sin a \sin 2a da, \end{aligned} \right\} \quad (347)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+1}(x) \{ (2s+1) \cos 2x I_s(x) + (2s+2) \sin 2x I_{s+1}(x) \} dx &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a \cos 2a da, \end{aligned} \right\} \quad (348)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+1}(x) \{ (2s+1) \cos 2x I_{s+\frac{1}{2}}(x) + (2s+2) \sin 2x I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} dx &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin a \cos 2a da, \end{aligned} \right\} \quad (349)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+1}(x) \{ (2s+1) \cos 2x I_{s+1}(x) + (2s+2) \sin 2x I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} dx &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_1(a) \sin a \cos 2a da, \end{aligned} \right\} \quad (350)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) \{ I_{2s+\frac{1}{2}}(x) I_{2s}(x) - I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+1}(x) \} dx &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a \cos^2(x-a) da, \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (351)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) \{ I_{2s+1}(x) I_{2s+\frac{1}{2}}(x) - I_{2s+2}(x) I_{2s+\frac{3}{2}}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin a \cos^2(x-a) da, \end{aligned} \right\} \dots (352)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) \{ I_{2s+\frac{1}{2}}(x) I_{2s+1}(x) - I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+2}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_1(a) \sin a \cos^2(x-a) da, \end{aligned} \right\} \dots (353)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+2) \{ I_{2s+\frac{1}{2}}(x) I_{2s+1}(x) - I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+2}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a \sin^2(x-a) da. \end{aligned} \right\} \dots (354)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+2) \{ I_{2s+2}(x) I_{2s+\frac{1}{2}}(x) - I_{2s+3}(x) I_{2s+\frac{3}{2}}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin a \sin^2(x-a) da, \end{aligned} \right\} \dots (355)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+2) \{ I_{2s+\frac{1}{2}}(x) I_{2s+2}(x) - I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+3}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x I_1(a) \sin a \sin^2(x-a) da. \end{aligned} \right\} \dots (356)$$

Par addition resp. soustraction des membres correspondants de chacune des paires (337) et (341), (338) et (340), (351) et (354), (352) et (355), (353) et (356) on trouve :

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+3) I_{s+1}(x) I_{s+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin(2x-a) da, \dots (357)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+1}(x) I_{s+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin(2x-3a) da, \dots (358)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+\frac{1}{2}} I_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos(2x-3a) da, \dots (359)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos(2x-a) da, \quad (360)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \{I_{2s+\frac{1}{2}}(x) I_{2s}(x) + I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+1}(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a da, \quad (361)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \{(4s+1) I_{2s+\frac{1}{2}}(x) I_{2s}(x) - (4s+3) I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+1}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a \cos 2(x-a) da, \end{aligned} \right\} (362)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \{I_{2s+1}(x) I_{2s+\frac{1}{2}}(x) + I_{2s+2}(x) I_{2s+\frac{3}{2}}(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin a da, \quad (363)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \{(4s+1) I_{2s+1}(x) I_{2s+\frac{1}{2}}(x) - (4s+3) I_{2s+2}(x) I_{2s+\frac{3}{2}}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin a \cos 2(x-a) da, \end{aligned} \right\} (364)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \{I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+1}(x) + I_{2s+\frac{5}{2}}(x) I_{2s+2}(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_1(a) \sin a da, \quad (365)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \{(4s+1) I_{2s+\frac{3}{2}}(x) I_{2s+1}(x) - (4s+3) I_{2s+\frac{5}{2}}(x) I_{2s+2}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_1(a) \sin a \cos 2(x-a) da. \end{aligned} \right\} (366)$$

Si nous multiplions les deux membres de (337) par  $\sin x$  resp.  $\cos x$  et ceux de (338) par  $\cos x$  resp.  $\sin x$ , alors nous trouvons après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants, et en faisant de même à l'égard de (340) et (341), ainsi de (343) et (344):

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{s+1}(x) \{\sin x I_{s+\frac{1}{2}}(x) - \cos x I_{s+\frac{3}{2}}(x)\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin a \sin 2a da, \end{aligned} \right\} (367)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_{s+\frac{1}{2}}(x) + \sin x I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos a \sin 2a \, da, \end{aligned} \right\} (368)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_s(x) - \cos x I_{s+1}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin a \cos 2a \, da, \end{aligned} \right\} (369)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_s(x) + \sin x I_{s+1}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos a \cos 2a \, da, \end{aligned} \right\} (370)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_s(x) - \cos x I_{s+1}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin(x-a) \, da = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} I_1(x) \text{ selon (189)}, \end{aligned} \right\} (371)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_s(x) + \sin x I_{s+1}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos(x-a) \, da = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} I_0(x) \text{ selon (187)}. \end{aligned} \right\} (372)$$

Si nous multiplions les deux membres de (359) par  $\sin x$  resp.  $\cos x$  et ceux de (358) par  $\cos x$  resp.  $\sin x$ , alors nous trouvons après l'addition resp. la soustraction des membres correspondants :

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_s(x) + \cos x I_{s+1}(x) \} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin 3a \, da, \quad (373)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_s(x) - \sin x I_{s+1}(x) \} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos 3a \, da. \quad (374)$$

Par la multiplication des deux membres de (359) par  $\sin 2x$  resp.

$\cos 2x$  et ceux de (358) par  $\cos 2x$  resp.  $\sin 2x$ , on trouve après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin 2x I_s(x) - \cos 2x I_{s+1}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \sin 3a \, da, \end{aligned} \right\} \dots (375)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos 2x I_s(x) + \sin 2x I_{s+1}(x) \} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos 3a \, da. \end{aligned} \right\} \dots (376)$$



**Botany.** -- *The photoperiodic responses of *Anthemis tinctoria* in different ranges of wave-length.* By G. L. FUNKE. (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

From 1936 till 1939 in Ghent, Belgium, I investigated the flowering photoperiodicity of a large number of plant species in different ranges of wave length. The plants received full day light from 7 a.m. till 3 p.m.; for the rest of the day they were covered, partly by dark cases, partly by white (limed), red and blue glass; check plants remained in the open air. "Dark" or "D" means plants which got full day light from 7 a.m. till 3 p.m.; "red" or "R", "blue" or „B" and „white" or „W" means plants which were exposed to full day light from 7 a.m. till 3 p.m. and resp. red, blue and white light from sunrise till 7 a.m. and from 3 p.m. till sunset. According to their reactions the species could be divided into 4 groups:

I. W—R B—D: "red" flowers at the same time as "white", "blue" at the same time as "dark".

II. W—R—B D: "red" and "blue" flower at the same time as "white", the colour of the light is of no importance.

III. W R—B—D: flowering of long day plants only in "white", neither "red" nor "blue" rays have any furthering influence; vice versa for short day plants.

IV. W—B R—D: the opposite of group I, "blue" flowers at the same time as "white", "red" at the same time as "dark".

Transitional cases occur between groups I, II and III; group IV seems to stand by itself.

During the summer of 1941 I continued these researches in the garden of the Botanical Institute at Leiden. The red and blue glasses which I had at my disposal were of a rather dark colour; they transmitted less than half of the solar energy than did those which I used in Ghent; especially on clouded days the light intensity in the different compartments was very low. ROODENBURG (13 c) rightly points out the errors which may be caused under such conditions, but the species which I investigated under both types of glass appeared to be sufficiently sensitive to small quantities of light and they all gave results identical to those in former years.

*Anthemis tinctoria* is a "long-day plant" and belongs very distinctly to group I (see 4d, fig. 1). When investigating this species in 1939 I noticed some peculiarities which deserved closer attention and were therefore further investigated.

Although the number of plants used was restricted, 5 or 6 per division, their responses to the various treatments were so consistent with those of 1939 and also their further reactions so explicit, that I feel entitled to communicate the results as well-established facts.

Small specimens were potted during March and the experiments began on April 2nd. The development in the different divisions was as follows:

Specimens in "white" and "red"; control plants: the vegetative growth was normal; the stem reached a length up to about 70 cm, internodia up to 3½ cm; the anatomy of the stem (vascular bundles, lignification, sklerenchymatic tissue) was normal; diameter of the tracheae 28—34 micra; the first flowerbuds were visible on June 2nd; the growth of the flower stalks was normal, up to 20 cm; full blossoming on terminal and numerous lateral branches from the middle of June till the end of September; the ripening of the seeds took place from the end of August till the end of September; see fig. 1, no. 1.

Specimens in "blue": vegetative development normal, also the anatomy of the stem, as in "white", "red" and control; see fig. 1, no. 2; terminal flowerbuds appear towards the end of June, none on lateral branches; no or hardly any elongation of flower stalks (a

few cm at the utmost); most buds decay; the others did not open with the exception of two which took a great number of days to develop quite abnormal capitula with crippled marginal flowers (see 4*d*, fig. 2) (in a normal capitulum: diameter 45 mm, length of marginal flower 14 mm; in "blue" resp. 23 and 6 mm); they yielded only a few ripe seeds. The covering with the blue glass was discontinued on August 11th (the same holds true for the other divisions); this change, however, could not induce any more flowering. One specimen was put into full day length since July 11th; see fig. 1, no. 3; it formed a few more flowerbuds which, however, did not open with the exception of one and this gave an anomalous capitulum as described above.

Specimens in "dark": the longitudinal growth was extremely scanty, the utmost height reached about 10 cm; see fig. 1, no. 4; the foliage was dense owing to the shortness of the internodes; the lateral branches were rather numerous. The anatomy of the stem remains in the juvenile stage: separate vascular bundles, no lignification, no sklerenchymatic tissue; diameter of the tracheae 14—17 micra. This anatomical aspect is in striking contrast with that of control, "white", "red" and "blue" and illustrates the relativity of age; only towards the end of September a slight lignification sets in. Most leaves were shed towards the end of August and only terminal rosettes remain. Even microscopical examination showed no trace of flowerbuds. Since August 11th the plants were exposed to full day length, but this did not induce any further development. Also from July 11th some specimens received full day length; this extra month of long day induction caused an elongation of the stems to almost normal length; see fig. 1, no. 5; their anatomy gradually began to show the adult stage which was more or less reached towards the end of August; a few terminal flowerbuds were formed, but they remained very small, some of them hardly visible, and most of them were completely hidden by the topmost leaves.

Specimens in "control" and later in "dark"; a number of specimens stayed in full day length till May 2nd and were then transported to the dark compartment. Their longitudinal growth was more or less checked, but not nearly so markedly as that of the "dark" specimens. The plants reached a height of about 40 cm; see fig. 1, no. 6; the anatomy of the stems was normal. A small number of flowerbuds appeared on terminal and lateral branches in the beginning of June (3—4 per specimen against some dozens in control, "red" and "white"); the flower stalks elongated normally; the blossoming lasted till the end of August, while in control, "white" and "red" it continued till the end of September. The ripening of seeds was normal. Since July 11th part of them were put again in full day length; this did not change their aspect. The difference of treatment between these plants and those of "dark" which received also full day length since July 11th is that the latter ones got only 8 hours of daylight during April whereas the former ones were exposed during that month to the normal length of day.

During the last few years the fact has been established that we must distinguish two stages, and perhaps even more, in the reproductive phase. EGUCHI (3) says: "These facts show that there are two stages of different susceptibility to the photoperiod in the course of flowering, at first in the differentiation stage of bud and next in the succeeding stage of development respectively." And HAMNER (6*a*): "There is need for precise records showing the influence of photoperiod upon (1) the initiation of flower primordia as contrasted with (2) its influence upon the development of flowers, (3) its influence upon the development of fruits, and (4) its influence upon the development of seeds." And LOEWING (9) advocates: "the possible desirability of subdividing the photophase of plant development into (a) an initial flowering phase as distinguished from a subsequent (b) gametogamic phase concerned with the formation of viable gametes." (See also BORTHWICK and PARKER (2 and 11), HARDER and VON WITSCH (8), MICHAJLOVA (10), PUVIS and GREGORY (12), ROODENBURG (13*b*)). Production of anomalous flowers, owing to insufficient photoinduction has also been stated in a number of cases, e.g. by GERHARD (5), HARDER (7), HARDER and VON WITSCH (8), LOEWING (9): "It was soon

learned, however, that plants receiving minimal periods of photo-induction frequently produce flowers of anomalous shape and marked sterility.") The phenomena stated by BORGSTRÖM (1) in wild violets and by SCHAFFNER (15) in hemp are possibly related to the above mentioned ones.

*Anthemis tinctoria* presents a case where we should certainly distinguish at least 4 different reactions in: (1) the vegetative development, (2) the formation of flowerbuds, (3) the development of flowers and (4) the ripening of seeds.

(1) The vegetative development: only a long day allows sufficient formation of growth substance (compare ROODENBURG (13a) and ROODENBURG and TIDDENS (14), but the colour of the light is of no importance in this respect. This holds true for most species hitherto investigated, whether of the short day or of the long day character and in everyone of the groups I—IV (4). I cannot say whether that which has been observed about the anatomy is also a general feature. *Lycopus europaeus*, also belonging to group I, shows phenomena which, on the whole, are very parallel to those seen in *Anthemis*, but the very short stems in "dark" (11 cm) are anatomically equally well developed as the normal ones (40 à 50 cm) in control, "white", "red" and "blue"; other species have hitherto not been examined in this respect.

For the formation of flowerbuds, the development into flowering and the production of viable seeds a long day is needed. This species therefore belongs to the group LL as established by EGUCHI, but I think this is the first time we see that the different ranges of wave length have a different influence on these stages. The formation of flowerbuds is furthered by long "red"- and "blue days", but in a "red day" their number is normally great, while in "blue day" they are less numerous and many of them decay. The development of flowers is only brought forth by a long "red day"; 8 hours of full day light with additional blue light before and afterwards are not able to bring about the transition to this stage. At the utmost an exceptional anomalous capitulum develops, but this can hardly be considered as representing the reproductive stage because it yields only a very few viable seeds if at all. Control, "white" and "red" produce seeds in abundance; their percentage of germination is 94; their weight per 100 61 mgr. "Dark", preceded by long day in April, yields less, but still some thousands; germination 85 %, weight per 100 only 33 mgr. One capitulum in "blue" gave no seeds at all, one other 24, germination 67 %, weight 5 mgr; one capitulum in "blue" and long day since July 11th gave 47 seeds, germination 65 %, weight 14 mgr. When we consider the scanty weight of the last mentioned seeds we wonder at their relatively high percentage of germination; it remains to be seen whether they will give healthy plants in the next year.

*Anthemis tinctoria*, moreover, shows a strongly decreasing sensitiveness to photoinduction as the season proceeds. The full length of the relatively short days of April, when flowerbuds are not visible by far, is sufficient to induce flowering in July, although they are followed by about 10 weeks of an eight hour day; full length of the much longer days since the middle of July, when flowerbuds have since long been formed, has, on the other hand, no influence on the development into flowers, although this goes on till the end of September in control, "white" and "red"; long days in midsummer have practically influence on the vegetative growth only.

A number of cleft grafts have been made in order to see whether the florigen can be transported under the different conditions of the experiment, and if so, how. Tops of "white" and "red" were grafted as scions on stocks of "blue" and "dark" and vice versa; they failed altogether, although most of them remained turgescient for nearly a week.

#### SUMMARY.

*Anthemis tinctoria* is a very sensitive long day plant; it shows photoperiodic responses in at least four different stages: (1) vegetative development; (2) formation of flowerbuds; (3) development of flowers; (4) ripening of seeds.

Eight hours ordinary daylight supplemented by red or blue light from sunrise till 7 a.m.

and from 3 p.m. till sunset is equally sufficient for (1) as natural day length; in short day it is extremely scanty.

(2), (3) and (4) are also brought forth normally by short day supplemented by red light. Supplemental blue light partly suppresses the formation of flower buds and nearly totally prevents the development of flowers and still more so the ripening of seeds.

Long day induction during April followed by short day treatment is sufficient for a nearly normal growth of the whole plant. Long day induction from the middle of July till the end of the summer restores the check of the vegetative development caused by a foregoing short day, but is not capable of inducing the reproductive phase, even though this foregoing short day was supplemented by blue light.

I want to express my heartfelt thanks to the Board of Trustees of the University of Leiden, to the Director of the Botanical Institute, to the scientific and technical staffs of the laboratory and gardens, to the Director, the scientific and technical staffs of the State Herbarium, who, with the utmost kindness, enabled me to continue my researchwork in my present circumstances.

*Leiden, September 1941.*

*Botanical Institute.*

#### LITERATURE.

1. BORGSTRÖM, G., (1939), *Nature*, **144**, 514.
2. BORTHWICK, H. A. and PARKER, M. W., a. (1938), *Bot. Gaz.*, **99**, 825; b. (1938), *ibid.* **100**, 245; c. (1938), *ibid.* **100**, 374.
3. EGUCHI, TS., (1937), *Proc. Imp. Ac. Tokyo*, **13**, 332.
4. FUNKE, G. L., a. (1936), *Biol. Jaarb.*, **3**, 225; b. (1937), *ibid.* **4**, 345; c. (1938), *ibid.* **5**, 404; d. (1939), *ibid.* **6**, 351.
5. GERHARD, E., (1940), *Journ. für Landw.*, **87**, 161.
6. HAMNER, K. C., a. (1938), *Bot. Gaz.*, **99**, 615; b. (1940), *ibid.* **101**, 658.
7. HARDER, R., (1940), *Ber. D. Bot. Ges.*, **58**, 70.
8. HARDER, R. und WITSCH, H. VON, a. (1940), *Jahrb. wiss. Bot.*, **89**, 354; b. (1940), *Planta*, **31**, 192; c. (1940), *ibid.* **31**, 523.
9. LOEWING, W. F., (1939), *Science*, No. **2346**, 552.
10. MICHAJLOVA, L. V., (1936), *C. r. Acad. Sci. U.R.S.S.*, **2**, 102.
11. PARKER, M. W. and BORTHWICK, H. A., a. (1939), *Bot. Gaz.*, **100**, 651; b. (1939), *ibid.* **101**, 145.
12. PURVIS, O. N. and GREGORY, F. G., (1937), *Ann. Bot.*, N. S. **1**, 569.
13. ROODENBURG, J. W. M., a. (1937), *Ber. D. Bot. Ges.*, **55**, 5; b. (1939), *Weekbl. Ned. Mij. Tuinb. en Plantk.*, **13**, 2; c. (1940), *Rec. trav. bot. néerl.*, **37**, 301.
14. ROODENBURG, J. W. M. and TIDDENS, B. A., (1938), *Chron. Bot.*, **4**, 18.
15. SCHAFFNER, J. H., a. (1923), *Ecology*, **4**, 205; b. (1931), *Amer. Journ. Bot.*, **18**, 424.

G. L. FUNKE: THE PHOTOPERIODIC RESPONSES OF ANTHEMIS TINCTORIA  
IN DIFFERENT RANGES OF WAVE LENGTH.



Fig. 1. The development of *Anthemis tinctoria* on September 4th 1941.

- No. 1. Control, "white" and "red".
- No. 2. "Blue".
- No. 3. "Blue" and long day since July 11th.
- No. 4. "Dark".
- No. 5. "Dark" and long day since July 11th.
- No. 6. Long day till May 2nd, then "dark".



**Geology.** — *Die permischen Alkaligesteine und die Ophiolithe des timoresischen Faltengebirges.* Von W. P. DE ROEVER. (Communicated by Prof. H. A. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

In der vorliegenden Arbeit möchte ich die vorläufigen Ergebnisse meiner Untersuchungen an permischen Eruptivgesteinen von Timor mitteilen insbesondere mit Bezug auf die vor und während des eigentlichen Geosynkinalstadiums des timoresischen Faltengebirges auftretenden verschiedenen Eruptivstämme.

Die mir zur Untersuchung überlassenen Gesteine wurden während der von Prof. H. A. BROUWER geführten geologischen Expedition nach den Kleinen Sunda-Inseln 1937 gesammelt, und zwar der grösste Teil von F. A. H. W. DE MAREZ OYENS im Basleogebiet, und einige weitere bisher nicht eingehend beschriebene Gesteine von D. TAPPENBECK im Mollogebiet und A. L. SIMONS in Nordost Niederländisch Timor.

Nach der Publikation der wesentlichen Ergebnisse dieser Expedition, besonders der Untersuchungen von TAPPENBECK im Mollogebirge (Lit. 9), von VAN WEST im Miomaffogebiet (Lit. 12), und vom Verfasser im südwestlichen Moetisgebiet (Lit. 8), sind wir nun auf Grund meiner Untersuchungen der permischen Gesteine in der Lage, eine Mitteilung über das Auftreten von zwei charakteristischen Stammestypen von Eruptivgesteinen in den verschiedenen Formationen des timoresischen Faltengebirges zu machen, und eine Erklärung ihres Auftretens zu geben.

Wenn wir die Entwicklungsgeschichte der timoresischen Geosynklinale betrachten, so sehen wir dass im Perm, das die ältesten paläontologisch belegten Ablagerungen der Insel Timor umfasst, noch keine grösseren Meerestiefen vorhanden waren. Das eigentliche geosynklinale Stadium in der Entwicklung des Faltengebirges tritt erst im Mesozoikum ein, wo die geosynklinalen Ablagerungen an den Rändern der Geosynklinale von flyschartigen Sedimenten und von Riffkalken begleitet werden. Die Hauptorogenese des timoresischen Deckengebirges ist nach TAPPENBECK (Lit. 9) wahrscheinlich ins Oligozän zu stellen.

Vor der Expedition 1937 waren schon viele Eruptivgesteine von Timor bekannt, deren Beschreibung wir besonders WICHMANN (Lit. 13), RETGERS (Lit. 7), VERBEEK (Lit. 11), BROUWER (Lit. 1, 2, 3) und IMDAHL (Lit. 5) verdanken. Von den meisten dieser Gesteine war das geologische Alter nicht sicher bekannt.

Aus dem Perm von Timor waren ausser basischen Laven auch bereits Alkaligesteine beschrieben, deren Alter von BROUWER (Lit. 1, 2, 3) festgestellt wurde. Diese Gesteine gehören zu der Sonnebaitserie, deren Mesozoikum den Ablagerungen des zentralen Teils der Geosynklinale entspricht. Wie bereits erwähnt sind im Perm der Sonnebaitserie noch keine in grösseren Meerestiefen gebildeten Gesteine vorhanden; hier werden meistens Krinoidenkalken, begleitet von mehreren Typen von Eruptivgesteinen angetroffen. Diese Formation hat die meisten bekannten permischen Fossilfundorte von Timor, z.B. diejenigen von Somohole, Bitaoeni und Basleo geliefert. Nach meinen Untersuchungen gehören die wichtigsten primären Differentiationsglieder der permischen Effusivserie in den verschiedenen von der Expedition 1937 untersuchten Gebieten zu Olivinbasalten, Trachybasalten, Alkalitrachyten und Alkalirhyolithen. Diese Effusivreihe entspricht der von HOLMES (Lit. 4) aufgestellten trachybasaltischen (trachydoleritischen) Differentiationsreihe. Ausser auf einzelnen sich schroff aus den Ozeantiefen erhebenden Inseln (Ascension, Samoa, usw.) kommt diese Gesteinsserie vor allem in verschiedenen Typen von Bruchgebieten vor (Lit. 10). Neben den erwähnten primären Gesteinen sind im Perm der Sonnebaitserie Spilite und Poeneite (Lit. 8) gefunden worden. Die von mir unter-

suchten Proben des letztgenannten Gesteinstypus, nach dem Fluss Noil Poene<sup>1)</sup> benannt, zeigen Einsprenglinge von Kalifeldspat und in untergeordneter Menge von umgewandeltem Olivin inmitten einer Glasgrundmasse. Der Albit der Spilite und der Kalifeldspat der Poeneite sind durch metasomatische Prozesse aus basischem Plagioklas hervorgegangen. Das Vorkommen der charakteristischen Poeneite N. und S. des plioleisztözen zentralen Beckens von Timor im Zusammenhang mit den gleichen Sedimenten und Eruptivgesteinen deutet darauf hin, dass die Decke der Sonnebaitserie nicht nur im nordwestlichen Teil von Timor vorhanden ist, sondern sich auch unter dem jungen Becken hindurch bis in das südöstliche Gebirge erstreckt.

Die postpermischen Eruptivgesteine von Timor werden hauptsächlich von den Ophiolithen gebildet. Von den in der früheren petrologischen Literatur erwähnten Gesteinen sind nur die Peridotite und Serpentine und die Gabbros eindeutig als Ophiolithe zu betrachten, während mehrere andere Gesteinstypen möglicherweise zu dieser Differentiationsreihe gehören, aber ihr nicht mit Sicherheit einzureihen sind. Die Gesteinsserie der Ophiolithe ist am besten bekannt von dem im Jahre 1937 vom Verfasser untersuchten südwestlichen Moetisgebiet (Lit. 8), wo der sogenannte Ophiolithspilitkomplex die folgenden Gesteinstypen umfasst: gabbroide Gesteine, Lherzolithe, Tremolitolivingesteine, Serpentine, Albitite und Alkali-albitite, albitisierte und analcitisierte Dolerite, Andesite und Keratophyre, Spilite, Basalte und Spilitaugitite. Die Gesteinsserie wird durch eine weitgehende Albitisierung und durch das Fehlen von Kalifeldspat charakterisiert. Das Alter des Ophiolithspilitkomplexes konnte nicht genügend bestimmt werden; es ist aber mit Sicherheit prämiözän. Diese Ophiolithe und spilitischen Gesteine gehören möglicherweise zu derselben Einheit als einige seltene Kalke und Hornsteine, deren Vorkommen aber nicht genau bekannt ist. Im Felde scheinen die Gesteine des Ophiolithspilitkomplexes ausserdem mit kristallinen Schiefen verknüpft vorzukommen, während die Eruptivgesteine der an andern Orten auf Timor mit den kristallinen Schiefen verbundenen Paleoserie eine weitgehende Ähnlichkeit mit Gesteinen des Ophiolithspilitkomplexes aus dem südwestlichen Moetisgebiet zeigen. Nach VAN WEST (Lit. 12) gehören die Eruptivgesteine des Schiefer-Paleo-Komplexes im Miomaffogebiet, wo sie am besten bekannt sind, zu Lherzoliten, Serpentin, Quarzalbititen, Albitdiabasen, Keratophyren, Quarzkeratophyren und spilitischen Gesteinen. Die ältesten Sedimente der Paleoserie werden von Radiolariten gebildet (Lit. 12), während der jüngere Teil dieser Gesteinsserie alle Merkmale der Flyschfazies zeigt, ausserdem aber viel Eruptiva und Tuffe enthält, und meistens zum Oberjura und zur Kreide gehört. Stellenweise setzt sich nach TAPPENBECK (Lit. 9) und VAN WEST (Lit. 12) die Fazies der Paleoserie ins Eozän fort. Der Ophiolithspilitkomplex und die Eruptivgesteine des Schiefer-Paleo-Komplexes sind dem letzthin von KOSSMAT (Lit. 6) eingehend verfolgten ophiolithischen Magmagürtel der Kettengebirge des mediterranen Systems einzureihen. Für die Erstarrungsgesteine des Schiefer-Paleo-Komplexes scheinen besonders die Feststellungen von KOSSMAT zu gelten, dass diese Eruptivgesteine von sandig-tonigen, z.T. tuffitischen Flyschablagerungen begleitet werden und dass sie mindestens von untertertiärem, vorwiegend aber von mesozoischem Alter sind.

Ausser den obengenannten Gesteinen sind hier noch einige Eruptivtypen zu erwähnen, die möglicherweise zu andern, gleichaltrigen Differentiationsreihen gehören, die mit derjenigen des Perms der Sonnebaitserie zu vergleichen sind und die in der Keknosserie und in dem Fatoekomplex auftreten. In der Keknosserie, die Perm und Trias in Flyschfazies umfasst, sind bisher noch keine Eruptivgesteine gefunden worden, die mit Sicherheit dieser Serie einzureihen sind. Im Gebiet der permischen Aufschlüsse der Keknosserie wurde jedoch eine Menge von metergrossen, losen Blöcken angetroffen, die alle zu mesokraten Alkali-albititen gehören (Lit. 8). Im Fatoekomplex, der permische und mesozoische Riffkalke enthält, sind nur in mehr oder weniger konglomeratischen Schichten kleine Gerölle von Sanidintrachyt (Lit. 8) oder von albithaltigen Eruptivgesteinen (Lit. 12) gefunden worden.

1) Für die Ortsnamen wird die niederländische Schreibweise gebraucht, wobei oe = u.



Die einzigen genügend bekannten Differentiationsreihen des prämiocänen Faltengebirges von Timor sind also diejenigen der Ophiolithe und Spillite und diejenige des Perms der Sonnebaitserie. Die ophiolithischen und spillitischen Gesteine sind für die geosynklinale Phase in der Entwicklung des Faltengebirges charakteristisch. Im Perm dagegen, das die ältesten nichtmetamorphen Gesteine von Timor enthält, waren noch keine grösseren Meerestiefen vorhanden, und hier tritt in der Sonnebaitserie, also im Zentrum der späteren Geosynklinale, eine trachybasaltische Differentiationsreihe auf, deren Entstehung wahrscheinlich mit Brucherscheinungen während des embryonalen Stadiums der Geosynklinalbildung zusammenhängt; das Auftreten der permischen Alkaligesteine stellt mithin eine Art vorgeosynklinale Eruptionsphase dar.

*Amsterdam, Geologisches Institut.*

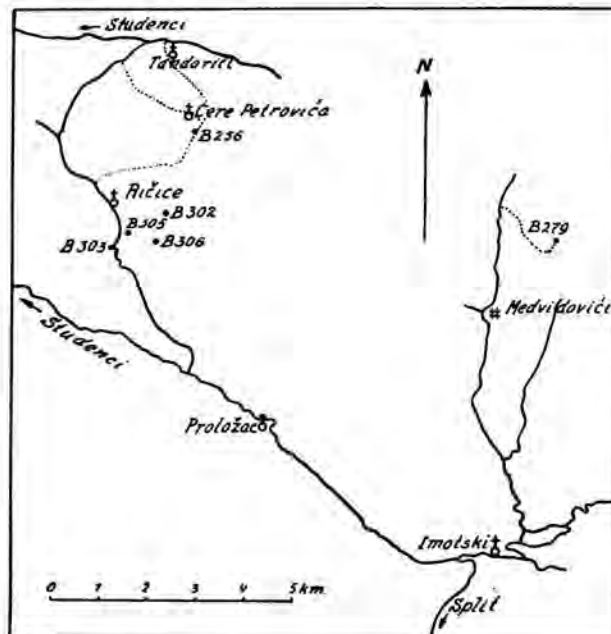
#### ZITIERTE LITERATUR.

1. BROUWER, H. A., Neue Funde von Gesteinen der Alkalireihe auf Timor. Centralblatt f. Min. etc., 1913, 570—576 und 1914, 741—745.
2. ———, Gesteenten van Oost-Nederlandsch Timor. Jaarb. Mijnwezen Nederl. Oost-Indië, 1916, Verh. I, 67—260.
3. ———, On the age of alkaline rocks from the island of Timor. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 31, 56—58 (1928).
4. HOLMES, A. und HARWOOD, H. F., The basaltic rocks of the Arctic region. Mineralogical Magazine, 18, 180—223 (1919).
5. IMDAHL, H., Beiträge zur Petrographie von West-Timor. Centralblatt f. Min. etc., 1922, 65—76.
6. KOSSMAT, F., Der ophiolithische Magmagürtel in den Kettengebirgen des mediterranen Systems. Sitz.-Ber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1937, 24, 308—325.
7. RETGERS, J. W., Gesteenten van Timor en onderhoorigheden. Jaarb. Mijnwezen Nederl. Oost-Indië, 1895, Wet. Ged., 139—148.
8. ROEVER, W. P. DE, Geological investigations in the southwestern Moëtis region (Netherlands Timor). Geol. Exp. to the Lesser Sunda Islands under leadership of H. A. BROUWER. Amsterdam, 2 (1940). Auch publiziert als Diss. Amsterdam (1940).
9. TAPPENBECK, D., Geologie des Mollogebirges und einiger benachbarter Gebiete (Niederländisch Timor). Geol. Exp. to the Lesser Sunda Islands under leadership of H. A. BROUWER. Amsterdam, 1 (1940). Auch publiziert als Diss. Amsterdam (1939).
10. TYRRELL, G. W., The principles of petrology. London (1934).
11. VERBEEK, R. D. M., Rapport sur les Moluques. Reconnaissances géologiques dans la partie orientale d'Archipel des Indes Orientales Néerlandaises. Jaarb. Mijnwezen Nederl. Oost-Indië, 1908, Wet. Ged. (Sowohl in französischer als in niederländischer Sprache erschienen.)
12. WEST, F. P. VAN, Geological investigations in the Miomaffo region (Netherlands Timor). Diss. Amsterdam (1941). Wird auch erscheinen in: Geol. Exp. to the Lesser Sunda Islands under leadership of H. A. BROUWER. Amsterdam, 3.
13. WICHMANN, A., Gesteine von Timor, Samml. geol. Reichsmus. Leiden, Serie 1, 2, 1—172 (1882—1887).

**Palæontology.** — *Some eocene Foraminifera from the neighbourhood of Ričice near Imotski, E. Dalmatia, Yugoslavia.* By R. C. VAN BELLEN.  
(Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

The author collected during the summer of 1939 some samples of flysch marls near Ričice. The map indicates the exact position of the different localities. These marls contain numerous *Foraminifera*, smaller ones as well as larger ones. This paper only deals with the Smaller *Foraminifera*.



Many of the fossils were filled with pyrite, and this often obscured the details, especially of the apertures.

The tabular enumeration gives all the details with regard to the composition of the fauna, and of the stratigraphical range of its components <sup>1)</sup>. Some remarks as to the nomenclature of the coiled

<sup>1)</sup> There are some errors in the tabular enumeration:

*Cristellaria* (R) *similis* TERQUEM with liter. 79 should be *Cristellaria* (R) *similis* D'ORB., non TERQUEM, liter. 65.

*Lagena striata* (D'ORB.) var. *alata* LIEBUS and var. *strumosa* RSS. should be *Lagena sulcata* W. a. J. etc. etc. (according to MATTHES, lit. 61).

*Cibicides dorsmanni* n.s. should be *Cibicides dorsmani* n.s.

*Lagenidae* are to be made. The genus *Cristellaria*, abandoned in the handbook by CUSHMAN, has been retained; while, where it was possible, *Lenticulina* and *Robulus* have been indicated as sub-genera by the figures *L* and *R*.

Of the 126 species and varieties 60 are known from the miocene, 60 from the oligocene, 65 from the eocene and 27 from the upper cretaceous. At first sight it seems — with regard to these figures — very difficult to state the age of the fauna. There are, however, various considerations which help us to limit the age with some precision:

1. The fact that not less than 7 species have not been found until now in deposits younger than cretaceous seems to be very suggestive. We must, however, take in mind that these species have been found only once or twice so that they do not have any real value as guide-fossils.

2. The fact that the genus *Marssonella* has been found until now only in cretaceous and eocene deposits and that *Hantkenina* is a strictly eocene genus suggest an eocene age of the fauna.

3. The fact that not less than 16 forms have been found up to now only in eocene deposits and that 10 of these, viz.: *Plectina dalmatina*, *P. eocaenica*, *Quinqueloculina carinata*, *Lagena sulcata* var. *alata*, *Plectofrondicularia trinitatensis*, *Bolivina nobilis*, *Uvigerina cocoaensis*, *U. lappa*, *Pleurostomella* cf. *acuta* and *Pl. incrassata* have been frequently encountered equally suggests an eocene age.

4. The occurrence of typical eocene larger *Foraminifera* (large *Camerinae* and *Discocyclinae*) proves the eocene age of the deposit.

5. On the other hand there are only 4 forms which have been found exclusively in oligocene deposits, and only 2 of these have been found more than once, viz. *Dorothia cylindrica* and *Cibicides dalmatina*.

The following species give rise to some remarks:

*Vulvulina* sp. *I* (fig. 1,  $\times 22$ ). Periphery acute, greatest part of the test biserial, in my specimens (10) there is at most one uniserial chamber. Outline dentate. Sutures depressed, especially those between the bi- and the uniserial part of the test. Aperture in the biserial portion a low transverse slit, in the adult an oblong slit. Length up to 1 mm., breadth up to 0.6 mm. This species differs from *V. pennatula* and *V. flabelliformis* in having depressed sutures.

*Gaudryina eocaenica* nov. sp. (fig. 2a, apertural face,  $\times 35$ ; 2b,  $\times 20$ ). Roughly agglutinated form. Length about 1.5 times breadth. Initial end with three chambers in a whorl. Sutures depressed, often hidden by the agglutination of the test. Chambers may be somewhat inflated or projecting, chiefly in the later, biserial part. Aperture an arch at the base of the last chamber. The triangular section at the initial end is invisible because of the roughness of the test. Sometimes the last chamber is somewhat terminal. Length up to 1 mm., breadth up to 0.7 mm.

*Plectina sphaerica* nov. sp. (fig. 3a,  $\times 20$ ; 3b,  $\times 56$ ; 3c, not oriented

section,  $\times 56$ ). Test almost spherical. Sometimes there is one suture visible. It is impossible to see the beginning or the end of the test, without using acid. The initial end has more than three chambers in the first whorl, probably four. Then follow one or two whorls with three chambers, and finally there are one or two biserial whorls. Aperture in the apertural face. Very roughly agglutinated. Diameter up to 0.5 mm. The spherical form is very typical.

*Tritaxilina nov. sp.* (fig. 4a,  $\times 25$ ; 4b, apical view,  $\times 25$ ). Initial end "five-serial". Each chamber corresponding with a depression. Sutures curved with the convexity upwards. Each chamber somewhat overhanging. Apertural end broken-off. Length of the fragment: 1.3 mm., breadth 0.6 mm. Only one specimen available.

*Marginulina jonesi* REUSS (fig. 5,  $\times 50$ ). Agrees fairly well with the description by REUSS. Broader at the base than at the top. About 12 costae running along the whole test, except along the last chamber. Section more compressed than section of *M. mülleri*. Length 0.5 mm., breadth 0.2 mm.

*Marginulina mülleri* REUSS (fig. 6,  $\times 26$ ). Agrees fairly well with the description by REUSS. About 14 costae running along the whole test, except along the last part. Thickness 0.55 mm., length 0.85 mm.

*Marginulina sp.* (fig. 7,  $\times 30$ ). Typical of this species is its very high apertural face as seen in the figure. Test ornamented in the coiled part with rows of knobs on the suture-lines. Later sutures only strongly limbate and raised. Length 0.8 mm., breadth 0.5 mm., height of the apertural face 0.5 mm., thickness 0.2 mm.

*Cristellaria angustimargo* (REUSS) (fig. 9,  $\times 40$ ). The only differences with the original description are the number of the chambers and the diameter. REUSS gives 7—8 chambers, and a diameter of 1.2 mm. Our specimens show only 6 chambers and a diameter of 0.4 mm.

*Cristellaria secans* REUSS (fig. 10,  $\times 54$ ). Although very badly preserved, it is possible to find the characteristics of this species of REUSS in our form. There are ten chambers in the last whorl. The sutures are strongly limbate and raised. They meet each other in an umbo, filled with clear shell-material. The periphery is sharply keeled. In accordance with the original description the aperture is invisible. Diameter 1 mm., thickness 0.4 mm.

*Cristellaria similis* D'ORB. (non TERQUEM) (fig. 8a,  $\times 25$ ; 8b,  $\times 25$ ). In the last whorl 6—7 chambers. Sutures curved, somewhat limbate and raised. Periphery with a broad thin carina. Thickness 0.4 mm., diameter 1 mm.

*Cristellaria aff. vortex* (F. a. M.). Agrees fairly well with *Crist. aff. vortex* (F. a. M.) described by NUTTALL in lit. 62.

*Dentalina bohemiensis nov. sp.* (fig. 11,  $\times 20$ ). The original description, given by REUSS of *D. annulata* in lit. 69, does agree with the figures on plate 8 (fig. 4) there, but does not agree with the figure on plate 13 (fig. 21). Our specimens agree closely with the last figure, but not so with

the first one. Particularly they do not show the typical raised sutures in the older part of the test. We propose the name of *D. bohemiensis* for the species in pl. 13, fig. 21.

*Nodosaria* sp. III (fig. 12,  $\times 56$ ). Only part of one specimen has been found. Apical end broken-off. Fragment consists of three chambers. All chambers inflated, last one more strongly so. Sutures depressed. All chambers striated with a number of oblique costae, the number of the costae on each chamber being different. Length of the fragment 0.5 mm.

*Bulimina* sp. (fig. 13,  $\times 100$ ). Test triangular with rounded edges. Initial end acute, apertural end rounded. Last three chambers making up almost  $\frac{2}{3}$  of the length of the whole test. Sutures in the initial end not depressed, limbate, in the apertural end somewhat depressed, caused by the inflation of the last chambers, also limbate. Surface perfectly smooth. Aperture comma-shaped. Length 0.2 mm. This species differs from *B. affinis* D'ORB. in the shape of the test, from *B. ovata* in its triangular section, from *B. intermedia* REUSS in the less strong inflation of the last chambers.

? *Bulimina* sp. (fig. 14a,  $\times 30$ ; 14b, apertural view,  $\times 30$ ). Resembles the genus *Bulimina* in almost every respect. However, there are some differences: after a striated triserial part two chambers follow, non-striated and biserially arranged; finally follows the last chamber, non-striated and terminal, with a rounded aperture in the centre, in a somewhat sunken area. Only one specimen has been found in the sample B 303. We do not think, that it belongs to a new genus, but consider it to be a monstrosity of a *Bulimina*, perhaps of *B. buchiana* (lit. 65).

*Uvigerina* nov. sp. (fig. 15,  $\times 65$ ). Test about twice as long as broad. Chambers somewhat inflated, sutures obscured by the ornamentation. Wall ornamented in the middle and the upper part of the test with numerous small costae, crossing the sutures; in the lower part of the test there are small spines, irregularly scattered over the surface. Aperture with a very short neck. Length 0.6 mm., breadth 0.3 mm. We did not give this species a name, because only one specimen was available.

*Gyroidina* nov. sp. (fig. 16a,  $\times 42$ ; 16b,  $\times 42$ ; 16c,  $\times 42$ ). Ventral side convex, dorsal side flattened. Ventral side showing one whorl with 6 chambers. Ventral sutures limbate and raised. Dorsal sutures limbate, oblique, flush with the surface; spiral suture limbate, raised. Only somewhat more than two whorls visible on the dorsal side, rest hidden by a mass of secondary shell-substance. Aperture at the base of the last chamber, near the periphery. Diameter 0.5 mm., height 0.35 mm. We did not give this species a name, because only one specimen was available.

*Valvulineria wittpuyti* nov. sp. (fig. 17a—c,  $\times 30$ ). Test biconvex, ventrally more than dorsally. Only one whorl visible at the ventral side, with 7—8 chambers. Ventral sutures slightly curved and strongly limbate. The first five sutures on the ventral side are strongly raised near the depressed umbo, becoming flush with the surface towards the periphery.



Periphery at the beginning of the last whorl with a subacute keel; at the end bluntly rounded, without a keel. Dorsal side showing 2—2½ whorls. Dorsal sutures somewhat curved, limbate, partly raised. Aperture just above the periphery on the ventral side. The rests of the broken-off valvular lip are visible in the figure. Diameter up to 0.7 mm. Named in honour of my colleague J. F. C. DE WITTPUYT.

*Eponides brückneri* (REUSS) (fig. 18a—b, × 17). Corresponds very well with Reuss' description and figures.

*Eponides ? karsteni* (REUSS). The only difference with the original description (lit. 72) is the presence of a large knob of clear shells substance at the dorsal side. The species, named by FRANKE in lit. 50: *E. karsteni*, is certainly not the same as *E. karsteni* (REUSS).

*Asterigerina rotula* (KFM.) (fig. 19a—c, × 16). The only difference with the description by UHLIG is that the ramification of the ventral sutures lies nearer to the margin. Sometimes the dorsal whorls are slightly narrower than in UHLIG's figures.

*Ceratobulimina perplexa* (PLUMMER) (fig. 20a—c × 32½). The only difference with the original description is the limbation of the ventral sutures, which moreover show a very narrow depression in their predial part. Length up to 0,8 m.m.

*Rogličia nov. gen.* Shape of the test trochoid, like *Ceratobulimina*. All chambers visible from the dorsal side. Only those of the last formed whorl visible on the ventral side. Chambers distinct. Wall thick. Greatest part of the surface covered with short spines; only a region, surrounding the aperture smooth. The aperture, on the ventral side of the last formed chamber, circular, surrounded by a thickened ring, covered with a thin plate. This new genus differs from *Ceratobulimina* by the punctation of the test and the form of the aperture. Named in honour of Dr. J. ROGLIČ of Beograd.

*Rogličia sphaerica nov. sp.* (fig. 21a, ventral; 21b, peripheral; 21c, dorsal; 21d, not oriented section; 21e, section through aperture; all figures × 35). Test rounded, about spherical. Peripheral margin, especially near the last chamber, somewhat lobate. In the last whorl there are 5—6 chambers, rapidly increasing in size as added. Especially the last chamber forms a great part of the ventral side. Sutures ventrally flush with the surface, last one somewhat depressed. Dorsal side showing two whorls, dorsal sutures limbate, flush with the surface. Aperture at the ventral side of the base of the last chamber. Diameter 0,5—1 mm.

*Globigerina ? tricamerata* TOLM. (fig. 22a—b, × 38). Caused by the absence of the original literature it is impossible to determine this species with certainty. The figure, given by BRADY and renamed by THALMANN, resembles our species in having only three chambers, that give the lobate appearance to the test.

*Globigerinella sp. 1* (fig. 23, × 60). This very small species shows only one whorl on the ventral side, with 5 chambers in it. The chamber-surfaces are coarsely punctated, with very small spines. Aperture on the ventral



side, with a lip over the umbilicus. Ventral sutures depressed, almost straight. Periphery rounded. Dorsal side showing two whorls. Dorsal sutures depressed, nearly straight. Chambers all inflated. Diameter 0.2 mm., thickness 0.1 mm.

*Anomalina tenuissima* (REUSS) (fig. 24a—b,  $\times 32$ ). Test almost equally biconvex. Ventrally only one whorl visible with 8 chambers. Ventral sutures strongly curved, sometimes depressed, sometimes flush with the surface. Ventral umbo filled with clear shellmaterial. Periphery with a small keel. Dorsal side showing two whorls; dorsal sutures strongly curved, limbate, flush with the surface or depressed. Greatest diameter 0.5 mm., thickness 0.1 mm.

*Anomalina tenuissima* (REUSS), var. *evoluta* nov. var. (fig. 25a—b,  $\times 40$ ). This variety differs from *A. tenuissima* (REUSS) in being more evolute and in having a ventral umbonal knob. Periphery lobate, sutures not always limbate and raised (by this characteristic the form differs from *Planulina wuellerstorfi* (SCHW.)). It differs from *Truncatulina costata* in having only 9 chambers in the last whorl, in being evolute ventrally and in having a ventral umbo-filling. Diameter 0.5 mm., thickness 0.12 mm.

*Anomalina dalmatina* nov. sp. (fig. 26a—c,  $\times 35$ ). Test equally biconvex. Ventral side only one whorl visible. Sunken umbilicus. Depressed sutures, curved near the periphery. Fourteen chambers in the last whorl. Periphery subacute without a definite keel. Dorsal side showing the chambers only in one whorl, but the limbate and raised spiral-suture can be followed for almost 2 whorls. Dorsal sutures, except the spiral suture, depressed. Aperture invisible. Its habit placed this species under the genus *Anomalina*. There is no *Anomalina* s.l. neither a *Rotalia* s.l., that shows this particular dorsal development. Diameter up to 0.8 mm., thickness up to 0.4 mm.

*Anomalina* sp. (fig. 27a—b,  $\times 48$ ). Ventral side convex, dorsal side almost flat. Ventral side showing only one whorl, with 8—9 chambers, last ones somewhat inflated. Ventral sutures flush with the surface, except the last ones, which are slightly depressed (caused by the inflation of the last chambers), all sutures limbate. Dorsal side showing  $1\frac{1}{2}$  whorls. Sutures limbate, flush with the surface, except the last ones, which are depressed. This species differs from *Anomalina similis* HANTKEN (lit. 54), in being more involute dorsally and in being thicker. Diameter 0.6 mm., thickness 0.3 mm.

*Cibicides cryptomphala* (REUSS) (fig. 28a—b,  $\times 27\frac{1}{2}$ ). Test biconvex, ventrally more than dorsally. Ventral side showing one whorl with 7—8 chambers. Ventral sutures depressed, the last ones more strongly than the first. Ventral umbo filled with a knob of clear shellmaterial. Last two or three chambers inflated. Periphery acute, not keeled. Dorsal side showing somewhat more than one whorl. Dorsal sutures depressed, the first ones somewhat limbate, curved. Spiralsuture limbate. Dorsal side with a knob

of clear shellmaterial. Last part of the periphery lobulated. Diameter 0,8 mm, thickness 0,35 mm.

*Cibicides granosus* (HANTKEN) (fig. 29a—b,  $\times 35$ ). Corresponds very well with HANTKEN's description and figures. The species has been figured here again because only one set of figures is available in the literature.

*Cibicides dalmatina* nov. nom. (fig. 30,  $\times 30$ ). Our specimen can be determined as *Truncatulina dutemplei* d'ORB. as described by REUSS in lit. 77. This description and the original one by d'ORBIGNY in lit. 65 as well as the figures do not agree inter se. The following differences are to be noticed:

REUSS:	d'ORBIGNY:
12 chambers in the last whorl.	8 chambers in the last whorl.
dorsal side showing only one whorl, rest hidden by secondary shellmaterial.	dorsal side showing two whorls, rest hidden by secondary shellmaterial.
curvature of the ventral and dorsal sutures very strong.	curvature of the sutures not so strong.

Because d'ORBIGNY used the name "*dutemplei*" first, it is necessary to give a new name to the *Truncatulina dutemplei* of REUSS. The following description can be given: Test planoconvex. Ventral side strongly convex, showing only the last whorl. Ventral sutures depressed, curved. Periphery sharp, not keeled. Dorsal side flat, showing somewhat more than one whorl, rest hidden by a somewhat raised boss of clear shellmaterial. Twelve chambers in the last whorl. Aperture over the periphery. Diameter 0,6 mm., thickness 0,35 mm. According to the position of the aperture this species belongs to the genus *Cibicides*.

*Cibicides keijzeri* nov. sp. (fig. 31a—b,  $\times 20$ ; 31c,  $\times 35$ ). Test variable, sometimes almost equally biconvex, sometimes planoconvex (dorsal side flat, ventral side convex). Ventral side with an umbo, filled with clear shellmaterial. Only one whorl visible on the ventral side. Sutures ventrally limbate, curved, mostly flush with the surface. The ventral umbo surpasses the convex outline of the ventral side. Periphery somewhat rounded, with a subacute keel of clear shell-material. Dorsal side with three visible whorls. In the last one 10—11 chambers. Dorsal sutures limbate, curved, mostly flushed with the surface. Spiral suture limbate and raised. First two whorls somewhat hidden by secondary shell-substance. Ventrally finely porous, dorsally more coarsely so. Diameter 1 mm., thickness 0,5 mm. Named in honour of my colleague F. KEIJZER.

*Cibicides trinitatensis* NUTTALL (fig. 32,  $\times 30$ ). Our species agree very well with the american ones.

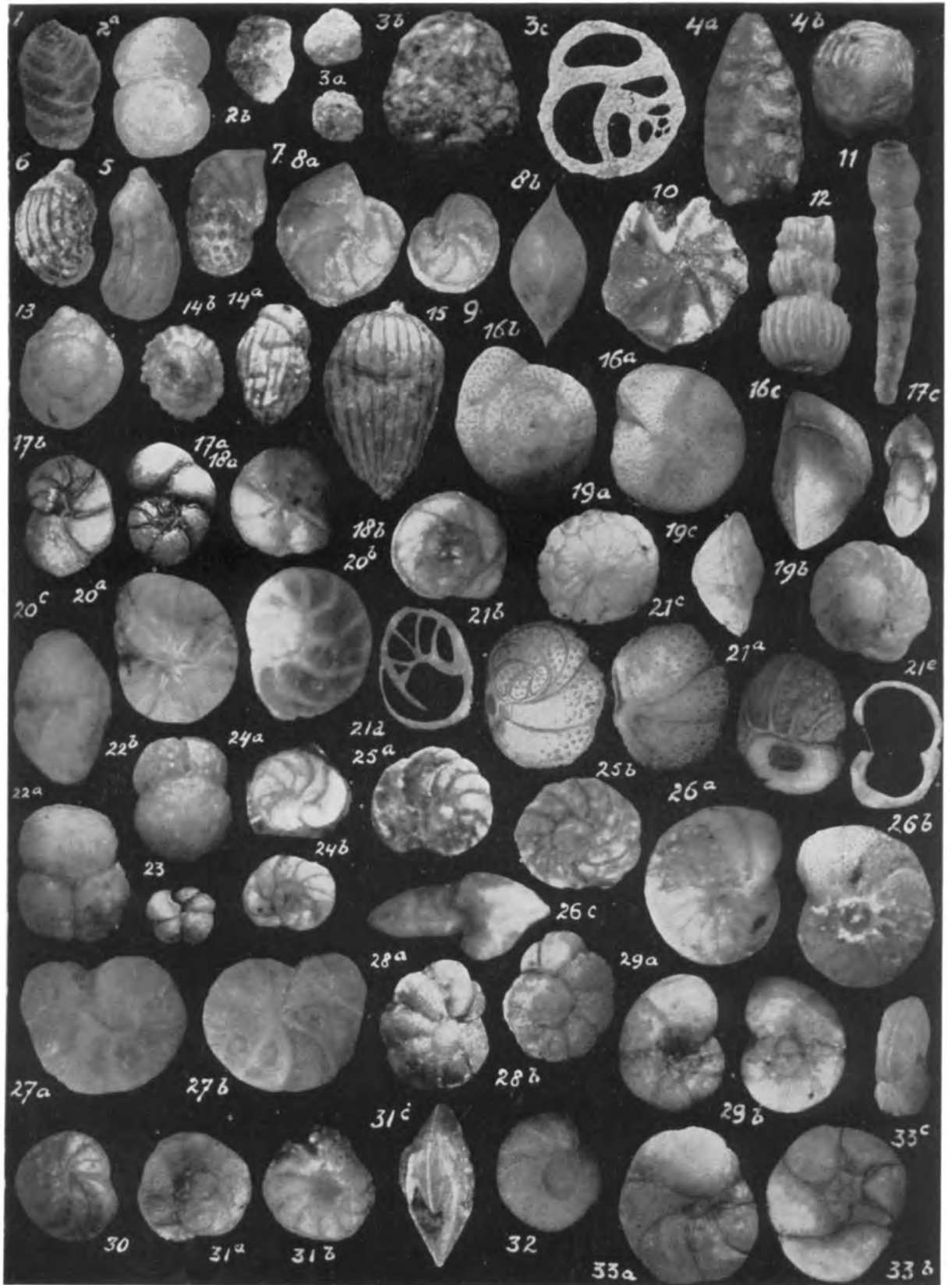
*Cibicides dorsmani* nov. sp. (fig. 33a—c,  $\times 40$ ). Ventral side convex, dorsal side more strongly so. Ventral side showing only the last whorl, with 7 chambers. Ventral sutures depressed, sometimes with a limbate ridge

in the depression. Last chamber inflated. Umbonal area depressed. Periphery subacute. Dorsal side showing two whorls. The last whorl covers a part of the preceeding one. Aperture invisible. The general appearance of the test places it under the genus *Cibicides*. Diameter up to 0,6 mm., thickness up to 0,3 mm. This species is named in honour of my colleague L. DORSMAN.

## LITERATURE.

1. W. R. BARKER, Bull. Am. Ass. Petr. Geol., 20, 433—451 (1936).
2. J. BEISSEL, Abh. kön. pr. geol. Anst. N.F., Hft. 3, 1—76; pl. I—XVI (1891).
3. P. J. BERMUDEZ, Mem. Soc. Cub. Hist. Nat., 11, 91—96 (1938).
4. K. BEUTLER, N.J., 140—162, pl. XVIII (1909).
5. J. G. BORNEMANN, Z. D. G. G., 7, 307—351, pl. XII—XIX (1855).
6. H. B. BRADY, Report on the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. "Challenger", 1873—1874; Zoology, 9, 1—814, pl. I—CXV (1884).
7. H. N. CORYELL and J. B. EMBICH, J. Pal., 11, 289—305, pl. XLI—XLIII (1937).
8. J. A. CUSHMAN, U. S. Nat. Mus. Bull., 71, prt. II (Textulariidae), 1—108, 156 textfig. (1911).
9. ——— U. S. Nat. Mus. Bull., 71, prt. III (Lagenidae), 1—118, pl. I—XLVII (1913).
10. ——— U. S. Nat. Mus. Bull., 71, prt. V (Rotalidae), 1—87, pl. I—XXXI (1915).
11. ——— U. S. Nat. Mus. Bull., 71, prt. VI (Miliolidae), 1—103, pl. I—XXXIX (1917).
12. ——— U. S. Geol. Surv. Bull., 676, 1—100, pl. I—XXX (1918).
13. ——— U. S. Nat. Mus. Bull., 100, vol. 4, 1—608, pl. I—C (1921).
14. ——— U. S. Nat. Mus. Bull., 104, prt. III (Textulariidae), 1—149, pl. I—XXVI (1922).
15. ——— U. S. Geol. Surv. Prof. Pap., 129E, 79—122, pl. XIV—XXVIII (1922).
16. ——— U. S. Geol. Surv. Prof. Pap., 129F, 123—152, pl. XXIX—XXXV (1928).
17. ——— U. S. Nat. Mus. Bull., 104, prt. IV (Lagenidae), 1—228, pl. I—XLII (1923).
18. ——— U. S. Nat. Mus. Bull., 104, prt. V (Globigerinidae), 1—56, pl. I—VIII (1924).
19. ——— Contr. Cush. Lab. For. Res., 1, 65—71, pl. X (1925).
20. ——— Bull. Scripps Inst. Oc. Techn. Ser., 1, 119—188, pl. I—VI (1927).
21. ——— Contr. Cush. Lab. For. Res., 3, 156, pl. XXVIII (1927).
22. ——— Contr. Cush. Lab. For. Res., 3, 180—185, pl. XXXI—XXXII (1927).
23. ——— J. Pal., 8, 147—172, pl. XXIII—XXVIII (1927).
24. ——— U. S. Nat. Mus., Bull., 104, prt. VI (Miliolidae .....), 1—129, pl. I—XXII (1929).
25. ——— Contr. Cush. Lab. For. Res., 5, 67—72, pl. XI (1929).
26. ——— Contr. Cush. Lab. For. Res., 5, 77—101, pl. XII—XIV (1929).
27. ——— Contr. Cush. Lab. For. Res., 5, 102—105, pl. XV (1929).
28. ——— U. S. Nat. Mus. Bull., 104, prt. VIII (Rotalidae.....), 1—179, pl. I—XXVI (1931).
29. ——— Contr. Cush. Lab. For. Res., 7, 33—46, pl. V—VI (1931).
30. ——— Contr. Cush. Lab. For. Res., 8, 75—85, pl. X (1932).
31. ——— U. S. Geol. Surv. Prof. Pap., 181, 1—88, pl. I—XXVII (1935).
32. ——— Contr. Cush. Lab. For. Res., 13, 54—61, pl. VII—VIII (1937).
33. ——— Contr. Cush. Lab. For. Res., 13, 74—86, pl. XI—XII (1937).
34. ——— Contr. Cush. Lab. For. Res., Spec. Publ., 7, 1—157, pl. I—XX (1937).

34. J. A. CUSHMAN, *Contr. Cush. Lab. For. Res., Spec. Publ.*, 8, 1—120, pl. I—XXIV (1937).
35. ——— *Contr. Cush. Lab. For. Res., Spec. Publ.*, 9, 1—228, pl. I—XXIV (1937).
36. ——— *Contr. Cush. Lab. For. Res.*, 15, 49—76, pl. IX—XII (1939).  
pl. V—VI (1936).
37. J. A. CUSHMAN and P. J. BERMUDEZ, *Contr. Cush. Lab. For. Res.*, 12, 27—38.
38. J. A. CUSHMAN and P. G. EDWARDS, *Contr. Cush. Lab. For. Res.*, 15, 33—40,  
pl. VIII (1939).
39. J. A. CUSHMAN and R. W. HARRIS, *Contr. Cush. Lab. For. Res.*, 3, 171—179,  
pl. XXIX—XXX (1927).
40. ——— *Contr. Cush. Lab. For. Res.*, 3, 128—135, pl. XXV (1927).
41. J. A. CUSHMAN and H. D. HOBSON, *Contr. Cush. Lab. For. Res.*, 11, 53—64,  
pl. VIII—IX (1935).
42. J. A. CUSHMAN and P. W. JARVIS, *Contr. Cush. Lab. For. Res.*, 4, 85—103,  
pl. XII—XIV (1928).
43. ——— *Contr. Cush. Lab. For. Res.*, 5, 6—17, pl. II—III (1929).
44. ——— *Proc. U. S. Nat. Mus.*, 80, art. 14, 1—60, pl. I—XVI (1931).
45. J. A. CUSHMAN and B. LAIMING, *J. Pal.*, 5, 79—120, pl. IX—XIV, 5 textfig. (1931).
46. J. A. CUSHMAN and F. L. PARKER, *Contr. Cush. Lab. For. Res.*, 14, 53—62,  
pl. IX—X (1938).
47. ——— *Contr. Cush. Lab. For. Res.*, 14, 90—94, pl. XV—XVI (1938).
48. J. A. CUSHMAN, R. E. and K. C. STEWART, *Trans. S. Diego. Soc. Nat. Hist.*, 6,  
41—94, pl. I—VIII (1930).
49. C. FORNASINI, *Mem. d. R. Acad. d. Sc. dell'Ist. di Bologna*, (VI), 1, 59—70,  
pl. I—IV (1904).
50. A. FRANKE, *Abh. geol. pal. Inst. Univ. Greifswald*, 6, 4—96, pl. I—VIII (1925).
51. J. J. GALLOWAY and M. MORREY, *Bull. Am. Pal.*, 55, 1—56, pl. I—VI (1929).
52. C. W. GÜMBEL, *Abh. Bayer. Ak. Wiss. II Cl.*, 10, 581—730, pl. I—IV (1870).
53. R. HAÜSLER, *N. J.*, 1, 178—189, pl. IV—V (1887).
54. M. VON HANTKEN, *Mitt. Jahrb. k. Ungar. geol. Anst.*, 4, 1—93, pl. I—XVI (1875).
55. R. JONES and K. PARKER, *Q. J. G. S., London*, 28, 103—131 (1872).
56. F. KARRER, *Sitzber. Ak. Wiss. Wien, Math. Naturw. Cl.*, 58, 111—193, pl. I—V  
(1868).
57. F. KEIJZER, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam*, 41, 987—991 (1938).
58. A. LIEBUS, *Jahrb. k. k. geol. R. A.*, 351—366, fig. 1—8 (1906).
59. ——— *Sitzber. Ak. Wiss., Wien, Math.-Naturw. Cl.*, 120, 865—956, pl. I—III  
(1911).
60. ——— *Palaeontographica*, 70, 41—114, textfig. (1928).
61. H. W. MATTHES, *Palaeontographica*, 90 A, 49—104, pl. III—VIII (1939).
62. W. L. F. NUTTALL, *Q. J. G. S., London*, 84, 57—115, pl. III—VIII (1928).
63. ——— *J. Pal.*, 6, 3—35, pl. I—IX (1932).
64. A. D'ORBIGNY, *Foraminifères*; in: DE LA SAGRA: *Hist. phys. de l'île de Cuba* (1859).
65. ——— *Foraminifères fossiles du bassin tertiaire de Vienne*, 1—132, XX pl. (1846).
66. D. PALMER and P. J. BERMUDEZ, *Mem. Soc. Cub. Hist. Nat.*, 10, 227—316,  
pl. XIII—XX (1936).
67. P. J. PIJERS, *Geogr. Geol. Meded. Phys. Geol. Reeks*, 8, 1—103, textfig., Utrecht  
(1933).
68. B. VAN RAADSHOVEN, *Nat. Hist. Maandblad Limburg*, 29, 11—12 (1940).
69. A. E. REUSS, *Die Versteinerungen der Böhmisches Kreideformation I*, 25—40,  
pl. I—XII (1845).
70. ——— *Denkschr. Ak. Wiss. Wien*, 1, 365—390, pl. XLVI—LI (1850).
71. ——— *Z. D. G. G.*, 3, 49—92, pl. III—VII (1851).
72. ——— *Z. D. G. G.*, 7, 261—292, pl. VIII—XI (1855).









73. A. E. REUSS, Sitzber. Ak. Wiss. Wien, Math. Naturw. Cl., 18, 197—296, plt. I—X (1855).
  74. ——— Sitzber. Ak. Wiss. Wien, Math. Naturw. Cl., 40, 147—238, plt. I—XIII (1860).
  75. ——— Sitzber. Ak. Wiss. Wien, Math. Naturw. Cl., 46, 1, 5—100, plt. I—XIII (1863).
  76. ——— Sitzber. Ak. Wiss. Wien, Math. Naturw. Cl., 46, 1, 308—342, plt. I—VII (1863).
  77. ——— Die Foraminiferen ..... des Septarienthones, 1—98, plt. I—XI (1866).
  78. C. SCHWAGER, Fossile Foraminiferen von Kar Nikobar. Reise der ... Novara, Geol. Theil, 2, 18—268, plt. IV—VII (1866).
  79. O. TERQUEM, Mém. Soc. Géol. France, 2, 3, 1—193, plt. I—XX (1882).
  80. H. E. THALMANN, Ecl. Geol. Helv., 25, 293—312, 26, 251—255 (1932 and 1933).
  81. V. UHLIG, Jahrb. k. k. geol. R. A., 142—241, plt. II—V (1886).
  82. M. P. WHITE, J. Pal., 2, 177—215, plt. XXVII—XXIX; 280—316, plt. XXXVIII—XLII (1928).
  83. R. C. VAN BELLEN, A. RUTGERS, J. VAN SOEST, J. F. C. DE WITTPUYT, Oligocene Foraminifera from Cuba, Proc. Ned. Ak. Wet., in litt.
-

**Paläontology.** — *Eine neue eozäne Foraminiferengattung aus Dalmatien.* Von F. KEIJZER. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

Die beschriebene Form entstammt den mitteleozänen Flyschmergeln vom Längstal zwischen Omiška Dinara und Stupina, oberhalb Omiš an der adriatischen Küste <sup>1)</sup>. In einer Foraminiferenliste war die vorliegende Form benannt als *Heterohelicidae* genus indet. <sup>2)</sup>. Bei einer eingehenden Betrachtung stellte sich aber heraus, dass das Gehäuse sehr fein agglutiniert ist, und dass die Form den Textulariden zugestellt werden muss.

*Septigerina* nov. gen.

Gehäuse keilförmig, agglutiniert, jüngerer Teil spiralg, später biserial angeordnet. Die biserialen Kammern sind von einer Zwischenwand geteilt. Von den beiden so entstandenen Teilkammerchen trägt das innere den halbkreisförmigen Mund, der auf die vorhergehende Kammerwand stützt. Das äussere Kammerchen hat nur Kommunikation mit dem inneren, jedoch keinen direkten Weg zur Aussenwelt.

*Septigerina dalmatica* nov. sp.

*Textularia* an *Spiroplecta* sp. nov. indet. LIEBUS, 1911.

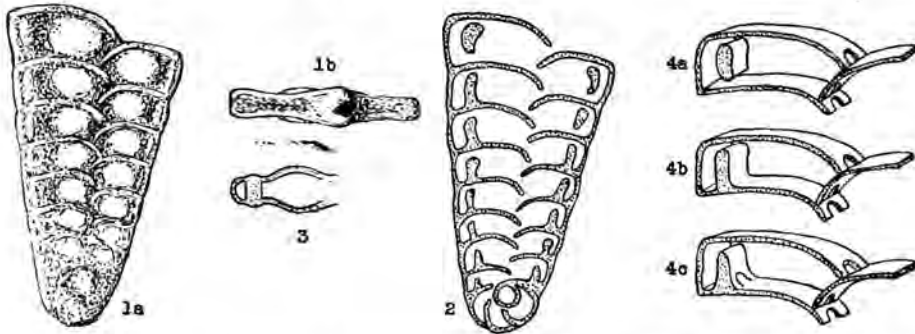
(Sitzber. Ak. Wiss. Wien, Math. Nat. Kl., Bd. 120 I, 1911, S. 932, Taf. II, Fig. 6a, b.)

Gehäuse stark abgeplattet keilförmig, sehr fein agglutiniert, mit reichlichem Zement. Auf die kugelige Embryonalkammer folgen 3 spiralg angeordnete Kammern. Der folgende biseriale Teil enthält wenigstens 18 alternierende Kammern. Weil keine vollständige Exemplaren gefunden worden sind, konnte die genaue Anzahl nicht bestimmt werden. Die gebogenen Suturen sind in mehreren Exemplaren verdickt, in einigen werden sie jedoch nur von einer feinen Linie angedeutet. Im Dünnschliff stellte sich heraus, dass die biserialen Kammern von einer Art Scheidewand geteilt werden in ein kleines äusseres, in der Randwulst gelegenes Kammerchen, und einen grösseren an der inneren Seite gelegenen Teil, der deutlich aufgeblasen hervortritt. Dass die Scheidewand nicht nur vorgetäuscht wird von einem nicht genau medianen Schnitt, der einen stark eingebuchteten Teil der

<sup>1)</sup> G. H. VOORWIJK, Geologie und Palaeontologie der Umgebung von Omiš (Dalmatien). Dissertation, Utrecht 1938.

<sup>2)</sup> F. KEIJZER, Proc. Kön. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, Vol. XLI, 9, S. 987—991 (1938).

Seitenwand getroffen hat, bewies ein Querschnitt (Fig. 3). Die Form der Scheidewand konnte nicht genau bestimmt werden. Die Figuren 4a, b, c, geben verschiedene Möglichkeiten. Die Figuren 1 und 2 ( $\times 50$ ) sind nach verschiedenen gebrochenen Exemplaren rekonstruiert. Der Bauplan weist mit Sicherheit auf die Textulariden hin.



Die Genotypen befinden sich in der Dünnschliffsammlung des Geologischen Institutes der Reichsuniversität zu Utrecht (Nummer 18743, 20976—20979).

**Histology.** — *On the structure of the connective tissue of the anterior lobe of the hypophysis cerebri and the nature of the intraprotoplasmic networks described by Tello in and around the cells of the anterior lobe.* By F. P. BOL. (From the Histological and Embryological Laboratory of the University of Utrecht.) (Communicated by Prof. J. BOEKE.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

As is well-known, the hypophysis cerebri is a very composite structure, composed of glial, epithelial and connective tissues and nerve fibres. Embryologically the hypophysis arises from two separate anlagen. The pars buccalis arises from an evagination of the buccal mucosa, first described by RATHKE (1838) and known as RATHKE's pouch. It is generally assumed that this pouch is of ectodermal origin, but according to LUPS (1929) and ATWELL (1926) the anterior wall of the hypophysial anlage from which the anterior lobe originates, is clearly ectoderm, but it is impossible to tell whether the posterior wall, which gives rise to the pars intermedia, is formed from ectoderm or entoderm.

At all events the anterior lobe of the hypophysis is of ectodermal origin, and so are the paired lateral lobes which unite in the embryo in the midline and grow laterally to become the pars tuberalis.

The anterior lobe, which constitutes on an average about 75% of the total of the gland by weight (RASMUSSEN, 1928, BUCY, 1932), is composed of polygonal epithelial cells of two types, chromophobe and chromophile cells. The latter are filled with eosinophilic and basophilic granules. The epithelial cells of the anterior lobe lie in groups and columns which are supported in a delicate reticular connective tissue mixed with thicker membranous formations and septa of collagenous connective tissue. Between these groups of epithelial cells are dilated sinusoids and other bloodvessels. According to BUCY the connective tissue forms a loose network throughout the pars anterior; the fenestrations of this net are smallest in the posterosuperior part of the anterior lobe near its junction with the pars intermedia. This connective tissue is composed of collagenous fibers with numerous reticulin fibers attached to them; at times the reticulin fibers cross from one band of collagen to another. According to BUCY this causes fibrosis of individual alveoli of epithelial cells and the number of epithelial cells in such a fibrosed alveolus is greatly reduced or they may be completely absent (BUCY, 1932, p. 733).

The innervation modus of the anterior lobe is difficult to study. According to DANDY (1913) the sympathetic nerves enter the lobe together with the bloodvessels from the circle of WILLIS, accompany the larger vessels and finally separate to wind among the epithelial cells. TELLO (1912) found it extremely difficult to impregnate the nerve fibers and could only find them in some of the specimens studied. GREVING (1926) and CROLL (1928) experienced the same difficulty, BUCY (1932) was unable to demonstrate "to his own satisfaction" any nerve fibers within the anterior lobe, using CAJAL's silver pyridine technique. Only PINES (1925) describes a very fine intercellular nervous network between the epithelial cells with pericellular loops and knoblike endings lying close to the surface of the cells. In the pictures accompanying the description of PINES the resemblance of the structures described by him as nervous to the reticulin networks of BUCY and others is very striking.

In 1903 GEMELLI described inside the protoplasm of the epithelial cells a reticulated structure, a network extending throughout the protoplasm, in the epithelial cells of the whole lobe but particularly in the cells of the anterior lobe near the infundibulum. It was not comparable with the GOLGI-apparatus. In 1909 CELESTINO DA COSTA described intraprotoplasmic filaments inside the epithelial cells which he compared with the

ergastoplasma of PRENANT. In 1912 TELLO described (by means of the ACHÛCARRO's tannic silver method) large and very clearly impregnated reticulate structures inside the protoplasm of the epithelial cells, surrounding the nucleus and sometimes drawn out into a fibrous ligament, remaining independent of the connective tissue networks. In fact, TELLO got the most perfect pictures of these networks in preparations, in which the connective tissue was but faintly impregnated. With the GOLGI-apparatus these networks had nothing to do. The ergastoplasmic filaments described by DA COSTA he thought to be a part of the network described by him. DA COSTA himself (1923) was not able to come to a decisive opinion ("je ne peux pas me prononcer d'une façon définitive sur les rapports qu'il y a entre ce que TELLO a vu chez l'homme et ce que j'ai rencontré chez le COBAYE").

BUCY working with the ACHÛCARRO method used by TELLO could not find any trace of these reticulate structures (1932), ROMEIS does not even mention them in his very elaborate study of the histology of the hypophysis in MÖLLENDORFF's Handbook (1940).

Thus we see, that the histology of the lobus anterior of the hypophysis is by no means clear. It being however of high importance to get a solid histological base for the complicated (and inconstant) physiological functions of this part of the gland, we tried to get at the bottom of this controversy by studying the structure of the lobus anterior with the aid of the same methods used by TELLO, viz. the ACHÛCARRO method and the silver method of BIELSCHOWSKY. We studied the hypophysis of the cow, which we got as fresh as possible from the abattoir. A number of specimens was investigated, and after following as well as possible the instructions given by TELLO as to the methods used by him, every possible variation of the methods used was tried.

The preparations made with the aid of the ACHÛCARRO tannic silver method showed in the first place thick membranous and fibrous formations and septa of collagenous connective tissue surrounding the groups and islands of epithelial cells on all sides, as described by BUCY. These collagenous formations were everywhere mixed with more delicate reticulated reticuline fibres, which are thickest in the neighbourhood of the blood vessels, surrounding these vessels. The reticuline fibers are of different size, very thick fibers being mixed with extremely delicate reticular fibers. The impregnation is often rather granular (fig. 1).

From these networks surrounding the groups of epithelial cells very delicate fibers arise at different places, which traverse the group of cells, running between them towards the opposite side, where they are lost again in the network mentioned above. These fibers, which are as a rule very delicate, sometimes not only run from one side of the group of epithelial cells to the other, but form a network around one or more of these cells (fig. 1 and 2). These very fine and loose networks are irregular, and are lying close to the surface of the cells they surround. As the nucleus of these cells often has an excentric position and is lying close to the surface of the cell, these fibers sometimes give the impression of running through the protoplasma of the cell they surround and of surrounding the nucleus intraprotoplasmatically. In many cases it was extremely difficult to decide for or against the intraprotoplasmic course of these delicate reticular fibers (for example in fig. 3 and 4). Especially when we study thin sections as in preparations treated after the method of BIELSCHOWSKY it is often impossible to decide this question as the connection with the dense network around the group of epithelial cells is severed. Then these networks appear as loose reticular fibers surrounding the cell and the nucleus and they suggest a close resemblance to the networks described by TELLO. Distinct pictures of the reticular structures TELLO described inside the epithelial cells we have never seen, neither in preparations made with the use of the method of ACHÛCARRO nor in BIELSCHOWSKY-preparations.

So we are tempted to ask whether the pictures given by TELLO in 1912 are not of delicate reticuline networks surrounding the epithelial cells and being connected with the reticuline network of the connective tissue surrounding the groups of epithelial cells. In

many parenchymatous organs (like the liver for example) the dense interlacing network of reticuline fibers ("Gitterfasern") surrounding the sinusoids lies very close to the epithelial cells they surround. Here in the lobus anterior of the hypophysis this network is much looser but it presents the same peculiarities.

The same question may be asked in the case of the so-called networks of sympathetic nerve fibers described by PINES. Here too the resemblance of the pictures given by PINES to those we got in our preparations of the reticuline structures is often rather striking. But as in our BIELSCHOWSKY-preparations no nerve fibers were impregnated, we are not able to express a distinct opinion in this matter. But for the description by PINES the investigation of the nervous supply of the anterior lobe of the hypophysis has produced but very poor results indeed.

Our investigations of the hypophysis being nearly finished, there was published a paper by Mrs. STAUDACHER-DALLE ASTE (March 1941), in which the reticulin structure of the follicles of epithelial cells of the thyroid gland was described. The authoress gives pictures of the reticular structures surrounding the epithelial follicles resembling the networks we found in the hypophysis. Moreover those drawings remind us of the pictures of the sympathetic fibers in the lobus anterior given by PINES and mentioned above. Thus our conclusion expressed above that the networks described by TELLO in the cells of the lobus anterior of the hypophysis and perhaps at least part of the structures described by PINES are in reality of reticular connective tissue nature, seems to be strengthened by the observations of Mrs. STAUDACHER in the thyroid gland.

#### LITERATURE CITED.

- ATWELL, W. J., *Amer. J. of Anat.*, Vol. 37 (1926).  
 BUCY, P. C., in Penfield, *Cytology of Nerv. Syst.* II (1932).  
 CELESTINO DA COSTA, A., *C. R. Assoc. Anat.*, Lyon, Mars 1923.  
 CROLL, M. M., *J. of Physiol.*, Vol. 66 (1928).  
 DANDY, W. E., *Amer. J. Anat.*, Vol. 15 (1913).  
 GEMELLI, A., *Boll. Soc. Med. Chir. di Pavia* (1903).  
 GREVING, R., *Zeitschr. ges. Neurol. u. Psych.*, 89 (1926).  
 PINES, J. L., *Journ. f. Psych. u. Neurol.*, Bd. 32 (1925).  
 STAUDACHER, DALLE ASTE, E. V., *Anat. Anz.*, Bd. 91 (1941).  
 TELLO, F., *Trabaj. del Lab. de biol. de Madrid*, Tomo X (1912).



F. P. BOL: ON THE STRUCTURE OF THE CONNECTIVE TISSUE OF THE ANTERIOR LOBE OF THE HYPOPHYSE CEREBRI AND THE NATURE OF THE INTRAPROTOPLASMIC NETWORKS DESCRIBED BY TELLO IN AND AROUND THE CELLS OF THE ANTERIOR LOBE.



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 5.



Fig. 6.

Fig. 1 and 2, sections through the midst of a follicle of epithelial cells of the lobus ant. of the hypophysis of a cow with reticular fibers traversing the follicle, method of ACHÜCARRO. Fig. 3, 4, 5 and 6. Details of the reticular structures surrounding the epithelial cells, thin sections, BIELSCHOWSKY-method, Highly magnified.

**Anatomy.** — *Microgyria and retarded migration.* By R. BRUMMELKAMP. (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

Microgyria is a congenital defect, hence its mode of genesis should be looked for during the foetal growth. It takes its name from the well-known *manifest* form in which the gyrations of the affected areas are narrow and small, their number being great and their shape and course deviating greatly from the normal. In number and shape of the gyrations true or primary microgyria is distinct from secondary or acquired microgyria (also called ulegyria) in which the gyrations are also narrow and small, but agree in number and course with the normal gyration relief. In this article we shall exclusively discuss primary or true microgyria.

By the side of the manifest form we also find a *non-apparent* form of microgyria (fig. 1). Here the gyrations visible on the exterior surface — although deviating from the normal — are not narrower, but sometimes even broader than normal. This form may be macroscopically recognized by a finally noded surface (*status verrucosus deformis*, RANKE). In this form we repeatedly observe a type of gyration which has some resemblance to that of Ungulates resp. Carnivores (BIELSCHOWSKY). This non-apparent form we count among true microgyria, because the microscopic aspect of the cell-containing cortex layers (or cellular cortex i.e. the part of the cortex below the lamina zonalis) fundamentally agrees with that of the manifest form (BIELSCHOWSKY).

In the manifest form as well as in the non-apparent form the thickness of that part of the cellular cortex which strongly participates in fissuration is less than normal. In accordance with the rule that a thin layer is more pliable than a thick one, the number of fissures of the cortex will increase when its thickness decreases and vice versa<sup>1</sup>). When the fissuration of the cellular cortex layer is followed by the exterior surface, the exterior aspect of the cerebrum has many small, narrow gyrations, and we have the manifest form of microgyria. When the surface layer does not follow, or only partly follows the manifold fissuration of the underlying cellular layers, we have the non-apparent form of microgyria (non-apparent microgyria), (fig. 2). Places coinciding with inward fissuration of the cellular layers may look like a shallow pit or groove, places coinciding with outward fissuration may occur as a slight elevation, a combination of the two processes results in a finely noded aspect of the surface. — In ulegyria (secondary microgyria) cell groups have fallen out.

To the above we add the following. It may happen that *the cellular cortex divides into two parts* separated by a pauci-cellular zone (fig. 3a). In this zone there may be many tangential nervous (BIELSCHOWSKY) resp. glial fibres. The exterior cellular layer is then fissured most strongly, the interior one to a less extent. Altogether we can then distinguish four layers: an exterior pauci-cellular layer of tangential fibres (lam. zonalis); followed by a cellular layer with numerous fissures, again a pauci-cellular zone of tangential fibres followed against by a cellular layer, which is straighter than the upper cellular layer and in the part facing the marrow is incompletely occupied and not clearly demarcated. VAN NIEUWENHUISE and also BIELSCHOWSKY have devoted an extensive

---

<sup>1</sup>) This rule holds also true for the normal cortex, e.g. the motor cortex being thick and less fissured, the visual cortex thin and much fissured; also in Ungulates the cortex is thin and has many fissures whereas in Carnivores the cortex is thick and has few fissures.

study to this form of microgyria. Besides a division of the cellular part of the cortex into two layers, there also occurs a *division into three layers* (fig. 3b).

We further mention the *heterotopies*, larger or smaller islands (resp. peninsulas, when they are partly attached to the cortex) of gray substance amidst white substance. Sometimes the heterotopies are very extensive and fissurated like the cortex. At other times they occur as globules (fig. 4a), or as groups of cells only visible through the microscope. As smallest occurring heterotopies we may consider the cortex cells scattered individually in the white substance, where they do not occur normally; these cells may be abnormally enlarged (SCHOB), (fig. 4b). The localization of these heterotopies may reach as far as the ventricles.

In the molecular layer (lamina zonalis) we often find cells of CAJAL; the nerve cells under them are often small and of an embryonic character (little protoplasm, no separation between tigroid substance and cytoplasm, more than one nucleolus). It is a remarkable fact that in *every case of microgyria a large amount of neuroblasts remain in the embryonic stage*.

As we said VAN NIEUWENHUISE starts from those forms of microgyria in which the cellular cortex has divided into two superimposed cellular systems. Normally the demarcations of these systems are not so evident as in microgyria. The exterior system is supposed to coincide with the first four layers of BRODMANN, the interior system with the fifth and sixth layer of BRODMANN. The layer of tangential fibres between the two systems is normally found between the fourth and fifth layers of BRODMANN (stripe of BAILLARGER) as in VAN NIEUWENHUISE<sup>2)</sup>. According to VAN NIEUWENHUISE the exterior system is relatively hypertrophic, on account of which fissures are formed. The primary disturbance would be owing to a lesion of the thalamus opticus. VAN NIEUWENHUISE assumes that the exterior system (the four upper layers of BRODMANN) which according to the investigations of NISSL is independent of the thalamus, continues its growth independently, whereas the interior system, dependent on the thalamus is restricted in its growth. SCHAFFER rightly objects that duplication of the cortex is by no means found in all the parts of unmistakable microgyria, and therefore cannot serve as a general base of genesis. Moreover the condition of the stemganglia is often remarkably good (BIEMOND) and the changes in the thalamus opticus may be also explained from atrophy in this organ, secondary to the changes in the cortex. Sometimes, as was said above, division of the cellular cortex into more than two layers is found, which can hardly be explained by VAN NIEUWENHUISE's theory. Moreover, the growth of the exterior system also may be reduced in size and number of cells (see fig. 5).

Mechanical influences through pressure on the surface of the growing cerebrum were supposed o.a. by VIRCHOW, SCHÄFFER (premature cranial synostosis) and by BRESLER (pressure of the exudate in meningitis or pressure through hydrocephalus). BIEMOND also thinks that exterior pressure may act as *causa efficiens*. This author published a case of non-apparent microgyria (under the name of micro-engyria) in a microcephalic child whose cranial sutures were prematurely obliterated; the shape of the cranium was abnormal. He thinks that — at least in his case — lack

---

<sup>2)</sup> On account of a study on pachygyria BIELSCHOWSKY believes that this layer of tangential fibres is homologous to the *fibrae arcuatae* and therefore, the upper system of cellular layers homologous to the whole cortex, while the underlying cellular system should be an abnormal formation in the sense of a plane-like heterotopy. BIELSCHOWSKY gives no figures which are conclusive in this respect. ROSE points to his lamina dissecans in this respect. As BECK could show this lamina does not exist in the former stages of cortical growth. Following LORENTE DE NÓ the lamina dissecans depends on the development of a protoplasmic plexus in layer IV.

of space and deformation of the cranium are primary, deformation of the cortex he assumes to be secondary, the cortex growing inward in the direction of the white substance, on account of want of space, hence the name of micro-engyria. This theory he supported by experiments on kittens, in which the growth of the cranium was prevented by means of steel caps. From this point of view, however, the heterotopies and the division of the cellular cortex into separated layers are unconceivable; on the other hand BIEMOND's experiments may help us to understand the way in which the mechanical component realizes itself in the process of fissuration.

By the side of mechanical factors autochthonic development factors claim our attention. RANKE's investigations took this direction (abnormal persistence as to form and duration of the status verrucosus simplex described by this author); also SCHAFFER (error in peri- and tectogenesis owing to the elimination of certain cell layers, a. o. of the third layer of BRODMANN, resulting in division into two parts of the original cellular layer); BIELSCHOWSKY (abnormal location and insufficient growing power of perivascular growth centres — to which power BIELSCHOWSKY also ascribes normal fissuration — by the side of compensatory new centres; combined with insufficient cell differentiation and migration, the latter causing heterotopies). Against RANKE and SCHAFFER we remark that neither by their theories the heterotopies are explained. Against BIELSCHOWSKY that his theory on fissuration (perivascular growth centres) is not in accordance with the histological facts of the fissuring cortex.

HIS showed that the wall of the brain vesicles originally consists of 2 layers: a densely cellular layer, located on the ventricle side (matrix) and a layer containing no cells on the exterior side (lamina zonalis or "Randschleier"). After a short time a tissue of loose texture is inserted between lamina zonalis and matrix. The cortex now forms, owing to the cells detaching themselves from the matrix and migrating through the intersuscepted layer, until they reach the lamina zonalis, where they assemble and are again subjected to growth. So the formation of the cortex is determined by three processes, distinct as to space and time: the formation of the matrix, the migration and the growth of the migrated cells after they have reached the lamina zonalis.

As stated in a former communication<sup>3)</sup> *these ontogenetic migrations may best be considered as movements in a field of power.*

This field of power is dependent on the existence of stimuli-conducting fibres (stimulogenous centres) in the cortex<sup>4)</sup>. In the palaeo- and archicortex these fibres are of olfactory origin and run in the zonal layer. On this system of ancient, scarcely distributed fibres in the neocortex a system of ascending thalamic fibres is superposed, to which is added a fibre system issuing from the cortex cells themselves, giving rise to long callosal

<sup>3)</sup> Equal distribution of the neo-cortical nucleus mass and equal growth intensity of the neo-cortex. (The significance of neurobiotaxis for this problem.) Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., 44, no. 5, 1941.

<sup>4)</sup> KUHLENBECK (Anat. Anz. Bd. 67, 1929) has pointed to a difference in migration intensity in amphibians, reptiles and mammals. In the palaeocortex of amphibians we find on the surface only marrowless olfactory fibres which send forth only few stimuli, so that here migration does not occur. In the archicortex of amphibians the number of fibres on the exterior surface is much greater and they are myelinated, here migration is stronger. In reptiles the fibres have developed all over the cortex and accordingly we see a more general migration. In mammals the fibre development is strongest, accordingly in mammals the migration is completest. Evidently the power of the field and with it the intensity of the migration increases with the degree of development of the fibres. As the power of this field is of neurobiotactic origin (ARIËNS KAPPERS) we may speak of a neurobiotactic field of power.

axons and short intracortical axons. So in the neocortex the field of power originates from at least three sources: Firstly from the scarcely ancient fibre system giving rise to but a weak field of power which causes only few migration and a primitive arrangement of cortex cells in a lamina granularis, which has mainly receptive functions and a deeper layer of pyramids having a corticofugal and commissural function. Secondly from the system of ascending thalamic fibres. Thirdly from the fibres issuing from the cortex cells themselves (long callosal and short intracortical fibres). The second and third fibre system highly strengthen the primitive field of power giving rise to a much greater outgrowth of matrix cells in a superficial direction and thus to the formation of supragranular cell-layers, which at the meantime acquire a larger size (ARIËNS KAPPERS)<sup>5)</sup>.

As in microgyria many neuroblasts remain on an embryonic stage of development<sup>6)</sup> the number of stimuli-conducting axons will be highly reduced and therefore the force of the field will be weakened. What will happen when the power of the field has weakened is, that the migration becomes less than normal, and therefore the cortex-anlage is disturbed. We will try to explain the pictures in microgyria from this point of view.

When the field has only slightly weakened the cortex-anlage will only be little disturbed. When, however, the field has considerably weakened, so that its power is not sufficient to overcome the resistance of the intersuscepted layer, there is no migration at all, but the cells remain located near the ventricle. A scale of gradation is possible between the two extremes.

In the case of moderate weakening of the field, where migration still takes place, the rapidity with which the migration occurs will decrease and it will not be possible for all the matrix cells to reach the exterior surface within the appointed time. This will cause a catastrophe to the retarded cells. While they are still on the way the intersuscepted layer (which will ultimately become the white substance) becomes denser, owing to ingrowth and myelinization of nerve fibres; the resistance is increased with the result that the retarded cells are as it were imbedded on the spot. We find them in groups, or individually in the white substance, where normally they should hardly, if at all be found. They may still increase by division, but migration in the direction of the lamina zonalis is impossible. These cells, scattered or grouped together in the white substance, are the heterotopies of fig. 4a and 4b.

Sometimes we see pictures in which the cellular cortex is divided into two parts, but in which the superior cellular layer is very thick as compared with the inferior layer (fig. 3c). In that case there is no trace of microgyria exteriorly: the breadth of the fissure is normal, its surface is smooth, and microscopic examination only reveals a light, narrow zone in the lower part of the cortex poor in cells, followed by a narrow zone rich in

<sup>5)</sup> The cell arrangement is in accordance with the general rule that in the central nervous system the receptive cells are of granular size and the effective cells of large, pyramidal size. So in cortex areas, where many sensory fibres enter the number of granular cells is much increased and inversely, in areas from which long effectory fibres arise, we find many pyramidal cells. As the prime function of the upper layers consists in the reception of a multitude of separate impulses it is conceivable that the cells of the upper layers form as many separated entities as possible and therefore are small and numerous. It may be that under the influence of the sensory fibres the neuroblasts preserve their granular size, they had in the embryonic stage of growth. On the other hand the large size of the pyramidal cells depends on the long axon which arises from them, and on the integrating function of these cells. Between the granular and pyramidal layers a layer of plexiform fibres develops.

<sup>6)</sup> This weakening in differentiation potency possibly depends on a deficiency in vital foodstuffs. In this respect the investigations of GAILLARD are of importance. He showed that in explantates of neuroblasts an addition of *aneurin* (vitamine  $B_1$ ) is necessary for the growth of axons and for the differentiation into the adult form of the neuroblasts.



cells. These pictures may be found near areas of true microgyria and may be explained from a slight weakening of the neurobiotactic field of power in the final stage of migration owing to which the last cells cannot quite reach the cortex anlage. A preparation taken from a foetal mouse (fig. 3d) shows the course of such a thin layer of migrating cells, checked by the investigation.

In the case described by VAN NIEUWENHUISE an other type of division of the cellular cortex into two parts exists. Between the exterior and interior parts of the cellular cortex there is in that case a plexus of tangential fibres. Normally this plexus is penetrated by cells and therefore not clearly marked in Nissl' preparations. In consequence of the diminished field of power the matrix cells are attracted with less force and they migrate more slowly than normal, so that this fibre plexus has ample time to form and to develop some degree of resistance against the cells which follow later. Their way is barred, as it were and the barrier prevents further penetration, bringing about a separation between the upper and lower layers, clearly visible in cell preparations of microgyria (fig. 3a). — The cells of the 6th (last) layer of BRODMANN are in the most unfavourable position. Their course will be increasingly impeded by the progressing condensation of the white substance. Even if they are not imbedded in the white substance as heterotopies they cannot quite catch up with the cells of the cortex anlage to which the demarcation between cortex and marrow is incompletely and not very sharp.

Sometimes the cellular cortex is divided into more than two parts as is the case in fig. 3b, taken from the occipital cortex. Possibly this type of division depends on the development of the two layers of tangential fibres, normally existing in layer IVb and V—VI.

Meanwhile the migration of the inner layers is retarded, the upper layers, which have already reached the lamina zonalis continue to grow, the result being surface extension of the upper layers.

In a former publication <sup>7)</sup> I have shown that the number of superimposed cells, constituting the cortex, is exclusively determined by the degree of migration and that the process of growth in the cortex itself only causes extension of the cortex in a tangential plane. But the growth in the tangential plane is checked o.a. by the lack of space within the cranial capsule and this limitation is compensated for by a deformation of the cortex surface in the sense of fissuration <sup>8)</sup>.

Owing to slight thickness of the layers, the manifest microgyrous cortex offers but little resistance to deformation, the pressure which arises in the cellular part of the cortex during the growth compels the layers soon to form numerous narrow, short fissures: narrow on account of the slight thickness of the cortex, short because the longitudinal axis of the narrow fissure is easily flexed. As the internal structure of the affected part is greatly different from the normal structure, the fissuration type will also be greatly different resulting in a gyration relief which can hardly be compared with the normal relief. Many narrow atypical gyrations thus form the picture of manifest microgyria.

In the non-apparent form of microgyria the fissuration of the cellular layers is not followed by an equally strong fissuration of the exterior surface, but there is a discrepancy between the two. It is striking that the strongly fissuring layer although well formed is *thin* in this form of microgyria. When owing to growth, the cell layer extends in the tangential place, and forms fissures, then apparently the connection it has with the lamina zonalis (probably owing to lack of differentiation of its cells) is not sufficient to involve it in the fissuration process. Thus the lamina zonalis remains unfissured, at the same time its stretching direction is less than normal and therefore it remains thicker than in the fissured areas. To what extent the spaces between the fissures will be filled by subsequent neuroblasts depends on the degree of disturbance of the migration of the deeper layers.

<sup>7)</sup> Loc. cit. note 3.

<sup>8)</sup> On this object an article will appear in the next number of the *Acta neerl. morph.* 1941/1942, called: *Sur la fissuration de l'écorce.*



When the subsequent neuroblasts have little or no opportunity to deposit themselves between the fissure-lamellae of the exterior cell layer, there is nothing to prevent the formation of the most irregular fissuration figures. On section we then find pictures which strongly resemble sections of papillomatous growth (fig. 6) with this difference that the growth of papillomatous epithelium is directed towards the free surface (extroversion) whereas the fissure forming cell layer of the cortex in non-apparent microgyria is directed inwards (introversion). Probably the counter pressure of the enveloping cranial capsule on the growing cortex (as in the experiments of BIEMOND), which is of course absent in papillomatous growth causes the introverse direction taken by the cortex layer; it is evident that the resistance of the cranial capsule is greater than the resistance found in the underlying layer of loose texture. So the idea of micro-angyria introduced in literature by BIEMOND, is seen to apply to some extent to this form of non-apparent microgyria.

#### LITERATURE.

- ARIËNS KAPPERS, *Vergleichende Anatomie des Nervensystems*, Haarlem 1920—1921.  
 BECK, *Morphogenie der Hirnrinde*, Monographie, *Ges. d. Neur. u. Pathol.*, 69, 1940.  
 BIELSCHOWSKY, *J. Psych. u. Neurol.*, 22, 1915; 30, 1923.  
 BIEMOND, *Annales d'Anatomie pathologique*, T. 15, N<sup>o</sup>, 8, 1938; *Ned. Tijdschr. v. Geneeskunde*, 1940.  
 BRUMMELKAMP, *Proc. Ned. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, 44, 5, 1941.  
 GAILLARD, *Ned. Tijdschr. v. Geneesk.* 1941.  
 HIS, *Ueber die Entwicklung des menschlichen Gehirns während der ersten Monate*, Leipzig, 1904.  
 KUHLENBECK, *Anat. Anz.*, 67, 1929.  
 LORENTE DE NÒ, *J. Psych. u. Neurol.*, 45, 1934.  
 VAN NIEUWENHUISE, *Neurol. Bl.*, 1913.  
 RANKE, *Beitr. pathol. Anatomie*, 47, 1910.  
 ROSE, *J. Psych. u. Neurol.*, 30, 1923.  
 SCHAFFER, *Z. f. Neurol.*, 38, 1917.
-



Fig. 1. Non-apparent microgyria.



Fig. 2. Microscopic picture of non-apparent microgyria: division into two layers, the outer layer has many fissures, the inner layer only few.

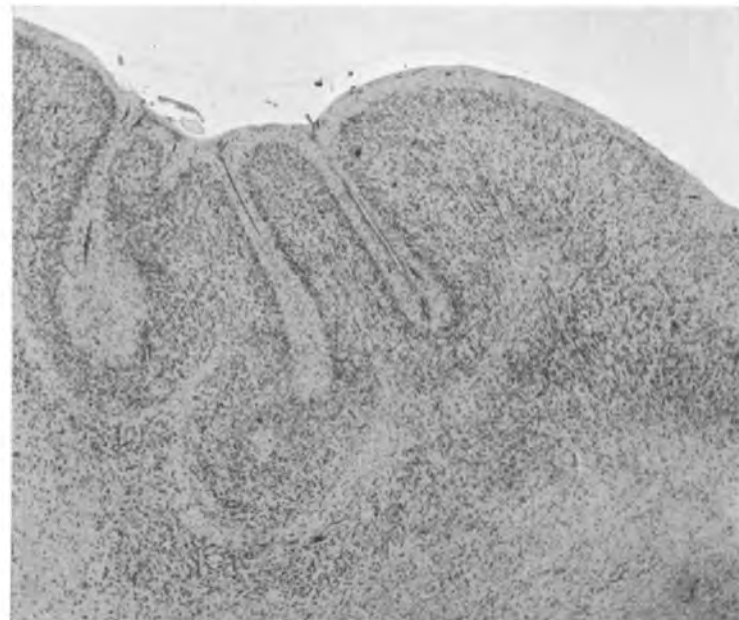


Fig. 3a. Microgyric cortex divided into two separate layers.

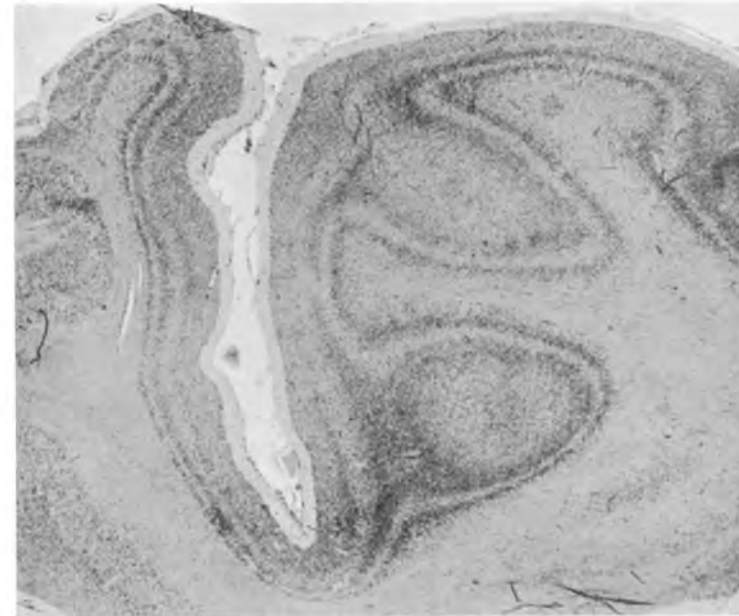


Fig. 3b. Microgyric cortex divided into three separate layers.

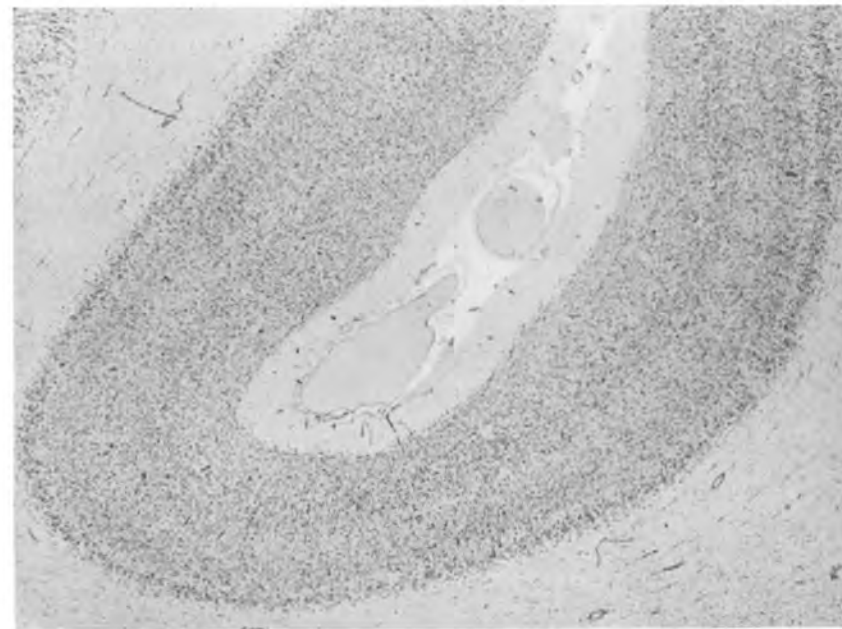


Fig. 3c. Retardation of the migration in the surroundings of microgyric cortex.

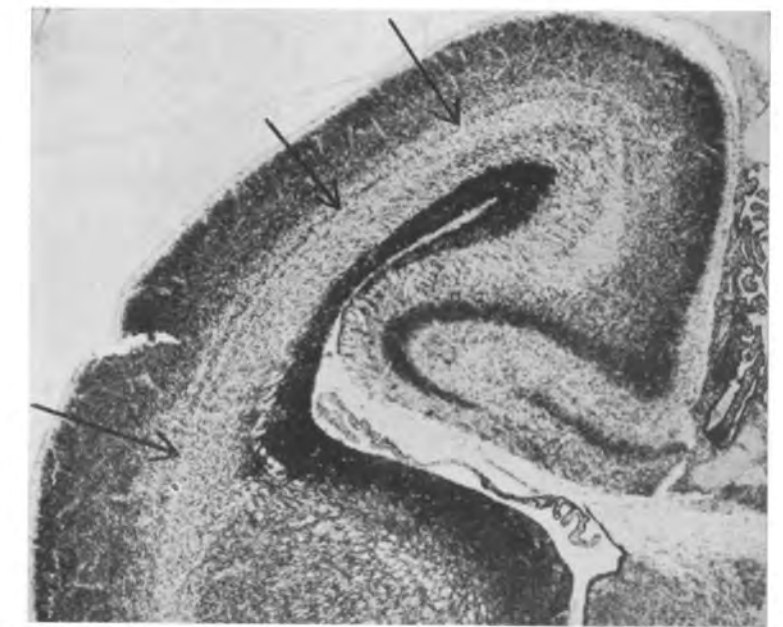


Fig. 3d. Foetal cortex of the mouse, checked in its process of migration; see the resemblance with the picture of fig. 3c.

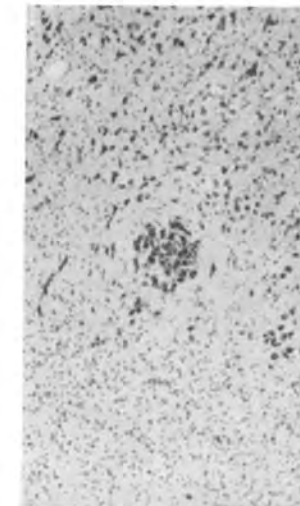


Fig. 4a. Nodule-like form of heterotopy just beneath the cortex.

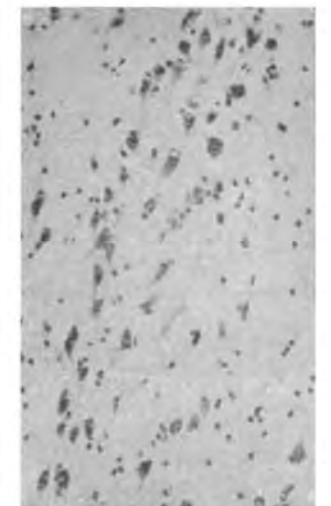


Fig. 4b. Heterotopies of single cells in the white substance.

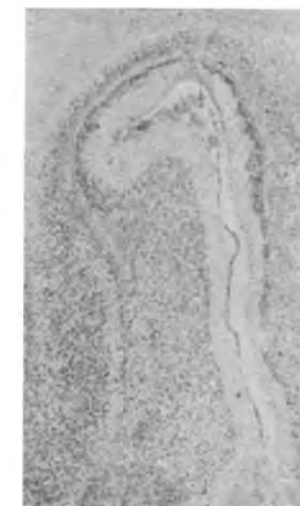


Fig. 5. Microgyric cortex divided into two layers separated by a light zone.



Fig. 6. Papilliform growth of the cortex, taken from SCHOB.

**Comparative Physiology.** — *Der Einfluss von Kohlensäure auf die Atmungsbewegungen von Crustaceen.* II. Von J. SEGAAR. (Aus der Zoologischen Station zu Neapel und dem Institut für vergleichende Physiologie der Universität zu Utrecht.) (Communicated by Prof. H. J. JORDAN.) <sup>1)</sup>

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

**HOMARUS VULGARIS.**

Abb. 6. Wenn wir einem Homarus bei diesem Versuch normales Seewasser geben, zählen wir einen Frequenz von ungefähr 60/Min. Wenn wir nun den Hahn des Apparates so drehen, dass das normale durch kohlenensäurehaltiges Seewasser von 35.84 ccm/l ersetzt wird, dann treten auch bei Homarus die drei Phasen *a*, *b* und *c*, die wir bei Palinurus kennen lernten, auf. Für Phase *a* gilt dasselbe, was wir bei Palinurus bemerkten. Es tritt eine deutliche Frequenzsteigerung auf. Gleichzeitig zeigt sich häufig aber eine allgemeine Unruhe des Tieres, welches offenbar „etwas bemerkt hat“. Zuweilen versucht es sich zu entfernen. Bei den Versuch muss daher streng darauf geachtet werden, dass das Versuchsobjekt, ausgenommen die Bewegung der Skaphognatiten, vollkommen ruhig ist.

Die zweite Phase (*b*) zeichnet sich bei Homarus nicht lediglich durch eine Frequenzverminderung, sondern sogar durch einen vollkommenen Atmungsstillstand aus. Dieser Teil der Kurve stimmt hierdurch überein mit der Hemmungsphase bei Astacus, wie GUITTART diese fand (GUITTART Abb. 2, Seite 8).

Die Hemmungsphase *b* ist bei Homarus sehr hardneckig. Nicht selten treten erst dann Atembewegungen auf, wenn wir dem Tiere normales Wasser geben, aber selbst dann tritt keine deutliche Verschnellungsphase *c* auf. Wir bringen dies in Zusammenhang mit der Tatsache, dass nach BOSWORTH und Mitarbeiter (1936) ein Teil der Kohlensäure durch den Panzer neutralisiert wird. Dadurch wird offenbar der Durchtritt der Kohlensäure in das Blut stark gehemmt. Dahingegen sehen wir in *sehr wenig* Fällen (und dann noch mit grossen Schwankungen der Resultate) die Frequenzerhöhung von Phase *c* (Siehe Abb. 6). In den Schwankungen drückt sich daher meiner Meinung nach die konkurrierende Wirkung von endoceptiv verursachter Beschleunigung und exteroceptiv verursachter Verzögerung aus.

*Die Wahrnehmung von Kohlensäure bei Homarus.*

Diese Wahrnehmung verläuft bei Homarus anders als bei Eriocheir (nach VAN HEERDT), und teilweise auch anders als bei Palinurus. Weder

<sup>1)</sup> Die erste Abteilung dieser Mitteilung ist im vorigen Heft erschienen.

die Antennulae noch die Taster der Mundteile haben Sinnesorganfunktion gegenüber Kohlensäure. Abb. 6 ist vollkommen identisch mit der Kurve eines Tieres, bei dem die Antennulae und die Taster entfernt worden waren. Dahingegen stimmt Homarus insofern mit Astacus überein, dass die Hemmungsphase durch einen homolateralen Reflex entsteht, dessen Rezeptoren sich auf den Kiemen befinden. Nur die Kiemen sind Träger dieser Sinnesorgane. Hierdurch ist es auch der Mühe wert, die Antennulae

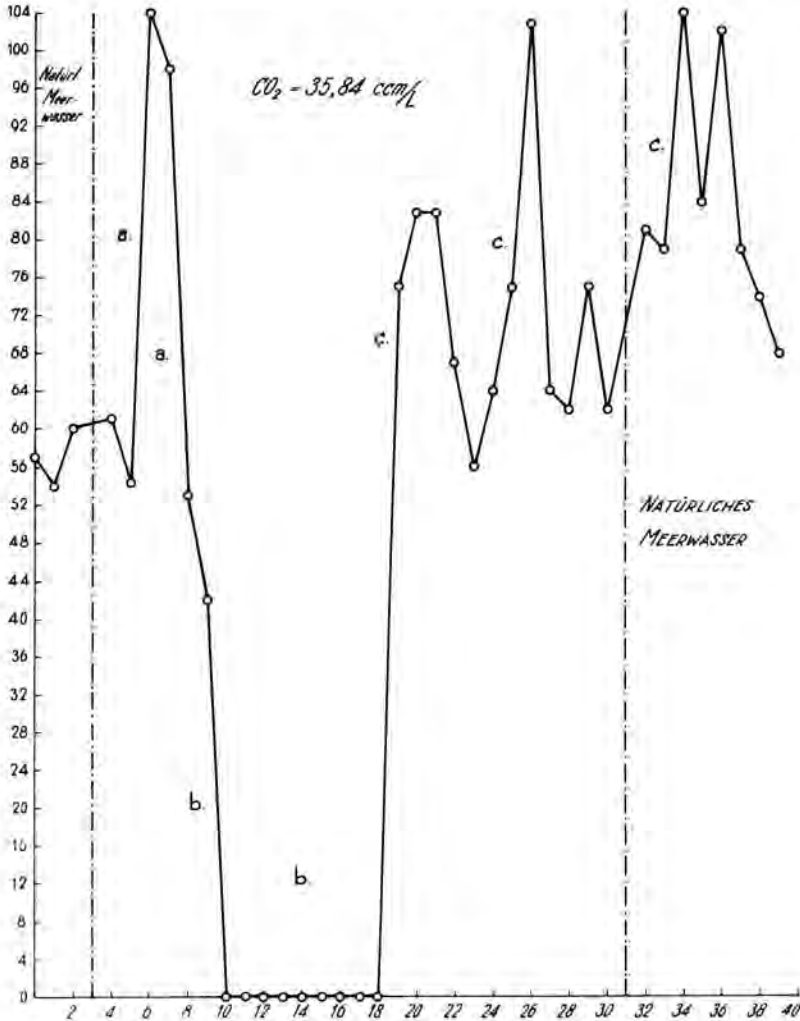


Abb. 6. Homarus.

Drephasige Atmungsreaktion nach Zufuhr von Wasser mit einer CO<sub>2</sub>-Konzentration von mehr als 3% (35,84 ccm/l). a = Frequenzzunahme; b = Apnoë; c = periodische Frequenzzunahme. Abszisse: Versuchszeit in Minuten, Ordinate: Minutenfrequenz der Skaphognatiten.

von Astacus und Homarus einerseits mit denen von Eriocheir und Palinurus anatomisch zu vergleichen. Während Palinurus auf zweierlei Weise

(Antennulae und Kiemen) vor schlechtem Atemwasser gewarnt wird, besitzt für diese Warnung Homarus (und Astacus?) nur ein einziges Organ, nämlich die Kiemen. Ob bei Eriocheir die Kiemen einen Sinnesfunktion haben, ist noch nicht untersucht worden.

ERIPHIA SPINIFRONS.

Abb. 7. Eine Kohlensäurekonzentration von 11.20 ccm/l hat deutliche Erniedrigung der Atemfrequenz zur Folge. Dies stimmt überein mit Phase *b* bei Palinurus, diese Phase dauert bei Eriphia aber länger. Die Form der Kurve ist daher anders als bei Palinurus und stimmt in dieser Hinsicht mehr mit derjenigen von Homarus überein. Nur ist die Frequenzerniedrigung nicht so stark dass ein totaler Atmungsstillstand eintritt. Bei Eriphia habe ich keine Phase *a* finden können. Wenn am Schluss wieder normales Seewasser zugefügt wird, dann wird die exteroceptiv verursachte Hemmung aufgehoben und Dyspnoë macht sich geltend.

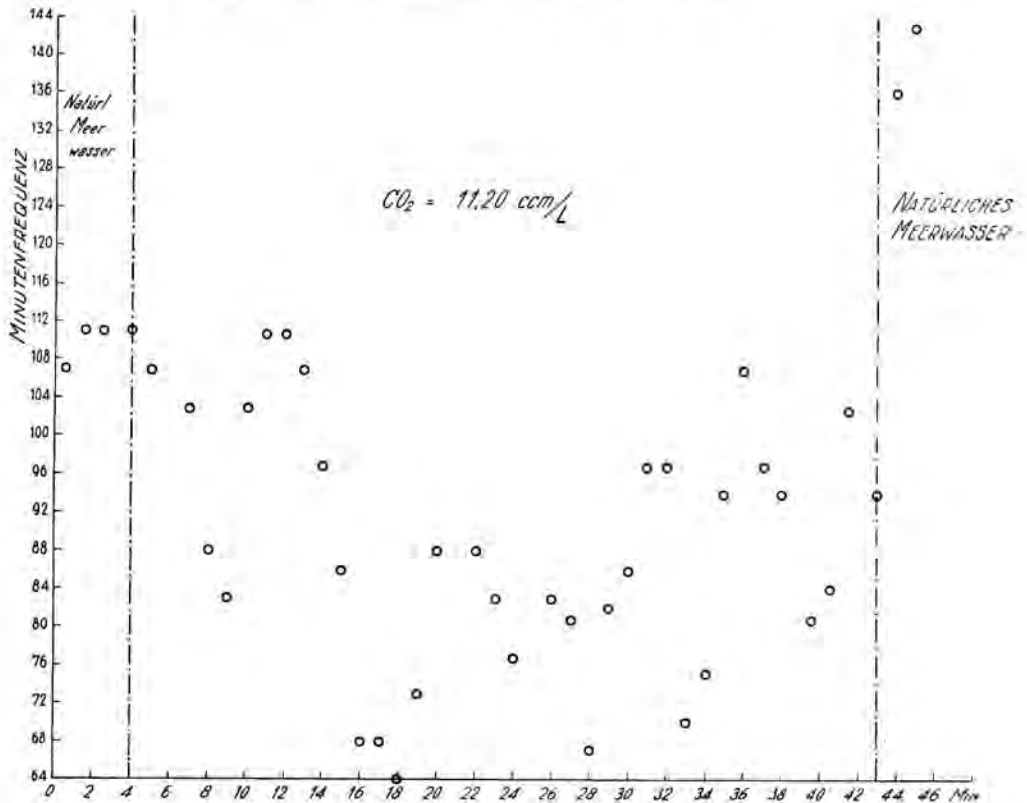


Abb. 7. Eriphia.

Änderung der Atemfrequenz nach Zufuhr von Wasser verschiedenen  $\text{CO}_2$ -Gehaltes. Abszisse: Versuchszeit in Min., Ordinate: Minutenfrequenz der Skaphognatiten. Die Frequenz nimmt in Wasser mit einer  $\text{CO}_2$ -Konzentration von ungefähr 1% (11,20 ccm/l) ab (Phase *b*), um in natürlichem Wasser wieder steil emporzusteigen (Phase *c*). Phase *a* fehlt.



Abb. 8. Eine höhere Kohlensäurekonzentration, nämlich 36.96 ccm/l verursacht erstens eine sehr deutliche Frequenzverminderung und einen totalen Atmungsstillstand. Nach einigen Unterbrechungen dieser Hemmung kommt zweitens starke Dyspnoë.

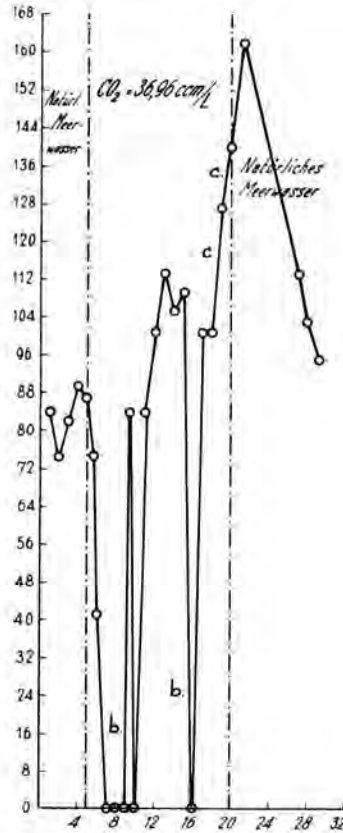


Abb. 8. Eriphia.

Zweiphasige Atmungsreaktion nach Zufuhr von CO<sub>2</sub> reichem Wasser. Phase a fehlt. Phase b = Frequenzabnahme bis zum Atmungsstillstand. Phase c = Frequenzzunahme. Abszisse: Versuchszeit in Min., Ordinate: Minutenfrequenz der Skaphognatiten.

Bei noch höheren Kohlensäurekonzentrationen, z.B. 58.24 ccm/l (hierfür haben wir keine Abb. gegeben), tritt die Hemmungsphase nicht auf. Sie wird unmittelbar durch Dyspnoë verdrängt.

#### DROMIA VULGARIS.

Abb. 9. Bei einer Kohlensäurekonzentration von 26.88 ccm/l wird die Atmungsfrequenz deutlich erniedrigt. Diese Kurve erniedrigter Frequenz kann mit derjenigen verglichen werden, die wir bei Eriphia fanden. Als Unterschied zwischen beiden fällt auf, dass in manchen Fällen bei Dromia



diese Frequenzerniedrigung einer kurz dauernden Frequenzerhöhung vorangig (auf der Figur ist diese Frequenzerhöhung nicht wiedergegeben).

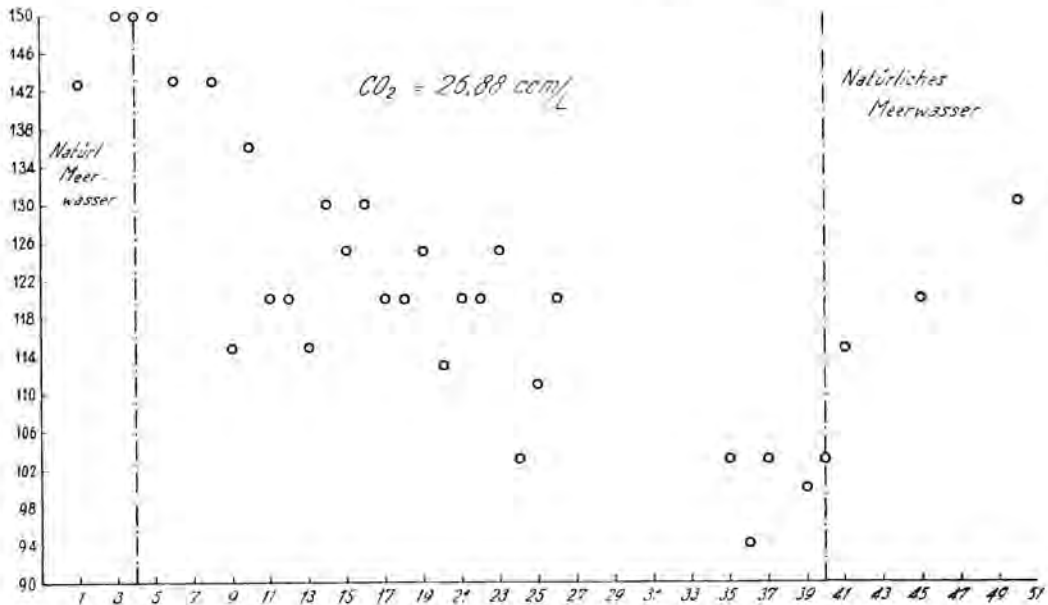


Abb. 9. *Dromia*.

Änderung der Atemfrequenz nach Zufuhr von Wasser verschiedenen  $\text{CO}_2$ -Gehaltes. Abszisse: Versuchszeit in Min., Ordinate: Minutenfrequenz der Skaphognatiten. Phase *a* könnte anwesend sein, tritt hier aber nicht auf. Die Frequenz nimmt in Wasser mit eine  $\text{CO}_2$ -Konzentration von 26.88 ccm/l ab (Phase *b*).

Abb. 10. Eine Kohlensäurekonzentration von 45.92 ccm/l verursacht drei aufeinander folgende Phasen. *a*) kurz dauernde Frequenzsteigerung. *b*) Frequenzerniedrigung, die sich jedoch darauf beschränkt, dass nach der genannten Frequenzerhöhung *a* wieder normaler Rhythmus auftritt. *c*) die Kohlensäure wirkt nun im Blut und verursacht Dyspnoë. *Dromia* stimmt also mit *Eriphia* darin überein, dass beide langdauernde Hemmungsphasen bei niedriger Kohlensäurekonzentration haben (Abb. 7 und 9). *Dromia* stimmt mit *Palinurus* und *Homarus* überein, durch das Auftreten einer kurz dauernden Verschnellungsphase *a* (Abb. 6 und 10).

#### ZUSAMMENFASSUNG.

1. *Palinurus vulgaris*, *Homarus vulgaris*, *Eriphia spinifrons* und *Dromia vulgaris* haben das Vermögen sich durch Regulierung der Atemfrequenz an Veränderungen der Kohlensäurekonzentration im Atemwasser anzupassen. In dieser Beziehung unterscheiden sich Crustaceen, die im tiefen Wasser leben, nicht von den Arten, die in der Brandung oder im untiefen Wasser leben.

2. Bei zunehmender Kohlensäurekonzentration kann man 4 Phasen dieser Reaktion von einander unterscheiden:

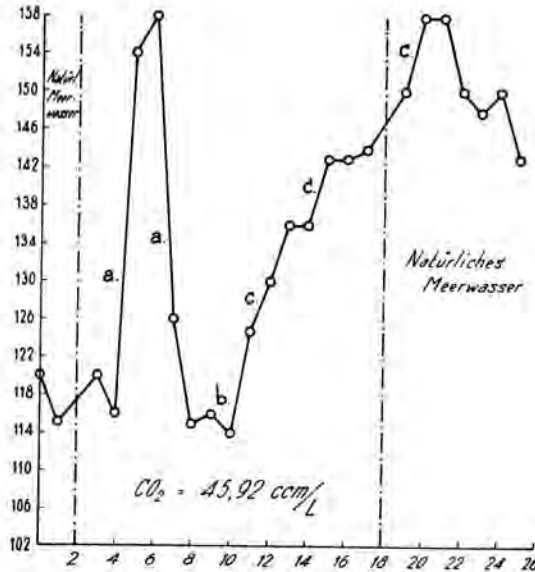


Abb. 10. Dromia.

Dreiphasige Atmungsreaktion nach Zufuhr von Wasser mit einer  $\text{CO}_2$ -Konzentration von 45,92 ccm/l. Abszisse: Versuchszeit in Min., Ordinate: Minutenfrequenz der Skaphognatiten.

- exteroceptiv verursachte Frequenzzunahme (diese wurde bei Eriphia nicht gefunden),
- exteroceptiv verursachte Frequenzverminderung oder totale Hemmung der Atmungsbewegungen,
- endoceptiv verursachte Frequenzsteigerung,
- Narkose.

3. Die Schwellenwerte, die nötig sind um die verschiedenen Reaktionsformen hervorzurufen, sind bei den verschiedenen Arten, aber auch bei verschiedenen Individuen gleicher Art, verschieden. Hierzu kommt, dass bei Homarus (wie auch bei Astacus) ein Teil der dem Wasser zugesetzten Kohlensäure durch den Panzer neutralisiert wird. Daher sind die Kohlensäurewerte, die angegeben werden, lediglich Annäherungswerte der Kohlensäurekonzentration, die bei dem betreffenden Versuche zur Anwendung kam. Bei Palinurus treten die vier Phasen auf, bei den folgenden Kohlensäurekonzentrationen:

Phase a)	ungefähr bei	1 %	Kohlensäure
„ b)	„	2 %	„
„ c)	„	5 %	„
„ d)	„	10 %	„

4. Die Sinnesorgane, die durch die Kohlensäure gereizt werden, befinden sich bei *Homarus* auf den Kiemen.

5. Die eigentliche Sinnesorgane kommen bei *Palinurus* auf den Antennulae und den Kiemen vor. Die Sinnesorgane für geringe Konzentrationen befinden sich hier auf den Antennulae, die vorhanden sein müssen, wenn Phase *a* und *b* hervorgerufen werden soll. Höhere Konzentrationen erregen die Sinnesorgane auf dem Kiemen. Hierbei treten zwei Möglichkeiten auf:

- 1) Die höhere Konzentration tritt langsam auf. In diesem Fall konkurriert die Hemmung, die durch die im Aussenmedium vorhandene Kohlensäure ausgelöst wird, mit der endoceptiven Dyspnoë, ausgelöst durch den Kohlensäuregehalt des Blutes.
- 2) Die höhere Konzentration tritt schnell auf. Ebensoschnell ergibt sich nun Hemmung.

6. Die Erregbarkeit der Kiemen durch Kohlensäure ist spezifisch. Der Schwellenwert der Kohlensäure liegt bei einem viel höheren pH als für andere Säuren. Ob die Reizung der Antennulae von *Palinurus*, wie VAN HEERDT dies bei *Eriocheir* angegeben hat, unspezifisch ist, habe ich nicht nachuntersucht.

Am Schluss dieser Mitteilung ist es mir eine angenehme Pflicht der Niederländischen Regierung für die Zuweisung eines Stipendiums und des Niederländischen Arbeitsplatzes, Herrn Prof. Dr. R. DOHRN und Dr. G. KRAMER, sowie dem gesamten Personal der Zoologischen Station zu Neapel für die Weise, wie sie alle dazu beigetragen haben, meinen Aufenthalt in Neapel nützlich und angenehm zu gestalten, meinen herzlichsten Dank auszudrücken. Herrn Prof. JORDAN und seinen Mitarbeitern im Laboratorium voor vergelijkende Physiologie zu Utrecht danke ich für ihre grosse Anteilnahme an meiner Arbeit und für ihre Hilfe.

#### LITERATUR.

- BALSS, H.: Tierwelt der Nord- und Ostsee VI von G. Grimpe und E. Wagler.  
 FOX, H. M. and M. L. JOHNSON: *J. of exper. Biol.* **11**, 1 (1934).  
 DAMBOVICEANU, Mlle ARISTIE: *Arch. Roum. de path. exp. et de microbiol.* Extrait 2 (1932).  
 JOHNSON, M. L.: *J. of exper. Biol.* **13**, 4 (1936).  
 VAN HEERDT, P. F. und B. J. KRIJGSMAN: *Z. vergl. Physiol.* **27**, 29 (1939).  
 JORDAN, H. J. and J. GUFFTART: *Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam*, **41**, 1 (1938).  
 KRUMBACH: *Handbuch der Zoöl. von Kükenthal*, 931 (1927).  
 PETERS, F.: *Z. vergl. Physiol.* **25**, 591 (1938).  
 SEGAAR, J.: *Z. vergl. Psysiol.* **21**, 492 (1934).  
 VERWEY, J.: *Treubia* **12**, 169 (1930).

**Medicine.** — *Biophysique. Spectres d'absorption de l'extrait et des protéines du poumon normal et du poumon intoxiqué par le phosgène dans l'ultra-violet.* (Troisième mémoire.) Par ONG SIAN GWAN. (Communicated by Prof. W. H. KEESOM.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

1. Nous avons montré qu'on pouvait vacciner des cobayes et des souris contre une dose sûrement mortelle de phosgène en les soumettant préalablement à des doses infamortelles de phosgène<sup>1</sup>). Pour expliquer ce résultat obtenu, nous avons pensé que le phosgène agirait sur les protéines du poumon. Il en résulterait une combinaison chimique nouvelle; cette protéine modifiée agirait comme antigène et il vaccinerait l'animal contre l'action mortelle du phosgène.

Dans le deuxième mémoire nous avons mis en évidence la présence de cette protéine nouvelle dans le poumon intoxiqué par le phosgène<sup>2</sup>). En effet, il existe une différence nette entre la solubilité, l'indice de réfraction et le pouvoir rotatoire des protéines du poumon normal et du poumon intoxiqué par le phosgène. Ces résultats montrent qu'il s'agirait d'une modification chimique de la structure moléculaire des protéines du poumon après l'action du phosgène. Nous avons poursuivi l'étude de ces protéines nouvelles à l'aide de la spectrophotométrie dans l'ultra-violet, afin de savoir comment cette modification de la structure moléculaire se traduiront dans le spectre d'absorption.

2. *Technique expérimentale.* Dans ce travail on a employé un spectrographe à optique de quartz construit par HILGER. La cuve en quartz utilisée avait une épaisseur fixe de 5 mm. La source de lumière était une lampe à arc de mercure (3 ampères, 110 volts), qui donnait une lumière rigoureusement constante. Les plaques photographiques utilisées étaient les suivantes: Radio GEVAERT, Graphic process extra GEVAERT 25 H. et D. et Autofilter ILFORD 400 H. et D. Dans certains cas les plaques ont été sensibilisées à l'aide d'une couche de vaseline. Pendant le développement les plaques furent brossées pour éviter la contamination des parties non exposées par les parties exposées.

Dans toutes ces expériences on a utilisé le poumon de porc. Le même poumon fut divisé en deux parties, la première était destinée à l'intoxication phosgénique et la deuxième servait de témoin. La préparation de l'extrait de poumon et l'isolément des protéines pures à partir de cet extrait ont été décrits dans le deuxième mémoire<sup>2</sup>).

3. *Spectres d'absorption de l'extrait de poumon normal et de poumon intoxiqué par le phosgène.* Déjà à l'aide d'un simple spectroscopie à vision directe on peut distinguer l'extrait de poumon normal de celui de poumon intoxiqué. En effet, on constatait dans le premier les deux bandes d'absorption caractéristiques de l'oxyhémoglobine ( $\lambda_1 = 5890-5770$  et  $\lambda_2 = 5500-5360 \text{ \AA}$ ), tandis qu'elles manquaient dans le second. La disparition de ces bandes d'absorption d'oxyhémoglobine a été constaté pendant la guerre de 1915-1918 dans le sang des hommes gazés.

La spectrophotographie nous montre, toutes conditions égales, que l'extrait de poumon normal présente une absorption plus prononcée que celui de poumon intoxiqué (fig. 1). La différence d'absorption se manifeste dans le visible et surtout dans l'ultra-violet.

4. Dans d'autres cas, quand l'extrait de poumon intoxiqué était plus opalescent que celui de poumon normal on observait le contraire: le poumon intoxiqué montrait dans l'ultra-violet une absorption plus marquée que le poumon normal. L'absorption était également augmentée vers les grandes longueurs d'onde (fig. 2). Dans ce cas on constatait que l'extrait de poumon intoxiqué donnait une lumière diffusée à angle droit (phénomène de TYNDALL) plus intense que l'extrait de poumon normal. La couleur observée était bleu clair.

<sup>1</sup>) ONG SIAN GWAN, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 205 (1941).

<sup>2</sup>) ONG SIAN GWAN, Ibid., **44**, 871 (1941).

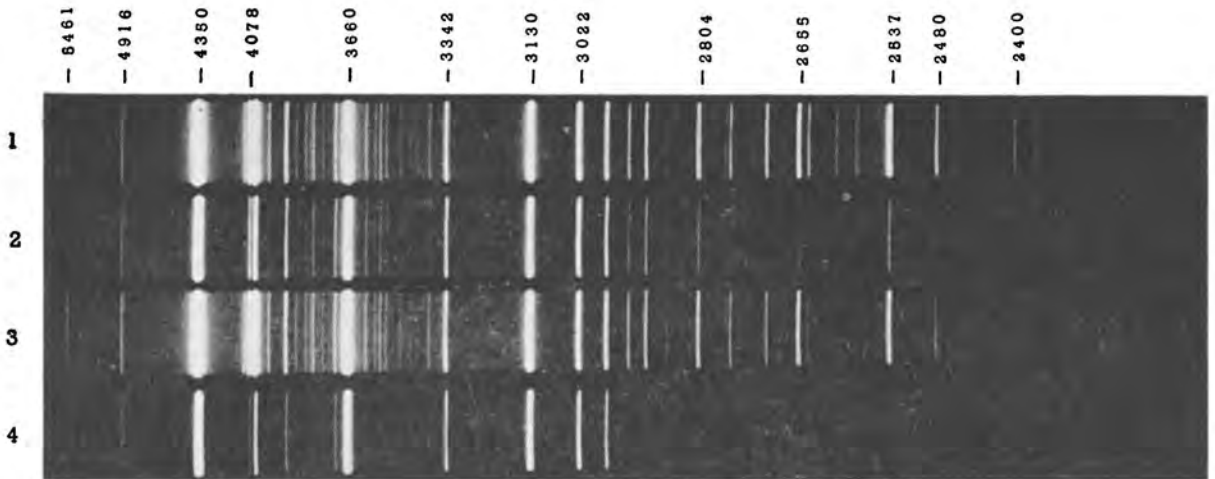


Fig. 1. Extrait de poumon 51.

- |                                     |                                    |                             |
|-------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------|
| 1. Poumon intoxiqué par le phosgène | $c = 88$ mg de protéines p. 100 cc | Temps de pose $t = 15$ sec. |
| 2. Poumon normal                    | $c = 88$ mg de protéines p. 100 cc | $t = 15$ sec.               |
| 3. Poumon intoxiqué                 | $c = 157$ mg/100 cc                | $t = 20$ sec.               |
| 4. Poumon normal                    | $c = 176$ mg/100 cc                | $t = 20$ sec.               |

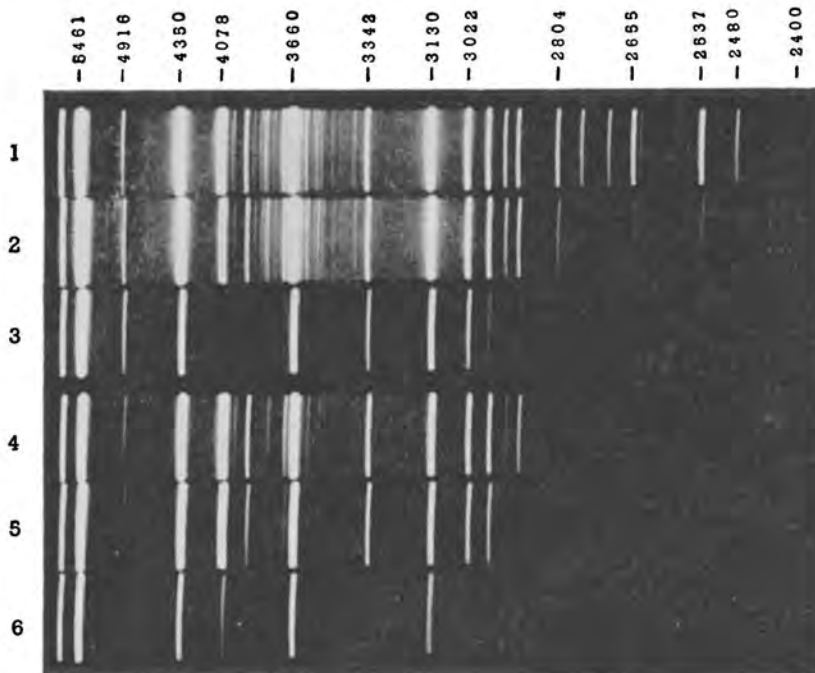


Fig. 2. Extrait de poumon 124.

- |                     |                     |                |
|---------------------|---------------------|----------------|
| 1. Poumon normal    | $c = 132$ mg/100 cc | $t = 45$ sec.  |
| 2. Poumon normal    | $c = 265$ mg/100 cc | $t = 90$ sec.  |
| 3. Poumon normal    | $c = 794$ mg/100 cc | $t = 270$ sec. |
| 4. Poumon intoxiqué | $c = 132$ mg/100 cc | $t = 45$ sec.  |
| 5. Poumon intoxiqué | $c = 265$ mg/100 cc | $t = 90$ sec.  |
| 6. Poumon intoxiqué | $c = 794$ mg/100 cc | $t = 270$ sec. |

D'après la loi bien connue de Lord RAYLEIGH<sup>3)</sup> l'intensité de la lumière diffusée est égale à

$$I = K \frac{I_0 N v^2}{\lambda^4 x^2} \left( \frac{n_1^2 - n_0^2}{n_1^2 + 2 n_0^2} \right)^2 \sin^2 \theta \quad \dots \quad (1)$$

où  $I$ , l'intensité de la lumière diffusée à une distance  $x$  du particule,  $I_0$ , l'intensité de la lumière incidente,  $N$ , le nombre de particules par unité de volume,  $v^2$ , le carré moyen du volume des particules,  $\lambda$ , la longueur d'onde,  $n_1$ , l'indice de réfraction des particules,  $n_0$ , l'indice de réfraction du solvant et  $\theta$  l'angle de la direction de la lumière incidente avec la lumière diffusée. Cette loi suppose que les dimensions des particules sont petites par rapport à la longueur d'onde.

Si la concentration  $c = Nvd$  ( $d$  = densité) est constante, on voit que l'intensité de la lumière diffusée augmente en même temps avec le volume des particules. C'est ce que nous avons constaté dans le cas considéré.

Considérons la loi de LAMBERT-BEER

$$I = I_0 e^{-kcd} \quad \dots \quad (2)$$

où  $I_0$  représente l'intensité de la lumière initiale et  $I$ , l'intensité de la lumière après avoir traversé l'épaisseur  $d$ .

RAYLEIGH a montré que le coefficient d'absorption (densité optique)  $k$  est défini par la relation

$$k = K \frac{N v^2}{\lambda^4} \left( \frac{n_1^2 - n_0^2}{n_1^2 + 2 n_0^2} \right)^2 \quad \dots \quad (3)$$

où  $K$  désigne une constante.

Pour des solutions d'une même concentration  $c = Nvd$ , la relation devient

$$k = K_1 \frac{v}{\lambda^4} \left( \frac{n_1^2 - n_0^2}{n_1^2 + 2 n_0^2} \right)^2 \quad \dots \quad (4)$$

Si pour des solutions d'une même concentration les particules grossissent par accollement entre elles, de sorte que le volume  $v'$  d'une nouvelle particule est égal à la somme des volumes des particules composantes, l'indice de réfraction de la particule ne change pas. Le coefficient  $k$  est dans les deux cas proportionnel au volume des particules.

Si  $k'$  désigne le coefficient d'absorption après l'augmentation du volume des particules, on voit que pour toutes les radiations le rapport  $\frac{k'}{k}$  est constante et il est proportionnel à

$\frac{v'}{v}$ . Mais la différence absolue  $|k' - k|$  est proportionnelle à  $\frac{v' - v}{\lambda^4}$  de sorte qu'elle est beaucoup plus grande dans le violet que dans le rouge. Ainsi s'explique l'augmentation de l'absorption vers le visible quand le volume des particules augmente. Le coefficient  $1/\lambda^4$  est 16 fois plus grand pour  $\lambda = 0 \mu, 20$  que pour  $\lambda = 0 \mu, 40$ .

5. L'expérience suivante montre l'exactitude de ce raisonnement. On sait qu'en sérologie on peut obtenir des émulsions de lipoïdes d'une opacité différente suivant le mode de préparation. Ainsi en projetant 0,5 cc d'un extrait alcoolique de coeur de veau (antigène syphilitique préparé d'après BORDET-RUELENS) dans un vase cylindrique contenant 20 cc d'eau salée à 0,9 p. 100, on obtient une émulsion limpide. Si l'on ajoute d'abord 0,5 cc d'extrait dans le vase et on verse ensuite d'un seul coup 20 cc d'eau salée à 0,9 p. 100, on obtient une émulsion à peine opalescente. Si dans la dernière opération on ajoute l'eau salée par petites fractions, on obtient une émulsion opaque. En modifiant le temps de dilution on peut avoir des émulsions de lipoides d'une opacité différente.

<sup>3)</sup> Lord RAYLEIGH (J. W. STRUTT), Phil. Mag. 41, p. 107, 274, 447 (1871); 47, p. 375 (1899).



La figure 3 montre les spectres d'absorption des émulsions de lipoiides ainsi préparées. On constate, que des émulsions contenant la même quantité de lipoiides, mais d'une opacité différente ne donnent pas des spectres d'absorption identiques. A mesure que le volume des particules augmente, l'absorption est augmentée vers le visible pour le même temps de pose. Cet effet peut être également obtenu, si pour une même émulsion on diminue le temps de pose. On peut le constater en comparant par exemple les spectres 1, 4 et 7 dans la figure 3.

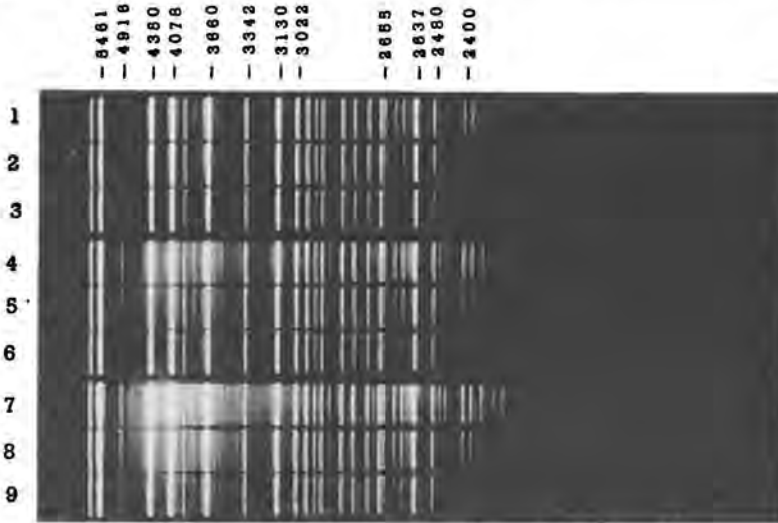


Fig. 3. Emulsion de lipoiides dans l'eau salée à 0,9 p. 100.

1, 2, 3  $c = 16,5$  mg de lipoiides p. 100 cc  $t = 20$  sec.

L'opacité et par conséquent la dimension des particules augmente dans l'ordre indiqué.

4, 5, 6 mêmes émulsions  $t = 40$  sec.

7, 8, 9 mêmes émulsions  $t = 80$  sec.

Il est probable qu'on peut obtenir le même phénomène avec des solutions de protéines, dont les particules ont des dimensions différentes.

6. *Spectres d'absorption des protéines pures isolées à partir des poumons normal et intoxiqué.* Avec les protéines pures les résultats sont très nets. Le spectre d'absorption des protéines de poumon normal montre toujours une absorption plus prononcée et elle augmente vers le visible. Ce résultat a été obtenu sur plusieurs poumons. La figure 4 montre un exemple type d'un même poumon, dont une partie fut intoxiqué et l'autre partie servait de témoin. En comparant les spectres 3 et 4 avec les spectres 7 et 8 on constate une différence nette dans l'ultra-violet au dessous de 3000 Å, mais on peut également remarquer une différence d'absorption entre les raies 4078 et 3660 Å.

7. Nous présentons ici également les courbes de spectres d'absorption obtenues par enregistrement photométrique. L'appareil employé était un microphotomètre enregistreur MOLL construit par KIPP & ZONEN à Delft.

Les figures 5 et 6 montrent respectivement les courbes des spectres d'absorption de l'extrait de poumons normal et intoxiqué. (Spectres No. 4 et 3 de la figure 1.)

En comparant les deux figures on constate que la différence d'absorption est déjà très nette dans le visible. En effet l'extrait du poumon normal (fig. 5) contenant environ la même quantité de protéines montre un pouvoir absorbant plus important que celui du poumon intoxiqué (fig. 6). Cette différence d'absorption est encore plus accentuée dans l'ultra-violet. Tandis que le poumon normal montre des maxima d'absorption au dessus de 80 unités arbitraires, le poumon intoxiqué par contre ne présente que des maxima au dessous de 60 unités. Ceci est vrai pour les raies au dessus de 3000 Å. A partir de

3000 Å et au dessous de celui-ci on constate dans la courbe du poumon normal, la disparition de la plupart des raies spectrales.

Les figures 7 et 8 représentent respectivement les courbes des spectres d'absorption des protéines pures isolées à partir des poumons normal et intoxiqué (spectres No. 4 et 8 de la figure 4). On peut ici également remarquer la différence d'absorption entre les raies

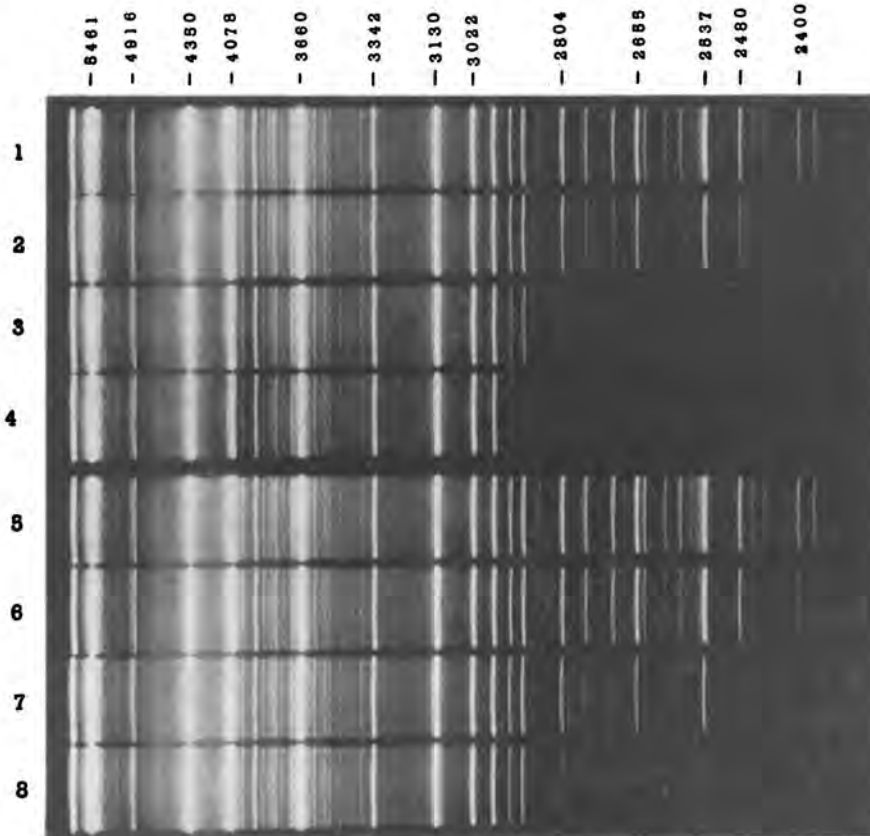


Fig. 4. Protéines pures isolées à partir du poumon 125.

- |                     |                                     |   |
|---------------------|-------------------------------------|---|
| 1. Poumon normal    | $c = 106 \text{ mg}/100 \text{ cc}$ | $t = 100 \text{ sec.}$                                    |
| 2. Poumon normal    | $c = 211 \text{ mg}/100 \text{ cc}$ | $t = 150 \text{ sec.}$                                    |
| 3. Poumon normal    | $c = 422 \text{ mg}/100 \text{ cc}$ | $t = 200 \text{ sec.}$                                    |
| 4. Poumon normal    | $c = 422 \text{ mg}/100 \text{ cc}$ | $t = 250 \text{ sec.}$ Epaisseur<br>de la cuvette = 8 mm. |
| 5. Poumon intoxiqué | $c = 106 \text{ mg}/100 \text{ cc}$ | $t = 100 \text{ sec.}$                                    |
| 6. Poumon intoxiqué | $c = 211 \text{ mg}/100 \text{ cc}$ | $t = 150 \text{ sec.}$                                    |
| 7. Poumon intoxiqué | $c = 422 \text{ mg}/100 \text{ cc}$ | $t = 200 \text{ sec.}$                                    |
| 8. Poumon intoxiqué | $c = 422 \text{ mg}/100 \text{ cc}$ | $t = 250 \text{ sec.}$ Epaisseur<br>de la cuvette = 8 mm  |

4078 et 3660 Å, mais elle est surtout très nette au dessous de 3000 Å, où on constate la disparition de plusieurs raies spectrales dans la courbe du poumon normal.

Ces résultats montrent une différence quantitative dans les spectres d'absorption des poumons normal et intoxiqué. On peut en conclure qu'il s'agirait d'une modification chimique superficielle de la structure moléculaire des protéines après l'action du phosgène. Cette conclusion confirme les résultats du travail précédent où l'on a constaté une diffé-

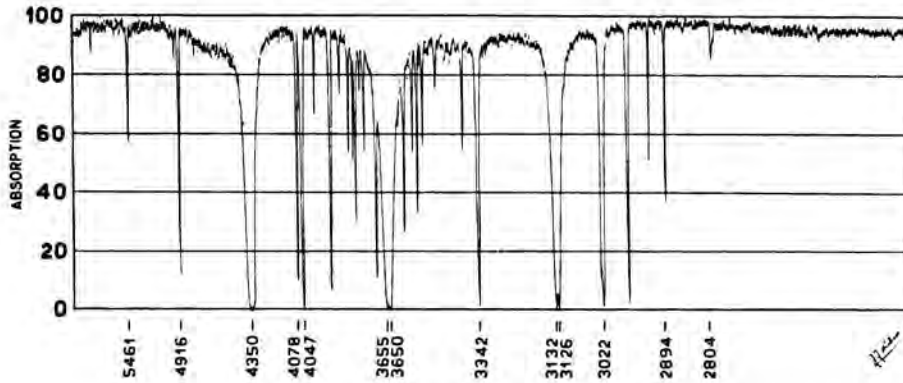


Fig. 5. Courbe d'absorption de l'extrait de poumon normal 51.

Courbe du spectre d'absorption No. 4 de la figure 1.  $c = 176$  mg/100 cc. Les courbes dans les figures 5, 6, 7 et 8 ont été retouchées aux endroits où les traits ne sont pas assez nets. Mais rien n'est changé en ce qui concerne la valeur d'absorption de la lumière.

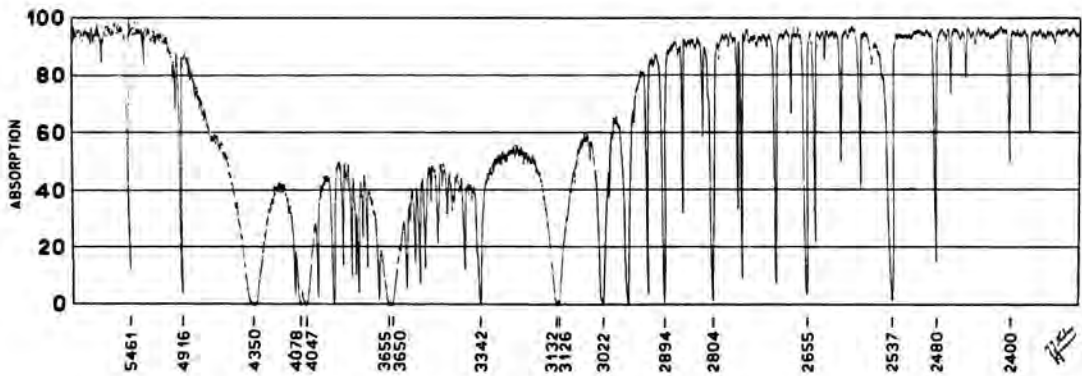


Fig. 6. Courbe d'absorption de l'extrait de poumon intoxiqué 51.

Courbe du spectre d'absorption No. 3 de la figure 1.  $c = 157$  mg/100 cc.

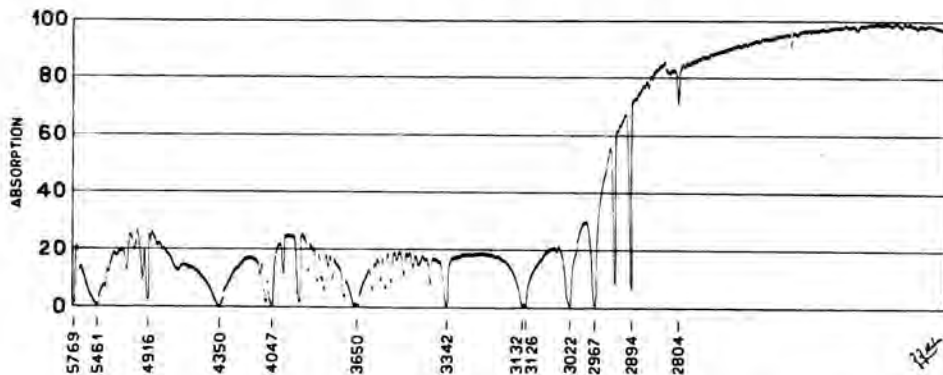


Fig. 7. Courbe d'absorption des protéines pures isolées à partir du poumon normal 125.

Courbe du spectre d'absorption No. 4 de la figure 4.  $c = 422$  mg/100 cc.

rence de solubilité, d'indice de réfraction et de pouvoir rotatoire entre les protéines de poumons normal et intoxiqué.

Ce travail a été poursuivi à l'annexe du laboratoire KAMERLINGH ONNES à Leyde. Je remercie M. le Professeur W. H. KEESOM pour les suggestions qu'il a bien voulu me

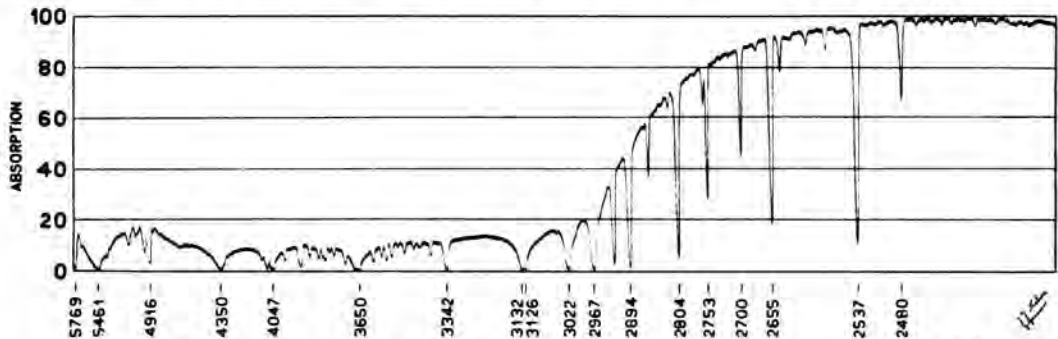


Fig. 8. Courbe d'absorption des protéines pures isolées à partir du poumon intoxiqué 125. Courbe du spectre d'absorption No. 8 de la figure 4.  $c = 422$  mg/100 cc.

faire et à M. le Professeur W. J. DE HAAS, qui m'a permis de poursuivre ces recherches. Je remercie M. C. A. CROMMELIN et M. le Professeur H. B. G. CASIMIR de l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail. Je dois également remercier le conseil de l'organisation „Toegepast-natuurwetenschappelijk Onderzoek“, qui m'a facilité de poursuivre mes recherches.

#### RÉSUMÉ.

1. Les spectres d'absorption de l'extrait de poumons normal et intoxiqué par le phosgène montrent une différence nette dans le visible et surtout dans l'ultra-violet. L'extrait de poumon normal donne une absorption plus prononcée que celui de poumon intoxiqué.
2. On constate le contraire, quand l'extrait de poumon intoxiqué, contenant la même quantité de protéines, est plus opalescent c'est-à-dire que les particules sont plus grosses que celles du poumon normal. Ceci pourrait être expliqué par la loi de Lord RAYLEIGH.
3. Il est démontré expérimentalement et conforme à la loi de RAYLEIGH, que des émulsions de lipoides d'une même concentration, donnent une absorption plus prononcée et augmentant vers le visible à mesure que le volume des particules augmente.
4. En comparant les spectres d'absorption des protéines pures isolées à partir de poumons normal et intoxiqué, on constate que le poumon normal donne une absorption plus prononcée entre les raies 4078 et 3660 Å. Au dessous de 3000 Å la différence est encore plus grande.
5. Les courbes d'absorption, obtenues par enregistrement photométrique montrent également une différence d'absorption entre l'extrait ou les protéines des poumons normal et intoxiqué.
6. La différence d'absorption étant quantitative, elle indiquerait une modification chimique superficielle de la structure moléculaire des protéines de poumon après l'intoxication par le phosgène.

**Medicine.** — *Investigations about stimulation and paralysis of the labyrinth by methylamine.* By P. G. GERLINGS. (Communicated by Prof. A. DE KLEYN.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

At the onset of inflammatory affections of the labyrinth some symptoms can be noted which must be interpreted as labyrinth stimulus phenomena. WITTMACK<sup>1)</sup> tried to elicit these symptoms experimentally and found in methylamine a substance which, when brought into the middle ear and resorbed through the round window, first caused for some time a distinct nystagmus to the injected side, after which this nystagmus disappeared and was followed by a typical nystagmus to the other side, if the concentration of the methylamine-solution was strong enough. WITTMACK remarked that he had been looking for such a substance for several years; we must point to the fact, however, that in literature some publications can be found about experimental labyrinth stimulus phenomena by chemical substances.

1. BREUER's<sup>2)</sup> *interpretation of the experiments of KÖNIG*<sup>3)</sup>.

C. J. KÖNIG made a series of experiments bringing cocaine into the canals after opening of the bony semicircular canals, while the membranous canals were intact; by this the extremities of the sensory organs in the ampuls were made insensible. It appeared that after cocainisation of two corresponding semicircular canals the same disturbances developed as seen after cutting of the canals: head-movements ("Pendeln") in the plane of the semicircular canals: "Kreis- und Reitbahngang" etc. KÖNIG held that cocaine not had a stimulating but a paralyzing influence. Therefore he thought the symptoms seen by him were caused by a loss of function of the ampuls. BREUER also found that there is hardly any difference between a pigeon with cocainised horizontal canals and one whose canals are cut. So the experiments of KÖNIG seemed to supply a new confirmation of the idea that the FLOURENS' symptoms are due to a loss of function of the labyrinth. KÖNIG, however, did not investigate whether the extremities of the nerves were really paralyzed. BREUER therefore repeated these experiments and came to the following conclusion:

"Es erfolgt zuerst *Erregung* der Ampulle durch die Wasserentziehung; dann tritt allmählich die *Anästhesie* ein. Die erste Kopfbewegung wird von der Ampulle der operierten Seite aus hervorgerufen, die zweite, durch die Anästhesie dieser Ampulle bedingt, von der intakten Ampulle der anderen Seite."

2. *The experiments of VAN ROSSEM*<sup>4)</sup> *with ether.*

It appeared that injection of ether in the middle ear of caviae caused the same movements of eyes, trunk and head as injection of cocaine, except that immediately after the injection eye-movements to the opposite direction developed for some minutes. VAN ROSSEM stresses the fact that his experiments are insufficient for conclusive evidence.

3. *Experiments with hypertonic salt solution* (DE KLEYN<sup>5)</sup>).

If, after opening of the bulla, a hypertonic salt solution (1,5 per cent NaCl) is injected

1) WITTMACK, Acta Otolaryng., 25, 109 (1937).

2) BREUER, Studien über den Vestibular-Apparat, Wien 1903, page 39.

3) KÖNIG, C. J., Contribution à l'étude expérimentale des canaux sémicirculaires, Thèse, Paris 1897.

4) VAN ROSSEM, Gewaarwordingen en reflexen, opgewekt vanuit de half-cirkelvormige kanalen. Thesis, 1907.

5) DE KLEYN, A., Arch. f. d. ges. Physiol., 145, 549 (1912).

into the vestibulum through the foramen rotundum, the head is immediately strongly turned to the side which has not been operated upon. If now some 0,1 cc. 20 per cent cocaine are injected into the vestibulum, contrary movements develop to the operated side, caused by paralysis of the labyrinth.

4. *Cocaine experiments of MAGNUS and DE KLEYN*<sup>6)</sup> *in caviae*.

Sometimes it can be noticed that the paralysis caused by cocaine is preceded by a stimulation lasting only for some minutes. In these cases an eye-deviation or "Grunddrehung" to the other side develops.

So the above-mentioned investigations of BREUER, VAN ROSSEM, MAGNUS and DE KLEYN prove that labyrinth stimulus phenomena by chemical substances were already known before with methylamine.

*Methylamine* is a volatile substance, smelling like ammonia, which is on the market in a 33 per cent solution. The dilutions vary from 1:9 to 1:14 in aqua dest. A needle was inserted into the tympanum and by means of a Pravaz syringe attached to it, methylamine was injected into the middle ear and the auditory canal. After about 15—20 minutes a typical nystagmus to the treated side develops, lasting for about half an hour, sometimes longer, sometimes shorter. This nystagmus disappears after which, if the concentration is strong enough, a nystagmus to the opposite side occurs. The following day a turning of the head is sometimes found. When weaker concentrations are used the nystagmus does not change, so that "der Nystagmus zur behandelten Seite die einzige, relativ schnell vorübergehende Reaktion vonseiten des Vestibularapparates bleibt".

The histological symptoms (i.e. the tonus syndrome of WITTMACK) consisted of a paradoxhypotonic reaction of the cupulae, the otolithic membranes of the maculae and of the organ of Corti.

MAGNUS and DE KLEYN not only found that in *caviae* after injection of cocaine in the middle ear a paralysis of the labyrinth can be preceded by a stimulation, but also that the separate labyrinthine reflexes do not disappear simultaneously but always in a definite succession.

After unilateral loss of function of the labyrinth in rabbits and *caviae* the following symptoms are noted:

1. Inclining of the head to the side of the failing labyrinth;
2. "Grunddrehung"; turning of the head to the side of the failing labyrinth.
3. Turning of the trunk;
4. Loss of tonus of the extremities at the same side (in dorsal position).
5. Compensatory eye-positions: both eyes are looking to the side of the failing labyrinth. At the normal side the eye is directed vertically upward and somewhat dorsal, the other eye vertically downward and somewhat forward.
6. Horizontal nystagmus, quick component to the side of the normal labyrinth.
7. Labyrinthine righting reflexes a-symmetric loss of function of the right labyrinth; in right lateral position: head in lateral or dorsal position; in left lateral position: head in normal position.

The disappearing of the labyrinthine reflexes after injection of cocaine in the middle ear in *caviae* was explained as follows:

a. Paralysis of the sacculus causes, while the other labyrinth was intact, an *unilateral abolishment of the "a-symmetric" labyrinthine righting reflexes and vertical deviation of the eye without nystagmus*. The "symmetric" righting reflexes remained intact and therefore it was thought that they were probably dependent on the utriculi.

b. Paralysis of the utriculus, while the other labyrinth was intact, caused a "Grunddrehung" turning to the injected side.

c. As soon as the paralysis of the semicircular canals developed, a *turning of the head*

<sup>6)</sup> MAGNUS-DE KLEYN, A contribution concerning the function of the vestibular apparatus. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 27, 201 (1923).



and a *spontaneous nystagmus of head and eyes* were seen; at the same time the turning reactions (turning to the right and to the left) became a-symmetric.

MAGNUS and DE KLEYN gave it as their opinion that the cocaine first reached the macula sacculi by the round window, then the macula utriculi, after which the ampullae were anaesthetized. Later investigations of VERSTEEGH<sup>7)</sup> made it improbable that the maculae sacculi had a static function, so that WERNER<sup>8)</sup> gave the following explanation: The cocaine propagates from the cysterna perilymphatica, reaches the nerve-roots of the *rampa lateralis* in the connective tissue around the macula utriculi and causes a loss of those labyrinthine functions which MAGNUS and DE KLEYN thought were due to the macula sacculi. After that the nerve roots of the *rampa anterior* of the utriculus were reached, eliciting a loss of those reflexes of which it was thought previously that they were caused by the whole utriculus (see experiments of QUIX and EGMOND<sup>9)</sup> with iron- and cocaine salts).

It now appears that after injection of methylamine in the middle ear of rabbits a similar "Gesetzmäßigkeit" exists, both in stimulation and paralysis of the labyrinth.

Here follows the protocol of a typical experiment.

Red-brown rabbit; on examination normal labyrinthine reflexes. No spontaneous nystagmus, no head nystagmus. The turning nystagmus can be well elicited to both sides. Marked lift reaction, "Sprungbereitschaft" somewhat less. The tilting reactions around the longitudinal and bitemporal axis are present, just as the compensatory (vertical) eye-positions and the labyrinthine righting reflexes on the head in the right and left lateral position, head upright and head downward.

9.38 a.m. Some cc. of methylamine  $1/10$  are injected into the *left* tympanic cavity (through tympanic membrane); the left auditory canal is filled.

9.40 a.m. Examination of the different reflexes shows no disturbances.

9.44 a.m. The labyrinthine righting reflex on the head is absent in the right, present in the left lateral position. Head downward: head is turned *to the right* (Grunddrehung  $\rightarrow R$ ). The compensatory eye-positions are absent in the right, markedly present in the left lateral position. If the rabbit sits quietly the trunk inclines a little to the right.

9.48 a.m. The "Grunddrehung" to the right diminishes, after that the "Grunddrehung" is absent when the head is directed downward. Some moments later the labyrinthine righting reflex on the head is present in the right lateral position, but absent in the left lateral position.

9.50 a.m. Now a distinct "Grunddrehung"  $\rightarrow L$  is present; labyrinthine righting reflexes are present in the right, absent in the left lateral position. No spontaneous nystagmus, no head nystagmus. The compensatory eye-positions showed a completely inverse picture: present in the right lateral position, absent in the left lateral position of the head.

9.52 a.m. *Distinct but unfrequent nystagmus  $\rightarrow L$ , the slow phase can be seen distinctly. No head nystagmus. "Grunddrehung"  $\rightarrow L$ . The lift reaction is present, tilting reactions can be elicited only with difficulty. The labyrinth righting reflexes are unchanged.*

10. a.m. The spontaneous nystagmus to the left decreases and disappears completely, after which a slowly developing nystagmus  $\rightarrow R$  occurs. No head nystagmus, the tilting reactions are doubtful. The labyrinthine righting reflexes remain unchanged.

10.5 a.m. Marked spontaneous nystagmus  $\rightarrow R$  (right eye 26 movements in 10"). Distinct head nystagmus.

<sup>7)</sup> VERSTEEGH, C., Acta Otolaryng., 11, 393 (1927).

<sup>8)</sup> WERNER, C. F., Das Labyrinth, 1940.

<sup>9)</sup> QUIX, F. H. and V. EGMOND, A. A. J., Zeitschr. Hals usw. Heilk., 32, 26 (1932).

So the rabbit shows the typical syndrome of a loss of function of the left labyrinth.

From the test it appears that four phases can be distinguished:

- I. Stimulation of the left labyrinth as far as tonic labyrinthine reflexes are concerned.
- II. Paralysis of the left labyrinth as far as tonic labyrinthine reflexes are concerned.
- III. *At the same time stimulation of the labyrinth as far as the semicircular canals and paralysis as far as the tonic reflexes are concerned.*
- IV. Paralysis of the whole labyrinth.

According to DE BURLET<sup>10)</sup> the membranous labyrinth can be divided into a pars superior (semicircular canals with utriculus) and a pars inferior (sacculus and cochlea) separated by a tectorial membrane. According to the above-mentioned investigations of VERSTEEGH and to the hypothesis of WERNER, the labyrinthine reflexes are elicited in the pars superior. It is, however, very questionable whether a further anatomical localization of these reflexes is possible.

Both the cocaine experiments of MAGNUS and DE KLEYN and the investigations of DE KLEYN and VERSTEEGH<sup>11)</sup> (destroying of the nervus utricularis with a galvanocauter after extirpation of the sacculus) emphasize an essential difference between the tonic labyrinthine reflexes and the labyrinthine moving reflexes.

This difference was disputed by HUIZINGA<sup>12)</sup> in consequence of his experiments which demonstrated that in pigeons not only dynamic reflexes but also a tonic influence upon the neck muscles proceeds from the cristae.

As is mentioned by HUIZINGA, MAGNUS and DE KLEYN already accepted the property of the sensory epithelium of the cristae to produce reflexes incessantly.

*Physiologically* a marked difference exists, however, between the tonic labyrinthine reflexes of the utriculus and the non-tonic reflexes of the semicircular canals. Besides, the methylamine experiments gave new evidence for the above-mentioned conception of MAGNUS and DE KLEYN.

Pathological processes in the vestibular apparatus cause disturbances of the equilibrium which are either permanent or compensated centrally. It can make a great difference whether this pathological process occupies the peripheral labyrinth, the nervus vestibularis, the vestibular region or the supranuclear tracts. It is the merit of BARRÉ that he has emphasized this fact; the first syndrome is described as "Syndrome vestibulaire harmonieux", the second as "Syndrome vestibulaire dysharmonieux". The first investigations of BARRÉ<sup>13)</sup> were made in some cases of cerebellar disturbances; later some cases were published of other affections of the fossa cranii posterior. ARSLAN<sup>14)</sup> gives the following summary about the syndrome of the "dysharmonie vestibulaire": "Le syndrome dû à une lésion périphérique est "harmonieux", puisque les réflexes qui le composent ont tous le même signe; le syndrome dû à une lésion centrale est au contraire dysharmonieux puisque les réflexes qui la composent ou manquent en partie, ou ont des signes différents."

From our investigations (injection of methylamine in the middle ear of rabbits), however, the above-mentioned classification of BARRÉ proves to be an incomplete one, as the observed symptoms pointed to a vestibular disharmony, whereas a peripheral affection was present.

The clinical importance of the experimental investigations follows from the case mentioned below.

<sup>10)</sup> DE BURLET, Anat. Anzeiger, 53, 302 (1920).

<sup>11)</sup> DE KLEYN and VERSTEEGH, Acta Otolaryng., 22, 327 (1935).

<sup>12)</sup> HUIZINGA, Acta Otolaryng., 24, 83 (1938); 27, 662 (1939).

<sup>13)</sup> BARRÉ, Revue d'O.N.O., 1938, page 419.

<sup>14)</sup> ARSLAN, Revue d'O.N.O., 1938, décembre.

Girl, 8 years of age. Patient became ill on Dec. 27th 1939 with a left-sided ear-ache and high temperature ( $103^{\circ}$ ). On Dec. 28th paracentesis was performed, which was immediately followed by an abundant purulent secretion. On Dec. 29th patient was dizzy, everything turned around her; she showed a tendency to fall to the right. She also complained of pain in the neck, lay in bed with her knees pulled up, and *turned her head to the right*.

Examination on Dec. 30th. Patient is seriously ill, lying in bed with her head turned to the right. Slight rigidity of the neck, the head is only moved carefully. The abdominal reflexes are present, the knee jerks and *Achilles-tendon* reflexes are vivid. Perhaps a slight left-sided paresis of the facialis. Abundant purulent excretion from the left ear, pain on pressure on the left processus mastoideus, slight swelling of the glands in the left neck.

The right tympanum is normal. The acuity of hearing for the whispering voice was 6 metres at the right side; at the left side ad concham. Lateralisation of the test of WEBER to the left, RINNE positive at the right, negative at the left; duration of hearing (tuningfork of STRUYCKEN, C 5) at the right 20", at the left 12" (normal: 35"). No spontaneous nystagmus.

Caloric reaction: 10 cc. cold water at the right: nystagmus  $\rightarrow$  L.

15 cc. cold water at the left: no nystagmus.

Lumbar puncture: pressure of liquor 120 mm, clear, PANDY positive, NONNE negative, cells  $\frac{3}{3}$ . No bacteriological examination.

Examination on Dec. 31st: Patient is very ill, but compos mentis, no mental disturbances. Temperature  $101.3^{\circ}$ . Pulse 90. The patient is lying in bed with her head in right lateral position. This position is partly forced: when the patient is placed in the sitting position the head is resting completely if turned to the right. There is also a turning to the right in the horizontal plane. If the physician turns the head of the patient to the left; it is immediately turned back to the middle position and then to the right. The same takes place if primarily the middle position is taken. Patient states that turning of the head to the left causes no pain. It is, however, impossible to decide whether the slight glandular swelling at the left has any influence upon the forced position of the head.

There is a *marked spontaneous nystagmus to the left*, when looking to the left; looking straight forward and looking to the right causes no nystagmus. This nystagmus does not change in the different positions of the head, only when the head is in the left lateral position, a rotatory component exists. The peripheral labyrinth can now be stimulated, at least with ice-water. In dorsal position a distinct horizontal nystagmus to the right developed, which changed into a nystagmus II to the left when the abdominal position was taken. Lateralisation of the test of WEBER to the left. Duration of hearing of tuningfork-STRUYCKEN C 5 at right 20", at left 12" (normal 35"). A spontaneous past-pointing is present: at the left, pointing outward; at the right sometimes normal, sometimes inward.

The co-ordination tests show no cerebellar disturbances. Perhaps slight paresis of the left nervus facialis.

Mastoid operation at the left: extensive pneumatisation, also in the petrosal angle and in the processus zygomaticus. The cells were filled with pus and granulations; a larger cavity existed towards the point, the trabeculae around the cavity were also softened. The cells alongside the sinus transversus proceeded to the bulbus jugularis. They also contained pus and granulations.

Culture of pus: haemolytic streptococci. Administration of dagénan twice a day.

Course: January 1st, 1940. Patient has vomited once, is lying in the supine position, head turned to the right. In dorsal position, head somewhat bent forward: slight horizontal nystagmus to the left when looking to the left. No nystagmus when looking straight forward and to the right. Three times a day 3 cc. dagénan.

Jan. 2nd, 1940. Temperature normal. Rigidity of the neck has somewhat improved.

Slight nystagmus to the left when looking to the left. Patient vomited some times this morning, has diarrhea and cyanosis, probably caused by the dagénan. Therefore the administration of dagénan was not continued.

Jan. 3rd, 1940. Temperature normal. No forced position of the head, no spontaneous nystagmus, no spontaneous past-pointing (in three planes).

Undisturbed wound course.

*Discussion.* This patient with an acute left-sided otitis showed a distinct spontaneous nystagmus to the left. The left peripheral labyrinth could be stimulated. The fact that a nystagmus  $\rightarrow R$  could only be elicited with ice-water must be explained by the strong spontaneous nystagmus  $\rightarrow L$ , which had to be conquered. The development of a nystagmus II to the other side, when the patient was placed in the abdominal position, proves the irritability of the left labyrinth. The whole syndrome was strongly suggestive of an over-stimulation of the left labyrinth; an objection against this diagnosis was brought forth by the fact that there was spontaneous past-pointing to the left.

No symptoms of intracranial affection, the lumbar fluid was normal, no cerebellar symptoms. A striking feature was the position of the head: turning to the right in the horizontal plane. All symptoms disappeared after the operation of the mastoid.

For the explanation of the symptoms observed the forced position of the head is of great importance. Forced positions of the head and eyes are often found in neurological literature (f.i. STENVERS<sup>15</sup>) but they also occur in complications of inflammatory affections of the ear. BECK and LOSSEN<sup>16</sup>) described the oblique position of the head as pathognomic for an otogenic abscess of the brain; MUCK<sup>17</sup>) explained it by the fact that a different venous filling of the brain vessels should be present in the separate positions of the head. WAGNER<sup>18</sup>) in an article "Zwangstellung des Kopfes bei Ohrenkrankungen" recorded a case of otitis with nystagmus and meningitis in which the forced position of the head was attributed to an intracranial process. Exact auditory and vestibular examinations, however, failed.

In our patient the forced position might be caused by the inflammatory process in the mastoid, especially from the perisinual cells, which proceed to the bulbus venae jugularis. The torticollis can then be explained by the necessity to relax the glands under the M. sternocleidomastoideus. As a rule in such cases the head is inclined to the affected side and turned to the healthy side, whereas in our case the head was turned to the healthy side in the horizontal plane.

BRUNNER<sup>19</sup>) in consequence of two of his cases, comes to a more probable conclusion. He writes: "Der Torticollis muss vielmehr als eine direkte Labyrinthwirkung angesehen, demnach dem labyrinthären Schwindel gleich geordnet werden." The forced position in our case must then be due to a vestibular torticollis, a so-called "Grunddrehung" a stimulation-symptom of the labyrinth, just as the spontaneous nystagmus to the left. The only symptom which does not belong to the clinical picture of the labyrinthine stimulation is the spontaneous past-pointing to the left with the left arm, except when this should be interpreted as "dysharmonie vestibulaire" (BARRÉ<sup>20</sup>) of *peripheral* origin.

<sup>15</sup>) STENVERS, Arch. of Neurology and Psych., 13, 711 (1925).

<sup>16</sup>) BECK-LOSSEN, Cit. BRUNNER, Monatsch. f. Ohrenheilk., 55, 331 (1921).

<sup>17</sup>) MUCK, Cit. BRUNNER, Monatschr. f. Ohrenheilk., 55, 331 (1921).

<sup>18</sup>) WAGENER, Dtsch. Otol. Gesellsch., 1911, page 196.

<sup>19</sup>) BRUNNER, Monatschr. f. Ohrenheilk., 55, 331 (1921).

<sup>20</sup>) BARRÉ, Revue d'Otol., 16, 419 (1938).

**Medicine.** — *Some considerations concerning our knowledge of the action of the auditory organ.* Part I. By J. BIJTEL. (Communicated by Prof. A. DE KLEYN.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

In spite of many contributions, in ever increasing number, towards our knowledge of the action of the auditory organ, one cannot yet speak of a definite or satisfactory conception. No manner of viewing the matter has been able to maintain itself as conclusive, not a single experiment has furnished an arresting proof of any theory. The present state of affairs has made us ask ourselves whether our investigations are well founded, whether the leading thoughts are indeed the right ones. One cannot escape from the impression that there will have to be a vision of biological processes different from that which now predominates. We have certainly not yet come to a formulation, in a definite form, of other notions about the matter. For the present we shall have to limit ourselves to considering the elements of our present knowledge critically and collecting data from this for determining new lines of action. If one concentrates on the main points of the predominating views, one can say that the analytical function is considered essential and that the thoughts about this move between two antipoles, namely central and peripheral analysis. For the solution of this antithesis the knowledge of the process of conduction in the auditory nerve is of great importance. For, if the process of conduction of excitation in the auditory nerve should prove a phenomenon of vibration, more or less identical with the mechanical process of vibration that comes from outside, this would point more or less to central analysis. If, on the other hand, the process of conduction in the auditory nerve appears to be, according to the old general law of specific nervous energies, a process not specific as regards the outer stimulus, equal for all nerve-fibres, one should assume peripheral analysis. If this is the case, the peripheral organ will contain a number of receivers, each for a separate quality of excitation, in this case a certain pitch. When the receiver is excited specifically, one or more nerve-fibres belonging to this receiver will bring about a corresponding perception in the central nervous system, by a process of conduction of their own.

The right means to orientate oneself about the conduction of excitation in the auditory nerve is the registration of the action current of the nerve. Now it is only with great difficulty that one can apply this means rightly with regard to the auditory nerve. Derivation with two unpolarisable electrodes of a part of the auditory nerve that is lying free has really not yet succeeded. Anatomical situations are the principal cause of this. Derivation in other ways, when, moreover, use is made of powerful amplifiers cannot furnish conclusive proof. The effects of the alternating current, derived in this way, have always potentials that must be considered microphone-effects of the cochlea. DAVIS<sup>1)</sup> distinguishes two parts in the effect of the alternating current, namely the cochlea-effect and the action-potential of the auditory nerve.

The cochlea-effect occurs within 0.1 millisecond after the sound-stimulus, it follows the form of the mechanical excitation closely, the phase of the cochlea-effect turns with the phase of the stimulus. This effect must be considered a microphone-effect. Some tenths of a millisecond later an electric effect occurs, which has more a characteristic of its own and which DAVIS looks upon as an action-potential of the auditory nerve. DAVIS succeeded in obtaining this action-potential more isolated from the auditory nerve itself. Up to a frequency of 3000—4000 cycles a second this gives an alternating current

<sup>1)</sup> DERBYSHIRE, A. J. and DAVIS, H., *Amer. Journal of Physiology*, **113**, 476 (1935).  
DAVIS, H., *The Journ. of the Acoustical Society of America*, **6**, 205 (1934—35).  
BÉKÉŠY, G. VON, *Ztschr. f. techn. Physik*, **17**, 522 (1936).



of the same frequency as the sound-stimulus, but independent of it as regards the phase. Above this frequency the alternations of the currents of action are no longer synchronous with the soundvibrations. At about 900 cycles a second, the maximum that is possible in connection with the refractory period of a nerve-fibre, if one assumes that every cycle of the sound corresponds to a nerve-impulse, the strength of the action-potential drops by half, at 1800 cycles a second by a third.

It is sometimes assumed that in a group of nerve-fibres which takes part in the conduction, alternating conduction occurs, each nerve-fibre in itself only transmitting half the number of cycles. This would be attended with an extension of the number of nerve-fibres which takes part in the conduction. If we imagine that up to 900 cycles a second two fibres transmit the impulses at the same time, then at above 900 cycles a second one fibre will conduct the odd impulses, the other the even ones. One can also put it thus: up to 900 cycles a second one fibre transmits the impulses and above this a second fibre is switched in. That in reality the proportions are a little more intricate does not change the thus described principle. One can remark against this that one cannot understand how one fibre begins to conduct at the first and another only at the second impulse. Nor is it clear why with common derivation from all conducting fibres the action-potential weakens through alternating conduction. Meanwhile these experimental results have been explained as indications of the transmitting, in form, of the vibrational process through the auditory nerve to the centre which would be a plea in favour of central analysis. We can say besides that the cochlea is an organ which can never admit sharp analysis in a physical sense. Sharp resonances are certainly impossible in this very muted system. An important contribution, which undoubtedly opens new possibilities, comes from VON BÉKÉSY<sup>1</sup>). VON BÉKÉSY, using enlarged models, concluded that there are whirling currents in the liquid, for different frequencies in different places. On account of this the cochlea would become an a-periodical analyser. Apart from the question whether this phenomenon will occur in the same way in the cochlea, in spite of the precautions taken by VON BÉKÉSY in constructing the enlarged model, it certainly does not explain a sharp analytical power. VON BÉKÉSY himself also thinks that peripheral analysis is certainly not possible to the extent that was formerly assumed and best formulated in the resonance-theory according to HELMHOLTZ.

Attempts were made to gain other data from the study of the overtones. The peripheral auditory organ is not at all a linear system, i.e. it does not pass on a vibrational phenomenon untransformed. So overtones are formed in the peripheral organ. VON BÉKÉSY<sup>2</sup>) established that the intensity of overtones may even amount to 30% of the intensity of the fundamental tone. The greater part of them can be found again in the electric effect of the cochlea and so must mainly arise in the peripheral organ. It is sometimes assumed, however, that some of them also arise in the auditory nerve.

Now if we limit ourselves to the part which arises in the peripheral organ, these overtones can again be divided into 2 groups, namely 1°, the overtones coming from the middle ear and 2°, those coming from the cochlea. One can infer from experiments made by VON BÉKÉSY<sup>3</sup>) that the overtones which arise from conduction through the middle ear have only a small intensity. The effect which the tympanic membrane ought to have on the arising of the overtones, on account of its form, is again made worthless by effective impedance-situations, at least the greater part.

VON BÉKÉSY<sup>4</sup>) showed further that these overtones of the cochlea arise after the sound has been split up in its components, which are then each included in a separate system, which points to peripheral analysis.

<sup>1</sup>) BÉKÉSY, G. VON, *Physik, Ztschr.*, **29**, 793 (1928); *Acta Otolaryngologica*, **27**, 388 (1939).

<sup>2</sup>) BÉKÉSY, G. VON, *Annalen der Physik*, **20**, 809 (1934).

<sup>3</sup>) BÉKÉSY, G. VON, *Acta Otolaryngologica*, **27**, 281 (1939).

<sup>4</sup>) BÉKÉSY, G. VON, *Annalen der Physik*, **20**, 809 (1934).



The experiment is then conducted in this way:

As a primary tone a pure tone of 500 vibrations a second is made to act on the ear. There arises, among other things, a first overtone of 1000 cycles a second. One can perceive this, because when a secondary tone of 1004 cycles a second is provided, 4 beats a second occur. Now with the primary and the secondary tone a tertiary tone is provided, of a relatively low frequency, namely 100 cycles a second. Phenomena of modulation do not occur then. This would be the case if the three tones together passed one and the same physical system.

We ask ourselves, however, how it is possible that beats arise when the components of a compound sound are already separated in such a way that modulation is excluded. It also seems to us that the occurring of 4 beats a second in perceiving the tones of 500 and 1004 cycles a second does not yet prove the formation of a tone of 1000 cycles a second. It is possible that from these two tones a different tone of 504 cycles a second arises, which then together with the tone of 500 cycles a second gives the 4 beats.

Attempts have been made to approach the problem, already mentioned before, of the character of the process of conduction in the auditory nerve with the help of the tone-beats. If namely a process of a vibrational character runs through the auditory nerve, identical with the sound-vibrations that are provided, beats will have to be perceived, even if one makes two tones with a small difference in frequency act each on one ear of the same person on whom the experiment is made. That the two stimuli unite centrally can be derived from the binaural summation of two tones of the same frequency each with an intensity, beneath the threshold-value, up to an audible tone.

As regards this question the only investigations found by us in literature were those of STEWARD and LANE <sup>1)</sup>. LANE concludes that so-called subjective beats can occur, distinguished from so-called objective beats, which occur when the sounds brought to both ears mingle outside the auditory nerve. Our own experiments <sup>2)</sup> did not confirm this, however. When the possibility of the two sounds mingling outside the auditory nerve was really excluded, none of the persons on whom our experiments were made could perceive beats. This would point to a process of conduction specific of all nerve-fibres, at least a process that lacks the vibrational character. We noticed already that this is sometimes considered as pointing to peripheral analysis.

The sensitivity of the auditory organ, so much varying for different pitches and which has occupied so many investigators, can also be included among these considerations. As far as we could ascertain, the investigators have chiefly limited themselves to measuring the sensitivity without speculating too much on it. We remark the following:

The curve which illustrates the sensitivity of the ear to different pitches can be considered as a resonance-curve. We think that in the organ of perception — tympanic membrane, tympanic bones and cochlea — we may see a pressure-receiver. Now in contrast with the auditory organ in its entirety a pressure-receiver is little dependent on the frequency. One might derive from this fact that the difference in sensitivity for different pitches cannot be dependent on the organ of perception alone, but must be resident in the central nervous system. On the other hand, however, the electric cochlea-effect is in its strength dependent on the frequency with a maximum at 1000 cycles a second, from which it would follow again that the difference in sensitivity is for different frequencies a quality of the cochlea. It should be remembered that for the electric cochlea-effect other rules obtain than for the auditory power.

Our insight, meanwhile, into the intensity-perception of sound has as yet developed very little.

The principle of central analysis was, as far as we could ascertain, first formulated in 1886 by RUTHERFORD in his telephone-theory (derived from WILKINSON and GRAY <sup>3)</sup>).

<sup>1)</sup> LANE, C. E., *Physical Reviews*, 26, 401 (1925).

<sup>2)</sup> BIJTEL, J., *Ned. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, 44, 198 (1941).

<sup>3)</sup> WILKINSON, G. and GRAY, A. A., *The mechanism of the cochlea*, London, 1924.

Here it is assumed that the *membrana basilaris* follows the sound-vibrations in its entirety and that the integral image is passed on to the auditory centre to be dealt with further. In their critical view of the different theories concerning the auditory function WILKINSON and GRAY say one cannot assume that an analysis of compound mechanical vibrations can take place in the brain. For this would mean a time-measurement, namely of the duration of a vibrational period by the brain. They take as their basis the relativity-theory, that time can only be measured by movement. Now the brain, WILKINSON and GRAY say, does not contain a clock, a chronometer, one can really only consider the pendulum as such. It is especially in the *membrana basilaris* with its resonators that one can see, according to WILKINSON and GRAY, an excellent chronometer.

Here we certainly have the crux of the whole matter, namely in how far the action of an organ must be seen as a purely physical process and the apparatus of the organ as an instrument. We think that the psychical atmosphere has been considered too little.

In the psychical atmosphere the ideas of pitch are not at all exclusively connected with an instrument with a pendulum. A composer can work with ideas of pitch in endless variations and that not only as regards mutual relations, but often also with the right absolute values (absolute hearing of tones). We learnt on good authority that MAX REGER worked out music contrapuntally without the help of any instrument. Nor, when sound-images are called back to memory, i.e. are seen introspectively by the ego, do we dispose of a physical chronometer in this psychical process.

The way in which living organs react on stimuli cannot be compared with the qualities of a physical measuring-apparatus. We do not mean to say by this that the living organism should not be subject to physical laws. However, too little attention has been paid to that which is typical of the living organ. As an example we take the sensation of pressure. It is a well-known fact that a constant pressure is perceived for some time. Then there is adaptation. When the pressure-stimulus is removed, an after-image arises, as it were; for some time the pressure is still perceived. One can also apply the argument to the otolith-apparatus, where a constant pressure does not lead, it is true, to a direct perception, but maintains a state of tension in the nervous system, which presupposes a constant activity in the organism. Physically speaking we do not know of such a state. A constant pressure cannot provide energy nor can activity come from it. It is clear that in living nature there are other possibilities.

As we have still a very incomplete knowledge of the essential facts in the action of living organs, in spite of all our investigations, it is impossible to get a more profound insight into the importance of such data. However, they will have to divert our attention from a one-sided physical way of considering the matter.

We add to this a curious example of how organ-stimuli are dealt with centrally, in an unexpected way. We know that according to the physical view of perceiving forms on the retina we can only perceive a dark line in a luminous field if this line has a certain breadth, namely is seen under an angle of 60 seconds. With suitable illumination, however, we can see very thin threads in a luminous field, so that the adjoining angle amounts to no more than 2 seconds. EINTHOVEN<sup>1)</sup> showed that perceptions of intensity in this case lead to a certain perception of form. An analogue to the auditory organ is not known to us. We point to the fact, however, that in general the central treatment of organ-stimuli is by no means always bound with physical systematicalness. In this connection the difference between the hearing of tones and the hearing of speech is curious. We find every imaginable variation. The hearing of speech is sometimes weakened when there is a predominant defect in the low tones, in other patients again when there are predominant defects in the high tones. We also found that the hearing of speech had grown much weaker, while the hearing of tones had only grown a little weaker. Several patients whose hearing of tones has weakened in divergent ways, can have equal hearings of speech.

<sup>1)</sup> EINTHOVEN, W., Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 29, 388 (1920); Pflügers Arch. f. d. ges. Physiologie, 191, 60 (1921).

One patient had a good hearing of speech, while the hearing of tones had weakened. We know that the hearing of speech is strongly influenced by psychical factors. The diversity which we noted in our routine-investigation with whispered speech and tuning-forks, certainly cannot be entirely attributed to diversity in power of concentration, psychic predisposition etc. A minute peripheral analysis with following reconstruction of the sound-image in more central parts would certainly give a more constant relation between hearing of speech and hearing of tones. We have too few data to assume that there are separate organs for hearing of speech and hearing of tones. Meanwhile we point to the fact that the idea of a differentiation in the peripheral organ has sometimes come to the fore. Formerly it was sometimes assumed that the perception of murmurs and the perception of pure tones were separate peripherally, in sacculus and cochlea respectively. One might also imagine that distinct nerve-elements in the cochlea form the basis of such a differentiation. Anyhow in this case the accent would fall on the nervous system. Meanwhile, as we lack exact data, such considerations are for the present mere speculation.

A plea, more meant for use in the discussion about the way in which peripheral analysis must be imagined, is derived from the perception of trills. One can perceive very well two quickly alternating pitches, the one after the other. If we accept the resonance-theory as true, this fact presupposes a great muting-value. For muted resonators need a short period of time to stop resonance and to come into action, little muted resonators need longer periods of time to stop resonance and to come into action. A strongly muted system, however, loses again in analytical power. If one attributes a great analytical power to the ear, localised in the cochlea, then one meets with a contradiction: little muting to explain the analytical power, strong muting to explain the short period of time needed to stop resonance and to come into action. JUNG<sup>1)</sup> has tried to solve this contradiction. In doing so he has applied a method that is used more often: he constructed an electric analogue to study the mechanical phenomena.

JUNG has succeeded in constructing an electric system, in which this contradiction has been removed. He also thinks that the structure of the cochlea-organ need not necessarily bring with it the above-mentioned contradiction for mechanical vibrations. It remains to be asked here in how far the analogy can be applied. A very complicated reasoning is necessary to fix the analogy.

VON BÉKÉSY<sup>2)</sup> has measured the just perceptible period during which a sound is interrupted. If one compares pure tones with murmurs, one finds that these periods are fairly equal. If we were dealing with a system of selective resonators this equality could not exist. For murmurs consist of many tones, each of a short duration, which cannot make a rather sharply tuned resonator vibrate with them at full strength. The periods of time needed to stop resonance must also be short, shorter than is the case with pure tones. These considerations especially bear on the way in which the peripheral organ works. However, they strongly speak against sharp resonances in the end-organ in any form and as any other way of analysing is necessarily less sharp than that through resonance, they again make us view the matter in a way that goes in the direction of central analysis.

In another way one also comes to the conclusion that central analysis, at least partly, must be assumed and that is on account of the phenomena attending the perception of tones of a short duration. For frequencies beneath 500 cycles a tone of short duration of together 8—10 cycles sounds like a click, in which, it is true, one can recognise a certain pitch, but where the threshold of distinction has been considerably increased. Such short series of cycles can be divided again into e.g. 3 groups of 3 cycles, which, separated by intervals of time, are brought to the ear. From the time-values it is concluded that nervous processes play a part here, which determine the perception of a click or tone.

We want to make a few more remarks about the perceptions of intensity. Taking the "all-or-none law" as our starting-point, we must assume that for every pitch a great

1) JUNG, H., *Akustische Ztschr.*, 5, 268 (1940).

2) BÉKÉSY, G. VON, *Physik. Ztschr.*, 29, 793 (1928).

number of nerve-fibres is present to distinguish the different degrees of intensity. If one assumes peripheral analysis with separate paths of conduction for different pitches, there would have to be no less than 340.000 different nerve-elements to perceive all frequencies at all degrees of intensity, but this is not the case. We know from the work of ADRIAN that a greater perception of intensity can also be transmitted by a greater number of impulses in one nerve-fibre. If, however, it is true that the number of impulses in the auditory nerve is determined by the pitch, at least to a certain extent, we are again faced with inexplicable facts.

LORENTE DE NO assumes that the inner and the outer hair-cells have different functions, in this way that one group serves to determine frequency and the other to determine intensity, MINK even assumes that the intensity is determined through stimuli from the middle ear. But we have no positive indications for this.

We now want to conclude the enumeration of those data which are important to determine the character of the auditory process, especially the process of conduction of excitation. We think that we have provided sufficient data to come to the conclusion that not a single physical consideration gives us a definite answer to the question as to how an auditory impression really originates. The peripheral recording-apparatus, which naturally supports the physical way of considering the matter, cannot at all be called a suitable tone-analyser. It is true that a few data point to a greater accuracy than the structure would make us suspect at first sight. We pointed this out already, by saying namely that on account of certain impedance-situations the non-linear conduction through the tympanic membrane is for the greater part prevented, so that the part that the middle ear plays in the originating of overtones becomes very small. This demonstrates very clearly how intricate are the instruments of living nature and how much their construction deviates from our technical apparatuses, which again makes a comparison between the living organ and the technical instrument extremely difficult. The supposition that also in other respects such complicated situations occur in the acoustic organ is justified, especially when we note the fact that the central nervous system has a correcting influence on phenomena transformed in such a rough receiver as the cochlea. Years ago already BÁRÁNY expressed himself in this way. Also in BUDE<sup>1)</sup> we found an indication in this direction. We have not yet come to a fixed notion, meanwhile, of the activities in the nervous system. We can only say that undoubtedly processes work in it that to a great extent follow biological principles of their own, though they are always attended with physical and chemical phenomena.

---

<sup>1)</sup> BUDE, E., *Mathematische Theorie der Gehörsempfindung*, Berlin 1920. (*Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden* V, 7. 1.).

---

PROCEEDINGS

VOLUME XLIV

No. 9

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: M. W. WOERDEMAN

---

CONTENTS

- BURGERS, J. M.: "On the influence of the concentration of a suspension upon the sedimentation velocity (in particular for a suspension of spherical particles)", p. 1045.
- WEITZENBÖCK, R., und W. J. BOS: "Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im  $R_4$ ". (Sechste Mitteilung), p. 1052.
- GODEAUX, LUCIEN: "Une propriété des variétés de VERONESE". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 1058.
- MEIJER, C. S.: "Multiplikationstheoreme für die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(z)$ ". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 1062.
- REMAK, ROBERT: "Ein Satz über die sukzessiven Minima bei definiten quadratischen Formen". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 1071.
- VEEN, S. C. VAN: "Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art". II. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 1077.
- VEEN, S. C. VAN: "Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergenten Reihen". II. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 1085.
- RUTGERS, J. G.: "Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL". VI. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 1092.
- BUNGENBERG DE JONG, H. G., and E. G. HOSKAM: "Motory phenomena in coacervate drops in a diffusion field and in the electric field". (Communicated by Prof. J. VAN DER HOEVE), p. 1099.
- BUNGENBERG DE JONG, H. G., E. G. HOSKAM and L. H. V. D. BRANDHOF-SCHAEGEN: "The influence of the temperature on the complexcoacervation of gelatine and gum arabic". (Communicated by Prof. J. VAN DER HOEVE), p. 1104.
- GORTER, A. and W. NADORT: "Composition of Gas in the Intercellular Spaces of Potatoes". (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE), p. 1112.
- DILLEWIJN, C. VAN: "Some technical remarks about the colchicine treatment of Gramineae". (Communicated by Prof. A. H. BLAAUW). (With one plate), p. 1118.



- FUNKE, G. L.: "The growth of the petioles of waterplants in solutions of phytohormones". I. (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING), p. 1121.
- BOK, R.: "The influence of oxygen-nitrogen mixtures upon the dwarfing of *Ardisia Crispa* (Thunb.) A. DC". (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING), p. 1128.
- WESTERVELD, J.: "Three geological sections across South Sumatra". (Communicated by Prof. H. A. BROUWER). (With one karte), p. 1131.
- BELLEN, R. C. VAN, J. F. C. DE WITT PUYT, A. C. RUTGERS, and J. VAN SOEST: "Smaller Foraminifera from the Lower Oligocene of Cuba". (Communicated by Prof. L. RUTTEN). (With one plate and one table), p. 1140.
- HOOIJER, D. A.: "Note on a diseased dental condition in *Hippopotamus amphibius* L.". (Communicated by Prof. L. RUTTEN). (With one plate), p. 1147.
- POSTMA, N.: "Ueber den Tonus des Schneckenfusses (*Helix pomatia* L.). I. Der Tonus gemessen an der Pedalkonstanz. (Vorläufige Mitteilung). (Communicated by Prof. H. J. JORDAN), p. 1151.
- BIJTEL, J.: "Some considerations concerning our knowledge of the action of the auditory organ". II. (Communicated by Prof. A. DE KLEYN), p. 1159.
- ERRATA, p. 1163.



**Hydrodynamics.** — *On the influence of the concentration of a suspension upon the sedimentation velocity* (in particular for a suspension of spherical particles). By J. M. BURGERS. (Mededeeling No. 42 uit het Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

I. In Ch. III of the "Second Report on Viscosity and Plasticity" a few remarks have been made concerning the problem of the mutual influence of the particles of a suspension upon their velocity of sedimentation, and VON SMOLUCHOWSKI's work on this problem has been mentioned<sup>1)</sup>. A formula giving the magnitude of the effect to be expected was not developed. In the following lines it will be attempted to supplement this point, at least for particles of spherical form.

In treating this problem several factors must be taken into account.

In the first place we must consider the magnitude of the *effective gravitational force* acting upon a single particle. When the volume of a particle is denoted by  $s$ ; its density by  $\varrho_p$ ; the density of the liquid by  $\varrho_s$ ; the gravitational acceleration by  $g$  (in a centrifugal field  $g = \omega^2 x$ ,  $\omega$  being the angular velocity of the rotation and  $x$  the distance from the axis), this force is given by:

$$F = g (\varrho_p - \varrho_s) s \quad \dots \quad (1)$$

It is often asserted that for  $\varrho_s$  in this equation we must take not the density  $\varrho$  of the pure liquid surrounding the particles, but the *mean density of the suspension*<sup>1a)</sup>, which is given by:

$$\varrho_s = \varrho + n s (\varrho_p - \varrho) \quad \dots \quad (2)$$

$n$  being the number of particles per unit of volume of the suspension. The assumption then is made that the hydrostatic force acting upon a particle will depend upon the magnitude of the *mean hydrostatic pressure gradient*, and that the latter will be equal to the weight per unit volume of the suspension.

Substitution of the expression (2) for  $\varrho_s$  into eq. (1) would give:

$$F = g (\varrho_p - \varrho) s (1 - n s) \quad \dots \quad (3)$$

The argument that the mean hydrostatic pressure gradient will be equal to the mean weight per unit volume of the suspension, however, is not fully convincing, as for a suspension enclosed in a vessel part of the weight may be carried by the frictional forces acting at the walls. It is therefore not immediately to be seen whether the effect considered here must be superimposed upon those to be considered further on. We hope to come back to this point afterwards, and provisionally shall not go into the question whether the force  $F$  acting upon a particle is given by eq. (1) with  $\varrho_s = \varrho$ , or whether the correction, given by eq. (3), should be used.<sup>1b)</sup>

<sup>1)</sup> J. M. BURGERS, Ch. III of the "Second Report on Viscosity and Plasticity", Verhand. Kon. Nederl. Akad. v. Wetenschappen (1e sectie) Vol. 16, No. 4 (Amsterdam 1938), pp. 178/179.

<sup>1a)</sup> Compare e.g.: TH. SVEDBERG and K. O. PEDERSEN, The Ultracentrifuge (Oxford 1940), pp. 5, 47, where it is stated that — in the notation used by the authors of that work — " $\varrho$  is the density of the solution"; and p. 59, where the specific volume  $V = 1/\varrho$  of the solution is defined.

<sup>1b)</sup> This remark has been inserted November 8, 1941.

2. Next to the influence of the concentration of the particles upon the magnitude of the hydrostatic force, attention can be given to the circumstance that the presence of the particles brings about *an increase of the effective viscosity* of the liquid. In order to obtain a simple picture of this influence, it is convenient to assume that only one particle, say *A*, is acted upon by the gravitational force, the other particles temporarily being supposed to have a density equal to the density of the pure liquid. In that case these other particles will not sediment, but will be carried along by the liquid with a velocity approximately equal to the velocity which in the absence of such a particle would be found at its centre (a more accurate expression for this velocity is given by eq. (17), below). As the particles are rigid, however, they will exert an influence upon the motion of the liquid, of such nature as has been considered in Part B of Ch. III of the "Second Report".

In a concise and somewhat generalized form this influence can be described as follows: Every particle takes part in the translational and rotational movements of the element of volume surrounding it; owing to its rigidity, however, a particle cannot follow the deformation of this element. The particle in consequence experiences a system of forces which evidently will react upon the liquid. The system of forces with which the particle reacts upon the liquid can be represented by a system of doublets, the magnitude and orientation of which depend upon the orientation of the three principal axes of the instantaneous deformational motion of the element of volume of the liquid; upon the magnitude of the three rates of dilatation  $D_1, D_2, D_3$  corresponding to these axes; and upon the form and the dimensions of the particle and its orientation with respect to the three axes. In the most simple case, where — due to the presence of a sufficiently intense Brownian movement — all orientations of a particle with respect to these axes are equally probable, it is sufficient to restrict to the consideration of the mean values of the doublets in the directions of the three axes. Denoting these mean values by  $M_1, M_2, M_3$  respectively, it is found that

$$M_1 = -2k\eta D_1, \quad M_2 = -2k\eta D_2, \quad M_3 = -2k\eta D_3 \quad (4)$$

where  $k$  is a coefficient, depending upon the form and the dimensions of a particle<sup>2)</sup>.

As there are  $n$  particles per unit of volume, there are also  $n$  of these systems of doublets per unit of volume. It will be seen that the presence of these doublets gives rise to the appearance of additional normal stresses acting through elements of surface perpendicular to the axes of the deformational field, of magnitudes respectively:

$$\sigma_1^* = -nM_1, \quad \sigma_2^* = -nM_2, \quad \sigma_3^* = -nM_3 \quad (5)$$

These stresses must be added to the ordinary viscous stresses arising in the liquid itself, which are given by the well known expressions:

$$\sigma_1 = 2\eta D_1, \quad \text{etc.} \quad (6)$$

<sup>2)</sup> As the liquid is assumed to be incompressible, we have:  $D_1 + D_2 + D_3 = 0$ , and consequently also:  $M_1 + M_2 + M_3 = 0$ .

The magnitude of the components of the rotational velocity taken up by the particle can be obtained from the equations which express that the system of doublets shall have no resulting moment about the centre of the particle.

The coefficient  $k$  introduced in the text corresponds to the quantity  $A_{II}/s$  in the notation of the "Second Report",  $s$  again denoting the volume of a particle. For a spherical particle, where the question of the orientation does not present itself,  $A_{II} = 5/2$  ("Second Report", p. 132); for elongated particles (cylindrical particles and rotational ellipsoids) values are given in the "Second Report" at p. 148 and pp. 151—153. Values for oblate rotational ellipsoids have been given in a paper in these Proceedings 43, p. 314, 1940; values for some model systems consisting of a few rigidly connected spheres of equal radius *ibidem* pp. 425, 645.

Adding together both stress systems, we obtain the effective stresses, which consequently will be related to the rates of dilatation by the formulae:

$$(\sigma_1)_{\text{eff.}} = \sigma_1 + \sigma_1^* = 2 \eta D_1 (1 + nk), \quad \text{etc.} \quad (7)$$

Hence the *effective coefficient of viscosity* of the suspension is given by:

$$\eta_{\text{eff.}} = \eta (1 + nk). \quad (8)$$

In all calculations referring to the motion of the suspension in bulk this effective coefficient of viscosity must be used.

When it is assumed that between the particles there act neither repulsive nor attractive forces, so that in all elements of volume surrounding the particle *A* mentioned above there is an equal probability of finding other particles, it seems legitimate to use the same effective coefficient also in calculating the mean field of flow, produced by the motion of the particle *A* under the gravitational force acting upon it. Consequently  $\eta_{\text{eff.}}$  also will appear in the resistance formula for the particle *A*.

In such cases where repulsive forces are present it seems probable that in the resistance formula a viscosity coefficient must be used which is intermediate between  $\eta_{\text{eff.}}$  as defined by (8) and  $\eta$  itself. This likewise is a point to which we shall return afterwards.

3. In the preceding section we had assumed that the particle *A* should be the only one which was subjected to the gravitational force, the other particles being supposed to have the same density as the liquid and following the motion of the latter. When now the original density is restored to these other particles, the sedimentation velocity of any one of them may be considered as the resultant of:

- a) the direct influence of the gravitational force, calculated with the value  $\eta_{\text{eff.}}$  for the viscosity;
- b) the velocity imparted to the liquid in consequence of the fields of flow produced by all other sedimenting particles.

We therefore proceed to the calculation of this latter velocity. For this purpose we may first consider the field produced by an arbitrary particle *A*; next we can give to this particle all positions which it may take relatively to another particle *B*, and calculate the mean velocity of the flow produced at the spot of *B* (more accurately over the surface of *B*); finally this mean velocity must be multiplied by the total number of particles present.

It seems just as well possible, however, to follow a slightly different way: after having considered the field produced by an arbitrary particle *A*, and having found the mean velocity over the surface of *B*, we may give to *B* all positions which it can take relatively to *A*, the latter being kept at a fixed position. In this manner we find the average influence of *A* upon an arbitrary other particle; if this influence should prove to be independent of the position of *A* (in case it might depend upon the orientation of *A*, an appropriate mean value should be calculated), we again can multiply the mean velocity found in this way by the number of particles present.

Although due attention will be given to the circumstance that the particle *B* cannot penetrate into the particle *A*, no account will be taken of the fact that two or more particles *B* cannot at the same time be found at the same point of the field, as this would lead only to effects of the second order.

As was mentioned already in the "Second Report" it is necessary, however, to take due account of the circumstance that the liquid containing the particles is enclosed in a vessel. Every particle drags a certain amount of the liquid along with it, and as this quantity cannot pass through the walls of the vessel (nor through a free surface of the liquid, if this should be present), a return flow must occur.

It is sufficient to restrict to the consideration of the component of velocity in the direction of the gravitational force (which may be taken to be that of the *x*-axis); this

component will be denoted by  $u$ . We describe the field of flow produced by the particle  $A$  by the formula:

$$u = \frac{F}{8 \pi \eta_{\text{eff}}} \Phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \dots \dots \dots (9)$$

where  $F$  is the force acting upon the particle  $A$ ;  $\xi, \eta, \zeta$  are the coordinates of the centre of  $A$ ;  $x, y, z$  represent an arbitrary point of the field, situated e.g. upon the surface of the particle  $B$ . We write  $r = \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\}^{1/2}$ . The function  $\Phi$  satisfies the equation<sup>3)</sup>:

$$\Delta \Delta \Phi = 0 \dots \dots \dots (10)$$

At the walls of the vessel:

$$\Phi = 0, \dots \dots \dots (11)$$

At the surface of the particle  $A$  the function  $\Phi$  takes a constant value, which will be denoted by  $\Phi_0$ .

The exact form of  $\Phi$  depends both upon the shape, the dimensions and the orientation of the particle  $A$ , and upon the dimensions of the vessel. In the case of a *spherical particle* of radius  $a$  we have, for small values of  $r$ :

$$\Phi = \frac{1}{r} + \frac{(x-\xi)^2}{r^3} + \frac{a^2}{3r^3} - \frac{a^2(x-\xi)^2}{r^5} + \chi \dots \dots \dots (12)$$

where  $\chi$  remains finite for  $r = 0$ , and represents the influence of the walls of the vessel. By way of example it may be mentioned that for a spherical particle situated at the centre of a spherical vessel with radius  $R$ , large in comparison with  $a$ , we should have, approximately:

$$\chi = -\frac{3}{R} + \frac{2r^2 - (x-\xi)^2}{R^3} \dots \dots \dots (13)$$

terms of the order  $a^2/R^3$  being neglected.

In this case the value of  $\Phi$  at the surface of the particle becomes:

$$\Phi_0 = 4/3a - 3/R \dots \dots \dots (14)$$

In the cases to be considered here, however, the influence of the term denoted by  $\chi$  is of importance only in integrals extended over the whole space taken in by the system, such as occur in the deduction of eq. (19) below and in that of eq. (22). In consequence of the large value of the ratio of the dimensions of the vessel to those of the particles  $\chi$  generally can be neglected in calculations referring to the surface of the particle or to its

<sup>3)</sup> The relations (10) and (11) immediately follow from the equations of motion, which upon neglecting the inertia terms take the form:

$$\partial p / \partial x = \eta \Delta u; \quad \partial p / \partial y = \eta \Delta v; \quad \partial p / \partial z = \eta \Delta w;$$

with

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0.$$

Hence we have:

$$\Delta p = 0, \quad \Delta \Delta u = 0, \quad \text{etc.}$$

At the walls of the vessel  $u = v = w = 0$ .

The influence of OSEEN's correction of STOKES' formula, if necessary, can be assumed to have been taken up in the term denoted by  $\chi$  in eq. (12); it does not affect the form of  $\Phi$  for small values of  $r$ .

immediate neighbourhood. Hence for spherical particles we may write, with sufficient approximation for our purpose:

$$\Phi_0 = 4/3a \dots \dots \dots (14a)$$

4. In order to find the influence of this field upon the particle *B* we calculate the mean value of the velocity over the surface of *B*. This procedure in many cases is sufficiently accurate for obtaining the influence of *A* upon *B*: in the case of spherical particles the error remains small even when the two spheres are in contact<sup>4)</sup>.

The mean value of  $\Phi$  over the surface *S* of the particle *B* is defined by the integral:

$$(1/S) \int \int dS \Phi. \dots \dots \dots (15)$$

If we assume that the particle *B* may take all orientations in space with equal probability, we must determine the mean value of this integral for these orientations. For this purpose we consider a definite element *dS* of the surface, situated at a distance  $r_1$  from the centre of the particle. Taking the average value for all orientations of the particle, the contribution by this element to the desired mean value will be:

$$(dS/S) \left( \Phi_c + \frac{1}{6} r_1^2 \Delta \Phi + \frac{1}{120} r_1^4 \Delta \Delta \Phi + \dots \right). \dots (16)$$

where  $\Phi_c$  is the value of  $\Phi$  at the centre of the particle *B*. As  $\Delta \Delta \Phi = 0$ , we may restrict this development to the first and the second terms. Hence the mean value (to be denoted by  $\Phi_m$ ) of  $\Phi$  over the surface of the particle *B*, for all orientations of the latter, becomes:

$$\Phi_m = \Phi_c + \frac{1}{6} \Delta \Phi \cdot (1/S) \int \int dS r_1^2 = \Phi_c + \frac{1}{6} r_0^2 \Delta \Phi. \dots (17)$$

where  $r_0^2$  represents the mean value of  $r_1^2$  over the surface *S* (radius of gyration of *S* with respect to the centre).

In the case of a sphere of radius *a* we have:  $r_0 = a$ .

<sup>4)</sup> In the case of two spheres, both of radius *a*, in an unlimited field, the application of formula (17) of the text below gives:

$$\Phi_m = (1 + \cos^2 \vartheta)/r + 2 a^2 (1 - 3 \cos^2 \vartheta)/3 r^3,$$

where  $\cos \vartheta = (x - \xi)/r$ . When both spheres are acted upon by a force *F* in the same direction, the velocity acquired by each sphere is given by:

$$U = \frac{F}{8 \pi \eta} (\Phi_0 + \Phi_m) = \frac{F}{6 \pi \eta a} (1 + \frac{3}{4} a \Phi_m).$$

A few values of the factor  $m = 1 + 3 a \Phi_m/4$ , for the case  $\vartheta = 0$ , are collected in the following table, together with those of  $1/m$  and values of a coefficient  $\lambda$ , calculated with the aid of more precise methods by other authors:

$r/a$	$m$	$1/m$	$\lambda$
4.704	1.309	0.764	0.768
3.086	1.452	0.689	0.702
2.256	1.577	0.634	0.663
2	1.625	0.616	0.645

Compare: C. W. OSEEN, Hydrodynamik (Leipzig 1927), p. 162.



5. We now must calculate the mean value of  $\Phi_m$  for all positions of the particle  $B$  with respect to  $A$ . Provisionally we assume that the orientation in space of  $A$  is kept unchanged. The space around  $A$  will be divided into three regions:

- (I) a layer  $G^*$  of thickness  $r_{max}$  along the walls of the vessel;
- (II) the region  $C^*$  between a spherical surface  $C$  with radius  $2r_{max}$  around the centre of the particle  $A$  and the surface  $S$  of the latter;
- (III) the remaining space, to be denoted by  $G$ , between the layer along the wall and the spherical surface  $C$ .

Here  $r_{max}$  will denote the maximum value of the distance  $r_1$  of any element  $dS$  of the surface  $S$  from the centre of the particle. It is only when the centre of the particle  $B$  is situated in  $G$ , that free rotation, both of  $A$  and of  $B$ , is possible, so that we may apply the assumption of equal probability of all spatial orientations.

In the layer along the wall  $\Phi$  will be at most of the order  $r_{max} R^{-2}$ , if  $R$  is a measure for the dimensions of the vessel.

The contribution by the region  $G$  to the mean value sought, and those by the regions  $C^*$  and  $G^*$  (in which regions the geometrical relations are far more complicated) must be treated separately.

In the case of spherical particles where  $r_{max}$  is equal to the radius  $a$  of the particle, no particle can have its centre in the regions  $C^*$  and  $G^*$ . The contributions of these regions then wholly disappear.

6. The contribution by the region  $G$  is given by:

$$(1/\Omega) \int \int \int dx dy dz \Phi_m = \left. \begin{aligned} &= (1/\Omega) \left( \int \int \int dx dy dz \Phi_c + \frac{1}{6} r_0^2 \int \int \int dx dy dz \Delta \Phi \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$\Omega$  being the volume of the vessel.

Now it follows from the equation of continuity that for any plane  $x = \text{const.}$ :

$$\int \int dy dz \Phi_c = 0, \text{ if this plane does not cut the particle } A;$$

$\int \int dy dz \Phi_c = -\Phi_0 \Sigma$ , if this plane cuts the particle  $A$ , where  $\Sigma$  is the area of the cut, while  $\Phi_0$  is the value of  $\Phi$  at the surface of the particle, which is equal to the velocity of the latter, multiplied by  $8 \pi \eta_{eff} lF$  (it is sufficiently accurate here to take the value of the velocity uncorrected for the influence of the other particles). Hence, when the integration is extended over the whole region between the surface of the particle  $A$  and the walls of the vessel:

$$\int \int \int dx dy dz \Phi_c = -\Phi_0 s \dots \dots \dots (19)$$

$s$ , as before, being the volume of the particle.

When the integration is extended over the region  $G$  only, we must exclude the domains  $C^*$  and  $G^*$ , and obtain:

$$\int \int \int_G dx dy dz \Phi_c = -\Phi_0 s - \int \int \int_{C^*} dx dy dz \Phi_c - \int \int \int_{G^*} dx dy dz \Phi_c \quad (20)$$

The calculation should be performed for all orientations of  $A$ . In the first term on the right hand side we consequently may take  $\Phi_0$  to represent the mean value for all orientations. The mean value of the second term for shortness will be written  $k_1 r_0^2$ , that



of the third one  $-k_2 r_0^2$  ( $k_1$  and  $k_2$  being numerical coefficients). In this way we have:

$$\iiint_G dx dy dz \Phi_c = -\Phi_0 s - k_1 r_0^2 + k_2 r_0^2 \dots \dots (21)$$

Next considering the second integral of the right hand member of (18), we have:

$$\iiint_G dx dy dz \Delta \Phi = \iint dS_e \partial\Phi/\partial n - \iint dS_C \partial\Phi/\partial r. \dots (22)$$

where  $dS_e$  represents an element of the exterior surface of  $G$  (i.e. of the wall of the vessel), and  $dS_C$  an element of the spherical surface  $C$ . Both surface integrals appear to give numerical coefficients, to be denoted by  $k_3, -k_4$  respectively, so that:

$$\iiint_G dx dy dz \Delta \Phi = k_3 + k_4 \dots \dots (23)$$

Hence finally we have:

$$\iiint_G dx dy dz \Phi_m = -\Phi_0 s - k_1 r_0^2 + k_2 r_0^2 + \frac{1}{6} (k_3 + k_4) r_0^2 \dots (24)$$

7. For spherical particles of radius  $a$ , for which problems of orientation do not present themselves, we have, with sufficient approximation:

$$\begin{aligned} r_0 &= a; & r_{max} &= a; & s &= 4\pi a^3/3 \\ \Phi_0 &= 4/3 a & & \text{from (14a)} & & \\ k_1 r_0^2 &= 8\pi a^2 & & \left. \begin{array}{l} \text{neglecting terms} \\ \text{depending on } \chi. \end{array} \right\} & & \\ k_4 &= 16\pi/3 & & & & \end{aligned}$$

As mentioned before, in this case there are no contributions from the regions  $C^*$  and  $G^*$ , so that eq. (24), after division by  $\Omega$ , ought to give the mean value required.

There remains, however, to be found the values of the quantities  $k_2$  and  $k_3$ . Originally, in preparing the paper, I had assumed that these quantities, both of which appear to be dependent on the value of  $\partial\Phi/\partial n$  at the walls of the vessel, would disappear automatically, in consequence of a mistaken application of a boundary condition. Upon reviewing the matter it appeared that in certain cases they are different from zero. It may be that when their mean value is taken for all possible positions of the particle  $A$ , this mean value will disappear, but as yet I have not succeeded in proving this. This makes it impossible at this moment to arrive at numerical results. I hope to be able to return to this point in a continuation of this paper, the more so as some remarks still must be made concerning the questions of the hydrostatic pressure and of the effective viscosity of the fluid. Further it must be considered whether the magnitude of the "viscosity effect" and the effect due to the flow of the liquid are affected when not all positions of a particle  $B$  with respect to  $A$  are equally probable, e.g. in consequence of repulsive forces acting between the particles. To a certain extent formulae can be derived which throw some light upon these latter problems.

(To be continued.)

**Mathematics.** — Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im  $R_4$ . (Sechste Mitteilung.) Von R. WEITZENBÖCK und W. J. BOS.

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

*Einleitung.* Im Anschlusse an die vorhergehenden Mitteilungen untersuchen wir hier die algebraischen Regelflächen  $F_2^2$  und  $F_2^3$  im  $R_4$ . Im besonderen wird sich die gewöhnliche Darstellung der Regelfläche  $F_2^3$  ergeben, wobei eine Gerade auf einen Kegelschnitt projektiv bezogen wird.

§ 19.

Bei einer Regelfläche  $F_2^2$  zweiten Grades haben wir für die Erzeugenden:

$$\left. \begin{aligned} 0_{ik} &= p_{ik} + t \cdot a_{ik} + \frac{1}{2} t^2 \cdot q_{ik} \\ 1_{ik} &= a_{ik} + t \cdot q_{ik} \\ 2_{ik} &= q_{ik} \\ 3_{ik} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (190)$$

und aus  $M'_{00} \equiv 0(t)$  ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} M'_{pp} &= 0 \\ M'_{pa} &= 0 \\ M'_{pq} + M'_{aa} &= 0 \\ M'_{aq} &= 0 \\ M'_{qq} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (191)$$

Aus (190) folgt:  $M'_{22} = 0$ , also (Gleichung (21)) gilt  $H \equiv 0$ ; d.h.  $F_2^2$  liegt wenigstens in einem  $R_3 : v'$ . Nach (191) sind  $p_{ik}$  und  $q_{ik}$  die Koordinaten von Geraden, die nach (190) den Erzeugenden  $t = 0$  und  $t = \infty$  entsprechen. Man hat also:

$$v'_i = (p^2 q^2)_i$$

und  $v'$  ist auch der Brennraum des Ebenenkomplexes  $a_{ik}$ . (191)

Die am Schluss der ersten Mitteilung gegebene Klassifikation ergibt wegen

$$M'_{02} = M'_{pq} :$$

Schneiden sich die Geraden  $p_{ik}$  und  $q_{ik}$  nicht, so ist  $F_2^2$  eine nichtausgeartete dreidimensionale Quadrik.

Schneiden sich dagegen  $p_{ik}$  und  $q_{ik}$ , so ist  $M'_{02} \equiv 0$ , also  $F_2^2$  abwickelbar. Nach (191) ist dann auch  $a_{ik}$  eine Gerade, die  $p_{ik}$  und  $q_{ik}$  trifft.

Dies gibt die Möglichkeiten:

1.  $a_{ik}$  geht nicht durch den Schnittpunkt 1 von  $p_{ik}$  und  $q_{ik}$ ; dann haben wir, wenn die Punkte 1, 2 und 3 nicht derselben Geraden angehören:

$$0_{ik} = (12)_{ik} + t \cdot (23)_{ik} + \frac{1}{2} t^2 \cdot (13)_{ik} \quad (\text{Kegelschnitt in } 123)$$

2.  $a_{ik}$  geht durch 1, liegt aber mit  $p_{ik}$  und  $q_{ik}$  nicht in derselben Ebene:

$$0_{ik} = (12)_{ik} + t \cdot (14)_{ik} + \frac{1}{2} t^2 \cdot (13)_{ik} \quad (\text{Kegel im Raum } 1234)$$

3.  $a_{ik} = p_{ik} + \sigma q_{ik} = (12)_{ik} + \sigma (13)_{ik}$ :

$$0_{ik} = (12)_{ik} (1 + t) + (13)_{ik} (\sigma t + \frac{1}{2} t^2) \quad (\text{Geradenb\u00fcchel}).$$

§ 20.

Bei einer algebraischen Regelfl\u00e4che  $F_2^3$  vom Grade 3 haben wir den Ansatz:

$$0_{ik} = p_{ik} + t \cdot a_{ik} + \frac{1}{2} t^2 \cdot b_{ik} + \frac{1}{6} t^3 \cdot q_{ik} \dots \dots \dots (192)$$

Hieraus:

$$\left. \begin{aligned} 1_{ik} &= a_{ik} + t \cdot b_{ik} + \frac{1}{2} t^2 \cdot q_{ik} \\ 2_{ik} &= b_{ik} + t \cdot q_{ik} \\ 3_{ik} &= q_{ik} \\ 4_{ik} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (193)$$

Aus  $M'_{00} \equiv 0(t)$  folgen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} M'_{pp} &= 0 & M'_{pa} &= 0 \\ M'_{aa} + M'_{pb} &= 0 \\ M'_{pq} + 3 M'_{ab} &= 0 \\ 3 M'_{bb} + 4 M'_{aq} &= 0 \\ M'_{qb} &= 0 & M'_{qq} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (194)$$

Damit erhalten wir:

$$M'_{02} = M'_{pb} + \frac{2}{3} t \cdot M'_{pq} + \frac{1}{3} t^2 \cdot M'_{aq} \dots \dots \dots (195)$$

Wegen

$$M'_{22} = M'_{bb} + 2 t \cdot M'_{bq} + t^2 M'_{qq} = -\frac{4}{3} M'_{aq} = M'_{bb}$$

erh\u00e4lt man f\u00fcr den Heftpunkt  $H$ :

$$\begin{aligned} (Hu') &= \sum 0_{ik} (u' M'_{22})_{ik} = \sum 0_{ik} (u' \cdot b^2 b_1^2)_{ik} = \\ &= (pu') (pb^2 b_1^2) + t \cdot (au') (ab^2 b_1^2) + \frac{1}{2} t^2 (bu') (bb_1^2 b_2^2) + \frac{1}{6} t^3 (qu') (qb^2 b_1^2). \end{aligned}$$

Hier gibt beim dritten Term ( $bb_1^2 b_2^2$ ) Null. Beim vierten wird:  $(qb^2 b_1^2) = -\frac{4}{3} (qa^2 q_1^2)$ , also auch Null; sodass wir haben:

$$\left. \begin{aligned} (Hu') &= (pu') (pb^2 b_1^2) + t (au') (ab^2 b_1^2) = \\ &= (pu') (pM'_{bb}) + \frac{2}{3} t \cdot (qu') (qM'_{aa}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (196)$$

Wir betrachten zuerst die allgemeine Fl\u00e4che  $H \neq 0, M'_{02} \neq 0$  (vgl. den Schluss der ersten Mitteilung).

Die Punkte  $H$  erf\u00fcllen in diesem Falle eine Gerade  $L$ , welche die beiden, den Parameterwerten  $t = 0$  und  $t = \infty$  entsprechenden Heftpunkte verbindet:

$$(1u') = (pu') (pM'_{bb}) = 0 \quad \text{und} \quad (2u') = (qu') (qM'_{aa}) : : (197)$$

Wählen wir jetzt auf  $p_{ik}$  einen von 1 verschiedenen Punkt 3, auf  $q_{ik}$  einen von 2 verschiedenen Punkt 4, dann können wir durch diese Punkte 3 und 4 und die Erzeugende

$$\tau_{ik} = p_{ik} + \tau a_{ik} + \frac{1}{2} \tau^2 \cdot b_{ik} + \frac{1}{6} \tau^3 q_{ik} \quad (\tau \neq 0)$$

den  $R_3$  mit der Gleichung

$$(x\tau^2 34) = 0. \quad \dots \quad (198)$$

legen. Dieser  $R_3$  schneidet die Erzeugende  $0_{ik}$  von (192) in dem Punkte:

$$(u'P) = (0\tau^2 34)(0u') = 0. \quad \dots \quad (199)$$

Setzt man hier die Ausdrücke für  $0_{ik}$  und  $\tau_{ik}$  ein, so wird  $(u'P)$  vom dritten Grade in  $t$ . Da aber  $(u'P)$  für  $t = \tau$  verschwindet, lässt sich  $(u'P)$  durch  $(t - \tau)$  teilen und es bleibt ein in  $t$  quadratischer Ausdruck.

Dies heisst geometrisch: der  $R_3$  (198) schneidet die  $F_2^3$  längs der Erzeugenden  $\tau_{ik}$  und in einem Kegelschnitt, dessen Punkte durch die Erzeugenden  $0_{ik}$  projektiv auf die der Geraden  $L$  bezogen sind.

Dies führt zu folgendem Ansatz: Wir wählen zwei Punkte 1 und 2, ihre Verbindungslinie sei die „Leitgerade“  $L$ . Weiter wählen wir einen Kegelschnitt  $K$ , in der Ebene 345 der drei Punkte 3, 4 und 5, in der Gestalt:

$$(K) \quad z = 3 + t, 5 + t^2 \cdot 4 \dots \quad (200)$$

Hierbei soll die Determinante (12345)  $\neq 0$  sein. Die Punkte  $K$  werden dann mit Hilfe des Parameters  $t$  auf die Punkte

$$(L) \quad y = 1 + t \cdot 2 \quad \dots \quad (201)$$

der Leitgeraden  $L$  projektiv bezogen, sodass ein allgemeiner Punkt der  $F_2^3$  durch die zwei Parameter  $t$  und  $\lambda$  dargestellt wird in der Gestalt:

$$x = y + \lambda z = 1 + t, 2 + \lambda(3 + t, 5 + t^2, 4) \quad \dots \quad (202)$$

Bei dieser Darstellung von  $F_2^3$  erhalten wir für die Erzeugenden  $0_{ik}(t)$ :

$$0_{ik} = (yz)_{ik} = (13)_{ik} + t[(15)_{ik} + (23)_{ik}] + t^2[(14)_{ik} + (25)_{ik}] + t^3(24)_{ik}. \quad (203)$$

Hieraus folgen:

$$\begin{aligned} 1_{ik} &= [(15)_{ik} + (23)_{ik}] + 2t \cdot [(14)_{ik} + (25)_{ik}] + 3t^2 \cdot (24)_{ik} \\ 2_{ik} &= 2[(14)_{ik} + (25)_{ik}] + 6t \cdot (24)_{ik} \\ 3_{ik} &= 6(24)_{ik} \end{aligned}$$

und die Gleichungen (194) sind erfüllt.

Für  $M'_{02}$  und  $H$  erhalten wir jetzt:

$$(xM'_{02}) = -2(x1235) - 4t(x1234) + 2t^2(x1245) \quad \dots \quad (204)$$

$$(Hu') = -4(12345)[(1u') + t \cdot (2u')] \quad \dots \quad (205)$$

§ 21.

Die Regelflächen  $F_2^3$  dritter Ordnung im  $R_4$  sind in der Litteratur ausführlich behandelt. Die verschiedenen Typen der rationalen  $F_2^m$  im  $R_{m+1}$  erhält man wie folgt: Man wählt

im  $R_{m+1}$  einen  $R_p$  und einen dazu windschiefen  $R_{m-p}$  ( $p = 1, 2, 3, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ ). Im  $R_p$  resp.  $R_{m-p}$  wählt man eine rationale Kurve  $C_1^p$  resp.  $C_1^{m-p}$ , die projektiv aufeinander bezogen werden. Die Verbindungslinien liefern dann die Erzeugenden der  $F_2^m$  im  $R_{m+1}$  <sup>1)</sup>.

Bei  $m = 3$  erhalten wir  $C_1^1 =$  Leitgerade  $L$ ,  $C_1^2 =$  Kegelschnitt  $K$ , und damit die im vorigen § beschriebene Konstruktion der  $F_2^3$ .

Wir führen in Kürze die wichtigsten projektiven Eigenschaften der allgemeinen  $F_2^3$  an <sup>2)</sup>.

$F_2^3$  enthält neben der Leitlinie  $L$  ( $\lambda = 0$ ) und den Erzeugenden  $0_{ik}(t)$  ( $t = \text{const.}$ ) keine Geraden. Wäre nämlich  $M$  eine solche so müsste der  $R_3(L, M)$  die ganze Fläche enthalten.

Die Gleichung der  $F_2^3$  in Linienkoordinaten bekommen wir wie folgt. Sei  $x_{\lambda t}$  (202) ein allgemeiner Punkt der  $F_2^3$ , dann ist die Gleichung der Ebene  $12x_{\lambda t}$ :

$$\frac{1}{\lambda} (p^2 12 x_{\lambda t}) \equiv (p^2 123) + (p^2 125) t + (p^2 124) t^2 = 0.$$

Ebenso:

$$(p^2 13 x_{\lambda t}) \equiv - (p^2 123) + (p^2 135) \lambda + (p^2 134) \lambda t = 0$$

$$(p^2 24 x_{\lambda t}) \equiv (p^2 124) - (p^2 234) \lambda + (p^2 245) \lambda t = 0$$

$$(p^2 34 x_{\lambda t}) \equiv (p^2 134) + (p^2 234) t + (p^2 345) \lambda t = 0$$

Wir multiplizieren die zweite und dritte dieser Gleichungen mit  $t$ , und drücken mit Hilfe der vierten Gleichung  $\lambda t$  aus in  $t$ .

Elimination gibt dann die Gleichung der  $F_2^3$  in Linienkoordinaten:

$$\begin{vmatrix} (p^2 123) & (p^2 125) & (p^2 124) \\ (p^2 135) & (p^2 134) - (p^2 235) & (p^2 234) \\ (p^2 134) & (p^2 145) + (p^2 234) & (p^2 245) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (206)$$

Diese Gleichung ist also vom dritten Grade in  $p_{ik}$ , wie auch geometrisch zu erwarten war. Denn durch einen Punkt gehen im allgemeinen 3 Treffgeraden der  $F_2^3$  die in einer Ebene liegen.

Eine Ebene  $w^3$  schneidet die  $F_2^3$  nämlich im allgemeinen in drei Punkten. Die zugehörigen drei Erzeugenden ergeben sich nach (203) aus der Gleichung:

$$(w^3 12) + t \cdot [(w^3 15) + (w^3 23)] + t^2 \cdot [(w^3 25) + (w^3 14)] + t^3 \cdot (w^3 24) = 0. \quad (207)$$

Die Diskriminante  $R(w_{ijk})$  dieser kubischen Form wird vom Grade vier in den Ebenenkoordinaten  $w_{ijk}$ ;  $R(w_{ijk}) = 0$  kann also als Gleichung der Fläche in Ebenenkoordinaten angesehen werden.

Geometrisch kann man sagen: Ein Raum  $R_3$  durch eine Gerade  $N$  schneidet die  $F_2^3$  im allgemeinen in einer rationalen Kurve  $C_1^3$ . (Siehe unten, Gl. (210). Die Tangentenfläche dieser Kurve ist von vierter Ordnung. Es gibt also im Raume  $R_3$  vier Tangenten der

<sup>1)</sup> C. SEGRE, *Atti Torino* 19, 355 (1884); und *Math. Ann.* 30, 203—226 (1887); 34, 1—25 (1889); W. L. EDGE, *The theory of ruled surfaces*. Cambridge, 1931, section III; E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa, 285—327 (1907).

<sup>2)</sup> Vgl. neben den genannten Arbeiten von Segre und Edge (S. 36—42) auch: G. VERONESE, *Math. Ann.* 19, 229—232 (1882); und besonders O. BOTTEMA, *Proc. Ned. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, 43, 1282—1287 (1940).

Kurve  $C_1^3$  die  $N$  schneiden, und also auch vier Tangentenebenen der Fläche  $F_2^3$  durch  $N$  in einem  $R_3$ .

Die Schnittfigur von  $w^3$  mit der Fläche kann sein: drei getrennte nicht auf einer Geraden liegende Punkte, ein doppelt zu zählender und ein einfacher Punkt, ein dreifach zu zählender Punkt, eine Gerade ( $L$ ), eine Erzeugende und ein Punkt, zwei sich schneidende Geraden ( $L$  und eine Erzeugende), ein Kegelschnitt.

Auf der  $F_2^3$  liegen  $\infty^2$  Kegelschnitte  $K$ , die in Flächenparametern  $(t, \lambda)$  durch

$$\frac{1}{\lambda} = at + b \quad \dots \dots \dots (208)$$

definiert werden. Sind  $a$  und  $b$  gegeben, so werden die Koordinaten der Punkte des zugehörigen Kegelschnittes nach (202):

$$\begin{aligned} \varrho x &= (1 + t \cdot 2) (a \cdot t + b) + (3 + t \cdot 5 + t^2 \cdot 4) = \\ &= (b \cdot 1 + 3) + t \cdot (a \cdot 1 + b \cdot 2 + 5) + t^2 \cdot (a \cdot 2 + 4). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich leicht:  $K$  schneidet jede Erzeugende in einem und nur einem Punkte;  $K$  kann bestimmt werden durch zwei Punkte der  $F_2^3$ , die nicht auf der Leitlinie und nicht auf denselben Erzeugenden liegen. Zwei Kegelschnitte  $K_1(a_1b_1)$  und  $K_2(a_2b_2)$  haben nur einen Punkt gemeinsam. Durch einen gegebenen Punkt  $(t_0, \lambda_0)$  auf  $F_2^3$  geht ein Büschel von Kegelschnitten  $K$ , das durch

$$\begin{aligned} \varrho x &= a(t-t_0)(1+t \cdot 2) + \left[ \frac{1}{\lambda_0} (1+t \cdot 2) + (3+t \cdot 5 + t^2 \cdot 4) \right] \\ &= aK_1 + K_2 \end{aligned}$$

dargestellt werden kann. Dabei zerfällt also  $K_1$  in die Erzeugende  $t = t_0$  und die Leitlinie  $L$ .

Ein  $R_3 (v')$  schneidet die  $F_2^3$  in einer rationalen  $C_1^3$  die in Flächenparametern durch

$$\lambda = - \frac{v'_1 + v'_2 \cdot t}{v'_3 + v'_5 \cdot t + v'_4 \cdot t^2} \quad \dots \dots \dots (209)$$

festgehalten werden kann.

$C_1^3$  kann zerfallen: in eine Erzeugende und einen Kegelschnitt, in zwei getrennte Erzeugende und die Leitlinie  $L$ , und schliesslich in eine doppelt zu zählende Erzeugende und  $L$ .

Die  $C_1^3$  ist gegeben durch:

$$\varrho x = (1 + t \cdot 2) (v'_3 + t \cdot v'_5 + t^2 \cdot v'_4) - (3 + t \cdot 5 + t^2 \cdot 4) (v'_1 + t \cdot v'_2). \quad (210)$$

Die rationale Kurve  $C_1^3$  kann nur einen Doppelpunkt haben wenn sie zerfällt und also wenigstens eine Erzeugende enthält.

Die Gleichung aller Räume  $u'$ , in welchen eine Erzeugende  $0_{ik}(t)$  der  $F_2^3$  liegt, ist also auch die Gleichung der  $F_2^3$  in Raumkoordinaten.

Der  $R_3 u'$  enthält  $0_{ik}(t)$  wenn:

$$0_{u'} 0_{v'} \equiv 0 \{v'\}.$$

Mit einem Hilfspunkte  $y$  und (203) bekommen wir die Eliminationsgleichung:

$$\begin{aligned} (1_{u'} 3_{v'} - 3_{u'} 1_{v'}, 1_{u'} 5_{v'} - 5_{u'} 1_{v'} + 2_{u'} 3_{v'} - 3_{u'} 2_{v'}, 1_{u'} 4_{v'} - 4_{u'} 1_{v'} + \\ + 2_{u'} 5_{v'} - 5_{u'} 2_{v'}, 2_{u'} 4_{v'} - 4_{u'} 2_{v'}, y_{v'}) \equiv 0. \end{aligned}$$



Dies gibt 15 Terme die wir so zusammenfassen

$$(1_{u'} 1_{u'} 4_{u'} - 1_{u'} 2_{u'} 5_{u'} + 2_{u'} 2_{u'} 3_{u'}) [(2345 y) 1_{u'} - (1345 y) 2_{u'} + (1245 y) 3_{u'} - (1235 y) 4_{u'} + (1234 y) 5_{u'}]$$

und die zwei Terme

$$(1234 y) 3_{u'} 2_{u'} 1_{u'} 4_{u'} - (1234 y) 1_{u'} 3_{u'} 4_{u'} 2_{u'}$$

die Null ergeben.

Hieraus erhält man die Gleichung der  $F_2^3$  in Raumkoordinaten  $u'$ :

$$(12345) (1_{u'} 1_{u'} 4_{u'} - 1_{u'} 2_{u'} 5_{u'} + 2_{u'} 2_{u'} 3_{u'}) = 0 \quad \dots \quad (211a)$$

Die Gleichung ist also vom dritten Grade in  $u'$ . Geometrisch: Eine allgemeine Ebene schneidet die  $F_2^3$  in drei Punkten; jedes Paar dieser Punkte bestimmt einen Kegelschnitt auf  $F_2^3$  und also einen Raum  $R_3$ .

Durch eine Ebene gibt es infolgedessen drei Räume, welche die  $F_2^3$  in einer ausgearteten Kurve  $C_1^3$  schneiden.

Mit Hilfe der Gleichung (203) rechnet man leicht nach, dass auch die Differentialkontravariante

$$(0^2 1 2 3) 1_{u'} 2_{u'} 3_{u'} = 0 \quad \dots \quad (211b)$$

die  $F_2^3$  in Raumkoordinaten darstellt.

Wir bemerken weiter noch:

Die  $F_2^3$  ist durch 18 Konstanten bestimmt und gestattet  $\infty^6$  projektive Transformationen in sich. Geometrisch kann die  $F_2^3$  gegeben werden durch 4 Geraden, die eine gemeinsame Transversale besitzen.

**Mathematics.** — *Une propriété des variétés de VERONESE.* Par LUCIEN GODEAUX.  
(Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

Appelons variété de VERONESE à  $n$  dimensions la variété obtenue en rapportant projectivement les hyperquadriques d'un espace linéaire à  $n$  dimensions aux hyperplans d'un espace linéaire à  $\frac{1}{2}n(n+3)$  dimensions. Pour  $n=2$ , on obtient la surface de VERONESE. On peut obtenir les propriétés d'une variété de VERONESE en généralisant la méthode suivie dans le cas d'une surface<sup>1)</sup>. Dans cette note, nous nous proposons d'obtenir quelques propriétés de cette variété par une autre voie. Nous utilisons la variété de SEGRE représentant les couples de points de deux espaces linéaires à  $n$  dimensions<sup>2)</sup>; cette variété contient une involution du second ordre représentée par la variété des cordes de la variété de VERONESE à  $n$  dimensions. C'est sur cette remarque qu'est basée la méthode suivie.

1. Soient  $S_n$  un espace linéaire à  $n$  dimensions,  $y, z$  deux de ses points,  $y_0, y_1, \dots, y_n$  et  $z_0, z_1, \dots, z_n$  leurs coordonnées projectives homogènes. Désignons par  $V_{2n}$  la variété de SEGRE représentant les couples ordonnés  $y, z$  et par  $\Omega_{2n}$  la variété représentant les couples non ordonnés  $y, z$ .

Nous prendrons comme modèle projectif de la variété  $V_{2n}$  la variété d'ordre  $(2n)! : (n!)^2 = \binom{2n}{n}$  appartenant à l'espace linéaire  $S_r$  à  $r = n(n+2)$  dimensions, obtenue en posant

$$\varrho X_{ik} = y_i z_k, \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

et en interprétant les  $X_{ik}$  comme les coordonnées projectives d'un point  $X$  de cet espace.

Pour modèle projectif de la variété  $\Omega_{2n}$ , nous prendrons la variété appartenant à l'espace  $S_\varrho$  à  $\varrho = \frac{1}{2}n(n+3)$  dimensions, obtenue en posant

$$\varrho Y_{ik} = y_i z_k + y_k z_i$$

et en prenant les  $Y_{ik}$  comme coordonnées projectives d'un point  $Y$  de cet espace.

Les équations de la variété  $V_{2n}$  s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{ik} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un; celles de la variété  $\Omega_{2n}$  en écrivant que le déterminant *symétrique*

$$\begin{vmatrix} Y_{ik} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique deux.

Considérons, dans l'espace  $S_r$ , l'homographie  $H$  d'équations

$$\varrho X'_{ik} = X_{ki}.$$

Cette homographie est harmonique et ses axes ponctuels sont

a) Un espace linéaire  $\sigma$  à  $\varrho$  dimensions, représenté par les équations

$$X_{ik} = X_{ki}.$$

<sup>1)</sup> Voir par exemple: E. BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907).

<sup>2)</sup> C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1891, pp. 192—204).

Cet espace coupe  $V_{2n}$  suivant une variété  $U$  dont les équations s'obtiennent en écrivant que le déterminant *symétrique*  $|X_{ik}|$  est de caractéristique un. Cette variété est obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans de  $\sigma$  les hyperquadriques d'un espace linéaire à  $n$  dimensions. Pour cette raison, nous l'appellerons la variété de VERONESE à  $n$  dimensions. L'ordre de la variété  $U$  est égal à  $2^n$ .

b) Un espace linéaire  $\sigma'$  à  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$  dimensions, d'équations

$$X_{ik} + X_{ki} = 0.$$

Cet axe ne rencontre pas la variété  $V_{2n}$ .

La variété  $V_{2n}$  est transformée en elle-même par l'homographie  $H$  et celle-ci engendre donc, sur cette variété, une involution  $I_2$ , d'ordre deux, dont les points unis forment la variété de VERONESE  $U$ .

2. Les hyperplans  $\xi$  passant par l'axe  $\sigma'$  de  $H$  sont unis pour cette homographie et découpent, sur  $V_{2n}$ , un système linéaire  $|F|$ , de variétés à  $2n-1$  dimensions, de dimension  $\varrho$ , appartenant à l'involution  $I_2$ . Pour obtenir une variété image de cette involution, rapportons projectivement les variétés  $F$  aux hyperplans de l'espace  $S_{\varrho}$ , à  $\varrho$  dimensions. L'équation des hyperplans  $\xi$  étant

$$\sum \lambda_{ik} (X_{ik} + X_{ki}) = 0,$$

il suffit de poser

$$\varrho Y_{ik} = X_{ik} + X_{ki} = y_i z_k + y_k z_i.$$

On obtient donc ainsi les équations de la variété  $\Omega_{2n}$ . On voit en effet immédiatement que si, dans un déterminant tiré de  $|Y_{ik}|$  en effaçant  $n-2$  lignes et  $n-2$  colonnes, on remplace  $Y_{ik}$  par  $X_{ik} + X_{ki}$ , ce déterminant se ramène à une somme de déterminants identiquement nuls en raison des équations de  $V_{2n}$ .

D'ailleurs, on passe des équations de  $V_{2n}$  à celles de  $\Omega_{2n}$  en considérant l'identité  $\varrho y_i = z_i$ , qui fait correspondre au couple ordonné  $yz$ , le couple ordonné  $zy$ . L'identité donne d'ailleurs les équations de l'homographie  $H$  et inversement, on déduit des équations de cette homographie  $\varrho y_i = z_i$ .

Les variétés  $\Phi$ , qui correspondent sur  $\Omega_{2n}$  aux variétés  $F$ , sont les sections hyperplanes de  $\Omega_{2n}$ ; elles forment un système de degré  $\frac{1}{2} \binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$ .

A la variété  $U$  de  $V_{2n}$ , caractérisée par  $X_{ik} = X_{ki}$ , correspond sur  $\Omega_{2n}$  la variété de diramation  $D$ , dont les équations s'obtiennent en écrivant que le déterminant  $|Y_{ik}|$  est de caractéristique un. La variété  $D$  est donc une variété de VERONESE à  $n$  dimensions; elle est double pour la variété  $\Omega_{2n}$ .

3. Envisageons maintenant les hyperplans  $\xi'$  de  $S_r$  passant par l'axe  $\sigma$  de l'homographie  $H$ ; ils ont pour équation

$$\sum \lambda_{ik} (X_{ik} - X_{ki}) = 0, \quad (i < k)$$

et découpent sur  $V_{2n}$  des variétés  $F'$  à  $2n-1$  dimensions, formant un système linéaire de dimension  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ , appartenant à l'involution  $I_2$ . Désignons par  $\Phi'$  les variétés qui correspondent sur  $\Omega_{2n}$  aux variétés  $F'$ .

Pour obtenir l'équation des variétés  $\Phi'$ , élevons les deux membres de l'équation précédente au carré; nous obtenons

$$\sum \lambda_{ik} \lambda_{jh} (X_{ik} X_{jh} + X_{ki} X_{hj} - X_{ik} X_{hj} - X_{ki} X_{jh}) = 0,$$

ce qui s'écrit

$$\sum \lambda_{ik} \lambda_{jh} \begin{vmatrix} Y_{jk} & Y_{ji} \\ Y_{hk} & Y_{hi} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente une hyperquadrique de  $S_\rho$ , passant par la variété de VERONESE  $D$ . Lorsque les coefficients  $\lambda$  varient, cette hyperquadrique engendre un système continu  $\Sigma$ , de dimension  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$  et d'indice  $2\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ . Ces hyperquadriques découpent sur  $\Omega_{2n}$  les variétés  $\Phi'$ .

Soit  $\bar{F}$  une section hyperplane quelconque de  $V_{2n}$ . A cette variété correspond sur  $\Omega_{2n}$  une variété  $\bar{\Phi}$  qui correspond également à la section hyperplane que  $H$  fait correspondre à  $\bar{F}$ . Lorsque  $\bar{F}$  varie sur  $V_{2n}$ ,  $\bar{\Phi}$  engendre un système continu rationnel, dont les éléments sont par conséquent contenus totalement dans un système linéaire  $|\bar{\Phi}|$ . Aux variétés de ce système correspondent sur  $V_{2n}$  des variétés appartenant au système  $|2\bar{F}|$ .

Faisons varier  $\bar{F}$  d'une manière continue dans le système  $|\bar{F}|$  des sections hyperplanes de  $V_{2n}$  en la faisant tendre vers une variété  $F$  découpée par un hyperplan passant par l'axe  $\sigma'$  de  $H$ . La variété  $\bar{\Phi}$  varie d'une manière continue dans  $|\bar{\Phi}|$  et tend vers une section hyperplane  $\Phi$  de  $\Omega_{2n}$ , comptée deux fois. On a donc

$$|\bar{\Phi}| = |2\Phi|.$$

Faisons maintenant varier  $\bar{F}$  d'une manière continue en la faisant tendre vers une variété  $F'$  découpée par un hyperplan passant par l'axe  $\sigma$  de  $H$ . La variété correspondante  $\bar{\Phi}$  tend vers une variété  $\Phi'$  augmentée de la variété à  $2n-1$  dimensions formée par les points infiniment voisins de  $D$ , situés sur  $\Omega_{2n}$ . On a donc

$$|\bar{\Phi}| = |2\Phi' + D| = |2\Phi|.$$

Il en résulte que les variétés  $\bar{\Phi}$  sont découpées sur  $\Omega_{2n}$  par les hyperquadriques de  $S_\rho$  et que le long de chaque variété  $\Phi'$ , il y a une hyperquadrique de  $\Sigma$  touchant  $\Omega_{2n}$  en chaque point d'intersection. Les variétés  $\Phi'$  sont par suite d'ordre  $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ .

La variété  $\Omega_{2n}$  est l'enveloppe du système  $\Sigma$ , ayant pour base la variété de VERONESE  $D$ .

4. A chaque point  $Y$  de  $S_\rho$ , faisons correspondre dans  $S_n$  l'hyperquadrique enveloppe d'équation

$$\sum \lambda_{ik} \xi_i \xi_k = 0.$$

Cette correspondance est projective.

Aux points de  $\Omega_{2n}$  correspondent les hyperquadriques  $n-1$  fois spécialisées, c'est-à-dire dégénérées en deux gerbes d'hyperplans. Aux points de  $D$  correspondent les hyperquadriques  $n$  fois spécialisées, c'est-à-dire dégénérées en deux gerbes d'hyperplans superposés.

Considérons deux points  $Y', Y''$  de la variété  $D$  et soient  $y', y''$  les centres des gerbes d'hyperplans correspondantes dans  $S_n$ . Aux points de la droite  $Y'Y''$  correspondent dans  $S_n$  les hyperquadriques

$$(\sum y'_i \xi_i)^2 + \lambda (\sum y''_i \xi_i)^2 = 0.$$

Toutes les hyperquadriques de ce système sont  $n-1$  fois spécialisées; chacune d'elles dégénère en deux gerbes d'hyperplans dont les sommets forment un couple d'une involution appartenant à la droite  $y'y''$ . Les points doubles de cette involution correspondent aux deux points d'appui  $Y', Y''$  de la droite  $Y'Y''$  sur la variété  $D$ .

En particulier, lorsque le point  $Y''$  tend vers  $Y'$  sur  $D$ , c'est-à-dire lorsqu'il s'agit d'une droite tangente en  $Y'$  à la variété  $D$ , aux points de cette droite correspondent dans  $S_n$  les couples de points d'une involution parabolique sur une droite, c'est-à-dire les couples de points d'une droite dont l'un,  $y'$ , est fixe.

Les cordes de la variété  $D$  sont, d'après ceci, situées dans la variété  $\Omega_{2n}$ .

5. La variété  $V_{2n}$  contient deux séries  $\infty^n$  d'espaces à  $n$  dimensions. Un espace  $\eta$  de la première série est le lieu des points de la variété qui représentent les couples de points de  $S_n$  dont le premier,  $y$ , est fixe. Un espace  $\zeta$  de la seconde série représente les couples de points dont le second,  $z$ , est fixe. Deux espaces de la même série ne se rencontrent pas; un espace  $\eta$  et un espace  $\zeta$  ont en commun un point.

A un espace  $\eta$ , l'homographie  $H$  fait correspondre un espace  $\zeta$  et réciproquement. Le point commun à ces deux espaces se trouve sur la variété unie  $U$ .

Les équations de l'espace  $\eta$  associé au point  $y$  sont

$$\frac{X_{0i}}{y_0} = \frac{X_{1i}}{y_1} = \dots = \frac{X_{ki}}{y_k} = \dots = \frac{X_{ni}}{y_n}$$

et celles de l'espace  $\zeta$  associé au point  $z$ ,

$$\frac{X_{i0}}{z_0} = \frac{X_{i1}}{z_1} = \dots = \frac{X_{ik}}{z_k} = \dots = \frac{X_{in}}{z_n}.$$

Si ces deux espaces sont conjugués par rapport à  $H$ , on a  $y = z$  et à ces deux espaces, correspond, sur la variété  $\Omega_{2n}$ , l'espace à  $n$  dimensions d'équations

$$y_i^2 Y_{kk} - 2y_i y_k Y_{ki} + y_k^2 Y_{ii} = 0.$$

On reconnaît immédiatement que les droites passant par le point  $Y$  et appartenant à cet espace, sont tangentes à  $D$  au point  $Y$ . Il en résulte que

Aux espaces à  $n$  dimensions  $\eta$ ,  $\zeta$  de  $V_{2n}$  conjugués dans l'homographie  $H$ , correspondent dans  $\Omega_{2n}$  les espaces à  $n$  dimensions tangents à la variété de VERONESE  $D$ .

6. Considérons la variété de SEGRE  $V'$  à  $2(n-1)$  dimensions, représentant sur  $V_{2n}$  les couples de point  $y$ ,  $z$  de deux hyperplans

$$\mu_0 y_0 + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_n y_n = 0,$$

$$\nu_0 z_0 + \nu_1 z_1 + \dots + \nu_n z_n = 0$$

de  $S_n$ . Cette variété  $V'$  est découpée sur  $V_{2n}$  par l'espace linéaire à  $(n-1)(n+1)$  dimensions

$$\mu_0 X_{0i} + \mu_1 X_{1i} + \dots + \mu_n X_{ni} = 0,$$

$$\nu_0 X_{i0} + \nu_1 X_{i1} + \dots + \nu_n X_{in} = 0.$$

Pour que la variété  $V'$  soit transformée en elle-même par l'homographie  $H$ , il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\mu_0}{\nu_0} = \frac{\mu_1}{\nu_1} = \dots = \frac{\mu_n}{\nu_n}.$$

A cette variété correspond alors sur  $\Omega_{2n}$  une variété  $\Omega'$ , située dans l'espace à  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$  dimensions

$$\mu_0 Y_{0i} + \mu_1 Y_{1i} + \dots + \mu_n Y_{ni} = 0.$$

Considérons la section de la variété de VERONESE  $D$  par cet espace. Il lui correspond dans  $S_n$  l'hyperplan

$$\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n = 0.$$

Par conséquent, la section considérée est une variété de VERONESE  $D'$  à  $n-1$  dimensions. Cette variété détermine complètement l'espace linéaire à  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$  dimensions. Les cordes de  $D'$  étant des cordes de  $D$ , appartiennent à  $\Omega_{2n}$ . L'espace linéaire déterminé par  $D'$  coupe donc  $\Omega_{2n}$  suivant une variété de même construction à  $2(n-1)$  dimensions.

Liège, le 28 juin 1941.

**Mathematics.** — *Multiplikationstheoreme für die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(z)$ .*  
 Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

§ 1. Einleitung.

Für die BESSELSchen Funktionen  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$  und  $K_\nu(z)$  gelten bekanntlich die sogenannten Multiplikationstheoreme <sup>1)</sup>

$$\lambda^{-\nu} J_\nu(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda^2)^r (\frac{1}{2} z)^r}{r!} J_{\nu+r}(z), \dots \dots \dots (1)$$

$$\lambda^\nu J_\nu(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2-1)^r (\frac{1}{2} z)^r}{r!} J_{\nu-r}(z), \dots \dots \dots (2)$$

$$\lambda^{-\nu} Y_\nu(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda^2)^r (\frac{1}{2} z)^r}{r!} Y_{\nu+r}(z), \dots \dots \dots (3)$$

$$\lambda^\nu Y_\nu(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2-1)^r (\frac{1}{2} z)^r}{r!} Y_{\nu-r}(z) \dots \dots \dots (4)$$

und

$$\lambda^{-\nu} K_\nu(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda^2)^r (\frac{1}{2} z)^r}{r!} K_{\nu+r}(z). \dots \dots \dots (5)$$

Verwandte Formeln für die WHITTAKERSchen Funktionen  $M_{k,m}(z)$  und  $W_{k,m}(z)$  sind von Herrn ARTUR ERDÉLYI gefunden worden; ERDÉLYI beweist nämlich <sup>2)</sup>

$$\lambda^{-m-\frac{1}{2}} e^{-\lambda z} M_{k,m}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+2m) \Gamma(\frac{1}{2}+k+m+r) (1-\lambda)^r}{r! \Gamma(1+2m+r) \Gamma(\frac{1}{2}+k+m)} z^{\frac{1}{2}r} e^{-z} M_{k+\frac{1}{2}r, m+\frac{1}{2}r}(z). \quad (6)$$

$$\lambda^k e^{-\lambda z} M_{k,m}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m+r)}{r! \Gamma(\frac{1}{2}+k+m)} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^r e^{-z} M_{k+r, m}(z) \quad (7)$$

und

$$\lambda^k e^{-\lambda z} W_{k,m}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^r e^{-z} W_{k+r, m}(z). \dots \dots (8)$$

In der vorliegenden Note werde ich zeigen, dass die Beziehungen (1), . . . ., (8) nur Spezialfälle viel allgemeinerer Formeln sind. Ich werde nämlich Multiplikationstheoreme ableiten für die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(z)$ , die ich auch in einigen anderen Arbeiten <sup>3)</sup> betrachtet habe, und ich werde zeigen, dass nicht nur die obengegebenen Multiplikationsformeln der BESSELSchen und WHITTAKERSchen Funktionen, sondern auch verschiedene analog gebauten Relationen zum Vorschein kommen durch Spezialisierung der Multiplikationsformeln der G-Funktion.

<sup>1)</sup> Man vergl. WATSON, [10], 140—142.

(1) gilt für alle Werte von  $\lambda$ ; in (2), (3), (4) und (5) wird  $|\lambda^2 - 1| < 1$  vorausgesetzt.

<sup>2)</sup> [3], Formeln (6, 1), (5, 1) und (5, 5); [4], Formeln (6, 3) und (6, 1). Siehe auch DHAR, [2], Formel (47) und GOLDSTEIN, [5], Formel (46).

In (6) ist  $\lambda$  beliebig; (7) und (8) gelten für  $\Re(\lambda) > \frac{1}{2}$ .

<sup>3)</sup> [6], [7], [8] und [9].



§ 2. Die Multiplikationstheoreme der G-Funktion.

Die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(z)$  wird definiert durch

$$G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^m \Gamma(b_j - b_h) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 + b_h - a_j)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 + b_h - b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - b_h)} z^{b_h} \times \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \quad (9)$$

$$\times {}_pF_{q-1}(1 + b_h - a_1, \dots, 1 + b_h - a_p; 1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_q; (-1)^{m+n+p} z).$$

Hierin wird  $z \neq 0$ ,

$$0 \leq n \leq p < q, \quad 1 \leq m \leq q, \dots \dots \dots (10)$$

$$b_j - b_h \text{ nicht ganz } (j = 1, \dots, m; h = 1, \dots, m; j \neq h)$$

und

$$a_j - b_h \neq 1, 2, 3, \dots \quad (j = 1, \dots, n; h = 1, \dots, m)$$

vorausgesetzt; der Stern bedeutet, dass die Zahl  $1 + b_h - b_h$  im System  $1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_q$  gestrichen werden muss.

Die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(z)$  ist eine symmetrische Funktion von  $b_1, \dots, b_m$ , von  $b_{m+1}, \dots, b_q$ , von  $a_1, \dots, a_n$  und von  $a_{n+1}, \dots, a_p$ . Die Parameter  $b_1, \dots, b_q$  und  $a_1, \dots, a_p$  können also in vier Klassen verteilt werden<sup>4)</sup>. Jeder Klasse entspricht ein Multiplikationstheorem.

**Erstes Multiplikationstheorem.** Ist  $|\lambda - 1| < 1$ , so gilt

$$\lambda^{-b_1} G_{p,q}^{m,n} \left( \lambda w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^r}{r!} G_{p,q}^{m,n} \left( w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ r + b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right). \quad (11)$$

Ist  $m = 1$ , so gilt (11) für alle Werte von  $\lambda$ .

**Zweites Multiplikationstheorem.** Ist  $m < q$  und  $|\lambda - 1| < 1$ , so gilt

$$\lambda^{-b_q} G_{p,q}^{m,n} \left( \lambda w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^r}{r!} G_{p,q}^{m,n} \left( w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_{q-1}, r + b_q \end{matrix} \right. \right). \quad (12)$$

**Drittes Multiplikationstheorem.** Ist  $n \geq 1$  und  $\Re(\lambda) > \frac{1}{2}$ , so gilt

$$\lambda^{1-a_1} G_{p,q}^{m,n} \left( \lambda w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right)^r G_{p,q}^{m,n} \left( w \left| \begin{matrix} -r + a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right). \quad (13)$$

**Viertes Multiplikationstheorem.** Ist  $n < p$  und  $\Re(\lambda) > \frac{1}{2}$ , so gilt

$$\lambda^{1-a_p} G_{p,q}^{m,n} \left( \lambda w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right)^r G_{p,q}^{m,n} \left( w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_{p-1}, -r + a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right). \quad (14)$$

<sup>4)</sup> Man vergl. auch (21).

§ 3. Hilfsformeln.

Ich werde die folgenden Relationen beweisen:

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{-b_1} G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\} = -z^{-1-b_1} G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ 1+b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right), \quad (15)$$

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{-b_q} G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\} = z^{-1-b_q} G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_{q-1}, 1+b_q \end{matrix} \right. \right) \quad (m < q), \quad (16)$$

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{-1+a_p} G_{p,q}^{m,n} \left( \frac{1}{z} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\} = -z^{-2+a_p} G_{p,q}^{m,n} \left( \frac{1}{z} \left| \begin{matrix} -1+a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \quad (n \geq 1), \quad (17)$$

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{-1+a_p} G_{p,q}^{m,n} \left( \frac{1}{z} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\} = z^{-2+a_p} G_{p,q}^{m,n} \left( \frac{1}{z} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_{p-1}, -1+a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \quad (n < p), \quad (18)$$

Beim Beweis nehme ich vorläufig an, dass

$$m + n - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q > 0 \dots \dots \dots (19)$$

und

$$|\arg z| < (m + n - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q) \pi \dots \dots \dots (20)$$

ist. Sind diese zwei Bedingungen erfüllt, so besitzt die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(z)$  die Integraldarstellung <sup>5)</sup>

$$G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} z^s ds; \quad (21)$$

hierin läuft der Integrationsweg  $L$  von  $-\infty i + \tau$  nach  $\infty i + \tau$  ( $\tau$  ist eine beliebige reelle Zahl) und zwar so, dass die Punkte

$$b_j, b_j + 1, b_j + 2, \dots \quad (j = 1, \dots, m)$$

auf der rechten, die Punkte

$$a_j - 1, a_j - 2, a_j - 3, \dots \quad (j = 1, \dots, n)$$

hingegen auf der linken Seite von  $L$  liegen.

Aus (21) folgt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left\{ z^{-b_1} G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\} \\ &= -\frac{z^{-1-b_1}}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(1+b_1-s) \prod_{j=2}^m \Gamma(b_j-s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j+s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j-s)} z^s ds. \end{aligned}$$

und diese Beziehung ist wegen (21) gleichbedeutend mit (15); Formel

<sup>5)</sup> Man vergl. BARNES, [1], 65-71.

(15) ist also bewiesen für den Fall, dass die Bedingungen (19) und (20) erfüllt sind.

Unter Annahme der Voraussetzungen (19) und (20) liefert man ganz analog den Beweis von (16), (17) und (18).

Es ist leicht einzusehen, auf Grund der Theorie der analytischen Fortsetzung, dass Voraussetzung (20) bei (15), (16), (17) und (18) ausfallen kann. Ich werde noch zeigen, dass auch Voraussetzung (19) fortgelassen werden darf.

Ich betrachte also den Fall mit  $m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q \leq 0$ . Wegen (10) gilt dann  $m+n-q < 0$ , somit  $m+1 \leq q$ , so dass die Funktion  $G_{p,q}^{m+1,n}(z)$  einen Sinn hat (man vergl. (10)). Die Reduktionsformel <sup>6)</sup>

$$G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ e^{\pi i b_{m+1}} G_{p,q}^{m+1,n} \left( z e^{-\pi i} \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right. \\ \left. - e^{-\pi i b_{m+1}} G_{p,q}^{m+1,n} \left( z e^{\pi i} \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right\} \quad (22)$$

setzt uns nun in stand bei (15), (17) und (18) den Fall mit  $m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q \leq 0$  aus dem Fall mit  $m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q > 0$  abzuleiten.

Was (16) anbetrifft, ich werde zunächst zeigen, dass (16) gewiss gilt, falls  $m=q-1$  ist. Da  $G_{p,q}^{q,n}(z)$  eine symmetrische Funktion von  $b_1, \dots, b_q$  ist, folgt nämlich aus (15)

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{-b_q} G_{p,q}^{q,n} \left( z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right\} = -z^{-1-b_q} G_{p,q}^{q,n} \left( z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_{q-1}, 1+b_q \end{array} \right. \right). \quad (23)$$

Nun hat man wegen (22), mit  $m=q-1$  angewendet,

$$z^{-b_q} G_{p,q}^{q-1,n} \left( z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ (z e^{-\pi i})^{-b_q} G_{p,q}^{q,n} \left( z e^{-\pi i} \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right. \\ \left. - (z e^{\pi i})^{-b_q} G_{p,q}^{q,n} \left( z e^{\pi i} \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right\}.$$

Hieraus und aus (23) geht hervor

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{-b_q} G_{p,q}^{q-1,n} \left( z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right\} = \frac{1}{2\pi i} \left\{ (z e^{-\pi i})^{-1-b_q} G_{p,q}^{q,n} \left( z e^{-\pi i} \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_{q-1}, 1+b_q \end{array} \right. \right) \right. \\ \left. - (z e^{\pi i})^{-1-b_q} G_{p,q}^{q,n} \left( z e^{\pi i} \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_{q-1}, 1+b_q \end{array} \right. \right) \right\} = z^{-1-b_q} G_{p,q}^{q-1,n} \left( z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_{q-1}, 1+b_q \end{array} \right. \right)$$

wegen (22), mit  $m=q-1$  und  $1+b_q$  statt  $b_q$  angewendet.

Formel (16) ist also bewiesen, falls  $m=q-1$  ist. Der Fall mit  $m < q-1$  kann wieder mit Hilfe von (22) aus dem Fall mit  $m=q-1$  abgeleitet werden.

<sup>6)</sup> Beziehung (22) kann leicht aus (9) abgeleitet werden.

Zum Schluss gebe ich noch eine Hilfsformel, die ich in § 5 wiederholt benutzen werde:

$$G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta \left| \begin{matrix} a_1 + \tau, \dots, a_p + \tau \\ b_1 + \tau, \dots, b_q + \tau \end{matrix} \right. \right) = \zeta^\tau G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right). \quad (24)$$

§ 4. Beweis der Multiplikationstheoreme.

Die Funktion

$$z^{-b_1} G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \dots \dots \dots (25)$$

ist für alle Werte von  $z$ ,  $z=0$  ausgenommen, eine analytische Funktion von  $z$ . Auf Grund des TAYLORSchen Satzes hat man also, falls  $|\eta| < |w|$  ist,

$$(w + \eta)^{-b_1} G_{p,q}^{m,n} \left( w + \eta \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\eta^r}{r!} \frac{d^r}{(dw)^r} \left\{ w^{-b_1} G_{p,q}^{m,n} \left( w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\}. \quad (26)$$

Nun folgt aus (15), dass

$$\frac{d^r}{(dw)^r} \left\{ w^{-b_1} G_{p,q}^{m,n} \left( w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\} = (-1)^r w^{-r-b_1} G_{p,q}^{m,n} \left( w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ r+b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$$

ist. Für  $|\eta| < |w|$  gilt daher die TAYLORSche Reihenentwicklung

$$(w + \eta)^{-b_1} G_{p,q}^{m,n} \left( w + \eta \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \eta^r w^{-r-b_1}}{r!} G_{p,q}^{m,n} \left( w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ r+b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right). \quad (27)$$

ersetzt man hierin  $\eta$  durch  $\lambda w - w$ , so bekommt man (11).

Ist  $m=1$ , so ist die Funktion (25) für jedes  $z$ ,  $z=0$  nicht ausgenommen, eine analytische Funktion von  $z$ ; Beziehung (27) ist dann gültig für alle Werte von  $\eta$ , Entwicklung (11) also für alle Werte von  $\lambda$ .

Das erste Multiplikationstheorem ist jetzt bewiesen. Den Beweis des zweiten liefert man ganz analog mit Hilfe von (16).

Das dritte Multiplikationstheorem kann aus (17) abgeleitet werden. Genau so wie (26) findet man nämlich, falls  $|\eta| < |z|$  ist,

$$(z + \eta)^{-1+a_1} G_{p,q}^{m,n} \left( \frac{1}{z + \eta} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\eta^r}{r!} \frac{d^r}{(dz)^r} \left\{ z^{-1+a_1} G_{p,q}^{m,n} \left( \frac{1}{z} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\}.$$

Aus (17) ergibt sich aber, falls  $n \geq 1$  ist,

$$\frac{d^r}{(dz)^r} \left\{ z^{-1+a_1} G_{p,q}^{m,n} \left( \frac{1}{z} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\} = (-1)^r z^{-1-r+a_1} G_{p,q}^{m,n} \left( \frac{1}{z} \left| \begin{matrix} -r + a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right).$$

Für  $|\eta| < |z|$  gilt daher

$$(z + \eta)^{-1+a_1} G_{p,q}^{m,n} \left( \frac{1}{z + \eta} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \eta^r z^{-1-r+a_1}}{r!} G_{p,q}^{m,n} \left( \frac{1}{z} \left| \begin{matrix} -r + a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right). \quad (28)$$

Ist  $\left| \frac{1}{\lambda} - 1 \right| < 1$ , also  $\Re(\lambda) > \frac{1}{2}$ , so darf man hierin  $z = \frac{1}{w}$  und  $\eta = \frac{1-\lambda}{\lambda w}$

setzen; Beziehung (28) geht dann in (13) über.

Hiermit ist auch das dritte Multiplikationstheorem bewiesen. Das vierte folgt in ähnlicher Weise aus (18).

§ 5. Anwendungen.

Ich werde (11), (12), (13) und (14) zunächst auf die WHITTAKERSchen Funktionen  $M_{k,m}(z)$  und  $W_{k,m}(z)$  anwenden. Für diese Funktionen gilt<sup>7)</sup>

$$e^{\lambda z} M_{k,m}(z) = \Gamma(1+2m) \Gamma(\frac{1}{2} + k - m) G_{1,2}^{1,0} \left( z \left| \begin{matrix} 1+k \\ \frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} - m \end{matrix} \right. \right), \quad (29)$$

$$e^{-\lambda z} M_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + k + m)} G_{1,2}^{1,1} \left( z \left| \begin{matrix} 1-k \\ \frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} - m \end{matrix} \right. \right), \quad (30)$$

$$e^{\lambda z} W_{k,m}(z) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k - m)} G_{1,2}^{2,1} \left( z \left| \begin{matrix} 1+k \\ \frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} - m \end{matrix} \right. \right), \quad (31)$$

$$e^{-\lambda z} W_{k,m}(z) = G_{1,2}^{2,0} \left( z \left| \begin{matrix} 1-k \\ \frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} - m \end{matrix} \right. \right). \quad (32)$$

Wendet man nun (11) auf (29) an, so bekommt man

$$\lambda^{-m-1} e^{\lambda z} M_{k,m}(\lambda z) = \Gamma(1+2m) \Gamma(\frac{1}{2} + k - m) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^r}{r!} G_{1,2}^{1,0} \left( z \left| \begin{matrix} 1+k \\ \frac{1}{2} + m + r, \frac{1}{2} - m \end{matrix} \right. \right).$$

Aus (24) und (29) folgt aber

$$\begin{aligned} G_{1,2}^{1,0} \left( z \left| \begin{matrix} 1+k \\ \frac{1}{2} + m + r, \frac{1}{2} - m \end{matrix} \right. \right) &= z^{\lambda r} G_{1,2}^{1,0} \left( z \left| \begin{matrix} 1+k - \frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2} + m + \frac{1}{2}r, \frac{1}{2} - m - \frac{1}{2}r \end{matrix} \right. \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+2m+r) \Gamma(\frac{1}{2} + k - m - r)} z^{\lambda r} e^{\lambda z} M_{k-\frac{1}{2}r, m+\frac{1}{2}r}(z). \end{aligned}$$

Für die Funktion  $e^{\lambda z} M_{k,m}(z)$  besteht also die Multiplikationsformel

$$\lambda^{-m-1} e^{\lambda z} M_{k,m}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+2m) \Gamma(\frac{1}{2} + k - m) (1-\lambda)^r}{r! \Gamma(1+2m+r) \Gamma(\frac{1}{2} + k - m - r)} z^{\lambda r} e^{\lambda z} M_{k-\frac{1}{2}r, m+\frac{1}{2}r}(z).$$

Durch analoge Anwendung von (11) auf (30) findet man (6).

Die entsprechenden Multiplikationsformeln für die Funktion  $W_{k,m}(z)$  sind wegen (31) und (32)

$$\lambda^{-m-1} e^{\lambda z} W_{k,m}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m + r) (1-\lambda)^r}{r! \Gamma(\frac{1}{2} - k + m)} z^{\lambda r} e^{\lambda z} W_{k-\frac{1}{2}r, m+\frac{1}{2}r}(z)$$

und

$$\lambda^{-m-1} e^{-\lambda z} W_{k,m}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^r}{r!} z^{\lambda r} e^{-\lambda z} W_{k+\frac{1}{2}r, m+\frac{1}{2}r}(z);$$

in diesen beiden Relationen wird  $|\lambda - 1| < 1$  vorausgesetzt.

Das zweite Multiplikationstheorem ergibt nach Anwendung auf (29) und (30) die für  $|\lambda - 1| < 1$  gültigen Beziehungen

7) Man vergl. [8], Formeln (58), (59), (60) und (61).

$$\lambda^{m-t} e^{\lambda z} M_{k,m}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+2m)(\lambda-1)^r}{r! \Gamma(1+2m-r)} z^t e^{\lambda z} M_{k-t, m-t}(z)$$

und

$$\lambda^{m-t} e^{-\lambda z} M_{k,m}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+2m)(\lambda-1)^r}{r! \Gamma(1+2m-r)} z^t e^{-\lambda z} M_{k+t, m-t}(z).$$

Die von ERDÉLYI gefundenen Entwicklungen (7) und (8) kommen zum Vorschein, wenn man das dritte Multiplikationstheorem auf (30) bzw. das vierte auf (32) anwendet.

Durch Anwendung des vierten Multiplikationstheorems auf (29) bzw. des dritten auf (31) erhält man

$$\lambda^{-k} e^{\lambda z} M_{k,m}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}{r! \Gamma(\frac{1}{2}+k-m-r)} \left(\frac{1}{\lambda}-1\right)^r e^{\lambda z} M_{k-r,m}(z)$$

bzw.

$$\lambda^{-k} e^{\lambda z} W_{k,m}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m+r) \Gamma(\frac{1}{2}-k-m+r)}{r! \Gamma(\frac{1}{2}-k+m) \Gamma(\frac{1}{2}-k-m)} \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^r e^{\lambda z} W_{k-r,m}(z); \quad (33)$$

Diese zwei Relationen gelten für  $\Re(\lambda) > \frac{1}{2}$ ; (33) ist neuerdings auch von Herrn S. C. DHAR<sup>8)</sup> gefunden worden.

Für die BESSELSchen Funktionen  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$  und  $K_\nu(z)$  gilt bekanntlich<sup>9)</sup>

$$J_\nu(z) = G_{0,2}^{1,0} \left( \frac{1}{4} z^2 \mid \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu \right), \dots \dots \dots (34)$$

$$Y_\nu(z) = (-1)^h G_{1,3}^{2,0} \left( \frac{1}{4} z^2 \mid \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu - h - \frac{1}{2} \right) \quad (h=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (35)$$

und

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} G_{0,2}^{2,0} \left( \frac{1}{4} z^2 \mid \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu \right), \dots \dots \dots (36)$$

Die STRUVESche Funktion

$$H_\nu(z) = \frac{2^{-\nu-1} z^{\nu+1}}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\nu+\frac{3}{2})} {}_1F_2 \left( 1; \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}; -\frac{1}{4} z^2 \right)$$

kann folgenderweise in die G-Funktion ausgedrückt werden:

$$H_\nu(z) = G_{1,3}^{1,1} \left( \frac{1}{4} z^2 \mid \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu, \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu \right), \dots \dots \dots (37)$$

Ich wende nun (12) mit  $\frac{1}{4} z^2$  statt  $w$  und  $\lambda^2$  statt  $\lambda$  auf (37) an; das Resultat wird, falls  $|\lambda^2 - 1| < 1$  ist,

$$\lambda^\nu H_\nu(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2-1)^r}{r!} G_{1,3}^{1,1} \left( \frac{1}{4} z^2 \mid \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu, \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu + r \right).$$

8) DHAR, [2], Formel (48).  
 9) Man vergl. [6], 16; [7], 206.



Nun folgt aus (24) und (37), dass

$$G_{1,3}^{1,1} \left( \frac{1}{4} z^2 \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu, \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu + r \end{matrix} \right. \right) \\ = \left( \frac{1}{2} z \right)^r G_{1,3}^{1,1} \left( \frac{1}{4} z^2 \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} r \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} r, \frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} r, -\frac{1}{2} \nu + \frac{1}{2} r \end{matrix} \right. \right) = \left( \frac{1}{2} z \right)^r \mathbf{H}_{\nu-r}(z)$$

ist. Für die Funktion  $\mathbf{H}_\nu(z)$  gilt also, falls  $|\lambda^2 - 1| < 1$  ist,

$$\lambda^\nu \mathbf{H}_\nu(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 - 1)^r \left( \frac{1}{2} z \right)^r}{r!} \mathbf{H}_{\nu-r}(z).$$

Formel (2) kann genau so mit Hilfe von (12) aus (34) abgeleitet werden. Die Beziehungen (1), (3), (4) und (5) kommen zum Vorschein, wenn man das erste Multiplikationstheorem auf (34), (35) und (36) anwendet.

Zum Schluss werde ich (11) und (12) noch anwenden auf die LOMMELschen Funktionen<sup>10)</sup>  $s_{\mu,\nu}(z)$  und  $S_{\mu,\nu}(z)$ . Auch diese Funktionen sind Spezialfälle der G-Funktion; man hat nämlich<sup>11)</sup>

$$s_{\mu,\nu}(z) = 2^{\nu-1} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu\right) G_{1,3}^{1,1} \left( \frac{1}{4} z^2 \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu \end{matrix} \right. \right). \quad (38)$$

und

$$S_{\mu,\nu}(z) = \frac{2^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu\right)} G_{1,3}^{3,1} \left( \frac{1}{4} z^2 \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu \\ -\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu \end{matrix} \right. \right). \quad (39)$$

Wendet man nun (12) mit  $\frac{1}{4} z^2$  statt  $w$  und  $\lambda^2$  statt  $\lambda$  auf (38) an, so bekommt man mit Rücksicht auf (24)

$$\lambda^\nu s_{\mu,\nu}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu\right) (\lambda^2 - 1)^r}{r! \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu - r\right)} z^r s_{\mu-r,\nu-r}(z) \quad \dots \quad (40)$$

Genau so findet man durch Anwendung von (11) auf (39)

$$\lambda^\nu S_{\mu,\nu}(\lambda z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + r\right) (1 - \lambda^2)^r}{r! \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu\right)} z^r S_{\mu-r,\nu-r}(z). \quad (41)$$

Die Beziehungen (40) und (41) gelten für  $|\lambda^2 - 1| < 1$ .

#### LITERATURVERZEICHNIS.

E. W. BARNES.

1. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series. Proc. London Math. Soc., (2) 5, 59—116 (1907).

S. C. DHAR.

2. On operational representations of confluent hypergeometric functions and their integrals. Philosophical Magazine, (7) 21, 1082—1096 (1936).

A. ERDÉLYI.

3. Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Erste

<sup>10)</sup> Für die Definition der Funktionen  $s_{\mu,\nu}(z)$  und  $S_{\mu,\nu}(z)$  siehe man WATSON, [10], 345—349.

<sup>11)</sup> Man vergl. [7], 205—206.

Mitteilung: Additions- und Multiplikationstheoreme. *Math. Zeitschrift*, **42**, 125—143 (1937).

4. Ueber eine Methode zur Gewinnung von Funktionalbeziehungen zwischen konfluenten hypergeometrischen Funktionen. *Monatshefte für Math. und Phys.*, **45**, 31—52 (1937).

S. GOLDSTEIN.

5. Operational representations of WHITTAKER's confluent hypergeometric function and WEBER's parabolic cylinder function. *Proc. London Math. Soc.*, (2) **34**, 103—125 (1932).

C. S. MEIJER.

6. Ueber WHITTAKERSche bzw. BESSELSche Funktionen und deren Produkte. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (2) **18**, (4tes Heft) 10—39 (1936).
7. Ueber BESSELSche, STRUVESche und LOMMELSche Funktionen. *Proc. Kon. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, **43**, 198—210 und 366—378 (1940).
8. Neue Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen. *Ibidem*, **44**, 81—92, 186—194, 298—307, 442—451 und 590—598 (1941).
9. Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen und ihre Produkte. *Ibidem*, **44**, 435—441 und 599—605 (1941).

G. N. WATSON.

10. *A treatise on the theory of BESSEL functions* (1922).

**Mathematics.** — Ein Satz über die sukzessiven Minima bei definiten quadratischen Formen. Von ROBERT REMAK. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

Es sei

$$y_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (1)$$

ein System von  $n$  Linearformen in  $n$  Veränderlichen. Es sei die Determinante

$$d = |c_{ik}| \neq 0.$$

Betrachtet man die  $y_i$  als kartesische Koordinaten und lässt man für die  $x_k$  nur ganze rationale Werte zu, so stellen die  $y_i$  ein, im allgemeinen schiefwinkliges, Punktgitter im  $n$ -dimensionalen Raume dar.  $abs\ d$  ist das Volumen des Elementarparallelepipeds. Es bezeichne  $K$  einen konvexen Körper vom Volumen  $V$ , dessen Mittelpunkt im 0-Punkte des Koordinatensystems gelegen sei. Der bekannte Satz von MINKOWSKI sagt aus, dass  $K$  ausser dem 0-Punkte weitere Gitterpunkte enthalten muss, wenn

$$V \cong 2^n d,$$

oder anders formuliert: Es sei  $K$  ein konvexer Körper, dessen Mittelpunkt im 0-Punkt liege. Es sei das Volumen  $V$  von  $K$  beliebig,  $\lambda K$ , wo  $\lambda > 0$ , sei der im Verhältnis  $1 : \lambda$  vom 0-Punkte aus ähnlich vergrösserte Körper, dessen Volumen  $\lambda^n V$  ist. Für hinreichend kleine  $\lambda$  enthält  $\lambda K$  ausser dem 0-Punkte keinen anderen Gitterpunkt. Vergrössert man  $\lambda$  bis zu dem kleinsten Werte  $\lambda_1$ , für den  $\lambda_1 K$  einen weiteren Gitterpunkt enthält, so ist

$$\lambda_1^n V \cong 2^n \cdot d. \quad \dots \dots \dots (2)$$

Diesen Satz hat MINKOWSKI folgendermassen verallgemeinert. Es sei  $P_1$  der erste Gitterpunkt, der durch Vergrösserung auf  $\lambda_1 K$  erreicht wird. (Natürlich wird gleichzeitig der zum 0-Punkt  $O$  diametrale Gitterpunkt  $-P_1$  erreicht.) Man nehme die Gerade  $OP_1$  aus und vergrössere der Körper so lange weiter, bis im Körper  $\lambda_2 K$  ein weiterer Gitterpunkt  $P_2$  erreicht wird. Es ist  $\lambda_2 \geq \lambda_1$ . ( $\lambda_2 = \lambda_1$  ist nicht ausgeschlossen). Dann nehme man die Ebene  $OP_1 P_2$  aus und bestimme  $\lambda_3$ , so dass mit  $\lambda_3 K$  zum ersten Male einer der übrigen Gitterpunkte erreicht wird, bis man  $n$  unabhängige Gitterpunkte  $P_1 P_2, \dots, P_n$  und  $n$  Zahlenwerte  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  gefunden hat. Dann beweist MINKOWSKI<sup>1)</sup>

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \cdot V \cong 2^n d. \quad \dots \dots \dots (3)$$

Da  $\lambda_1^n \cdot V \leq \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \cdot V$ , so ist (2) eine Folge von (3). Dagegen sagt (3) mehr aus als (2).

Eine andere Verschärfung des MINKOWSKISCHEN Satzes ist folgende. Der konvexe Körper  $K$  sei speziell die Kugel mit dem Radius 1, d.h. das Gebiet

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \leq 1.$$

<sup>1)</sup> MINKOWSKI, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1910, S. 187—219.  
Diesen Satz hat Herr DAVENPORT einfacher bewiesen: Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series 10, (1938) p. 119—121.

Dessen Volumen ist bekanntlich

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} = \kappa_n.$$

Man bilde aus (1) die quadratische Form

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n c_{ik} x_k \right)^2 = \sum_{k,l}^n a_{kl} x_k x_l, \quad (4)$$

worin

$$a_{kl} = \sum_{i=1}^n c_{ik} c_{il}.$$

Oder man schreibe Matrizen. Es sei

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eine Spalte, ebenso  $Y$  eine Spalte von  $y_i$ .

$$A = (a_{ik}) \quad ; \quad C = (c_{ik}).$$

$C'$  sei die transponierte Matrix, die aus  $C$  durch Vertauschung von Zeilen und Spalten entsteht.

$$C' = (c_{ki}).$$

Dann lautet (1)

$$Y = C X.$$

Ferner lautet (4)

$$f(X) = Y' Y = X' C' C X = X' A X.$$

Ferner ist nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten

$$|a_{ik}| = |A| = |C' C| = |C'| |C| = |C|^2 = d^2 > 0$$

die Determinante der quadratischen Form.

Ist  $m_1$  der kleinste Wert, den die quadratische Form  $f$  für ganzzahlige  $x_v$  annimmt, die nicht sämtlich 0 sind, so ist

$$\lambda_1 = \sqrt{m_1}.$$

Die Kugel mit dem Radius  $\sqrt{m_1}$  ist die kleinste Kugel, die einen Gitterpunkt ausser dem 0-Punkt enthält. Der MINKOWSKISCHE Satz sagt aus nach (2), worin  $V = \kappa_n$  zu setzen ist,

$$\lambda_1^n \cdot V = m_1^{\frac{n}{2}} \cdot V \leq 2^n \cdot d,$$

oder quadriert

$$\frac{\kappa_n^2}{2^{2n}} = \frac{\pi^n}{2^{2n} \left( \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \right)^2} \leq \frac{|A|}{m_1^n}.$$

Diese Ungleichung ist durch Herrn BLICHFELDT<sup>2)</sup> wesentlich verbessert

$$\gamma_n = \frac{\pi^n}{2^n \left(\Gamma\left(2 + \frac{n}{2}\right)\right)^2} \leq \frac{|A|}{m_1^n}.$$

Ich will im folgenden zeigen, dass man die beiden Verschärfungen des MINKOWSKI-schen Satzes mit einander kombinieren kann. Zu dem Zwecke sollen die sukzessiven Minima der quadratischen Form gebildet werden. Es sei

$$u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1} \dots \dots \dots (5)$$

ein System ganzer Zahlen, für das die quadratische Form  $f$  ihren kleinst möglichen von 0 verschiedenen Wert  $m_1$  annimmt. Man nehme die Vielfachen von  $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}$  aus und bestimme das Minimum  $m_2$  der quadratischen Form unter den übrigen ganzzahligen Werten der  $x_v$ , das für

$$u_{12}, u_{22}, \dots, u_{n2} \dots \dots \dots (6)$$

angenommen werde. Dann nehme man die linearen Verbindungen von (5) und (6) aus, bestimme das dritte Minimum und so fort, bis man  $n$  Minima bestimmt hat. Man bilde die Matrix

$$\begin{pmatrix} u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n} \\ u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ u_{n1}, u_{n2}, \dots, u_{nn} \end{pmatrix} = U,$$

in der die Systeme (5) und (6) die erste und zweite Spalte bilden. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Spalten ist die Determinante

$$|U| \neq 0.$$

Für  $n \geq 4$  kann  $abs|U| > 1$  sein. Das Verfahren liefert also nicht immer ein Elementarparallelepiped. Ich habe es daher<sup>3)</sup> als „Pseudoreduktion nach sukzessiven Minima“ bezeichnet. Es möge  $|U|$  die Verschränkungs-determinante heissen. Für diese werde ich eine einfache Abschätzung angeben.

Es sei

$$m_v = f(u_{1v}, u_{2v}, \dots, u_{nv}) \dots \dots \dots (7)$$

das  $v$ -te Minimum. Es ist

$$m_v \leq m_{v+1} \dots \dots \dots (8)$$

da  $m_v$  das Minimum der umfassenderen Menge ist. Dann will ich folgenden Satz beweisen:

<sup>2)</sup> BLICHFELDT, Transactions of the American Mathematical Society 15 (1914), S. 227—235. REMAK, Math. Zeitschr. 26, (1927), S. 694—699. BLICHFELDT, Math. Annalen 101 (1929), S. 605—608. In der letztgenannten Arbeit vergrößert Herr BLICHFELDT  $\gamma_n$  um den Zusatzfaktor  $(1 + g)^2$  worin

$$g = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{n+1} - (2 - \sqrt{2})^{n+1} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n+1} \right) \right\},$$

der für grosse  $n$  gegen 1 konvergiert.

<sup>3)</sup> REMAK, Ueber die MINKOWSKI'sche Reduktion der definiten quadratischen Formen. Compositio Mathematica, vol. 5 (1938), S. 368—391. Siehe S. 368.

Es sei für eine positive Zahl  $\gamma'_n$  allgemein für alle definiten quadratischen Formen von  $n$  Veränderlichen bewiesen, dass

$$\gamma'_n \leq \frac{|A|}{m_1^n} \dots \dots \dots (9)$$

Dann gilt auch für alle definiten quadratischen Formen von  $n$  Veränderlichen

$$\gamma'_n \leq \frac{|A|}{m_1, m_2 \dots m_n} \dots \dots \dots (10)$$

und

$$abs |U| \leq \gamma'_n \dots \dots \dots (11) ^4)$$

Die Buchstaben haben hierin die obige Bedeutung.

Für  $\gamma'_n$  kann man die BLICHFELDTschen  $\gamma_n$  und für die kleineren Werte von  $n$  die genaueren Werte, soweit sie bekannt sind, benutzen. <sup>5)</sup>

Beweis: Man setze:

$$U' A U = \bar{A}, \dots \dots \dots (12)$$

$$U^{-1} X = \bar{X}, \dots \dots \dots (13)$$

Für  $\bar{X}$  lasse man alle einspaltigen Wertsysteme rationaler Zahlen zu, die sich aus (13) ergeben, wenn  $X$  jedes beliebige einspaltige ganzzahlige Wertsystem sein darf. Wenn  $X$  ganzzahlig ist auch  $UX$  ganzzahlig. Also kommen unter den Wertsystemen  $\bar{X}$  in (13) auch die Systeme

$$U^{-1} U X = X$$

d.h. alle ganzzahligen Wertsysteme vor. Es gilt nach (12) für die Determinante

$$|U|^2 \cdot |A| = |\bar{A}| \dots \dots \dots (14)$$

Man bilde

$$\bar{f}(\bar{X}) = \bar{X}' \bar{A} \bar{X} = (X' U'^{-1})(U' A U)(U^{-1} X) = X' A X = f(X).$$

Es ist der  $v$ -te Koeffizient von  $\bar{f}$  in der Hauptdiagonale mit Rücksicht auf (7)

$$\bar{a}_{vv} = \sum_{i,k=1}^n u_{iv} a_{ik} u_{kv} = f(u_{1v}, u_{2v}, \dots, u_{nv}) = m_v \dots \dots (15)$$

Es ist

$$\bar{a}_{vv} = \bar{f}(\bar{x}_1 = 0; \bar{x}_2 = 0; \dots; \bar{x}_v = 1; \bar{x}_{v+1} = 0; \dots \bar{x}_n = 0).$$

Die  $v-1$ -dimensionale Ebene der ersten  $v-1$  Minima wird bestimmt durch

$$\bar{x}_v = 0; \bar{x}_{v+1} = 0; \dots \bar{x}_n = 0$$

<sup>4)</sup> Nach MINKOWSKI, l.c. Anm. <sup>1)</sup> S. 189 ist im Falle der sukzessiven Minima für einen beliebigen konvexen Körper mit Mittelpunkt die Verschränkungs-determinante, die dort  $N$  heisst,

$$N < n!$$

<sup>5)</sup>  $\bar{\gamma}_2 = \frac{3}{4}; \bar{\gamma}_3 = \frac{1}{2}; \bar{\gamma}_4 = \frac{1}{4}; \bar{\gamma}_5 = \frac{1}{8}; \bar{\gamma}_6 = \frac{3}{64}; \bar{\gamma}_7 = \frac{1}{64}; \bar{\gamma}_8 = \frac{1}{256}$ .

Litteratur siehe Diophantische Approximationen. J. F. KOKSMA, Berlin, 1936, S. 24.



Es ist also

$$\bar{a}_{vv} = \text{Min } \bar{f} \dots \dots \dots (16)$$

unter der Bedingung, dass

$$\bar{x}_v, \bar{x}_{v+1}, \dots, \bar{x}_n$$

nicht sämtlich 0 sein dürfen. Die für  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  zulässigen Wertsysteme werden durch (13) bei ganzzahligem  $X$  bestimmt. Es ist wegen (15) und (8)

$$\bar{a}_{11} \leq \bar{a}_{22} \leq \dots \leq \bar{a}_{nn} \dots \dots \dots (16a)$$

Man führe in  $\bar{A}$  die Staffelerlegung aus. Es sei also

$$\bar{A} = \bar{B}' \bar{B}$$

Hierin sei

$$\bar{B} = (\bar{b}_{hv}),$$

worin

$$\bar{b}_{hv} = 0 \quad \text{für } h > v \dots \dots \dots (17)$$

Es ist

$$|\bar{A}| = |\bar{B}|^2 = \bar{b}_{11}^2 \cdot \bar{b}_{22}^2 \cdot \dots \cdot \bar{b}_{nn}^2 \dots \dots \dots (18)$$

ferner

$$\bar{a}_{vv} = \sum_{h=1}^n \bar{b}_{hv}^2 \geq \bar{b}_{vv}^2 \dots \dots \dots (19)$$

Aus (18) und (19) folgt

$$|\bar{A}| \leq \bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22} \cdot \dots \cdot \bar{a}_{nn} \dots \dots \dots (20)$$

Im folgenden soll eine Hilfsform gebildet werden. Man setze

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_{hv}^* &= \frac{\bar{b}_{hv}}{\sqrt{\bar{a}_{hh}}}, \\ \bar{B}^* &= (\bar{b}_{hv}^*), \\ \bar{A}^* &= \bar{B}'^* \bar{B}^*. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

Es ist wegen (17) auch  $\bar{B}^*$  eine Staffelmatrix. Es gilt analog (18)

$$\left. \begin{aligned} |\bar{A}^*| &= |\bar{B}^*|^2 = \bar{b}_{11}^{*2} \cdot \bar{b}_{22}^{*2} \cdot \dots \cdot \bar{b}_{nn}^{*2} \\ &= \frac{\bar{b}_{11}^2}{\bar{a}_{11}} \cdot \frac{\bar{b}_{22}^2}{\bar{a}_{22}} \cdot \dots \cdot \frac{\bar{b}_{nn}^2}{\bar{a}_{nn}} = \frac{|\bar{A}|}{\bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22} \cdot \dots \cdot \bar{a}_{nn}}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (22)$$

Also ist wegen (20)

$$|\bar{A}^*| \leq 1 \dots \dots \dots (23)$$

Für  $\bar{X}$  werden dieselben Werte wie vorher zugelassen. Es soll gezeigt werden, dass, wenn nicht sämtliche  $\bar{x}_v = 0$  sind,

$$\bar{f}^*(\bar{X}) = \bar{X}' \bar{A}^* \bar{X} \geq 1 \dots \dots \dots (24)$$

\*) Ähnliche Schlüsse habe ich bereits l.c. Anm. 3) S. 381 angewandt.

Es sei  $s$  der grösste Index, für den

$$\bar{x}_s \neq 0. . . . . (25)$$

Dann ist analog (4) unter Benutzung von (21), (25), (17), (16a), (16)

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}^*(\bar{X}) &= \bar{X}' \bar{A}^* \bar{X} = (\bar{X}' \bar{B}') (\bar{B}^* \bar{X}) \\ &= \sum_{h=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \bar{b}_{hi}^* \bar{x}_i \right)^2 = \sum_{h=1}^n \frac{\left( \sum_{i=1}^n \bar{b}_{hi} \bar{x}_i \right)^2}{\bar{a}_{hh}} \\ &= \sum_{h=1}^n \frac{\left( \sum_{i=1}^s \bar{b}_{hi} \bar{x}_i \right)^2}{\bar{a}_{hh}} = \sum_{h=1}^s \frac{\left( \sum_{i=1}^s \bar{b}_{hi} \bar{x}_i \right)^2}{\bar{a}_{hh}} \geq \frac{\sum_{h=1}^s \left( \sum_{i=1}^s \bar{b}_{hi} \bar{x}_i \right)^2}{\bar{a}_{ss}} \\ &= \frac{\bar{f}(\bar{X})}{\bar{a}_{ss}} \geq 1. \end{aligned} \right\} (26)$$

Da dies für alle Indizes  $s$  gilt, ist (24) bewiesen. Zur besseren Uebersicht über (26) mögen folgende Bemerkungen dienen. Betrachtet man die  $h$ -te Linearform, die im vierten Ausdruck als Basis eines Quadrats auftritt,  $\sum_{i=1}^n \bar{b}_{hi}^* \bar{x}_i$ , so enthält sie wegen (17) nur die  $x_i$  mit  $i \geq h$ . Wegen (25) braucht  $i$  nur bis  $s$  zu laufen. Dadurch fallen aber die letzten Linearformen mit  $h > s$  weg, da ihre sämtlichen Glieder 0 sind. Diese Betrachtungen gelten wegen (21) sowohl in  $\bar{f}(X)$  als in  $\bar{f}^*(\bar{X})$ . Also darf die nur bis  $s$  summierte Doppelsumme im drittletzten Ausdruck von (26) gleich  $\bar{f}(\bar{X})$  gesetzt werden.

Man setze

$$f^*(X) = \bar{f}^*(\bar{X}) = \bar{X}' \bar{A}^* \bar{X} = (X' U^{-1}) \bar{A}^* (U^{-1} X) = X' A^* X. \quad (27)$$

Also ist

$$A^* = U^{-1} \bar{A}^* U^{-1}, . . . . . (28)$$

$m^*$  sei das Minimum von  $f^*(X)$  für ganzzahlige  $X$ , wenn nicht sämtliche  $x_v = 0$ . Wegen (24) und (27) ist

$$m^* \geq 1. . . . . (29)$$

Es ist wegen (28)

$$|A^*| = |\bar{A}^*| \cdot |U|^{-2},$$

also nach (9), (29), (22), (14), (15)

$$\gamma'_n \leq \frac{|A^*|}{m^{*n}} \leq |A^*| = |\bar{A}^*| \cdot |U|^{-2} = \frac{|\bar{A}^*| \cdot |U|^{-2}}{\bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22} \cdot \bar{a}_{nn}} = \frac{|A|}{m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n}. \quad (30)$$

Damit ist (10) bewiesen.

Ferner folgt aus (30) und (23)

$$\gamma'_n \leq |\bar{A}^*| \cdot |U|^{-2} \leq |U|^{-2},$$

also

$$abs |U| \leq \gamma_n'^{-\frac{1}{2}}.$$

Damit ist auch (11) bewiesen.

**Mathematics.** — *Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art. II.* Von S. C. VAN VEEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

§ 2. *k* liegt in der Nähe von 1.

**Hilfssatz 1:** Für ganzes  $k \geq 0$ ,  $|1-z| < 1$ ,  $|\arg(1-z)| < \pi$  ist

$$\left. \begin{aligned} & \Gamma(a+k) \cdot \Gamma(b+k) \cdot \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot F(a, b; a+b+k; z) = \\ & = \Gamma(a+b+k) \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n (k-n-1)! \Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{n!} (1-z)^n + \\ & + (-1)^k \Gamma(a+b+k) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{n! (n-k)!} \\ & \left\{ \frac{\Gamma'(1-k+n)}{\Gamma(1-k+n)} + \frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} - \frac{\Gamma'(a+n)}{\Gamma(a+n)} - \frac{\Gamma'(b+n)}{\Gamma(b+n)} - \log(1-z) \right\} (1-z)^n \end{aligned} \right\} (19)$$

(Die erste Summe im rechten Gliede = 0 für  $k = 0$ .)

**Beweis:** Im Innern der von  $z = 1$  nach  $+\infty$  aufgeschlitzten Ebene gilt, wenn  $c = a+b$  keine ganze Zahl oder 0 ist <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \Gamma(c-a) \cdot \Gamma(c-b) \cdot \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot F(a, b; c; z) &= \\ &= \Gamma(c) \cdot \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot \Gamma(c-a-b) \cdot F(a, b; a+b-c+1; 1-z) + \\ &+ \Gamma(c) \cdot \Gamma(c-a) \cdot \Gamma(c-b) \cdot \Gamma(a+b-c) \cdot (1-z)^{c-a-b} \cdot F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \end{aligned}$$

Hierin setzen wir

$$c = a + b + k + \delta, \quad \text{mit } |\delta| < 1.$$

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} & \Gamma(b+k+\delta) \cdot \Gamma(a+k+\delta) \cdot \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot F(a, b; a+b+k+\delta; z) = \\ & = \Gamma(a+b+k+\delta) \cdot \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot \Gamma(k+\delta) \cdot F(a, b; 1-k-\delta; 1-z) + \\ & + \Gamma(a+b+k+\delta) \cdot \Gamma(b+k+\delta) \cdot \Gamma(a+k+\delta) \cdot \Gamma(-k-\delta) \cdot (1-z)^{k+\delta} \cdot \\ & \cdot F(b+k+\delta, a+k+\delta; 1+k+\delta; 1-z). \end{aligned} \right\} (20)$$

Wegen

$$|1-z| < 1$$

geht (20) über in

$$\begin{aligned} & \Gamma(b+k+\delta) \cdot \Gamma(a+k+\delta) \cdot \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot F(a, b; a+b+k+\delta; z) = \\ & = \Gamma(a+b+k+\delta) \cdot \Gamma(k+\delta) \cdot \Gamma(1-k-\delta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(b+n)}{\Gamma(1-k-\delta+n) \cdot n!} (1-z)^n \\ & + \Gamma(a+b+k+\delta) \cdot \Gamma(k+\delta+1) \cdot \Gamma(-k-\delta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k+\delta+n) \cdot \Gamma(b+k+\delta+n)}{\Gamma(1+k+\delta+n) \cdot n!} (1-z)^{n+k+\delta} = \\ & = (-1)^k \Gamma(a+b+k+\delta) \cdot \frac{\pi}{\sin \pi \delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(1-k-\delta+n) \cdot n!} (1-z)^n + \\ & + (-1)^{k+1} \Gamma(a+b+k+\delta) \cdot \frac{\pi}{\sin \pi \delta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k+\delta+n) \cdot \Gamma(b+k+\delta+n)}{\Gamma(1+k+\delta+n) \cdot n!} (1-z)^{n+k+\delta}, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> GAUSS, Werke III, S. 213, Formel 87; vgl. auch WHITTAKER-WATSON, Modern Analysis, 2nd Ed., § 14, 53.

$$\begin{aligned} \text{also } & \Gamma(b+k+\delta) \cdot \Gamma(a+k+\delta) \cdot \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot F(a, b; a+b+k+\delta; z) = \\ & = (-1)^k \Gamma(a+b+k+\delta) \frac{\pi}{\sin \pi \delta} \cdot \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(b+n)}{\Gamma(1-k-\delta+n) \cdot n!} (1-z)^n + \\ & + (-1)^k \Gamma(a+b+k+\delta) \frac{\pi}{\sin \pi \delta} \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(b+n)}{\Gamma(1-k-\delta+n) \cdot n!} (1-z)^n \right. \\ & \left. - \frac{\Gamma(a+\delta+n) \cdot \Gamma(b+\delta+n)}{\Gamma(1+\delta+n) \cdot (n-k)!} (1-z)^{n+\delta} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

(Die erste Summe im rechten Gliede = 0 für  $k = 0$ .) Wir betrachten

$$f(\delta) = \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(b+n)}{\Gamma(1-k-\delta+n) \cdot n!} - \frac{\Gamma(a+\delta+n) \cdot \Gamma(b+\delta+n)}{\Gamma(1+\delta+n) \cdot (n-k)!} (1-z)^\delta$$

und setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\delta$  als reell voraus<sup>1)</sup>, also

$$\begin{aligned} & f(\delta) = f(0) + \delta f'(\theta \delta) \quad (0 \leq \theta \leq 1) \\ & = \delta \left\{ \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(b+n)}{\Gamma(1-k-\theta \delta+n) \cdot n!} \cdot \frac{\Gamma'(1-k-\theta \delta+n)}{\Gamma(1-k-\theta \delta+n)} + \right. \\ & \left. - \frac{\Gamma(a+\theta \delta+n) \cdot \Gamma(b+\theta \delta+n)}{\Gamma(1+\theta \delta+n) \cdot (n-k)!} (1-z)^{\theta \delta} \left( \frac{\Gamma'(a+\theta \delta+n)}{\Gamma(a+\theta \delta+n)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\Gamma'(b+\theta \delta+n)}{\Gamma(b+\theta \delta+n)} - \frac{\Gamma'(1+\theta \delta+n)}{\Gamma(1+\theta \delta+n)} + \log(1-z) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Aus (21) und (22) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \Gamma(b+k+\delta) \cdot \Gamma(a+k+\delta) \cdot \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot F(a, b; a+b+k+\delta; z) = \\ & = (-1)^k \Gamma(a+b+k+\delta) \frac{\pi}{\sin \pi \delta} \cdot \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin \pi(k+\delta-n) \cdot \Gamma(a+n) \cdot \Gamma(b+n) \cdot \Gamma(k+\delta-n)}{\pi \cdot n!} (1-z)^n + \\ & + (-1)^k \cdot \Gamma(a+b+k+\delta) \cdot \frac{\pi \delta}{\sin \pi \delta} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(b+n)}{\Gamma(1-k-\theta \delta+n) \cdot n!} \cdot \frac{\Gamma'(1-k-\theta \delta+n)}{\Gamma(1-k-\theta \delta+n)} + \right. \\ & \left. - \frac{\Gamma(a+\theta \delta+n) \cdot \Gamma(b+\theta \delta+n)}{\Gamma(1+\theta \delta+n) \cdot (n-k)!} (1-z)^{\theta \delta} \left( \frac{\Gamma'(a+\theta \delta+n)}{\Gamma(a+\theta \delta+n)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\Gamma'(b+\theta \delta+n)}{\Gamma(b+\theta \delta+n)} - \frac{\Gamma'(1+\theta \delta+n)}{\Gamma(1+\theta \delta+n)} + \log(1-z) \right) \right\} (1-z)^n \end{aligned}$$

und schliesslich, für  $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \Gamma(b+k) \cdot \Gamma(a+k) \cdot \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot F(a, b; a+b+k; z) = \\ & = \Gamma(a+b+k) \cdot \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \cdot \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(b+n) \Gamma(k-n)}{n!} (1-z)^n + \\ & + (-1)^k \cdot \Gamma(a+b+k) \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(b+n)}{n! (n-k)!} \left\{ \frac{\Gamma'(1-k+n)}{\Gamma(1-k+n)} + \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} - \frac{\Gamma'(a+n)}{\Gamma(a+n)} - \frac{\Gamma'(b+n)}{\Gamma(b+n)} - \log(1-z) \right\} (1-z)^n \end{aligned} \quad \text{w. z. b. w.}$$

<sup>1)</sup> (Zusatz bei der Korrektur.) Zunächst sei auch  $a, b$  und  $z$  reell, mit  $a > 1-k, b > 1-k, 0 < z < 1$ . Analytische Fortsetzung gibt das allgemeine Ergebnis (19) für komplexes  $a, b$  und  $z$ .

**Bemerkung:** Der Beweis dieses wichtigen Satzes ist im wesentlichen aus GAUSS (Werke III, S. 214 u. f.) entlehnt.

Im folgenden werden nur die zwei Sonderfälle

A)  $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, k = 0,$

B)  $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, k = 1$

verwendet. Wegen

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x^p)}{1-x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x^p)}{(1-x)^{1-\delta}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Gamma(m)\Gamma(\delta)}{\Gamma(m+\delta)} - \frac{\Gamma(m+p)\Gamma(\delta)}{\Gamma(m+p+\delta)} \right\} =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Gamma(m+p+\delta) - \Gamma(m+p)}{\delta} \cdot \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(m+p+\delta)} - \frac{\Gamma(m+\delta) - \Gamma(m)}{\delta} \cdot \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(m+\delta)} \right\} = \frac{\Gamma'(m+p)}{\Gamma(m+p)} - \frac{\Gamma'(m)}{\Gamma(m)}$$

für  $R(m) > 0, R(m+p) > 0,$  findet man für ganzes  $n \geq 0$

$$\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2}+n)} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1-x^1)}{1-x} dx = 2 \log 2 + 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = 2 \log 2 - 2 \sum_{m=1}^n \frac{1}{(2m-1)2m}.$$

A)  $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, k = 0$

$$\pi^2 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{n!} \right\}^2 (1-z)^n \left\{ 4 \log 2 - 4 \sum_{m=1}^n \frac{1}{(2m-1)2m} - \log(1-z) \right\} = \left. \begin{aligned} &= \pi \cdot \log \frac{16}{1-z} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-z\right) - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{n!} \right\}^2 (1-z)^n \sum_{m=1}^n \frac{1}{(2m-1)2m}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(vgl. GAUSS, Werke III, S. 217, [90]).

B)  $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, k = 1$

$$-\pi^2 F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z\right) = -2\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{n!(n-1)!} \left\{ 4 \log 2 - 4 \sum_{m=1}^n \frac{1}{(2m-1)2m} + \frac{1}{n(2n-1)} - \log(1-z) \right\} (1-z)^n = -2\pi \cdot F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; 1-z\right)$$

$$- \frac{\pi}{2} (1-z) \log \frac{16}{1-z} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 2; 1-z\right) + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{3}{2})}{(n+1)!n!} (1-z)^{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{(2m-1)2m}.$$

Schreibt man

$$\sum_{n=q}^{\infty} a_n = S_q$$

so ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=1}^n b_m = \sum_{n=0}^{\infty} (S_n - S_{n+1}) \sum_{m=1}^n b_m = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \left( \sum_{m=1}^n b_m - \sum_{m=1}^{n-1} b_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n S_n$$

(weil  $\sum_{m=1}^0 b_m = 0$  für  $n = 0$ )

und ebenso ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=1}^{n+1} b_m = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} S_n.$$

Wir können folglich (23) und (24) auch in folgender Form schreiben:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z\right) = \frac{1}{\pi} \log \frac{16}{1-z} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-z\right) - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} \sum_{q=n}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q)}{q!} \right\}^2 (1-z)^q, \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z\right) &= \frac{2}{\pi} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-z\right) + \frac{(1-z)}{2\pi} \log \frac{16}{1-z} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 2; 1-z\right) \\ &- \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sum_{q=n}^{\infty} \frac{\Gamma(q+\frac{1}{2})\Gamma(q+\frac{3}{2})}{q!(q+1)!} (1-z)^{q+1}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Setzt man

$$l = \sqrt{1-k^2} = \cos \alpha \quad \dots \dots \dots (27)$$

und definiert man die doppelte Zahlenfolge  $(c_n, d_n)$  durch

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 1+l = 1+\cos \alpha; & d_0 &= 1-l = 1-\cos \alpha; \\ c_n &= \frac{c_{n-1} + d_{n-1}}{2}; & d_n &= \sqrt{c_{n-1} \cdot d_{n-1}}; \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

so ist für  $n \geq 2$

$$c_n = \frac{c_{n-2} + d_{n-2} + 2\sqrt{c_{n-2} \cdot d_{n-2}}}{4} = \left( \frac{\sqrt{c_{n-2}} + \sqrt{d_{n-2}}}{2} \right)^2 \quad (29)$$

Aus (28) und (29) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 1 & ; d_1 &= \sin \alpha = k; \\ c_2 &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) & ; d_2 &= \sqrt{\sin \alpha} = \sqrt{k}; \\ c_3 &= \left(\frac{1 + \sqrt{\sin \alpha}}{2}\right)^2 & ; d_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}; \\ c_4 &= \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt[4]{\sin \alpha}}{2}\right)^2 & ; d_4 &= \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \sqrt[8]{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{\sin \alpha}}{2}\right); \\ c_5 &= \left(\frac{1 + \sqrt{\sin \alpha} + 2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \sqrt[8]{\sin \alpha}}{4}\right)^2 & ; & \\ d_5 &= \sqrt[4]{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \sqrt[16]{\sin \alpha} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\sin \alpha}}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt[4]{\sin \alpha}}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

u. s. w.

Weiter definieren wir

$$l_n = \frac{c_{n-1} - d_{n-1}}{c_{n-1} + d_{n-1}} \quad (n \geq 1) = \left( \frac{\sqrt{c_{n-2}} - \sqrt{d_{n-2}}}{\sqrt{c_{n-2}} + \sqrt{d_{n-2}}} \right)^2 \quad (n \geq 2) \quad (31)$$



also

$$\left. \begin{aligned}
 l_1 &= l = \cos \alpha = \sqrt{1-k^2}; \\
 l_2 &= \left( \frac{1-k}{1+k} \right) = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi-\alpha}{4} \right); \\
 l_3 &= \left( \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \right)^2 = \left( \frac{1-\sqrt{\sin \alpha}}{1+\sqrt{\sin \alpha}} \right)^2; \\
 l_4 &= \left( \frac{\cos \left( \frac{\pi-\alpha}{4} \right) - \sqrt[4]{\sin \alpha}}{\cos \left( \frac{\pi-\alpha}{4} \right) + \sqrt[4]{\sin \alpha}} \right)^2; \\
 l_5 &= \left( \frac{1 + \sqrt{\sin \alpha} - 2 \sqrt{\cos \left( \frac{\pi-\alpha}{4} \right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}}}{1 + \sqrt{\sin \alpha} + 2 \sqrt{\cos \left( \frac{\pi-\alpha}{4} \right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}}} \right)^2;
 \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

Die Grössen  $l_q$  und  $k_q$  sind komplementär, d. h.  $l_q(\alpha) = k_q \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ .

Weiter ist für  $n \geq 1$

$$\left. \begin{aligned}
 1 + l_n &= \frac{c_{n-1}}{c_n}; & 1 - l_n &= \frac{d_{n-1}}{c_n}; \\
 \sqrt{1-l_n^2} &= \frac{d_n}{c_n}; \\
 \frac{1 - \sqrt{1-l_n^2}}{1 + \sqrt{1-l_n^2}} &= \frac{c_n - d_n}{c_n + d_n} = l_{n+1}; \\
 \frac{1 - l_n}{1 + l_n} &= \frac{d_{n-1}}{c_{n-1}} = \sqrt{1-l_{n-1}^2}; \\
 l_{n-1} &= \frac{2\sqrt{l_n}}{1+l_n};
 \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

**Satz III:** Für ganzes  $q \geq 1$  ist

$$\frac{K(k)}{2} = \frac{K(\sqrt{1-l_1^2})}{2 \cdot c_1} = \frac{K(\sqrt{1-l_2^2})}{2^2 \cdot c_2} = \dots = \frac{K(\sqrt{1-l_q^2})}{2^q c_q} = \frac{\pi}{2^{q+1} \cdot c_q} F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; (1-l_q^2) \right) \dots (34)$$

**Beweis:** Setzt man in (13) (Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 969 (1941)),

$$p = \sqrt{1-l_n^2} \quad (n \geq 1),$$

so ist

$$\begin{aligned}
 K(\sqrt{1-l_n^2}) &= \frac{1}{1 + \sqrt{1-l_n^2}} K \left( \sqrt{1 - \left( \frac{1 - \sqrt{1-l_n^2}}{1 + \sqrt{1-l_n^2}} \right)^2} \right) = \\
 &= \frac{1 + l_{n+1}}{2} K \sqrt{1-l_{n+1}^2} = \frac{c_n}{2 c_{n+1}} K(\sqrt{1-l_{n+1}^2});
 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{K(\sqrt{1-l_n^2})}{2^n c_n} = \frac{K(\sqrt{1-l_{n+1}^2})}{2^{n+1} c_{n+1}} \quad (n \geq 1); \quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz IV: Für ganzes  $q \geq 1$  ist

$$K(k) = \frac{1}{2^{q-1} c_q} \log \frac{4}{l_q} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; l_q^2\right) - \frac{1}{2^{q-2} c_q \cdot \pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1) 2m} \cdot \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{n!} \right\}^2 l_q^{2n}. \quad (35)$$

Beweis: Folgt aus (25) und (34).

Aus (35), (30) und (32) findet man für  $n = 1, \dots, 5$ 

$$\begin{aligned} K(k) &= \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; (1-k^2)\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{n!} \right)^2 (1-k^2)^n \sum_{m=1}^n \frac{1}{(2m-1) 2m} \\ &= \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; (1-k^2)\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1) 2m} \sum_{n=m}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{n!} \right)^2 (1-k^2)^n; \quad (K^* I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \left\{ \log 2 \cdot \cot g\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \operatorname{tg}^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1) 2m} \sum_{n=m}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{n!} \right)^2 \operatorname{tg}^{4n}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \right\}; \quad (K^* II) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{2}{(1 + \sqrt{\sin \alpha})^2} \left\{ \log 2 \left( \frac{1 + \sqrt{\sin \alpha}}{1 - \sqrt{\sin \alpha}} \right) \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left( \frac{1 - \sqrt{\sin \alpha}}{1 + \sqrt{\sin \alpha}} \right)^4 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1) 2m} \sum_{n=m}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{n!} \right)^2 \left( \frac{1 - \sqrt{\sin \alpha}}{1 + \sqrt{\sin \alpha}} \right)^{4n} \right\}; \quad (K^* III) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{1}{\left( \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt[4]{\sin \alpha} \right)^2} \left\{ \log 2 \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt[4]{\sin \alpha}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt[4]{\sin \alpha}} \right) \right. \\ &\quad \left. F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt[4]{\sin \alpha}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt[4]{\sin \alpha}} \right)^4 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1) 2m} \sum_{n=m}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{n!} \right)^2 \cdot \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt[4]{\sin \alpha}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt[4]{\sin \alpha}} \right)^{4n} \right\}; \quad (K^* IV) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(k) &= \frac{2}{\left(1 + \sqrt{\sin \alpha} + 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}}\right)^2} \\
&\quad \left\{ \log 2 \left( \frac{1 + \sqrt{\sin \alpha} + 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}}}{1 + \sqrt{\sin \alpha} - 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}}} \right) \right. \\
&\quad \left. F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left( \frac{1 + \sqrt{\sin \alpha} - 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}}}{1 + \sqrt{\sin \alpha} + 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}} \right)^4 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)2m} \sum_{n=m}^{\infty} \left( \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{n!} \right)^2 \left( \frac{1 + \sqrt{\sin \alpha} - 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}}}{1 + \sqrt{\sin \alpha} + 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}} \right)^{4n} \right\}. \quad (K^* V)
\end{aligned}$$

Für Werte von  $k$  in der Nähe von  $k = 1$  ist

$$l_n \approx \frac{\cos^{2n-1} \alpha}{2^{2n-2}}.$$

Die Konvergenz der Reihen  $K^*$  ist somit ausserordentlich stark in der Nähe von  $k = 1$ . Es ist deutlich, dass die Reihen  $K^*$  die Gegenstücke zu den gleichnumerierte Reihen  $K$  bilden.

Die Hauptglieder der Entwicklungen  $K^* III - K^* V$  sind

$$K(k) \approx \frac{2}{(1 + \sqrt{k})^2} \log 2 \left( \frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \right); \quad (K^* III')$$

$$K(k) \approx \frac{2}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt[4]{\sin \alpha}\right)^2} \log 2 \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt[4]{\sin \alpha}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt[4]{\sin \alpha}} \right); \quad (K^* IV')$$

$$\begin{aligned}
K(k) &\approx \frac{2}{\left(1 + \sqrt{\sin \alpha} + 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}}\right)^2} \times \\
&\quad \log 2 \left( \frac{1 + \sqrt{\sin \alpha} + 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}}}{1 + \sqrt{\sin \alpha} - 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin \alpha}}} \right). \quad (K^* V')
\end{aligned}$$

Die Fehler für  $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  sind aus der folgenden Tabelle abzulesen.

Für  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ist  $k_1 = l_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,70710678$ .

q	Fehler bei Verwendung nur des Hauptgliedes
3	$\leq 1,9 \cdot 10^{-5}$
4	$7,1 \cdot 10^{-11}$
5	$9 \cdot 10^{-21}$

Man ersieht hieraus, dass die Anwendung der einfach gebildeten Hauptglieder

$$\left( K' \text{ f\"ur } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}; K'' \text{ f\"ur } \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

schon überall im Gebiet  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  Genauigkeit verbürgt

in 4 Stellen für  $q = 3$ ,  
 „ 9 „ „  $q = 4$ ,  
 „ 19 „ „  $q = 5$ .

Historisch ist noch zu bemerken, dass die Entwicklung ( $K^*I$ ) sich schon in GAUSS' Nachlass vorfindet<sup>1)</sup>, und in Proc. XLIV, S. 606 erwähnt worden ist.

Die Entwicklung ( $K^*III$ ), deren erste Glieder schon in einer vorhergehenden Arbeit (Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44, 825 (1941)) in elementarer Weise abgeleitet worden sind, findet sich, soweit mir bekannt ist, zuerst, allerdings ohne Beweis, bei SCHWARZ-WEIERSTRASS, Formeln und Lehrsätze, S. 68, Gl. 10, zweiter Teil.

Als Gegenstück zu Satz II ergibt sich aus (15) und (35)

**Satz V:** Für ganzes  $q \geq 1$  ist

$$K(k) = \frac{1}{2^{q-1} d_q} \log \frac{4}{l_q} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\left(\frac{l_q c_q}{d_q}\right)^2\right) - \frac{1}{2^{q-2} c_q \cdot \pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)2m} \cdot \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{n!} \right\}^2 l_q^{2n}. \quad (36)$$

Für  $q = 3, 4, 5$  findet man die Hauptglieder

$$K(k) \approx \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right) \sqrt[4]{\sin \alpha}} \log 2 \left( \frac{1 + \sqrt{\sin \alpha}}{1 - \sqrt{\sin \alpha}} \right); \quad (K.K^* III')$$

$$K(k) \approx \frac{1}{2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)} \cdot \sqrt[8]{\sin \alpha} \cdot (1 + \sqrt{\sin \alpha})} \log 2 \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right) + \sqrt[4]{\sin \alpha}}{\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right) - \sqrt[4]{\sin \alpha}} \right); \quad (K.K^* IV')$$

$$K(k) \approx \frac{1}{4 \sqrt[4]{\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)} \cdot \sqrt[16]{\sin \alpha} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\sin \alpha}}{2}} \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right) + \sqrt[4]{\sin \alpha} \right)} \times \log 2 \left( \frac{1 + \sqrt{\sin \alpha} + 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)} \cdot \sqrt[8]{\sin \alpha}}{1 + \sqrt{\sin \alpha} - 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)} \cdot \sqrt[8]{\sin \alpha}} \right) \quad (K.K^* V').$$

(Fortsetzung folgt.)

1) GAUSS, Werke III, S. 217, Gl. [90].

**Mathematics.** — Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergenten Reihen. II. Von S. C. VAN VEEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

§ 1.  $\beta$  beliebig;  $\alpha$  klein (nicht in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$ ).

A. Das unvollständige elliptische Integral erster Art.

Wir betrachten das u. e. I. erster Art

$$F(k_n, \beta_n) = \int_0^{\beta_n} \frac{d\varphi_n}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi_n}} \dots \dots \dots (1)$$

Unter Anwendung der LANDENSCHEN Transformation

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\sin 2\varphi_{n-1}}{k_n + \cos 2\varphi_{n-1}} \dots \dots \dots (2)$$

geht (1) bekanntlich über in<sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{1+k_n} \int_0^{\beta_{n-1}} \frac{d\varphi_{n-1}}{\sqrt{1 - \frac{4k_n}{(1+k_n)^2} \sin^2 \varphi_{n-1}}} &= \frac{2}{1+k_n} F(k_{n-1}, \beta_{n-1}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

mit

$$k_{n-1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n}; \operatorname{tg} \beta_n = \frac{\sin 2\beta_{n-1}}{k_n + \cos 2\beta_{n-1}}; (n \geq 2).$$

Unter Anwendung der Hilfsgrößen  $a_n, b_n$  aus V. E. I; I<sup>2)</sup> ergibt sich aus (1) und (3)

$$\frac{1}{2^n a_n} F(k_n, \beta_n) = \frac{1}{2^{n-1} a_{n-1}} F(k_{n-1}, \beta_{n-1}); (n \text{ ganz} \geq 2). \dots (4)$$

Aus (3) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} e^{2i\beta_n} &= \frac{k_n + e^{2i\beta_{n-1}}}{k_n + e^{-2i\beta_{n-1}}} (n \geq 2) = \frac{k_n + \frac{k_{n-1} + e^{2i\beta_{n-2}}}{k_{n-1} + e^{-2i\beta_{n-2}}}}{k_n + \frac{k_{n-1} + e^{-2i\beta_{n-2}}}{k_{n-1} + e^{2i\beta_{n-2}}}} \\ &= \frac{k_{n-1} + e^{2i\beta_{n-2}}}{k_{n-1} + e^{-2i\beta_{n-2}}} \cdot \frac{k_n \cdot k_{n-1} + k_{n-1} + k_n e^{-2i\beta_{n-2}} + e^{2i\beta_{n-2}}}{k_n \cdot k_{n-1} + k_{n-1} + k_n e^{2i\beta_{n-2}} + e^{-2i\beta_{n-2}}} \\ &= e^{4i\beta_{n-2}} \cdot \frac{k_{n-1} + e^{2i\beta_{n-2}}}{k_{n-1} + e^{-2i\beta_{n-2}}} \cdot \frac{1 + 2\sqrt{k_n} e^{-2i\beta_{n-2}} + k_n e^{-4i\beta_{n-2}}}{1 + 2\sqrt{k_n} e^{2i\beta_{n-2}} + k_n e^{4i\beta_{n-2}}} \left( \text{wegen } k_{n-1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n} \right) \\ &= e^{4i\beta_{n-2}} \cdot \frac{k_{n-1} + e^{2i\beta_{n-2}}}{k_{n-1} + e^{-2i\beta_{n-2}}} \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{k_n} \cdot e^{-2i\beta_{n-2}}}{1 + \sqrt{k_n} \cdot e^{2i\beta_{n-2}}} \right)^2 \\ &= e^{2i\beta_{n-2}} \cdot \frac{1 + k_{n-1} \cdot e^{-2i\beta_{n-2}}}{k_{n-1} + e^{-2i\beta_{n-2}}} \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{k_n} \cdot e^{-2i\beta_{n-2}}}{\sqrt{k_n} + e^{-2i\beta_{n-2}}} \right)^2; (n \geq 3). \end{aligned} \right\} (5)$$

<sup>1)</sup> Vgl. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 607 (1941), Hilfssatz 1.

<sup>2)</sup> Abkürzung für „Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art, I“, (Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 964—973 (1941)).

Wegen <sup>1)</sup>

$$k_n = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} = \left( \frac{\sqrt{a_{n-2}} - \sqrt{b_{n-2}}}{\sqrt{a_{n-2}} + \sqrt{b_{n-2}}} \right)^2 \quad (n \geq 2)$$

ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 + k_{n-1} \cdot e^{-2i\beta_{n-2}}}{k_{n-1} + e^{-2i\beta_{n-2}}} &= \frac{a_{n-2}(1 + e^{-2i\beta_{n-2}}) + b_{n-2}(1 - e^{-2i\beta_{n-2}})}{a_{n-2}(1 + e^{-2i\beta_{n-2}}) - b_{n-2}(1 - e^{-2i\beta_{n-2}})} = \\ &= \frac{1 + i \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} \cdot \operatorname{tg} \beta_{n-2}}{1 - i \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} \cdot \operatorname{tg} \beta_{n-2}}; \quad (n \geq 3) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{k_n} e^{-2i\beta_{n-2}}}{\sqrt{k_n} + e^{-2i\beta_{n-2}}} &= \frac{\sqrt{a_{n-2}}(1 + e^{-2i\beta_{n-2}}) + \sqrt{b_{n-2}}(1 - e^{-2i\beta_{n-2}})}{\sqrt{a_{n-2}}(1 + e^{-2i\beta_{n-2}}) - \sqrt{b_{n-2}}(1 - e^{-2i\beta_{n-2}})} = \\ &= \frac{1 + i \sqrt{\frac{b_{n-2}}{a_{n-2}}} \cdot \operatorname{tg} \beta_{n-2}}{1 - i \sqrt{\frac{b_{n-2}}{a_{n-2}}} \cdot \operatorname{tg} \beta_{n-2}}; \quad (n \geq 3) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Also ergibt sich aus (5), (6) und (7)

$$e^{2i\beta_n} = e^{2i\beta_{n-2}} \left( \frac{1 + i \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} \cdot \operatorname{tg} \beta_{n-2}}{1 - i \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} \cdot \operatorname{tg} \beta_{n-2}} \right) \cdot \left( \frac{1 + i \sqrt{\frac{b_{n-2}}{a_{n-2}}} \cdot \operatorname{tg} \beta_{n-2}}{1 - i \sqrt{\frac{b_{n-2}}{a_{n-2}}} \cdot \operatorname{tg} \beta_{n-2}} \right)^2 \quad (8)$$

( $n \geq 3$ )

und für  $n = 3$ , nach (V.E. I; 1) Formel 8

$$\left. \begin{aligned} e^{2i\beta_3} &= e^{2i\beta_1} \cdot \left( \frac{1 + i \sqrt{1-k_1^2} \cdot \operatorname{tg} \beta_1}{1 - i \sqrt{1-k_1^2} \cdot \operatorname{tg} \beta_1} \right) \cdot \left( \frac{1 + i \sqrt[4]{1-k_1^2} \cdot \operatorname{tg} \beta_1}{1 - i \sqrt[4]{1-k_1^2} \cdot \operatorname{tg} \beta_1} \right)^2 = \\ &= e^{2i\beta_1} \left( \frac{1 + i \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta_1}{1 - i \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta_1} \right) \cdot \left( \frac{1 + i \sqrt{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \beta_1}{1 - i \sqrt{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \beta_1} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

oder

$$\beta_3 = \beta_1 + \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tg} (\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta_1) + 2 \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tg} (\sqrt{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \beta_1). \quad (10)$$

Schliesslich ergibt sich aus (4), (nach V. E. I; I; Formel (3)).

$$F(k_1, \beta_1) = \frac{1}{4 a_3} F(k_3, \beta_3).$$

<sup>1)</sup> V. E. I; I, Formel (4).



oder

$$\int_0^{\beta_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \int_0^{\beta_3} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}}\right)^4 \sin^2 \varphi}} =$$

$$= \frac{1}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}}\right)^{4n} \cdot \int_0^{\beta_3} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi.$$

Weiter ist

$$\int_0^{\beta_3} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \int_0^{\beta_3} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})^{2n} d\varphi = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \int_0^{\beta_3} e^{2(n-k)i\varphi} d\varphi =$$

$$= \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right) \beta_3 + \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \cdot \frac{\sin 2(n-k)\beta_3}{n-k}, \quad (n \geq 1)$$

also, wegen (10)

$$F(k_1, \beta_1) = \frac{1}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \left( \beta_1 + \operatorname{arc. tg}(\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta_1) + 2 \operatorname{arc. tg}(\sqrt{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \beta_1) \right) + \left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right)^2 \left(\frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}}\right)^{4n} + \\ & + \frac{1}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right) \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}}\right)^{4n} \cdot \\ & \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \cdot \frac{\sin 2(n-k)\beta_3}{n-k}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

wo  $\beta_3$  durch (10) bestimmt ist.

Die Reihe (11) konvergiert sehr stark, wenn  $\alpha$  nicht in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$  liegt.

Für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  hört die Konvergenz auf. Aber selbst wenn  $\alpha$  ziemlich dicht bei  $\frac{\pi}{2}$  liegt, ist die Konvergenz hinreichend, z. B. für  $\alpha \leq 70^\circ$  ist schon

$$k = \sin \alpha \leq 0,94, \text{ und } \left(\frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}}\right)^4 < 0,005.$$

Für kleinere Werte von  $\alpha$  ist die Konvergenz dermassen stark, dass man sich in weitaus den meisten praktischen Rechnungen mit dem Hauptgliede

$$F(k_1, \beta_1) \approx \frac{1}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} (\beta_1 + \operatorname{arc. tg}(\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta_1) + 2 \operatorname{arc. tg}(\sqrt{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \beta_1)) \quad (12)$$

begnügen kann.

Für  $\beta = \frac{\pi}{2}$  geht (11) in

$$K(\sin \alpha) = \frac{2\pi}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left(\frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}}\right)^4\right) \dots \quad (13)$$

über. (Vgl. V. E. I; I, Formel K III).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann in (11)

$$\beta_1 \leq \frac{\pi}{2}, \text{ also } \beta_3 \leq 2\pi, \text{ (wegen (10))}$$

genommen werden, denn für

$$\beta_1 = m \frac{\pi}{2} + \gamma, \left( m \text{ ganz } \geq 1; 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2} \right)$$

ist

$$F(k_1, \beta_1) = m \cdot K(\sin \alpha) + F(k_1, \gamma) \text{ oder } (m+1) \cdot K(\sin \alpha) - F\left(k_1, \frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

je nachdem  $m$  gerade oder ungerade ist.

Für  $\alpha \leq \frac{\pi}{4}, \beta_1 \leq \frac{\pi}{2}$  ist der Fehler bei Verwendung des Hauptgliedes (12)  $< 3.10^{-5}$ .

B. Das unvollständige elliptische Integral zweiter Art.

Wir betrachten das u. e. I. zweiter Art

$$E(k_n, \beta_n) = \int_0^{\beta_n} \sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi_n} d\varphi_n \dots \dots \dots (14)$$

Unter Anwendung der LANDENSchen Transformation

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\sin 2\varphi_{n-1}}{k_n + \cos 2\varphi_{n-1}}$$

findet man

$$\begin{aligned} E(k_n, \beta_n) + k_n \sin \beta_n &= \int_0^{\beta_n} (\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi_n} + k_n \cos \varphi_n) d\varphi_n = \\ &= 2 \int_0^{\beta_{n-1}} \frac{1 + k_n \cos 2\varphi_{n-1}}{\sqrt{1 + 2k_n \cos 2\varphi_{n-1} + k_n^2}} d\varphi_{n-1} = \frac{2}{1+k_n} \int_0^{\beta_{n-1}} \frac{1 + k_n - 2k_n \sin^2 \varphi_{n-1}}{\sqrt{1 - \frac{4k_n}{(1+k_n)^2} \sin^2 \varphi_{n-1}}} d\varphi_{n-1} \\ &= (1+k_n) \int_0^{\beta_{n-1}} \sqrt{1 - k_{n-1}^2 \sin^2 \varphi_{n-1}} d\varphi_{n-1} + (1-k_n) \int_0^{\beta_{n-1}} \frac{d\varphi_{n-1}}{\sqrt{1 - k_{n-1}^2 \sin^2 \varphi_{n-1}}}, \end{aligned}$$

also, nach V. E. I; I, Formel (6) und (7)

$$E(k_n, \beta_n) + k_n \sin \beta_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} E(k_{n-1}, \beta_{n-1}) + \frac{b_{n-1}}{a_n} F(k_{n-1}, \beta_{n-1}); \quad (15)$$

oder

$$a_n E(k_n, \beta_n) - a_{n-1} E(k_{n-1}, \beta_{n-1}) = b_{n-1} F(k_{n-1}, \beta_{n-1}) - a_n k_n \sin \beta_n; \quad (n \geq 2).$$

Insbesondere ist

$$\left. \begin{aligned} a_3 E(k_3, \beta_3) - a_1 E(k_1, \beta_1) &= b_2 F(k_2, \beta_2) + b_1 F(k_1, \beta_1) - a_3 k_3 \sin \beta_3 - a_2 k_2 \sin \beta_2 = \\ &= \frac{a_1 b_1 + 2a_2 b_2}{4a_3} F(k_3, \beta_3) - a_3 k_3 \sin \beta_3 - a_2 k_2 \sin \beta_2, \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

wegen (4)

$$e^{2i\beta_2} = e^{2i\beta_1} \cdot \frac{1 + k_2 e^{-2i\beta_1}}{k_2 + e^{-2i\beta_1}} = e^{2i\beta_1} \cdot \frac{1 + i \frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg} \beta_1}{1 - i \frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg} \beta_1}$$

also

$$\beta_2 = \beta_1 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\cos a \cdot \operatorname{tg} \beta_1).$$

Weiter ist

$$e^{2i\beta_2} = \frac{e^{2i\beta_1} \left(1 + i \frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg} \beta_1\right)^2}{1 + \frac{b_1^2}{a_1^2} \operatorname{tg}^2 \beta_1} = \frac{e^{2i\beta_1} (1 + i \cos a \cdot \operatorname{tg} \beta_1)^2}{1 + \cos^2 a \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1}$$

oder

$$e^{i\beta_2} = \frac{e^{i\beta_1} (1 + i \cos a \cdot \operatorname{tg} \beta_1) \cos \beta_1}{\Delta}$$

mit

$$\cos \beta_1 \sqrt{1 + \cos^2 a \operatorname{tg}^2 \beta_1} = \sqrt{1 - \sin^2 a \cdot \sin^2 \beta_1} = \Delta. \quad (17)$$

Durch Trennung der reellen und imaginären Teile findet man

$$\cos \beta_2 = \frac{\cos^2 \beta_1 - \sin \beta_1 \cos \beta_1 \cos a \operatorname{tg} \beta_1}{\Delta} = \frac{\cos^2 \beta_1 (1 - \cos a \operatorname{tg}^2 \beta_1)}{\Delta}. \quad (18)$$

$$\sin \beta_2 = \frac{\sin \beta_1 \cos \beta_1 + \cos^2 \beta_1 \cos a \operatorname{tg} \beta_1}{\Delta} = \frac{\sin 2 \beta_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\Delta}. \quad (19)$$

Wegen (9) ist:

$$\begin{aligned} e^{i\beta_2} &= \frac{e^{i\beta_1} (1 + i \cos a \cdot \operatorname{tg} \beta_1) (1 + i \sqrt{\cos a \cdot \operatorname{tg} \beta_1})}{\sqrt{1 + \cos^2 a \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1} (1 - i \sqrt{\cos a \operatorname{tg} \beta_1})} = \\ &= \frac{e^{i\beta_1} (1 + i \cos a \cdot \operatorname{tg} \beta_1) (1 + i \sqrt{\cos a \cdot \operatorname{tg} \beta_1})^2 \cos \beta_1}{\Delta (1 + \cos a \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1)}, \end{aligned}$$

also

$$\sin \beta_3 = \frac{\sin \beta_1 \cos \beta_1 (1 - \cos a \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1) (1 + \sqrt{\cos a})^2}{\Delta \cdot (1 + \cos a \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1)}. \quad (20)$$

Wegen V. E. I; I, Formel (3) und (5) ist

$$\left. \begin{aligned} a_3 k_3 &= \frac{1}{4} (1 - \sqrt{\cos a})^2 \\ a_2 k_2 &= \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

und, wegen (19), (20) und (21)

$$\begin{aligned}
 a_2 k_2 \sin \beta_2 + a_3 k_3 \sin \beta_3 &= \frac{\sin 2\beta_1 \cdot \sin^2 \alpha}{4 \cdot \Delta} + \frac{\sin 2\beta_1 \sin^4 \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1)}{2 \Delta (1 + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1)} = \\
 &= \frac{\sin 2\beta_1 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \Delta (1 + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1)} \cdot \left( 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1) + \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1) \right) = \\
 &= \frac{\sin 2\beta_1 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \Delta (1 + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1)} \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1) + \frac{\Delta^2}{\cos^2 \beta_1} \right) = \\
 &= \frac{\sin 2\beta_1 \sin^2 \alpha}{8 \Delta} + \frac{\operatorname{tg} \beta_1 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \Delta}{1 + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1}
 \end{aligned} \quad (22)$$

Schliesslich ergibt sich aus (16) und (22)

$$\begin{aligned}
 E(k_1, \beta_1) &= \frac{\sin 2\beta_1 \cdot \sin^2 \alpha}{8 \Delta} + \frac{\operatorname{tg} \beta_1 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \Delta}{1 + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1} + \left( \frac{1 + \sqrt{\cos \alpha}}{2} \right)^2 \int_0^{\beta_3} \sqrt{1 - \left( \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \right)^4 \sin^2 \varphi} d\varphi \\
 &- \sqrt{\cos \alpha} \frac{(1 + \sqrt{\cos \alpha} + \cos \alpha)}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \int_0^{\beta_3} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left( \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \right)^4 \sin^2 \varphi}} = \\
 &= \frac{\sin 2\beta_1 \cdot \sin^2 \alpha}{8 \Delta} + \frac{\operatorname{tg} \beta_1 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \Delta}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg}^2 \beta_1} + \\
 &\quad \left( \frac{1 + \sqrt{\cos \alpha}}{2} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \cdot \left( \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \right)^{4n} \int_0^{\beta_3} \sin^{2n} \varphi d\varphi \\
 &- \sqrt{\cos \alpha} \frac{(1 + \sqrt{\cos \alpha} + \cos \alpha)}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \right)^{4n} \int_0^{\beta_3} \sin^{2n} \varphi \cdot d\varphi = \\
 &= \frac{\sin 2\beta_1 \cdot \sin^2 \alpha}{8 \Delta} + \frac{\operatorname{tg} \beta_1 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \Delta}{1 + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1} - \\
 &\quad \left( \frac{1 + \sqrt{\cos \alpha}}{2} \right)^2 \beta_3 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \frac{1}{2n-1} \cdot \left( \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \right)^{4n} \\
 &- \sqrt{\cos \alpha} \frac{(1 + \sqrt{\cos \alpha} + \cos \alpha)}{(1 + \sqrt{\cos \alpha})^2} \cdot \beta_3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \left( \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \right)^{4n} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1 + \sqrt{\cos a}}{2} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \\
& \quad \left( \frac{1 - \sqrt{\cos a}}{1 + \sqrt{\cos a}} \right)^{4n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin 2(n-k)\beta_3}{n-k} \\
& - \sqrt{\cos a} \frac{(1 + \sqrt{\cos a} + \cos a)}{(1 + \sqrt{\cos a})^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \\
& \quad \left( \frac{1 - \sqrt{\cos a}}{1 + \sqrt{\cos a}} \right)^{4n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin 2(n-k)\beta_3}{n-k}. \quad (23)
\end{aligned}$$

Das Hauptglied

$$\left. \begin{aligned}
E(k_1, \beta_1) & \approx \frac{\sin 2\beta \cdot \sin^2 a}{8\Delta} + \frac{\operatorname{tg} \beta_1 \cdot \sin^2 \frac{a}{2} \cdot \Delta}{1 + \cos a \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_1} + \\
& \frac{\cos^4 \frac{a}{2}}{(1 + \sqrt{\cos a})^2} (\beta_1 + \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tg} \cdot (\cos a \cdot \operatorname{tg} \beta_1) + 2 \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tg} (\sqrt{\cos a} \cdot \operatorname{tg} \beta_1))
\end{aligned} \right\} (24)$$

wird für kleines  $a$  in den meisten praktischen Rechnungen genügen.

(Fortsetzung folgt.)

**Mathematics.** — *Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de BESSEL. VI.* By J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

§ 14. Remplaçons dans (296) à cause de  $I_{\rho}$  par  $\rho + m + \frac{1}{2}$  et multiplions les deux membres par  $(-1)^m (2\rho + 2m + 1)$ , alors nous trouvons après la sommation sur  $m$  de 0 à  $\infty$  et en appliquant le théorème de CAUCHY ( $g$ ):

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2\rho+s+1) I_{\rho+s+1}(x) I_{\rho+s+\frac{1}{2}}(x) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_{\nu}(x-a) I_{\nu-\frac{1}{2}}(x-a) I_{2\rho}(2a) a \sqrt{x-a} da, \left. \begin{aligned} & \{ R(\nu) > -\frac{1}{2} \\ & \{ R(\rho) > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (377)$$

ou en posant  $\nu = \mu - \rho - \frac{1}{2}$ :

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2\rho+s+1) I_{\mu+s+\frac{1}{2}}(x) I_{\mu+s}(x) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x I_{\mu-\rho-\frac{1}{2}}(x-a) I_{\mu-\rho-1}(x-a) I_{2\rho}(2a) a \sqrt{x-a} da, \left. \begin{aligned} & R(\mu) > R(\rho) > -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (378)$$

La substitution  $\nu = 0$  et  $\nu = \frac{1}{2}$  dans (377) donne les formules particulières:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2\rho+s+1) I_{\rho+s+1}(x) I_{\rho+s+\frac{1}{2}}(x) = \\ & = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) I_{2\rho}(2a) \cos(x-a) \cdot a da, \left. \begin{aligned} & R(\rho) > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (379)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2\rho+s+1) I_{\rho+s+\frac{1}{2}}(x) I_{\rho+s+1}(x) = \\ & = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) I_{2\rho}(2a) \sin(x-a) \cdot a da, \left. \begin{aligned} & R(\rho) > -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (380)$$

En multipliant les deux membres de (379) par  $\sin x$  resp.  $\cos x$  et ceux de (380) par  $\cos x$  resp.  $\sin x$ , on trouve après la soustraction resp. l'addition des membres correspondants:



$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2\rho+s+1) I_{\rho+s+1}(x) \{ \sin x I_{\rho+s+1}(x) - \cos x I_{\rho+s+\frac{1}{2}}(x) \} &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) I_{2\rho}(2a) \sin a \cdot a \, da, \quad R(\rho) > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} (381)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2\rho+s+1) I_{\rho+s+1}(x) \{ \cos x I_{\rho+s+1}(x) + \sin x I_{\rho+s+\frac{1}{2}}(x) \} &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(x-a) I_{2\rho}(2a) \cos a \cdot a \, da, \quad R(\rho) > -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} (382)$$

La substitution  $\rho = -\frac{1}{4}$  et  $\rho = \frac{1}{4}$  dans (378) jusqu'à (382) donne les formules particulières :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2s+1) I_{\mu+s+1}(x) I_{\mu+s}(x) &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi x}} \int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(a) I_{\mu-\frac{1}{2}}(a) \cos 2(x-a) \cdot \sqrt{a(x-a)} \, da, \quad R(\mu) > -\frac{1}{4} \end{aligned} \right\} (383)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2s+3) I_{\mu+s+1}(x) I_{\mu+s}(x) &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi x}} \int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(a) I_{\mu-\frac{1}{2}}(a) \sin 2(x-a) \cdot \sqrt{a(x-a)} \, da, \quad R(\mu) > \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} (384)$$

ou en remplaçant  $\mu$  par  $\mu + \frac{1}{2}$  :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2s+3) I_{\mu+s+1}(x) I_{\mu+s+\frac{1}{2}}(x) &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi x}} \int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(a) I_{\mu-\frac{1}{2}}(a) \sin 2(x-a) \cdot \sqrt{a(x-a)} \, da, \quad R(\mu) > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} (384')$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_{s+1}(x) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x-a) \cos 2a \cdot \sqrt{a} \, da, \end{aligned} \right\} \dots (385)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2s+3) I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_{s+\frac{3}{2}}(x) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x-a) \sin 2a \cdot \sqrt{a} da, \end{aligned} \right\} \dots (386)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_{s+\frac{1}{2}}(x) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x-a) \cos 2a \cdot \sqrt{a} da, \end{aligned} \right\} \dots (387)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2s+3) I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_{s+\frac{3}{2}}(x) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x-a) \sin 2a \cdot \sqrt{a} da, \end{aligned} \right\} \dots (388)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_{s+\frac{1}{2}}(x) - \cos x I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin a \cos 2a \cdot \sqrt{a} da, \end{aligned} \right\} (389)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2s+3) I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \sin x I_{s+\frac{3}{2}}(x) - \cos x I_{s+\frac{1}{2}}(x) \} &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin a \sin 2a \cdot \sqrt{a} da, \end{aligned} \right\} (390)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_{s+\frac{1}{2}}(x) + \sin x I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos a \cos 2a \cdot \sqrt{a} da, \end{aligned} \right\} (391)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1)(2s+3) I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ \cos x I_{s+\frac{3}{2}}(x) + \sin x I_{s+\frac{1}{2}}(x) \} &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos a \sin 2a \cdot \sqrt{a} da. \end{aligned} \right\} (392)$$

L'addition et la soustraction de (385) et (388), ainsi de (386) et (387), de (389) et (392), de (390) et (391) donnent :

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_{s+\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(3a-x) \cdot \sqrt{a} da, \quad (393)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1)^2 I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_{s+\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos(x+a) \cdot \sqrt{a} da, \quad (394)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+2)^2 I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_{s+\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(x+a) \cdot \sqrt{a} da, \quad (395)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+2) I_{s+\frac{1}{2}}(x) I_{s+\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin(3a-x) \cdot \sqrt{a} da, \quad (396)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \sin x I_{s+\frac{1}{2}}(x) + (2s+2) \cos x I_{s+\frac{1}{2}}(x) \} = \\ = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin 3a \cdot \sqrt{a} da, \end{aligned} \right\} \quad (397)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+2)^2 \cos x I_{s+\frac{1}{2}}(x) - (2s+1)^2 \sin x I_{s+\frac{1}{2}}(x) \} = \\ = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \sin a \cdot \sqrt{a} da, \end{aligned} \right\} \quad (398)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+2)^2 \sin x I_{s+\frac{1}{2}}(x) + (2s+1)^2 \cos x I_{s+\frac{1}{2}}(x) \} = \\ = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos a \cdot \sqrt{a} da, \end{aligned} \right\} \quad (399)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \cos x I_{s+\frac{1}{2}}(x) - (2s+2) \sin x I_{s+\frac{1}{2}}(x) \} = \\ = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(x-a) \cos 3a \cdot \sqrt{a} da. \end{aligned} \right\} \quad (400)$$

Si nous multiplions les deux membres de (383) par  $\sin 2x$  resp.  $\cos 2x$  et ceux de (384') par  $\cos 2x$  resp.  $\sin 2x$ , alors nous trouvons après la

soustraction resp. l'addition des membres correspondants, et en faisant de même à l'égard de (385) et (386), ainsi de (387) et (388):

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{\mu+s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \sin 2x I_{\mu+s}(x) - (2s+3) \cos 2x I_{\mu+s+1}(x) \} &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi x}} \int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(a) I_{\mu-\frac{1}{2}}(a) \sin 2a \cdot \sqrt{a(x-a)} da, \end{aligned} \right\} (401)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{\mu+s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \cos 2x I_{\mu+s}(x) + (2s+3) \sin 2x I_{\mu+s+1}(x) \} &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi x}} \int_0^x I_{\mu-\frac{1}{2}}(a) I_{\mu-\frac{1}{2}}(a) \cos 2a \cdot \sqrt{a(x-a)} da, \end{aligned} \right\} (402)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \sin 2x I_{s+\frac{1}{2}}(x) - (2s+3) \cos 2x I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a \sin 2a \cdot \sqrt{x-a} da \end{aligned} \right\} (403)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \cos 2x I_{s+\frac{1}{2}}(x) + (2s+3) \sin 2x I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x I_0(a) \cos a \cos 2a \cdot \sqrt{x-a} da, \end{aligned} \right\} (404)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \sin x I_{s+\frac{1}{2}}(x) - (2s+3) \cos x I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(a) \sin a \sin 2a \cdot \sqrt{x-a} da, \end{aligned} \right\} (405)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{\infty} (-1)^s (s+1) I_{s+\frac{1}{2}}(x) \{ (2s+1) \cos x I_{s+\frac{1}{2}}(x) + (2s+3) \sin x I_{s+\frac{3}{2}}(x) \} &= \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_0(a) \sin a \cos 2a \cdot \sqrt{x-a} da. \end{aligned} \right\} (406)$$

§ 15. De la série connue<sup>1)</sup>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu + \varrho + 2n}{\nu + \varrho + n} \binom{\nu + \varrho + n}{n} I_{\nu+n}(x) I_{\varrho+n}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\varrho}}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\varrho+1)}$$

nous déduisons pour  $\varrho = \nu - \frac{1}{2}$ , en profitant de  $\Gamma(\nu+1) \Gamma(\nu + \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(2\nu+1) \sqrt{\pi}}{2^{2\nu}}$ , la particulière:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\nu + 2n - \frac{1}{2}}{2\nu + n - \frac{1}{2}} \binom{2\nu + n - \frac{1}{2}}{n} I_{\nu+n}(x) I_{\nu+n-1}(x) = \frac{x^{2\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2\nu+1) \sqrt{\pi}}, \quad (\text{V})$$

à cause de laquelle nous remplaçons dans (263)  $\nu$  par  $\nu + n$  et multiplions les deux membres par  $\frac{2\nu + 2n - \frac{1}{2}}{2\nu + n - \frac{1}{2}} \binom{2\nu + n - \frac{1}{2}}{n}$ ; après la sommation sur  $n$  de 0 à  $\infty$  et le changement des membres nous trouvons alors:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\nu + 2n - \frac{1}{2}}{2\nu + n - \frac{1}{2}} \binom{2\nu + n - \frac{1}{2}}{n} I_{\nu+\varrho+n+1}(x) I_{\nu+\varrho+n}(x) = \\ = \frac{2\varrho+1}{\Gamma(2\nu+1) \sqrt{2\pi} x_0} \int_0^x I_{2\varrho+1}(2a) (x-a)^{2\nu} \frac{da}{a}, \quad \begin{cases} R(\nu) > -\frac{1}{2} \\ R(\varrho) > -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

ou en posant  $\nu = \mu - \varrho - \frac{1}{4}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\mu - 2\varrho + 2n - \frac{3}{4}}{2\mu - 2\varrho + n - \frac{3}{4}} \binom{2\mu - 2\varrho + n - \frac{3}{4}}{n} I_{\mu+n}(x) I_{\mu+n-1}(x) = \\ = \frac{2\varrho+1}{\Gamma(2\mu-2\varrho) \sqrt{2\pi} x_0} \int_0^x I_{2\varrho+1}(2a) (x-a)^{2\mu-2\varrho-1} \frac{da}{a}, \quad \begin{cases} R(\mu) > R(\varrho) > -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (407)$$

La substitution  $\mu = \varrho + \frac{3}{4}$  donne la formule particulière:

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{\varrho+n+1}(x) I_{\varrho+n+1}(x) = \frac{2\varrho+1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x_0}} \int_0^x I_{2\varrho+1}(2a) \sqrt{x-a} \frac{da}{a}, \quad R(\varrho) > -\frac{1}{2}. \quad (408)$$

En substituant  $\varrho = -\frac{1}{4}$  dans (407) et (408) on trouve:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\mu + 2n - 1}{2\mu + n - 1} \binom{2\mu + n - 1}{n} I_{\mu+n}(x) I_{\mu+n-1}(x) = \\ = \frac{1}{2\pi \Gamma(2\mu + \frac{1}{2}) \sqrt{2} x_0} \int_0^x (x-a)^{2\mu-1} \sin 2a \frac{da}{a \sqrt{a}}, \quad R(\mu) > -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (409)$$

<sup>1)</sup> NIELSEN, I. c., p. 295, (6).

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+\frac{1}{2}}(x) I_n(x) &= \frac{1}{\pi \sqrt{2\pi x}} \int_0^x \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} \frac{da}{a} = \\ &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \{ \cos x I_0(x) + \sin x I_1(x) \} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \sin x I_0(x) \text{ selon (107)}. \end{aligned} \right\} (410)$$

Ayant égard à (343) on trouve donc :

$$\int_0^x I_0(a) \cos a \, da = x \{ \cos x I_0(x) + \sin x I_1(x) \} - \frac{1}{2} \sin x I_0(x), \quad (411)$$

$$\int_0^x I_1(a) \sin a \, da = x \{ \cos x I_0(x) + \sin x I_1(x) \} - \frac{3}{2} \sin x I_0(x). \quad (412)$$

La substitution  $\mu = \frac{1}{4}$  dans (409) donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n-1}{2n-1} \binom{n-\frac{1}{2}}{n} I_{n+\frac{1}{2}}(x) I_{n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2\pi \sqrt{2\pi x}} \int_0^x \sin 2a \frac{da}{a \sqrt{a}}. \quad (413)$$

Si nous remplaçons, à cause de  $I$ , dans (408)  $\varrho$  par  $\varrho + m$  et multiplions les deux membres par  $(-1)^m$ , alors nous trouvons après la sommation sur  $m$  de 0 à  $\infty$ , en appliquant le théorème de CAUCHY ( $\varrho$ ):

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{\varrho+2s+\frac{1}{2}}(x) I_{\varrho+2s+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^x I_{2\varrho}(2a) \cdot \sqrt{x-a} \, da, \quad R(\varrho) > -\frac{1}{2} \quad (414)$$

de laquelle suivent pour  $\varrho = -\frac{1}{4}$  et  $\varrho = \frac{1}{4}$ :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{2s+\frac{1}{2}}(x) I_{2s}(x) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x \cos 2a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} \, da = \\ &= \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \{ \cos x I_0(x) + \sin x I_1(x) \} \text{ en vertu de (230),} \end{aligned} \right\} (415)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s I_{2s+1}(x) I_{2s+\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x \sin 2a \cdot \sqrt{\frac{x-a}{a}} \, da = \\ &= \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \{ \sin x I_0(x) - \cos x I_1(x) \} \text{ en vertu de (229).} \end{aligned} \right\} (416)$$



**Biochemistry.** — *Motory phenomena in coacervate drops in a diffusion field and in the electric field.* By H. G. BUNGENBERG DE JONG and E. G. HOSKAM. (Communicated by Prof. J. VAN DER HOEVE.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

1. *Introduction.*

In a direct current field drops of complex coacervates show a great many phenomena:

- a. shifting with regard to the medium (electrophoresis),
- b. transformation (flattening to discs perpendicular to the direction of the field, BÜCHNER effect),
- c. vacuolization and motory phenomena in the internal of the coacervate drops,
- d. displacement of larger vacuoles and enclosures (e.g. oildrops, carbon particles, coexisting coacervate drops) to one side of the coacervate drop. When the surface is reached the vacuoles break, the enclosures only bulge out, but when the current is discontinued they return to the inside of the drop,
- e. formation of new, small coacervate drops in the medium on the other side of the drop as in *d*, at some distance from the surface.

Of the above effects those mentioned under *a*, *c*, *d* and *e* are typically polar effects, they are reversed when the polarity of the electric field is changed, moreover, in a positive drop they are the reflected images of those in a negative one.

In a previous publication<sup>1)</sup> we have given a preliminary explanation of the phenomena mentioned in *c*, *d* and *e*, which together we named desintegration phenomena. In this explanation we started from electro-kinetic phenomena (electrophoresis and electroendosmosis). Further study of the phenomena mentioned under *c* reveals that the above starting point presents difficulties when we try to account for the desintegration. It has appeared that analogous phenomena may also occur in a diffusion field, so that we may suspect a connection between the two. This suggests a new starting point for the explanation of desintegration, in which an essential part is ascribed to the changes in the interfacial tension: coacervatedrop-medium.

2. *Motory phenomena in a diffusion field.*

The phenomena which will be described in this section were observed at room temperature in gelatine containing coacervates in which the gelation had been neutralized by the addition of suitable non-electrolytes.

We started from a stock solution consisting of 6 g. gum arabic + 5 g. gelatine + 190 cc dist. H<sub>2</sub>O. 10 cc of this stock solution was added to a mixture consisting of 2 g. resorcinol + 3 cc HCl 0.1 N + 10 cc dist. H<sub>2</sub>O. The result is a coacervation which continues to exist after cooling to room temperature.

A little of the coacervated system was placed on an object glass, which was provided with a thin film of a dried up amyllum-soluble solution. This prevents the coacervate drops from spreading over the glass surface. When a small granule of NaCl is carefully put in the fluid, currents are formed in the near coacervate drops. On the side where the coacervate drop comes into contact with the NaCl which diffuses towards it, the coacervate becomes more dense (i.e. richer in colloids), considerable vacuolization setting in.

Now the surface of the coacervate drop is seen to move in the direction where the coacervate becomes more dense. In consequence of it the entire contents of the coacervate begin to move, as is seen from the motion of the vacuoles which are carried with it (see fig. 1A). Moreover the coacervate drop creeps away in the direction opposite to that from where the NaCl diffuses.

<sup>1)</sup> H. G. BUNGENBERG DE JONG and W. A. L. DEKKER, *Biochem. Z.* **221**, 403 (1930); *Kolloid-Beihfte* **43**, 143 (1935).

The reverse picture too may be obtained, namely that all the motory phenomena are reversed. This happens when the coacervate drop comes into one-sided contact with a "swelling" medium.

In order to make the current distinctly visible, care should be taken to provide the coacervate drop equally with small vacuoles. This is done by making the coacervate more dense just before starting the experiment.

The following method proved effective: 10 cc of the above basis solution is added to a mixture of 1 g. resorcine + 2.5 g. ureum + 2.5 cc HCl 0.1 N + 9 cc dist. water. A complex coacervation is formed which continues to exist on cooling to room temperature. A little of the coacervated system is placed on an object glass prepared with amylum-soluble, but the fine, perfectly hyalin coacervate drops are not yet fit for the experiment. We now bring about an equal, very fine vacuolization, placing a drop of distilled water on the preparation. When then we introduce a granule of NaCl in the preparation the reverse happens as in fig. 1A (see fig. 1B). The disappearance of the fine vacuolization

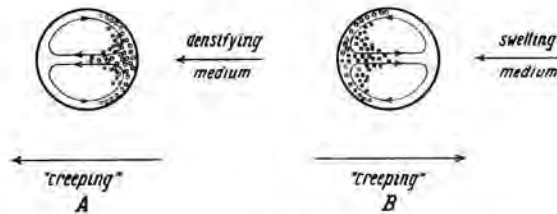


Fig. 1. Current phenomena in a diffusion field of a condensing (left) resp. opening substance (right). The direction into which this substance diffuses is indicated by an arrow by the side of the drops. The direction in which the coacervate drops creep over the substratum is indicated by an arrow under the drops.

(the coacervate becomes hyaline in that spot) marks the place where the "swelling medium" touches the coacervate, while the direction of the current is indicated by the motion of the remaining vacuoles. The coacervate drop moreover creeps in the direction from where the opening substance diffuses.

The motory phenomena described above may be explained when we assume that condensation of the coacervate is combined with increase of the interfacial tension: coacervate/medium, reversely that "opening" lowers that tension. For then the phase boundary must move from places with less, to places with higher interfacial tension. The supposition made which would seem plausible enough, could not be tested by direct method, as the precise measuring of the very slight interfacial tension characteristic of very liquid coacervates, yet presents great difficulties.

An indirect indication in favour of the supposition made is the transformation of the coacervate drop in the diffusion field, which change is not pictured in the schemes of fig. 1A and 1B. On vertical view the coacervate drops are originally perfectly circular, but in the case of fig. 1A they assume the shape of fig. 2A; in the case of fig. 1B that of fig. 2B.

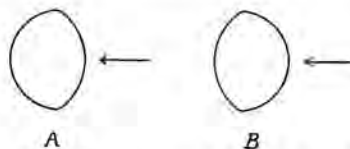


Fig. 2. Transformation of the coacervate drops during the one-sided activity of a condensing (left) resp. opening (right) substance. The direction into which this substance diffuses is indicated by an arrow.

That is to say, on the side where the coacervate becomes relatively most dense, the curve radius of the drop is greater than on the opposite side. Such a shape must also be assumed by the drop when the interfacial tension is different on the right and on the left, namely exactly as we supposed in the above (the greatest curve radius on the side of the greatest interfacial tension).

An answer to the question why NaCl has an opposite effect in the two cases discussed above may here be suggested in a few words. In the case discussed in fig. 1B we see the normal behaviour of the complex coacervates: in sufficient concentration neutral salts cause neutralization and in the previous concentration section the percentage of the dispersing medium in the coacervate increases ("swelling of the coacervate"). From a special investigation it has appeared that in the presence of 10% ureum + 4% resorcine the complex coacervation at room temperature comes very near that at 40° in the absence of the two non-electrolytes.

In the case of fig. 1A we only used resorcine as a gelation neutralizing agent. Certain secondary effects of the resorcine, especially on the gelatine component have not been neutralized here by ureum and are the cause that the neutralizing resp. swelling effect of the neutral salts on complex coacervates are dominated by the condensing effect of salts, as it is also expressed in the formation of coacervates from resorcine-containing positive gelatine sols with neutral salts.

### 3. Current and vacuolization phenomena of the complex coacervate in the electric field.

The desintegration phenomena (see introduction) have formerly been studied in coacervate drops floating free in the medium. In these methods the observation of what takes place first in the electric field is very difficult, as the coacervate drops continually disappear from the field of vision. Consequently we were pretty well acquainted with the facts mentioned in *d* and *e* in the introduction, whereas an important detail of point *c* had escaped our attention.

Undisturbed observation becomes possible by studying coacervate drops on a starched object glass on a heated object table. The auxiliary apparatus pictured in fig. 3, which is screwed on to the objective, serves to protect the objective and to fix the electrodes.

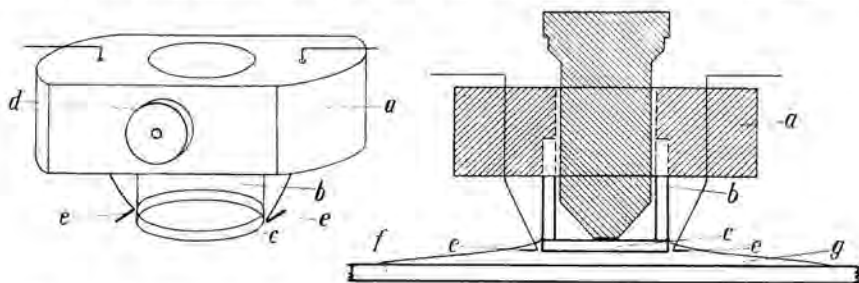


Fig. 3. Auxiliary apparatus to be fixed to the objective. a) ebonite block; b) glass tube to which has been cemented; c) a glass plate; d) screw; e) two platinum electrodes; f) object glass; g) liquid containing the coacervate drops.

The complex coacervate of gelatine and gum arabic were studied at 40°. The gelatine (F00 extra of the "Lijm- en Gelatinefabriek „Delft“" at Delft) was purified by LOEB's method. As gum arabic we used Na-arabinate<sup>1)</sup> 5 g. of both colloids was dissolved in 250 cc dist. water. Positive, uncharged and negative coacervates were obtained by mixing a cc gelatine + (10-a) cc arabinat with 5 cc of an acetate buffer of the following

<sup>1)</sup> Bioch. Z. 59, 436 (1933); 262, 161 (1933).

composition: to 30 cc Na-acetate 0.1 N + 25 cc acetic acid, 2 N dist. water was added until 100 cc. The buffer by itself at 40° had a pH value of 3.49. In the above mixtures the pH varies between 3.65 (only gelatine present) and 3.57 (only Na-arabinate present), so that the series of mixtures was approximately isohydric.

The following table gives the coacervate volumes and the electrophoretic velocity (in arbitrary units at 40°), as function of the mixing proportion<sup>2)</sup>.

Mixing prop. in % arabinate.	Coacervate vol. in 0.1 cc	Electrophoretic velocity in arbitrary units and charge indicator sign.
20	0.2	
30	3.4	
40	6.8	
45	8.3	
50	9.1	
55	9.2	
60	8.6	
70	4.8	
80	0.1	

+ 131 } reversal  
 + 50 } of charge  
 - 17 } at 48% A.  
 - 174 }

The peak of the coacervate volume curve is between 50 and 55% A, while reverse of charge takes place at a slightly lower mixing proportion (48%).

When by the method described and in weak fields (5 to 10 volts/c.M.) we investigate coacervated systems with 30 resp. 40% arabinate (positive), resp. with 60 and 70% arabinate (negative), then, as is seen from the motion of the vacuoles formed, a current is formed in the coacervate drops as shown in fig. 4. Here too, vacuoles are formed in the place where the peripheral motion turns inward.



Fig. 4. Current phenomena in a complex coacervate drop in an electric field.

Nevertheless the phenomena are more complicated than in the diffusion field of opening or condensing substances. For there is also formed an independent, second system of usually very small vacuoles on the opposite side of the drop. The second system is found exactly under the interface: coacervate/medium.

A short time after the field is applied we obtain pictures as in fig. 5. When coacervated systems are examined very near the point of reversal of charge, the current phenomena do not cease, but on the contrary, show a more complicated type: in the left half of the



Fig. 5. Vacuolization a short time after the application of the electric field.

<sup>2)</sup> In this place we wish to express our thanks to Dr. H. L. BOOY for taking the electrophoresis measurements.

drop there is the picture of the current as in positive drops, in the right half there is the picture of negative drops (see fig. 4 and 5).

Finally we observe that, as in the diffusion field, so in the electric field, the coacervate drops creep slowly over the substratum, namely the positive drops to the — pole, the negative ones to the + pole.

#### 4. Discussion.

For the theory of the desintegration phenomena the following results are of importance:

a. The type of the current phenomena in the electric field in drops with a strongly positive and in drops with a strongly negative charge is the same as in a diffusion field of a condensing or opening substance.

b. In uncharged drops there is a more complicated type of current.

Formerly we thought that in explaining the desintegration phenomena we must start from the independent electrophoresis of the two biocolloids in the coacervate with opposite charge. The current phenomena we also observed we thought attributable to electroendosmosis of the coacervate along the bounding face coacervate/medium (considered as a wall with the same electrophoresis sign as the drop has with regard to the medium). Now that we have been able so much the better to observe the initial phenomena in the electric field, this interpretation must be considered incorrect.

In the first place it appears from the creeping phenomena that the surface of the coacervate drop itself shifts, and that in the same direction as the peripheral layers of the coacervate.

Secondly the fact that the current type in uncharged drops becomes more complicated is contradictory to the theory of electroendosmosis (the current should cease here).

On the other hand the results indicate that polarization at the interface coacervate/medium must be considered the chief cause of the current. It may be supposed that the attending pH changes cause condensation on the one side of the drop, and opening on the opposite side. The consequent changes of the interfacial tension will then cause the contents of the coacervate drop to flow in the same way as was indicated in fig. 1 for coacervate drops in a diffusion field of a condensing or opening substance.

The more complicated type of current in practically uncharged drops agrees very well with this interpretation. Again we start from the plausible supposition that there is an intimate connection between effective attraction and interfacial tension: on "condensation" the latter will increase, on opening however, it will decrease. As at the reversal of charge the effective attraction is maximal, and therefore pH decrease as well as pH increase will cause the effective attraction to fall, the interfacial tension of the uncharged coacervate drop will also be maximal and the pH changes mentioned can only decrease the interfacial tension. When polarization occurs in the electric field the pH rises on the one side and falls on the other side of the coacervate drop, but these pH changes both cause decrease of the interfacial tension in the uncharged coacervate drop. As the bounding face will begin to shift from places with a lower interfacial tension (the two "poles" of the drop, located in the direction of the electric field) to places with a higher interfacial tension (the equator of the drop, perpendicular to the electric field) the current type of fig. 4 and 5 must develop in the uncharged coacervate drop.

We realize that we can only roughly account for the current phenomena in the electric field. Many details, such as the second peripheral system of vacuoles and the changes of the current figure with time require further study, so that as yet we cannot attempt an explanation of these phenomena.



**Biochemistry.** — *The influence of the temperature on the complexcoacervation of gelatine and gum arabic.* By H. G. BUNGENBERG DE JONG, E. G. HOSKAM and L. H. V. D. BRANDHOF-SCHAEGEN. (Communicated by Prof. J. VAN DER HOEVE.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

### 1. *Introduction.*

In a mixture of gelatine and gum arabic sols acidification causes de-mixing ("coacervation") into a liquid layer rich in colloids (complexcoacervate) and a liquid poor in colloids ("equilibrium liquid").

A detailed investigation<sup>1)</sup> of this kind of coacervation has previously been made at constant temperature, which showed a.o. from the occurrence of optimal coacervation at different mixing proportions of the isohydric sols for each pH, that the opposition of charge (gelatine positive, gum arabic negative) is the most important factor in the process of complexcoacervation. We now put the question what may be the influence of the temperature on complexcoacervation. So on the one hand we investigated whether the optimal mixing proportion shifts with the temperature, on the other hand we were interested in any changes of the colloid percentage of the equilibrium liquid ("solubility of the coacervate") and of the percentage of water in the coacervate. Finally we examined the two latter points in the presence of a neutral salt (KCl).

### 2. *Methods.*

3% stock solutions: 30 g. fine ground gum arabic (gomme senegal petite boule blanche I) is dissolved by heating in 1 L. dist. water and filtered. The stock is kept in the refrigerator. 15 g. gelatine (gelatine for bacteriologic purposes of the Lijm en Gelatinefabriek "Delft" at Delft) is strewn on 500 cc dist. water and left to swell for 30 min. Then it is dissolved in a water bath at 60°. The solution is divided into portions, which are preserved in the refrigerator. On use a portion is melted and placed in a burette with a hot water mantle.

For the preparation of the coacervated systems a number of wide tubes, to whose lower ends narrower tubes are melted — divided into 0.1 cc — is placed in the thermostat and filled with a cc 3% gum arabic solution + (20-a) cc 3% gelatine solution. After the mixtures have reached the desired temperature 5 cc of a 4% acetic acid solution is added to each tube and after the tubes have been closed with a rubber stop the contents are well mixed. After 1 hour in the thermostat the mixtures are shaken again and then left till the next morning. Now the volume of the coacervate layers is noted and samples (ca. 10 cc) of the equilibrium liquid are taken in order to determine the dryweight. They are placed in cylindrical nickle dishes (diameter 70 mm, height 18 mm) weighed and then dried, one hour on boiling water bath, then one hour in the drying oven at 105°. In the later experiments (see §§ 6 and 7) samples were also taken of the coacervate layers, in order to determine the percentage of water of the coacervate.

### 3. *Optimal mixing proportion and temperature.*

In Table I are found the results of two, identical series at 40°. The only difference is that the second series was begun a few days after the first. They make the impression of being reproducible.

The dryweight determinations were begun in duplicate only in a few mixing proportions. In the experimental series of Table II, in which we started from new stock solutions of

<sup>1)</sup> H. G. BUNGENBERG DE JONG and W. A. L. DEKKER, *Kolloid Beihefte* **43**, 143 (1935); **43**, 213 (1936).



gelatine and gum arabic, the dryweight determinations were always done in duplicate. From the data of Tables I and II we can answer the question whether the temperature affects the mixing proportion of optimal coacervation.

The mixing proportion is indicated on the one hand by the maximum of the coacervation-volume curve, on the other hand by the minimal dryweight within each mixing series.

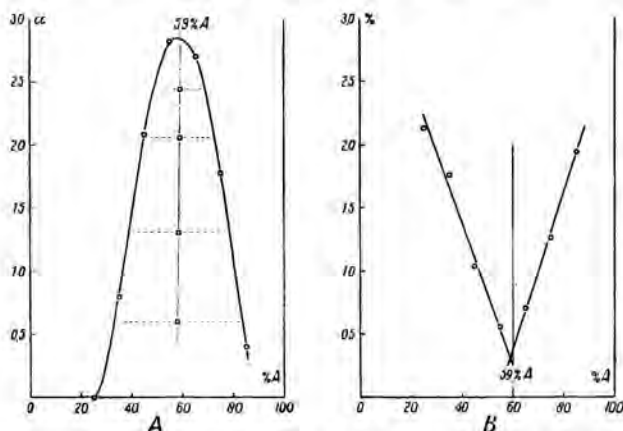


Fig. 1. Coacervate volume (A) and dryweight of the equilibrium liquid (B) as functions of the mixing proportions (in % arabinite), according to the data of the experimental series at 50° of Table II. As maximum of the curve in fig. 1 A we assume the point of dissection of the bisecting line and the curve. In fig. 1 B straight lines are drawn through the experimental points, and the mixing proportion near the point of dissection is determined. This mixing proportion is assumed to be the mixing proportion at which the dryweight of the equilibrium liquid reaches a minimum.

TABLE I.

	cc A	cc G	% A	Coac. vol. in cc	% dryweight equilibrium liquid
40° Series I	5	15	25	0.02	2.11 } 2.12 } 2.11
	7	13	35	0.69	1.76
	9	11	45	2.10	0.99
	11	9	55	2.85	0.52 } 0.48 } 0.50
	13	7	65	2.74	0.62 } 0.61 } 0.62
	15	5	75	1.80	1.20
	17	3	85	0.33	
40° Series II	5	15	25	0.01	1.79 } 1.82 } 1.81
	7	13	35	0.71	1.00
	9	11	45	2.13	0.46
	11	9	55	2.85	0.59
	13	7	65	2.83	1.25
	15	5	75	1.80	1.25
	17	3	85	0.38	1.90

The former maximum cannot easily be determined directly, as the maximum sections of the curves are rather level. We are assisted by the construction of a bisecting line (see fig. 1 A), in which we use the steep curve branches. It is found that in constructing the coacervate volume curves from the data of Table I and II the bisecting lines intersect the maximum sections at 58—59% gum arabic, though the temperatures are different (31°, 40° and 50°).

With greater certainty the optimal mixing proportion is found from the dryweights of the equilibrium liquid (fig. 1B), because the two branches of the curves over a longer section are practically straight lines. Here again, for all four curves the point of dissection of those straight lines is near 59% gum arabic. *So we conclude that the optimal mixing proportion is independent of the temperature.*

TABLE II.

	cc A	cc G	% A	Coac. vol. in cc	% dryweight equilibrium liquid
31°	0	20	0		2.05 } 2.10 } 2.08
	5	15	25		2.09 } 2.09 } 2.09
	7	13	35	0.50	1.61 } 1.59 } 1.60
	9	11	45	2.08	0.92 } 0.91 } 0.92
	11	9	55	2.64	0.45 } 0.47 } 0.46
	13	7	65	2.66	0.59 } 0.58 } 0.59
	15	5	75	1.75	1.18 } 1.22 } 1.20
	17	3	85	0.48	1.84 } 1.83 } 1.84
	20	0	100		2.05 } 2.07 } 2.06
	50°	5	15	25	0.01
7		13	35	0.80	1.78 } 1.74 } 1.76
9		11	45	2.09	1.04 } 1.03 } 1.04
11		9	55	2.82	0.56 } 0.55 } 0.56
13		7	65	2.70	0.70 } 0.71 } 0.71
15		5	75	1.78	1.28 } 1.26 } 1.27
17		3	85	0.40	1.94 } 1.96 } 1.95

#### 4. Coacervate volume and temperature.

From the comparison of the results of Table II it would follow that with the same mixing proportion the coacervate volume is a little greater at 50° than at 31°. Although these series of experiments were begun with the same stock solutions, they are not strictly

comparable, because they were not begun simultaneously. Therefore from now on we mounted 3 thermostats and experimental series were begun simultaneously with the same stock solutions, at two or three temperatures. We restrict ourselves to the section of mixing proportions in which the coacervate volume is great. From table III it follows that the coacervate volume at 50° is a little smaller than at 30°, whereas there is practically no difference averagely between the volumes at 30° and at 40°.

TABLE III.

cc A	cc G	% A	Coacervate volume in cc			% dryweight in equil. liquid		
			30°	40°	50°	30°	40°	50°
9	11	45	2.21	2.23	2.17	0.98	0.99	1.10
9	11	45	2.17	2.21	2.16	1.03	1.08	1.08
11	9	55	2.90	2.94	2.89	0.54	0.53	0.58
11	9	55	2.96	2.90	2.82	0.55	0.52	0.62
13	7	65	2.82	2.86	2.72	0.65	0.65	0.73
13	7	65	2.85	2.82	2.72	0.69	0.64	0.69

In a second, similar series (Table IV) we also see hardly any difference between 31.25° and 40°.

TABLE IV.

cc A	cc G	% A	Coacervate volume in cc		% dryweight equil. liquid	
			31.25°	40°	31.25°	40°
11	9	55	2.89	2.91	0.49	0.53
11	9	55	2.87	2.91	—	0.53
12	8	60	2.94	2.95	0.47	0.53
12	8	60	2.93	2.92	0.49	0.53
12	8	60	2.92	2.95	0.47	0.50
12	8	60	2.96	2.96	0.47	0.50
13	7	65	2.71	2.79	0.64	0.65
13	7	65	2.74	2.75	0.64	0.66

Also in the subsequent experiments we see (tables V and VI, further in this paper) that the effect sought is of the same order as the experimental errors, so that we may say that at least between 30° to 40° the coacervate volume is very little affected by the temperature.

In the presence, however, of KCl (5.10 and 20 m Aeq. p. L), Table VI clearly shows that the coacervate volume decreases at a rise in temperature. But this is likewise always the case in the temperature section of 40°—50°, as is seen from Tables III, V and VI.

The vague results in the section of 30°—40° are probably connected with the fact that at 30° we are very near the gelation temperature. The following experiment makes this clear. After being left for a night a clear coacervate was cooled very slowly (the flame under the thermostat being turned out). At 28.5° the coacervate layer begins to get cloudy. At further cooling the result is a turbid gelatinized complexcoacervate layer. From 16° onward the thermostat was slowly heated and then the cloudiness only disappeared entirely at 31.6°. So from the point of view of onsetting internal changes in the coacervate we should avoid temperatures between 28.5° and 31.6°, when drawing conclusions concerning the effect of the temperature on ideal liquid coacervates and possibly we are too near this temperature section also at 33°.

Hence we arrive at the conclusion that the *coacervate volume in a temperature section, sufficiently removed from the gelation temperature slightly decreases at an increase of temperature.*

Microscopic examination of the gelatinized complexcoacervates shows that the cloudiness is caused by the presence of vacuoles.

On rapid cooling many small vacuoles are formed, whereas in slow cooling the gelatinized coacervate contains a smaller number of larger vacuoles. Apparently the vacuoles are formed during the semi-liquid condition of the coacervate, so that the confluence of the vacuoles is still possible.

##### 5. *Solubility of the coacervate and temperature.*

When we take the averages of the dryweights of the equilibrium liquid of the two series in Table I, comparing them with those in Table II, we note an evident increase in the solubility of the coacervate with the temperature.

Survey belonging to Tables I and II.

% A	Dryweight equilibrium liquid in %.		
	31°	40°	50°
35	1.60	1.79	1.76
45	0.92	1.00	1.04
55	0.46	0.48	0.56
65	0.59	0.61	0.71
75	1.20	1.23	1.27
85	1.84	1.90	1.95

The data of Table III do, indeed, show the slight increase of the dryweights between 40° and 50°, but the dryweights of 30° to 40° do not allow of any conclusion. Table IV shows an evident increase in the solubility with the temperature rise, with regard to section 31.3°—40°. The same is seen in the results of Tables V and VI, further in this paper, in which we compare the complex coacervation at 33.2°—40° and at 50°. The deviating result of Table III we are inclined to attribute to the fact that the lowest temperature used here (30°) is too near the gelatinization temperature.

So we arrive at the conclusion that *the solubility of the coacervate in a temperature section sufficiently removed from the gelatinization temperature slightly increases with a rise in the temperature.*

##### 6. *Percentage of water of the coacervate and temperature.*

In the following series of experiments the mixing proportions of 55 and 60% gum arabic were begun in quadruplicate, while the dryweights not only of the equilibrium liquids, but also of the coacervate layers were determined. The samples of the coacervates were taken with small pipettes, which had been closed by melting the lower ends. The fine points were scratched with a glass file. First part of the equilibrium liquid was sucked off for the analysis of this liquid, after which the pipettes were placed in the sedimentation tubes for one hour, then the point was broken off by slight pressure. The coacervate then flowed in very slowly under hydrostatic pressure, or in a few cases was helped to flow by sucking with slight lower pressure. The latter should be done with great care, as otherwise there is a danger of the equilibrium liquid also entering the pipette in consequence of vortex formation.

The samples of the coacervate layer were pipetted directly into the nickle drying boxes and weighed at once. After that they were distributed equally over the bottom with hot distilled water, and then dried.

TABLE V.

cc A	cc G	% A	Coacervate vol. in cc			% dryweight equil. liquid			% dryweight coacervate		
			33.2°	40°	50°	33.2°	40°	50°	33.2°	40°	50°
11	9	55	2.79	2.79	2.70	0.49	0.53	0.58	—	—	—
11	9	55	2.82	2.82	2.73	0.49	0.52	0.63	12.88	13.02	13.00
11	9	55	2.80	2.79	2.75	0.49	0.51	0.64	13.19	13.02	13.12
11	9	55	2.82	2.83	2.73	0.50	0.53	0.57	12.83	13.16	13.05
12	8	60	2.87	2.90	2.78	0.53	0.55	0.66	12.83	13.00	12.96
12	8	60	2.87	2.81	2.75	0.53	0.55	0.68	12.84	13.06	—
12	8	60	2.89	2.87	2.79	0.52	0.55	0.67	12.88	12.95	13.00
12	8	60	2.85	2.89	2.77	0.54	0.57	0.68	12.92	12.97	13.05

The results of this experimental series are found in Table V. Below we give a survey stating the averages of the quadruplicate determinations.

Survey belonging to Table V.

% A	Coacervate volume in cc			% Dryweight equil. liquid			% Dryweight coacervate		
	33.2°	40°	50°	33.2°	40°	50°	33.2°	40°	50°
55	2.81	2.81	2.73	0.49	0.52	0.61	12.86 <sup>1)</sup>	13.07	13.06
60	2.87	2.86	2.77	0.53	0.55	0.67	12.87	12.99	13.00

The influence of the temperature on the coacervate volume and on the solubility of the coacervate has been discussed in previous sections, so that we restrict ourselves to the dryweight of the coacervate. From the list is seen a slight increase of the dryweight at a temperature increase in the section of 33.2°—50°. The same is seen in Table VI in the absence of KCl.

But there the value is at 40° (13.20%), between those at 33.2° (12.98%) and at 50° (13.39%), whereas in Table V the value of 40° is equal to that of 50°. Also in the presence of KCl (5.10 and resp. 20 m aeq. p. L) we always see (in Table VI) that the dryweight of the coacervate is greater at 50° than at 33.2°, while at 40° the value is either a little more or a little less than at 33.2°. We think we must attribute the varying results with regard to the temperature section of 33.2°—40° to experimental errors. As is also seen from the tables, the separate values within each quadruplicate sometimes fluctuate over a greater amount than the difference of the averages of 33.2° and 40°.

So we arrive at the conclusion that *the percentage of water of the coacervate depends but little on the temperature, decreasing very slightly at an increase of temperature (the dryweight slightly increasing).*

7. *The effect of the temperature on the complexcoacervation in the presence of a neutral salt (KCl).*

Neutral salts have a neutralizing effect on complexcoacervation. They increase the solubility of the coacervate and make it richer in water. We investigated whether the presence of KCl affects the dependence on temperature of the coacervate volume, the solubility of the coacervate and its percentage of water, discussed in the foregoing pages. This experiment was done in one mixing proportion (60% gum arabic), of the two colloids. The mixtures were made as follows: 25 cc solution of gum arabic and gelatine

<sup>1)</sup> The dubious value of 13.19 was not used in determining the average.

+ 2 cc a-normal KCl + 5 cc 4% acetic acid. The KCl solution was selected so that the final concentration in the mixtures was 0.5, 10.20 and 40 m aeq. p. L.

At 40 m. aeq. p. L. the coacervation was already neutralized. The results are found in Table VI. The averages are given in the following survey.

This survey shows the typical neutralizing effect of a neutral salt on complex-coacervation: the solubility of the coacervate increases (% dryweight of the equilibrium liquid increases) and the percentage of water of the coacervate increases (% dryweight of the coacervate decreases).

*The presence of KCl, however, does not cause any change in the influence of the temperature on complexcoacervation. When the temperature is raised the coacervate*

TABLE VI.

KCl concentration m. aeq. p. L.	Coacervate vol. in cc			% Dryweight equil. liquid			% Dryweight coacervate		
	33.2°	40°	50°	33.2°	40°	50°	33.2°	40°	50°
0	3.67	3.67 3.70	3.54	0.48	0.50 0.50	0.53	12.98	13.15 13.24	13.39
5	3.75	3.75	3.68	0.65	0.71	0.74	12.01	12.02	12.22
	3.69	3.76	3.60	0.65	0.68	0.72		12.02	
	3.75	3.77	3.60	0.65	0.69	0.73	11.98	12.03	12.13
10	3.75	3.68	3.56	0.90	0.98	0.99	10.90	10.89	11.10
	3.69	3.68	3.59	0.91	0.98	0.99	11.05	10.93	11.15
	3.72	3.68	3.54	0.91	0.94	1.01	10.98	10.89	11.22
		3.68	3.52		0.95	0.99			11.14
20	2.79	2.58	2.40	1.54	1.63	1.72	8.90	8.77	8.99
	2.82	2.57	2.45	1.53	1.62	1.73	8.85	8.95	9.12
	2.83	2.58	2.40	1.53	1.65	1.69	8.99	8.80	9.15
	2.87		2.40	1.51		1.73	9.06		9.04

volume slightly decreases (see § 4), the solubility of the coacervate slightly increases (see § 5) and the percentage of water of the coacervate slightly decreases (see § 6).

Survey belonging to Table VI.

KCl m. aeq. p. L.	Coacervate vol. in cc			% Dryweight equil. liquid			% Dryweight coacervate		
	33.2°	40°	50°	33.2°	40°	50°	33.2°	40°	50°
0	3.67	3.68	3.54	0.48	0.50	0.53	12.98	13.20	13.39
5	3.72	3.76	3.63	0.65	0.69	0.73	12.00	12.02	12.17
10	3.72	3.68	3.55	0.91	0.96	0.99	10.98	10.90	11.15
20	2.83	2.58	2.41	1.53	1.63	1.72	8.95	8.84	9.05

### 8. Summary and discussion.

In the foregoing pages we arrived at the conclusion that when the temperature is raised:

- a. the optimal mixing proportion remains constant,
- b. the coacervate volume decreases slightly,
- c. the solubility of the coacervate slightly increases,
- d. the percentage of water in the coacervate slightly decreases.



As for these results, *a.* need not surprise us, as the optimal mixing proportion is determined by the (effective) equivalent weight of the two colloids, and this is not likely to be greatly dependent on the temperature.

Concerning *b.* we remark that the influence of the temperature on the coacervate volume will be the result of the influence of the temperature on the solubility (*c.*) and on the percentage of water of the coacervate (*d.*). The result mentioned under *b.* follows from the increasing solubility and the decreasing percentage of water of the coacervate.

*The most remarkable result is the decrease of the percentage of water of the coacervate d., while at the same time its solubility increases (c).*

We have before arrived at the conclusion that the internal condition of a complex coacervate is determined by two opposing factors: 1. an electrostatic attraction of colloids of opposite charge, 2. a repulsion factor connected with the hydration of the two colloids. The dependence on the temperature of the percentage of water of the coacervate we are therefore inclined to attribute to a change in the repulsion factor mentioned under 2. For the hydration will decrease when the temperature is raised and with it the repulsion factor will grow less.

Besides there is the general influence of the temperature, on the ground of which we may expect the two coexisting liquids (coacervate and equilibrium liquid) to mix better when the temperature is increased, i.e. the equilibrium liquid will contain more colloids, the coacervate more water.

The temperature effect mentioned first is entirely absent in the equilibrium liquid, so that the solubility of the coacervate will increase at a rise in the temperature (*c.*). On the other hand this effect does play a part in the coacervate, and in view of the decreasing percentage of water on a rise of temperature (*d.*) we must assume that here it decreases the percentage of water to a greater extent, than the water percentage would increase in consequence of the general temperature effect, mentioned last.

The results are also of interest on account of another problem. We saw in § 4 that on gelation vacuolization occurs in the semi-liquid coacervate. This means that the coacervate loses water. Now two things may be supposed: *a)* the vacuolization is independent of the gelation, but is the continuation of a temperature effect on the percentage of water of the coacervate, which exists already at much higher temperatures, *b)* the vacuolization is directly connected with gelation. The results show that *a)* is not correct. For in the temperature section between 50°—40° the coacervate does not become poorer, but richer in water on cooling. In favour of *b)* is also the fact that the forming of vacuoles is a process which may also occur isothermally at a suitable temperature, lower than the gelation temperature.

*Leiden, Laboratory for Medical Chemistry.*

**Botany.** — *Composition of Gas in the Intercellular Spaces of Potatoes.* By A. GORTER and W. NADORT. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

*Introduction.*

Studying the physiological phenomena of potatoes, various conclusions have from time to time been drawn from the composition of the gases in the intercellular spaces, the internal atmosphere. Amongst others, THORNTON (8), in a recent publication on factors influencing the sprouting of potato-buds, makes use of the composition of the gas in the intercellular spaces to prove that sprouting is promoted by lack of oxygen.

As early as 1890 extensive investigations into the internal atmosphere were made by DEVAUX (3), but these have evidently been forgotten meanwhile, for MAGNESS (4) writes in 1920: "We have no critical studies upon the internal gases of plant tissues.....". He describes a method to determine the composition of the inner atmosphere and reports some analyses from which he finds a composition quite different from that found by DEVAUX. In this article we shall prove that MAGNESS' method does not give good results, and that to determine the composition of the gas by this method, as, e.g. DAVIS (2) and SMITH (7) have done, easily leads to wrong conclusions. We shall first discuss both methods briefly.

*Method of DEVAUX.*

During microscopical studies upon potatoes, this investigator pointed out that the very small intercellular spaces all communicate with each other, while, too, with a slight under-pressure air can easily be sucked through the potato. From this he concluded that the tuber must be very porous, and that an equilibrium exists between the gas and the fluid in the intercellular spaces. This equilibrium will be restored at any time it is disturbed, even if this may take rather a long while.

In order to determine the composition of the internal atmosphere, DEVAUX cut a cylindrical hole into a potato and inserted a glass tube in it, which he tightened up with wax. He arranged the experiment in such a manner that out of this tube a little sample

TABLE 1.  
Composition of the internal atmosphere of a winter-potato.  
stored at room-temperature.

Date	% CO <sub>2</sub>	% O <sub>2</sub>	% N <sub>2</sub>
February 17	4.5	14.9	80.6
February 19	5.2	14.5	80.3
February 24	4.2	15.5	80.3
February 28	5.0	14.7	80.3
March 18	3.7	16.2	80.1
March 21	3.3	16.5	80.2
May 28	5.4	14.5	80.1
June 7	3.8	17.4	78.8
June 10	4.1	16.9	79.0
average	4.3	15.7	80.0

containing 0.1—0.2 cm<sup>3</sup> could be taken. It appeared, after one or two days, that equilibrium had been established between the gas in the intercellular spaces and the large hollow space formed by the hole and the glass tube.

He now analysed the gas in a large number of potatoes. Thus, he was able to follow during some time the alterations in the composition of the internal atmosphere of one and the same potato. We here give an example in figures derived from DEVAUX (Table 1).

The following conclusions can be drawn from this table: the internal atmosphere of a normal potato contains 3—5 % CO<sub>2</sub> and 14.5—17.5 % O<sub>2</sub>. This proportion is maintained during storage, for a potato stored till October showed an internal atmosphere of the same composition, though it had heavily sprouted: i.e. CO<sub>2</sub>: 6.6 %, O<sub>2</sub>: 17.5 % and N<sub>2</sub>: 75.9 %.

This method of analysing we did not meet with at all in the newer publications, though PFEFFER (6) and CZAPEK (1) do report the results.

#### *Method of MAGNESS.*

MAGNESS cuts, by means of a cork-borer, a cylindrical plug out of the potato. He puts it in an apparatus filled with mercury, which is connected with an open mercury-vessel by a tube at the lower edge. By lowering the mercury-vessel, a vacuum is formed in the apparatus. The vacuum causes the gas to escape from the potato. After the mercury-vessel is leveled, the gas can be transferred in a gas-analysing apparatus by means of a cock at the top of the apparatus.

By this method MAGNESS determined the composition of the internal atmosphere of a potato stored at 22° like this:

CO<sub>2</sub>: 34.4 %    O<sub>2</sub>: 5.7 %    N<sub>2</sub>: 59.9 %.

It is obvious at once that much more CO<sub>2</sub> and less N<sub>2</sub> are found than had been determined by DEVAUX. Other investigators working according to this method found a similar composition, e.g. SMITH:

stored dry: CO<sub>2</sub>: 20.3 %    O<sub>2</sub>: 13.0 %    N<sub>2</sub>: 66.7 %  
 stored moist: CO<sub>2</sub>: 30.6 %    O<sub>2</sub>: 7.0 %    N<sub>2</sub>: 62.4 %.

We could prove, in the first place, that the quantity of gas extracted from the potato in this manner is larger than the volume actually present in the intercellular spaces. In the second place, we could prove that the composition of the gas obtained depends entirely upon the method of extraction.

#### *Determination of the volume of gas in the intercellular spaces.*

Plugs of tissue, from which the volume had to be determined, were cut out of the potato with a cork-borer. The sample plug was pushed out into a glass vessel filled with water. The vessel was fitted at the lower edge with a glass stopper; at the top it ended in a capillary tube (see fig. 1). The glass vessel was shut under water in a brass cylinder in such a manner that the capillary tube above the surface of the water was visible through a looking-glass in the cylinder-wall. The whole apparatus

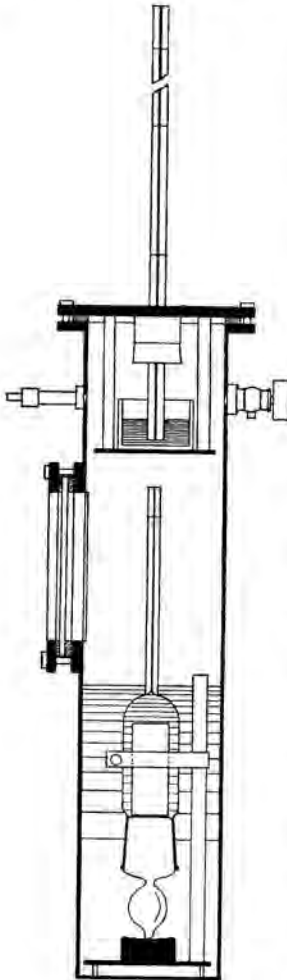


Fig. 1.

was placed in a thermostate. When equilibrium between the temperature in the thermostate

and in the cylinder was established, the cylinder was shut by a cover provided with a manometer. The meniscus was read through a horizontal microscope, and thereafter air was pumped into the cylinder through a valve. The water in the potato, the water in the glass vessel and the air in the intercellular spaces were compressed. At several pressure the meniscus was read, so that the change in the volume of gas in the intercellular spaces could be determined at different pressures, the diameter of the capillary tube being known. A slight correction is made in view of the compression of the water, as known from an experiment without potato. The volume of gas in the intercellular spaces can be calculated, with the aid of the law of BOYLE from the formula:  $V \times 76 = (V - \Delta V) \times P$ . Table 2 gives an example of such a determination.

TABLE 2.

Determination of the volume of gas in the intercellular spaces of a cylindrical plug of potato weighing 15.5 g (fresh weight). Temp. 20°. Bar. pressure 76 cm. Diameter of capillary tube 1.75 mm<sup>2</sup>.

Pressure P cm	Meniscus level mm	Correction mm	Removal meniscus mm	Change of volume $\Delta V$ mm <sup>3</sup>	Volume of interc. gas V mm <sup>3</sup>
76 + 0	0	—	—	—	—
+ 46.5	—25.9	0.8	—25.1	43.9	116
+ 72.8	—35.0	1.2	—33.8	59.2	121
+ 81.1	—37.1	1.4	—35.7	62.5	121
average.					119

This table shows that one and the same volume of gas is found at different pressures. It is proved to be gas, since it behaves according to the law of BOYLE. This method, therefore, is exact enough to determine the volume of gas in the intercellular spaces. It is remarkable that the former volume is not regained by lowering the pressure again. Probably the reason is that the compressed gas in the extremely small intercellular spaces is not able to overcome the elasticity of the rather solid cell-walls. This phenomenon cannot be caused by the dissolution of the gas in the intercellular fluid, as this gas should be already dissolved during compressing, and the law of BOYLE would then not hold good.

*Determination of the volume of gas by the method of extraction.*

The volume of gas in several potatoes was determined by extracting in vacuo according to the method of MAGNESS. The volume thus obtained was compared with the volume found by compression. After the extraction we again determined whether any gas remained.

Table 3 shows the results of these experiments. It appears that always more gas is extracted than there is present in the intercellular spaces. Part of the gas extracted apparently comes from the fluid in the intercellular spaces or even in the cells.

*Analysis of the gas extracted.*

This analysis was performed with the manometric apparatus of VAN SLYKE, in such a manner that the method was somewhat altered, using quantities of 1 cm<sup>3</sup> or less. To that purpose, instead of a 1 n sodium hydroxide solution, 0.1 n was used to absorb the CO<sub>2</sub>, and a volume of 2 cm<sup>3</sup> was read above the alkali-meniscus instead of a volume of 50 cm<sup>3</sup> above the mercury-meniscus. Some analyses of laboratory-air proved the method to be exact enough. More details are found in PETERS and VAN SLYKE (5). Corrections of temperature were avoided by working at the time at the same temperature.

TABLE 3.

Comparison of the volume of intercellular gas determined by compression with the volume of gas extracted in vacuo. Volumes of gas in mm<sup>3</sup> per 10 g fresh weight. Temp. 20°.

Number of determination	Vol. of gas determined by compression		Extracted in vacuo		% of extracted gas gained from the gas phase
	Before extr.	After extr.	from gasphase	in total	
G 3	105	—	—	117	—
6b	—	22.5	—	212	—
6c	—	21	—	211	—
7a	102	39	63	299	21
7b	94	26	68	113	60
8a	77	25	52	156	33
8b	98	30	68	114	60
9a	98	3	95	100	95
9b	84	15	69	91	76

It appeared (table 4) that the gas extracted in vacuo contained too much CO<sub>2</sub> and rather little O<sub>2</sub>; we obtained values in accordance with those of MAGNESS and SMITH. When the gas of the same potato was extracted with an under-pressure as slight as possible, the composition appeared to differ greatly. The lowest pressure at which gas escaped from the plugs of potato reached 50 cm under-pressure. But then, very little gas escaped, so that some more plugs had to be extracted in succession and the total amount analysed. In table 4 some analyses are given. We see from these that at 50 cm under-pressure quite another composition is found than at extraction in vacuo.

TABLE 4.

Analysis of the gas in the intercellular spaces of cylindrical plugs of potatoes. Extracted at slight and strong under-pressure. In every experiment plugs of the same potato were used. Volume in mm<sup>3</sup> at 20°, calculated per 10 g fresh weight.

Number of experiment	Extraction in vacuo				Extraction at 50 cm under-pressure			
	% CO <sub>2</sub>	% O <sub>2</sub>	% N <sub>2</sub>	Vol.	% CO <sub>2</sub>	% O <sub>2</sub>	% N <sub>2</sub>	Vol.
W1	24.6	20.0	55.4	—	1.3	22.9	75.8	—
2	15.9	16.1	68.0	—	4.3	20.2	75.5	—
3	12.8	19.6	67.6	233	4.7	18.3	77.0	109
4	36.6	8.4	55.0	262	5.3	18.6	76.1	130
5	16.5	16.2	67.3	228	3.9	16.4	79.7	110

We also tried to obtain the gas from the internal atmosphere without extracting the dissolved gas, by infiltrating the plug with an organic liquid. With toluene we succeeded at an under-pressure of 25 cm in the extraction-apparatus. The gas obtained, however, could not be analysed, as the toluene vapours disturbed the determination. But at this slight under-pressure, too, more gas was extracted than was present in the gasphase of the intercellular spaces, as is shown by the following figures:

volume of gas before extraction: 36.5 mm<sup>3</sup> per 10 g fresh weight  
 " " " after " : 2.8 mm<sup>3</sup> " 10 g " "  
 volume of gas extracted : 55.5 mm<sup>3</sup> " 10 g " "

When plugs of potato were extracted at 40 cm under-pressure in the extraction-

apparatus, in water freed from air, the gas obtained could be analysed. This method has this advantage, that the same plug of potato can be extracted, first at 40 cm under-pressure and then in vacuo. Table 5 gives the analyses of the gas thus obtained. It is obvious that the composition of the gas successively extracted is quite different.

TABLE 5.

Composition of the gas in the intercellular spaces of plugs of potato, obtained by extraction under water at 40 cm under-pressure and in vacuo. Temp. 20°. Volume of gas calculated in mm<sup>3</sup> per 10 g fresh weight.

Number of determination	Extracted under water				Extracted in vacuo			
	% CO <sub>2</sub>	% O <sub>2</sub>	% N <sub>2</sub>	Vol.	% CO <sub>2</sub>	% O <sub>2</sub>	% N <sub>2</sub>	Vol.
G11	0.4	17.4	82.2	25	31.1	6.3	62.6	130
12	0.3	12.1	87.6	61	18.0	4.3	77.7	137

It may be admitted that the gas, which escaped at a slight under-pressure, consists for a large part of the real intercellular gas, and that, on the other hand, the gas thereafter obtained in vacuo consists of dissolved gas. The much higher percentage of CO<sub>2</sub> can be explained by the greater dissolubility of the CO<sub>2</sub> than of the other gases. We will not say, however, that the gas obtained by extraction at a slight under-pressure under water, or by extraction at a somewhat greater under-pressure under mercury, shows the right composition.

The composition of the gas obtained in vacuo can not be deduced from the sum of the gas in the gas-phase and the gas dissolved in the intercellular liquid, as the short time of extraction does not give sufficient opportunity to the gas to establish equilibrium with the large gas-room on the outside of the potato, supposing that equilibrium can be still established in a damaged potato. The CO<sub>2</sub> may also be bound in the cells themselves but we know nothing about this with any certainty.

In the old method of DEVAUX the potato is damaged only slightly, and for days the intercellular gas has an opportunity to establish equilibrium with the gas space from which a sample can be taken. This method, therefore, gives better results than the method of extraction. The results, too, are more trustworthy in our opinion. DEVAUX also pointed out that the composition of the gas of several plants was the same during the same period of vegetation. It is obvious that he found about the same value as we found when extracting at a slight under-pressure (table 4). It is remarkable, too, that DEVAUX observed that the composition of the gas during storage of the potatoes did not alter until sprouting, although SMITH (who worked with the extraction-method) found that the percentage of CO<sub>2</sub> during storage did increase, and was, indeed always more than DEVAUX observed. Probably the alterations observed are caused to a large extent by the respiration of the potato, so that an increasing quantity of CO<sub>2</sub> is extracted from the intercellular liquid. The alterations in the composition of the extracted gas mean only very little, and any conclusion would be premature.

#### Summary.

The volume of gas in the intercellular spaces of potatoes was determined, and experiments showed that the quantity of gas that can be extracted by the method of MAGNESS (4) is always more than the real volume present. Moreover it appeared that, with different methods of extracting, quite different results were obtained, probably because gases from the intercellular liquid were also extracted. The method of extracting, therefore, does not give good results, and it is risky to use this method to determine the composition of the intercellular gas. It was shown that the old method of DEVAUX (3) is preferable for the determination of this gas.



We are much indebted to Dr A. W. H. VAN HERK for his valuable help and criticism during the course of this work.

## LITERATURE.

1. F. CZAPEK, *Biochemie der Pflanze*, 2. Aufl. 3, 23 (1921).
2. W. B. DAVIS, *Bot. Gaz.* 81, 323 (1926).
3. H. DEVAUX, *Ann. Sciences natur.* 7. Sér. 14, 397 (1891).  
———, *Bull. Soc. bot. France* 37, 272 (1890).
4. J. R. MAGNESS, *Bot. Gaz.* 70, 308 (1920).
5. J. P. PETERS and D. D. VAN SLYKE, *Quant. Clinical Chem.* 2, 106 (1932).
6. W. PFEFFER, *Pflanzenphysiologie*, 1, 181 (1897).
7. O. SMITH, *Hilgardia*, 4, 274 (1929).
8. N. C. THORNTON, *Contrib. Boyce Thompson Inst.* 10, 339 (1939).

*Amsterdam, Laboratory of Plant  
Physiology of the University.*

---

**Botany.** — *Some technical remarks about the colchicine treatment of Gramineae.* By C. VAN DILLEWIJN. (Communicated by Prof. A. H. BLAAUW.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

In surveying the results hitherto obtained with colchicine treatment in various plant-families one is struck by the fact that the share of the Gramineae is comparatively small. This is all the more striking, because many of our most important economic plants belong to this family. It may therefore be safely assumed that many attempts have been made to induce polyploidy in our cereals by means of colchicine and that the relatively slight success is due to peculiarities that are typical for this family.

Which are these peculiarities? In order to answer this question it should be remembered that with Gramineae the general complaint is that seedtreatment with colchicine solution actually calls up typical polyploidy phenomena in the plumula, but that the roots generally die soon after the treatment. If the concentration of the colchicine solution and the duration of the treatment are chosen in such a way that the roots do not die, this treatment proves to be insufficient for causing lasting polyploidy in the vegetation-point of the plumula.

The question narrows down to this, therefore, that a certain colchicine treatment causes much stronger reactions in the radicula than in the plumula. And this may logically be brought into connection with peculiarities in the structure of germinating cereal grains: the almost naked radicula, affected directly by a colchicine solution, and the vegetation point of the plumula surrounded by young leaves and a coleoptile to which vegetation-point the solution can hardly or not at all penetrate.

On the basis of these considerations means were sought

- a. to weaken the effect of colchicine on the radicula;
- b. to strengthen the effect of colchicine on the vegetation-point of the plumula;
- c. to make a combination of a. and b.

The first experiments were made in 1940 with rice, viz. two Italian varieties, BERTONE and ALLORIO. If the seeds are allowed to germinate *under* water, first the plumula is developed and for a time the radicula does not appear. If at this stage the two coleoptiles and the young leaves in them are cut off closely above the vegetation-point and the seedlings thus treated are immersed in a colchicine solution, it may be expected that the radicula will be ill accessible to this solution, the vegetation-point of the plumula on the other hand will be easily accessible to it. In this way a large percentage of mutants can easily be produced (cp. Landbouwkundig Tijdschrift 53, 544—545, 1941), the prescription for this treatment being as follows:

Sterilize the kernels for  $\frac{1}{2}$  hour in a  $\frac{1}{2}$  % Germisan solution. Allow the treated kernels to germinate under water in a thermostat at 27° C during 6 days. Cut off the coleoptiles and young leaves until about 1 mm remains. Keep the thus treated seedlings for 48 hours in a thermostat at 31° C in a solution of 0.1 % colchicine.

Seedlings treated in this way give both with BERTONE and with ALLORIO mutants which clearly deviate from the normal type: the plants are shorter and more compact, the colour is darker, the leaves remain green for a longer time and the ripening takes place much later; tillering continues almost unlimited, the stomata are larger, the ligula is longer, the caryopsis is clearly larger with smaller length/breadth index; further the lemma is more coarsely hairy and has a strikingly long awn (in normal plants the awns being almost wholly absent). The mutants are fairly fertile, annually forming plenty of seed and this seed is in germinating power hardly inferior to the seed of normal plants. The accompanying plate shows a normal plant and a mutant of ALLORIO.

C. VAN DILLEWIJN: SOME TECHNICAL REMARKS ABOUT THE COLCHICINE  
TREATMENT OF GRAMINEAE.



Foto: C. J. VAN DE PEPPEL.

ALLORIO rice. Left normal plant, right mutant.

Owing to this favourable result similar experiments were made in 1941 with rye, wheat, barley and oats.

The suppressing of the root development, although possible, is a laborious and cumbersome process for these plants, so that it was abandoned. If grains are allowed to germinate in moist conditions until the coleoptile has a length of 2—6 mm and if then the coleoptile and the enclosed leaves are cut off to a length of 1—2 mm above the vegetation-point, such seedlings, after immersion in colchicine solutions of 0.01—0.3% for 16—43 hours, show the well-known polyploidy phenomena in the plumula and the roots die off.

In order to weaken the effect of the colchicine solution on the roots it was attempted to shorten the treatment of the roots without, however, noticeably decreasing the treatment of the plumula. For this purpose the coleoptile of seedlings with a coleoptile-length of about 4 mm was cut off at half its length, so that there remained part of a coleoptile of 2 mm with enclosed young leaves. The seedlings thus treated were immersed in bottles with colchicine solutions of 0, 0.01, 0.03, 0.1, 0.3 and 1% and the bottles were placed under the bellglass of an air-pump in which the air was alternately pumped away and admitted. After a quarter of an hour the seedlings were taken out of the bottles and the roots were dipped a few times in water in order to wash away the colchicine solution attached to them. Then the seedlings were planted in moist sand. At the moment of planting therefore the radicula had for about a quarter of an hour been in contact with the colchicine solution; the same holds good for the plumula, but besides, the coleoptile cylinder was at the moment of planting still filled with colchicine solution which continued for a considerable time to have its effect on the vegetation-point of the plumula. In this way the colchicine solution is made to affect the plumula much longer than the radicula. In order to remove the decomposing effect of the light on the colchicine it may be recommended to preserve the seedlings in a dark room during the first 48 hours after planting.

By way of example the result of such an experiment with rye (PETKUSER summerrye) is given here.

Two weeks after the treatment the situation was as follows:

- Series 1 %: Plumula clearly globularly swollen; good root development.
- Series 0.3 %: In part of the plants plumula globularly swollen, in the rest thick cylindrical; good root development.
- Series 0.1 %: Plumula predominantly egg-shaped; good root development.
- Series 0.03 %: In half of the plants the primary leaf has broken through the coleoptile and has a length of 2—5 cm, in the rest the plumula is thickened egg-shaped; good root development.
- Series 0.01 %: In all plants the primary leaf has broken through the coleoptile and has a length of 3—6 cm; good root development.
- Series 0 %: Like the preceding series.

It is remarkable that the well-known polyploidy phenomena could be caused in the plumula, without at the same time killing the roots.

Five days later (so 19 days after the treatment) the situation in this experiment was as follows:

- Series 1 %: Plumula dead; roots in the majority of cases soundly developed.
- Series 0.3 %: Like the preceding series.
- Series 0.1 %: Plumula mostly dead; roots in the majority of cases soundly developed.
- Series 0.03 %: Plumula mostly living; primary leaf 3—10 cm; sound root-system.
- Series 0.01 %: Plumula and root-system normally developed.
- Series 0 %: Like the preceding series.

In one respect this result is interesting. The concentrations of 1 and 0.3% appear to have been lethal for the plumula but not for the roots. At least in the (dissimilar)

treatment applied here. This is exactly the opposite of the result as a rule obtained hitherto in colchicine treatment of cereal seeds, viz. that the roots died off and the plumula remained living.

It is clear that between these two extremes there must be a range where both the plumula and the roots react favourably on a colchicine treatment.

Another possibility of exposing the vegetation-point of the plumula to the effect of colchicine, without damaging the roots, is the following.

The seeds are allowed to germinate in moist sand in a dark room, until the coleoptile has reached a length of 40—50 mm. Then an incision at one side is made in the coleoptile 5—10 mm below the top and then the top is broken off. The primary leaf now projects above the coleoptile cylinder and when it is carefully pulled it breaks off at the base, so that it can be removed as a whole.

The empty coleoptile cylinder can be filled with a colchicine solution by means of a glass capillary; if then the plants are placed in the dark for 48 hours, so that the decomposing effect of the light is eliminated, the vegetation-point is exposed to the effect of the colchicine solution and the root-system, which goes on growing normally in the soil, remains entirely intact.

Such a treatment was applied to rye (PETKUSER zomerrogge), barley (MANSHOLT's tweerijige zomergerst), oats (ADELAAR haver) and wheat (MANSHOLT's witte zomertarwe) and various concentrations of colchicine were compared. The best results were obtained with concentrations between 0.1 and 0.5 %, dependent on the varieties investigated.

Instead of decapitating the coleoptiles one may also wait till they are broken through by the primary leaf. In many cases the groove which then arises at the side of the top more easily admits a fine glass capillary than the opening that arises when the coleoptile is decapitated.

In many cases it may be recommended to place the plants a few times under the bell-glass of an airpump after the coleoptile cylinders have been filled with colchicine solution, in order to allow the solution to penetrate as far as the vegetation-point.

*Wageningen, October 1941.*

---

**Botany.** — *The growth of the petioles of waterplants in solutions of phytohormones.* (From the Botanical Institute, Government University, Leyden.) I. By G. L. FUNKE. (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

### I. Introduction.

My experiments on waterplants have shown that the addition of phytohormones to the water has, on the whole, little effect on the acceleration of growth and provokes abnormal phenomena as long as the temperature is below 20° (5,6). At higher temperatures, on the other hand, their influence appears to be enormous (7,8). Up to now I have mainly used a concentration of 3 mg/L, because this was one of the optimal concentrations found by VEGIS (16) in his experiments with heteroauxin on the premature sprouting of the turions of *Stratiotes aloides*; no other authors, so far as I know, have ever applied growth substances on waterplants. This year I studied the effect of lower concentrations of different kinds of phytohormones on the petioles of several species of *Nymphaeaceae* and other plants.

Part of the plant material was provided by the courtesy of the Zoological Gardens at The Hague and the Botanical Gardens of the University of Amsterdam. Experiments were made with seedlings and with specimens grown from tubers. Four basins were used in the Victoria hothouse of the Botanical Gardens at Leyden, especially built for the observation of growth in deeper waterlayers; two of them have a depth of 150 cm, two of 200 cm; during hot summerdays the temperature of the water varied between 26° and 31° at the surface, between 24° and 28° at the bottom; during the rainy period in August it sank gradually to 23°—20°. Other experiments were made in small aquariums of 20 cm deep; these were placed on radiators in a tropical hothouse; their temperature varied between 24° and 29°. Towards the end of the summer I could make some experiments in an aquarium of 40 cm deep which was electrically heated at a constant temperature of 28°. Only three kinds of hormones have been applied, viz. heteroauxin, beta-indolebutyric acid and alpha-naphtalene acetic acid, beta-indole propionic acid and beta-naphtalene acetic acid having been shown to have only a slight influence or no influence at all (6).

### II. *The influence of heteroauxin, beta-indole butyric acid and alpha-naphtalene acetic acid.*

Four equally developed young specimens of *Nymphaea amazonum*, grown from tubers, were planted in aquariums of 20 cm deep. Part of the leaves were full grown, which means that their blades floated on the surface and that their petioles elongated no more. A few days later the hormones were added in a dose of 0.5 mg/L; one aquarium served as control. The petioles were measured every day; they showed facts which have appeared invariably in all my former experiments. The older leaves reacted very feebly or not at all; the very young ones needed some days before responding to the addition of the hormones; the fresh adult ones, ranging between, did not react equally well, apparently owing to a difference of their respective ages, although their appearance was very much alike. Table 1, therefore, gives only a selection of the measurements which illustrate best the action of the hormones.

Part of the control leaves showed a renewal of growth towards the end of the experiment, but their elongation, nevertheless, stayed very much behind that in the solutions of growth substances. As the depth of the aquaria is only 20 cm, the result was that the greater part of the petioles floated on the surface in large coils which intertwined.



We see that alpha-naphtalene acetic acid is by far the most active hormone and heteroauxin the least. In naphtalene acetic acid the older leaves were strongly twisted

TABLE 1. Petioles of *Nymphaea amazonum* in solutions of different hormones (petioles in cm; depth of watercolumn 20 cm).

Hormones	May							June		
	24	26	27	28	29	30	31	2	3	4
Control	23	24	24	24	25	25	25	25	25	25
	13	20	22	23	25	30	35	42	45	46
Heteroauxin 0.5 mg/L	25	66	70	71	76	78	81	82	84	85
	18	47	50	54	56	60	63	66	67	67
$\beta$ -ind. butyr. acid 0.5 mg/L	24	63	77	84	89	92	93	100	101	101
	20	58	77	85	91	99	103	105	110	110
$\alpha$ -napht. acet. acid 0.5 mg/L	21	73	100	114	121	129	132	134	137	138
	8	29	41	59	85	108	117	136	142	149

and fragile and often broke in 2 or 3 pieces when they were measured; this seems to indicate that the concentration 0.5 mg/L is more or less noxious; we will see further on that the cell measurements confirm this view, cell elongation taking the upperhand of cell division.

This experiment has been repeated with identical results; it has been made also with the species *N. Boucheana* and *N. jubilé lilacina*. In every case we see that the action of alpha-naphtalene acetic acid is most efficient and also slightly noxious, witness the twisting of the petioles, that of heteroauxin least, while that of beta-indole butyric acid is intermediate. The definite lengths were always reached in 10 à 14 days.

Experiments with seedlings of *N. Obergaertner*, *N. Devoniensis*, *N. zanzibariensis rosea*, *N. jubilé lilacina* and *N. stellata* were made under the same conditions. As the plants were very young the concentration used was only 0.25 mg/L and even this dose proved to be rather too much; nevertheless, all these species clearly demonstrated the same succession in effect of the hormones in furthering growth. The same holds true for *Victoria regia* (first floating leaves) and petioles of *Ranunculus sceleratus*. Only one species showed about the same rate of growth in everyone of the three hormones, viz. *Limnanthemum nymphaeoides*, although also here it appeared that the higher concentrations of alpha-naphtalene acetic acid were more noxious than those of heteroauxin and beta-indole butyric acid. A detailed account of the experiments with the latter species has been given elsewhere (9). Full data of the measurements of all species investigated are at the disposal of everyone interested; as they only confirm those given in table 1, it is needless to give them here.

### III. The influence of different concentrations of alpha-naphtalene acetic acid.

As it has been stated, that of the three hormones used, alpha-naphtalene acetic acid has by far the strongest furthering effect on the growth of the petioles of many water-plants, this substance was consequently applied in various concentrations.

Four young specimens of *Nymphaea amazonum* were planted in the same way as described above and the following doses were added: 0,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  and 1 mg/L. Table 2 gives an idea of the rates of growth.

We see that the utmost lengths reached in the solutions  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  (table 1) and 1 mg/L do not vary noticeably; yet it may not be said that the plant is insensitive to the difference in concentrations. As has been said above, 0.5 mg/L is already slightly noxious which is indicated by the fragility and the twisting of the petioles and their very long cells; these phenomena all occurred in the 1 mg/L solution also and to a higher degree; the greater

part of the petioles did not reach the ultimate length because they broke long before the end of the experiment while being measured. Therefore I consider the concentration

TABLE 2. Petioles of *Nymphaea amazonum* in different concentrations of  $\alpha$ -naphthalene acetic acid (petioles in cm; depth of watercolumn 20 cm).

Concentrations	June										
	4	5	6	7	9	10	11	12	16	19	23
Control	16	20	22	24	25	27	28	28	40	44	44
	2	4	6	9	17	20	21	21	25	25	36
$\frac{1}{3}$ mg/L	22	34	53	71	86	97	100	103	104	109	109
	8	18	29	41	71	83	94	97	104	111	111
$\frac{1}{2}$ mg/L	20	36	60	79	112	113	120	127	134	134	134
	1	1	5	9	20	46	63	76	146	163	170
1 mg/L	19	32	58	94	116	130	133	134	136	139	139
	13	21	43	68	124	138	150	159	165	166	166

0.25 mg/L as the optimal one. Experiments with higher concentrations could not be made in a sufficient number for two reasons: (1) the plant material was restricted; this holds true for the specimens grown from tubers, (which will be the difficulty in every botanic garden); seedlings were available in a larger number but we will see further on that they are less suitable for this sort of experiment; (2) in the course of the summer the plants became too tall to be planted in small aquaria of 20 cm depth; the experiments had to be continued in the large basins in the Victoria hothouse, but as these have a capacity of 1500 L each, it will be easily understood that concentrations of more than 1 mg/L could hardly be applied.

The few experiments, however, which I could make, and those of former years, all confirm the impression that concentrations higher than 1 mg/L of all three growth-substances are still more noxious and check the longitudinal growth. One of these may be briefly described. *N. jubilé lilacina* is a species whose responses to phytohormones are in all respects very similar to those of *N. amazonum*; four young specimens were planted in aquariums of 20 cm deep and 3 mg/L of the three hormones were added. Growth in heteroauxin and beta-indole butyric acid was only a little more rapid than in the control, but in alpha-naphthalene acetic acid it was nearly equal to that. All sorts of abnormal phenomena, observed during my earlier investigations with this concentration, occurred again and most distinctly in alpha-naphthalene acetic acid: strong twisting of the petioles, stiff hyponastic curling of the blades which, moreover, remained very small. After 7 days the plants were washed and removed into pure water; they recovered within 48 hours, and most of them even within 24 h.; the twisting of the petioles, the curling-up of the leafblades disappeared and the blades grew out to normal dimensions; the petioles did not elongate any more (except of course the very young ones). Seven days later the hormones were again added, but this time only in a dose of 0.5 mg/L. The same leaves, which had reacted so unfavourably to the concentrations 3 mg/L, started growth anew (except in the control aquarium) and at the same pace as has been observed in all similar experiments. After 10 days they had reached lengths of 28 à 32 cm in control, 65 à 70 cm in heteroauxin, 70 à 80 cm in beta-indole butyric acid and 130 à 146 cm in alpha-naphthalene acetic acid. Therefore we may conclude that the hormones are distinctly noxious in a concentration of 3 mg/L and especially so alpha-naphthalene acetic acid which has obviously a lower optimal concentration than the other two. My experiments of 1938 (6) and 1939 (7) confirm this view (with the restriction of *N. Boucheana*, which form is apparently less sensitive to higher concentrations).

The experiments in the deep basins took place as follows: young plants, which had

developed in a shallow layer of water, were planted in pots and these were hung in the basins at a depth somewhat greater than the length of the petioles; next day the leafblades had reached the surface and the pots were lowered 20 à 30 cm; this was repeated every day and each time part of the leafblades (not the oldest ones) appeared at the surface well within 24 hours, so that at the end of 4 to 6 days the pots had reached the bottom of the basins and even then growth did not stop but continued for at least some decimeters. The leaves made a very healthy impression and nothing indicated that they were at the end of their achievement; (the pots having a height of 20 cm, the real waterlayers were resp. 130 and 180 cm). The very youngest leaves, which only begin to develop after the immersion is completed, do not, as a rule, reach the surface but if they do, with "visible exertion" and after a considerable time.

Adult petioles of  $\pm 30$  cm thus elongate up to  $\pm 200$  cm in about one week. This is in itself a remarkable performance which, however, I rather expected after what I have observed in former years. When nothing further is done to them the leaves do not elongate any more, their "excess growth" (by which I mean the part of the petiole above the surface) is restricted to 30 à 40 cm. When, however, 0.25 mg/L alpha-naphtalene acetic acid is added, growth starts anew and during 8 à 12 days elongation continues at a very rapid pace. The petioles reach lengths of more than 300 cm, which means that their greater parts are meandering on the surface, intertwining with each other. A few examples out of many others may give an impression of the rate of growth in the deep basins after the surface has been reached.

TABLE 3. Excess growth of petioles of *Nymphaea amazonum* in watercolumns of 150 and 200 cm (petioles in cm).

	No.	June											
		16	17	18	19	20	21	23	24	25	26	27	28
Control													
Basin 150 cm	1	142	143	150	156	156	157	160	162	163	163	164	164
Basin 200 cm	2	192	193	200	206	206	207	210	212	213	213	213	213
$\alpha$ -napht. ac. acid													
0.25 mg/L													
Basin 150 cm	1	140	167	175	195	207	217	231	236	236	236		
	2	132	150	185	203	230	238	257	262	270		270	
	3				100	160	218	270	280	288	290	296	296
	4					58	94	224	263	290	310	310	310
	5										108	160	202

Leaves No. 1 and 2 in the solution of naphtalene acetic acid are obviously rather old ones which are no more capable of extreme responses to the hormone, although an elongation from 30 to resp. 140 and 132 cm as a result of the deepening of the water-column, followed by the growth since June 16th as indicated in the table, remains remarkable all the same. Nos. 3, 4 and 5, however, were younger ones which were observed just at the moment of their utmost capacity of reaction. The strongest elongation in 24 h equals and even surpasses the record of growth rate which I observed in 1940 (7) in a 3 mg/L solution of beta-indole butyric acid with *N. Boucheana* and other species. No. 4 has grown 130 cm from Saturday 21/6 till Monday 23/6; I estimate that in 24 h the increment has been resp.  $\pm 70$  and  $\pm 60$  cm; we will see farther on that even this record can be beaten.

This experiment was repeated several times with *N. amazonum* and once with *N. jubilé lilacina*, *Boucheana* and *Lotus rosea*; it always yielded identical results. During August and September the weather was unfavorable and the temperature of the water sank to 23° and even to 20°; this retarded the growth, but all the same the ultimate lengths

reached were about 300 cm. Daily growth of 60 cm and more did not occur very often, but 40—50 cm per 24 h were quite usual.

I applied several concentrations of alpha-naphtalene acetic acid in these basins also, viz.  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$ ,  $\frac{1}{64}$  mg/L. There being only four deep basins, the experiment had to be made in two successive parts. The pots were not lowered deeper than 150 cm. Table 4 gives the data of the full grown petioles; those which could not reach the surface were neglected.

TABLE 4. Ultimate lengths of petioles of *Nymphaea amazonum* in a watercolumn of 150 cm and in different concentrations of  $\alpha$ -naphtalene acetic acid.

	Length of petioles in cm							Average	Average of excess growth
	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4	No. 5	No. 6	No. 7		
Control	202	183	178	152	152	140		168	38
$\alpha$ -napht. ac. acid $\frac{1}{64}$ mg/L	186	179	179	178	166	149		173	43
$\alpha$ -napht. ac. acid $\frac{1}{32}$ mg/L	255	240	196	184	162	146		197	67
$\alpha$ -napht. ac. acid $\frac{1}{16}$ mg/L	233	225	162	159	153			186	56
$\alpha$ -napht. ac. acid $\frac{1}{8}$ mg/L	300	235	219	170	152	151		205	75
$\alpha$ -napht. ac. acid $\frac{1}{4}$ mg/L	310	295	283	275	267	250	230	273	143

The specimen in the  $\frac{1}{16}$  concentration was a less prosperous one than the others, hence its rather poor development. The number of the petioles is by far too small to take an average from them; it will e.g. be seen that in the controlbasin one grew to a length which is not reached in the  $\frac{1}{64}$  solution. Given due consideration to all this it is surprising that the averages nevertheless indicate to some degree a relation between growth and concentration of the hormone. These results seem to confirm my opinion that 0.25 mg/L alpha-naphtalene acetic acid ( $2.5 \times 10^{-7}$  or  $\pm 7 \times 10^{-5}$  mol) is optimal for exerting the utmost of growth capacity in the petioles of *N. amazonum* and probably of many more species of *Nymphaeaceae*. It should be remembered, however, that in  $\frac{1}{8}$  and even in  $\frac{1}{32}$  mg/L ( $3.1 \times 10^{-8}$  or  $\pm 6 \times 10^{-6}$  mol) individual petioles can show the same rate of elongation.

A similar experiment has been made with *N. Boucheana*; as, however, my material of this species was scanty, I had to be content to test it in three concentrations only, viz.  $\frac{1}{32}$ ,  $\frac{1}{16}$  and  $\frac{1}{8}$  mg/L. The average excess growth in the control was 36 cm, in  $\frac{1}{32}$  mg/L 57 cm, in  $\frac{1}{16}$  mg/L 70 cm and in  $\frac{1}{8}$  mg/L 109 cm. Also in this case there seems to exist a relation between growth and concentration of naphtalene acetic acid. These results, added to those obtained in the small aquaria indicate that for this species too the optimal concentration must be about 0.25 mg/L.

*N. amazonum* and *N. Lotus rosea* have been tested in the deep basins in two concentrations of beta-indole butyric acid, viz.  $\frac{1}{16}$  and  $\frac{1}{8}$  mg/L; their excess growth was equal to that in the control. This confirms my former experiments (and those of 1940); for optimal growth achievements in this substance higher concentrations are needed.

#### IV. The two main factors inducing rapid elongation.

There are two methods to induce a sudden vigorous renewal of growth of adult petioles of waterplants: (1) transplanting in a deep waterlayer and (2) adding of phytohormones.

In the last described experiments these methods have been applied in succession and each of them has shown its action very neatly: (immersion in a deep waterlayer in which

growth substance had already been dissolved gives the same results; adding of growth substance first and deepening of the waterlayer afterwards has not yet been tried.)

The question which of these methods has the strongest influence is not simple to answer, because it depends on many factors of which the most important is the condition of the plant material. Seedlings seemed to be preferable to specimens grown from tubers because they present a more homogeneous material. It appeared, however, that in their very juvenile stage they are not suitable for experiments; they hardly responded to a deepening of the waterlayer and even very low concentrations of phytohormones were apt to injure them. Only towards the end of July (they were sown in April) they were sufficiently advanced to give reliable results; in most cases this stage is not characterised by morphological changes but must depend on metabolic processes. The plants remained throughout the summer in shallow dishes in a few cm of water and developed 5 or 6 leaves per specimen with petioles of not much more than 10 cm. As soon as they appeared sufficiently matured a number of experiments were made with them; they were planted in an aquarium at depths of 8, 18, 28 and 38 cm, at several levels in the deep basins, in pure water, and in various concentrations of growth substances. They showed that, although elongation was sometimes considerable, yet their growth capacity had by far not reached the amazing potentialities which are to be seen in older material. In the deep basins only those specimens were able to reach the surface which had already formed small tubers. This was the case with *N. zanzibariensis rosea*; the petioles elongated in 18 days from about 20 cm to more than 200; this is quite an achievement for these slender organs and I think it most remarkable that after this the small tubers not only were still present, but that their volume had even slightly increased; one would expect quite the contrary; this opens possibilities for further research. Subsequent addition of growth substances could not induce any more growth, nor could it stimulate those petioles which had stayed behind (compare (9), *Limnanthemum nymphaeoides*).

It seems that the height of the watercolumn is the most efficient factor for inducing rapid longitudinal growth in very young plants; as they grow older hormones gradually become equally important, till later on they take the upperhand and finally can be the chief means of attaining extraordinary dimensions. This is further demonstrated by an experiment which I made towards the end of the summer in an aquarium of 40 cm deep; it lasted from August 27th until September 18th and was made with material grown from tubers which had developed throughout the summer in shallow water. It was therefore some three months older than that which I used in the aquaria of 20 cm deep; all traces of

TABLE 5. Petioles of Nymphaeaceae in 0.25 mg/L alpha-naphtalene acetic acid (petioles in cm; depth of watercolumn 40 cm).

Species	No.	September								
		3	4	5	6	8	12	16	17	18
<i>N. amazonum</i>	1	41	64	90	108	115	115			
	2	40	91	136	183	220	220	222	228	236
	3		19	44	92	252	350	367	370	
	4						35	212	222	222
<i>N. stellata</i>	1	50	56	60	77	89	95	101	105	
	2	48	73	97	105	135	142	145	145	
	3	32	61	108	125	141	172	172	178	
	4			4	9	37	130	210	210	
<i>N. Devoniensis</i>	1	47	58	68	100	110	116			
	2	43	68	102	118	130	151	158	160	
	3	40	89	134	165	195	203	213	213	



primary leaves had long since disappeared, the leaves were more robust with large blades and thick petioles. Three species were used, viz. *N. amazonum*, *N. stellata* and *N. Devoniensis*. Their longest petioles measured up to 40 à 45 cm; during one week they did not change and then, on September 3d, 0.25 mg/L alpha-naphtalene acetic acid was added. Once more I had the occasion to observe the almost explosive renewal of growth. Some data will illustrate this in table 5.

No. 1 of all three species are typical samples of leaves which, although looking quite fresh, have just passed the age on which the "top response" is possible. No. 3 of *amazonum* and No. 4 of *stellata*, on the other hand, are very young leaves which show clearly that growth is never extraordinarily rapid in the beginning, but that at a certain stage it can take an enormous jump. This is especially the case in No. 3 of *amazonum* which has beaten two records: (1) 160 cm growth in 48 hours (probably resp.  $\pm 90$  and  $\pm 70$  per day) and (2) an ultimate length of 370 cm which has not even been reached in the deep basins.

It is perhaps not superfluous to emphasize that in an experiment like this one it is indispensable to distinguish the leaves by individual characteristics in order to identify them from the nearly undisentangleable mass of intertwined petioles and that utmost care is needed to undo them from it without breaking them.

(Continued.)



**Botany.** — *The influence of oxygen-nitrogen mixtures upon the dwarfing of Ardisia Crispa (Thunb.) A. DC.* By Miss R. BOK. (From the Botanical Institute, University of Leyden.) (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

*Ardisia crispa*, a tropical shrub belonging to the Myrsinaceae, shows a curious symbiosis with an aerobic bacterium, *Bacterium foliicola* Miede, as first described by MIEDE. In the doctor's thesis of PH. DE JONGH a tentative explanation as to the nature of this symbiosis is given; the bacterium, covering the vegetation point with a film, acts as an "oxygen-trap" and lowers the oxygen-tension in the meristematic region of the stem. *Ardisia* plants without bacteria show a stunted development, the resulting dwarf, which was called a "cripple" by DE JONGH, might therefore perhaps be a product of an overdose of oxygen at the vegetation-point.

It seemed logical to try to cultivate bacteria-free *Ardisia* plants in an atmosphere with diminished oxygen-tension in order to see whether they would develop into normal plants.

The older cripple, however, is mutilated too much to be able to revert to the normal, while the tissue of young plants showed more promise in this direction.

It seemed, therefore, advisable, to use sterile seeds, in which the symbiont was killed by heating to 40° C. for 48 hours. This internal sterilisation was followed by external sterilisation. First the seed was immersed for 2 minutes in 80 % alcohol to remove the wax, after which the seed was treated with 1 % calciumchlorohypochlorite for 30 minutes. After a final rinsing with sterile water the seed was transferred to the culture-flask by means of a sterile needle. Germination took place in sterile environment in an oxygen-nitrogen atmosphere.

This method has a drawback in that the initial germination and also the root-formation takes place in abnormal atmosphere.

Normal, internally-non-sterile seeds were used as controls. In order to keep the composition of the gas-mixture constant, independent of metabolism and of gas-exchange with the outer atmosphere, a closed circuit was constructed.

The following gas-mixtures were used:

I.	100 %	N <sub>2</sub>		
II.	95 %	N <sub>2</sub>	5 %	O <sub>2</sub>
III.	85 %	N <sub>2</sub>	15 %	O <sub>2</sub>
IV.	78 %	N <sub>2</sub>	22 %	O <sub>2</sub>
V.	40 %	N <sub>2</sub>	60 %	O <sub>2</sub>
VI.			100 %	O <sub>2</sub>

For each mixture two carboys of 15 litres capacity were used. (See Figure: A and B.)

Carboy A was filled with a highly dilute solution of HgCl<sub>2</sub> to prevent algal growth.

This solution was previously saturated with the gas-mixture. At the beginning of the experiment carboy B (calibrated) was filled to the zero-level with the solution of HgCl<sub>2</sub> and 15 litres of the gasmixture. Through funnel a sublimate-solution was streaming up to outlet-opening of the vacuum-tube *b*. The continuous outflow of water from A forced the gas-mixture through the train, consisting of bottle *d*, filled with concentrated H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> in order to dry the gas previous of its passing through two parallel circuits *e*<sub>1</sub> and *e*<sub>2</sub>, each consisting of a flow-meter of a type used by WILSON and GEORGI.

The capillary I was interpolated in order to prevent extreme reactions in the manometer *m*. Capillary III served the same purpose. The velocity of the gas was regulated by varying the bore and the length of capillary II.

Cylinder *f* serves to sterilize the gas by means of its passing through sterilized cotton. Via tube *g* the gas reached finally the culture-flask *h*. After passing over the culture medium it left the train through a cotton-filled tube *k* and a bubble-counter *n*.

The culture-flask was made of Jena glass (model FERNBACH conical), contents 1900 cc. Due to the large bottom area, 16 seeds could be placed on about  $\frac{1}{2}$  litre of culture medium.

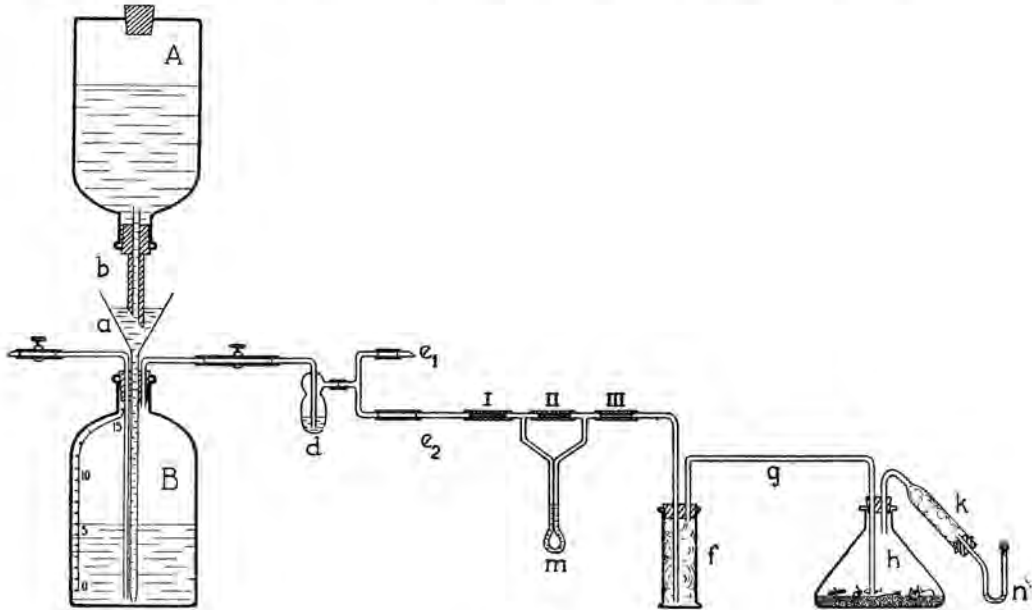


Fig. 1.

Seeds were used of three mother-plants, cultivated in a hot house in the Botanical Gardens.

The gases were mixed in the tonometer in the usual way, no correction was made for admixtures.

The culture medium was rainwater to which was added 1 % of purified agar and a modified KNOP-mixture, consisting of

$\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$	4.0 grammes per 7000 cc water
$\text{KNO}_3$	1.0
$\text{MgSO}_4 \cdot 7 \text{ aq.}$	1.0
$\text{KCl}$	0.5
$\text{FeCl}_2$	trace
$\text{MgNH}_4\text{PO}_4$	1.0,

the latter salt being used because of its superior buffer-action as compared with  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ . The chemicals were the C.P brand of the firm of BROCADES. The salts were dissolved separately, and the five solutions mixed.

The apparatus was partly autoclaved, partly oven-heated prior to use. The assembling took place in a formalin-sterilized cubicle after which the entire apparatus was mounted in a greenhouse which was thermostat-controlled at  $\pm 20^\circ \text{C}$ . The plants were shaded from direct light.

Twelve tonometers were used, each serving two culture-flasks, one containing 16 normal seeds, the other 16 sterile seeds. Every series was duplicated and six gas-mixtures were used.

The experiments started June 1939 and were kept going until November 1939. The plants were kept on the same substrate, but in atmospheric air, until February 1940.

A blunt vegetation-point is a certain sign of the crippled nature of the plant. This was therefore used as a criterion.

In pure  $N_2$  or in 95%  $N_2$  germination was almost absent, and leaf-formation did not take place in the few seeds that showed signs of germination. At the end of the experiment all seeds were dead.

In pure oxygen germination was, in most of the cases, accelerated as compared with other gas-mixtures, but soon the seeds turned brown and became slimy. July 14 normal seeds showed an average root-length of 3.1 cm (1—6) while the heated seeds showed an average root-length of 1.0 cm (0.3—3). The normal seeds already showed leaves and a vegetation-point. Only a few of the heated seeds showed analogous development. Experiments with 100%  $O_2$  were discontinued in August 1939.

Series IV, atmospheric air, showed no reliable results due to repeated infections.

Series III 85%  $N_2$ , 15%  $O_2$  and

Series V 40%  $N_2$ , 60%  $O_2$  were the only ones that showed reliable results.

In 85% nitrogen and 15% oxygen both normal- and heated seeds germinated well and rapidly.

Average root-length of normals on July 14 2.6 cm (0.5—6).

" " " " heated " " 14 1.3 cm (0.2—3).

50% of the normal plants showed an average of 3 leaves on August 24.

30% " " sterile " " " " " 3 " " " 24.

On August 24 there were 30% of cripples in the "normal" series. This number increased to 88% on November 4 to remain almost constant in atmospheric air (85% on February 19). Of the heated seeds developed into cripples; 55% on August 24, 70% on November 4, while after a sojourn in atmospheric air, this number increased to 85% on February 19 1940.

In 40% nitrogen and 60% oxygen both normal and heated seeds germinated well and rapidly.

Average root-length of normals on July 14 3.5 cm (2 —7).

" " " " heated " " 14 2.5 cm (0.2—7).

75% of the normals and 65% of the sterile plants showed 3 leaves at this date.

On August 24 there were 55% cripples in the "normal" series, this number increased to 80% on February 19 1940.

All of the sterilized seeds yielded cripples on August 24 and showed February 19 1940 swollen roots, a phenomenon not mentioned by DE JONGH.

A number of "normals" which still showed a sharp vegetation-point on August 24, had developed a blunted stem-apex on February 19 1940. This seems the more remarkable as the plants remained in atmospheric air from November until February.

DE JONGH has shown that the number of "spontaneous cripples", developing from normal seeds is extremely variable, while 48 hours heating of the seeds to 40° C. always yielded cripples. In our experiments the lowered oxygen tension *actually caused the development of 45% normal plants from heated seeds after less than 3 months*. A number of these normals reverted to cripples in atmospheric air.

Also the number of spontaneous cripples in 85%  $N_2$  + 15%  $O_2$  (30%) was lower than that in 60%  $O_2$  + 40%  $N_2$  (55%). A sojourn in atmospheric air for 3 months increased this number in both cases to about 80%.

In 40%  $N_2$  + 60%  $O_2$  the heated seeds only yielded crippled plants after 3 months.

*These preliminary results seem to give a strong indication that the hypothesis, stated in the work of PH. DE JONGH, according to which the bacterial film on the stem-vegetation-point of Ardisia crispa lowers the oxygen tension in the stem meristem, contains elements of truth.*

#### LITERATURE.

DE JONGH, PH. (1938), On the symbiosis of *Ardisia crispa* (Thunb.) A. DC. Thesis, Leyden.

WILSON, P. W. and C. E. GEORGI (1932), Bot. Gaz. 94, 346.

**Geology.** — *Three geological sections across South Sumatra.* By J. WESTERVELD. (Communicated by Prof. H. A. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

## INTRODUCTION.

This paper is ment to give a short summary of the geology of South Sumatra as it has become known by the work achieved by the Sumatra party of the Geol. Survey of the Netherlands East Indies between 1927 and 1933, which methodical survey, the results of which have been published in the Explanations to the Geol. Map of Sumatra, scale 1 : 200.000<sup>1)</sup>, in a certain way may be considered as a continuation of the explorations made previously by A. TOBLER<sup>2)</sup> and others in Palembang and Djambi. The general geological structure of the region concerned, as it can now be conceived from the results of these explorations and besides from the mapping done by employees of oil companies, is illustrated by three sections across the entire width of the island and by two complementary cross-cuts. The writer wishes to thank Dr. H. M. E. SCHÜRMAN and Dr. J. K. VAN GELDER, both at the Hague, and Dr. J. ZWIERZYCKI, now at Warsaw (Poland), for many valuable data concerning the oil region put at his disposal.

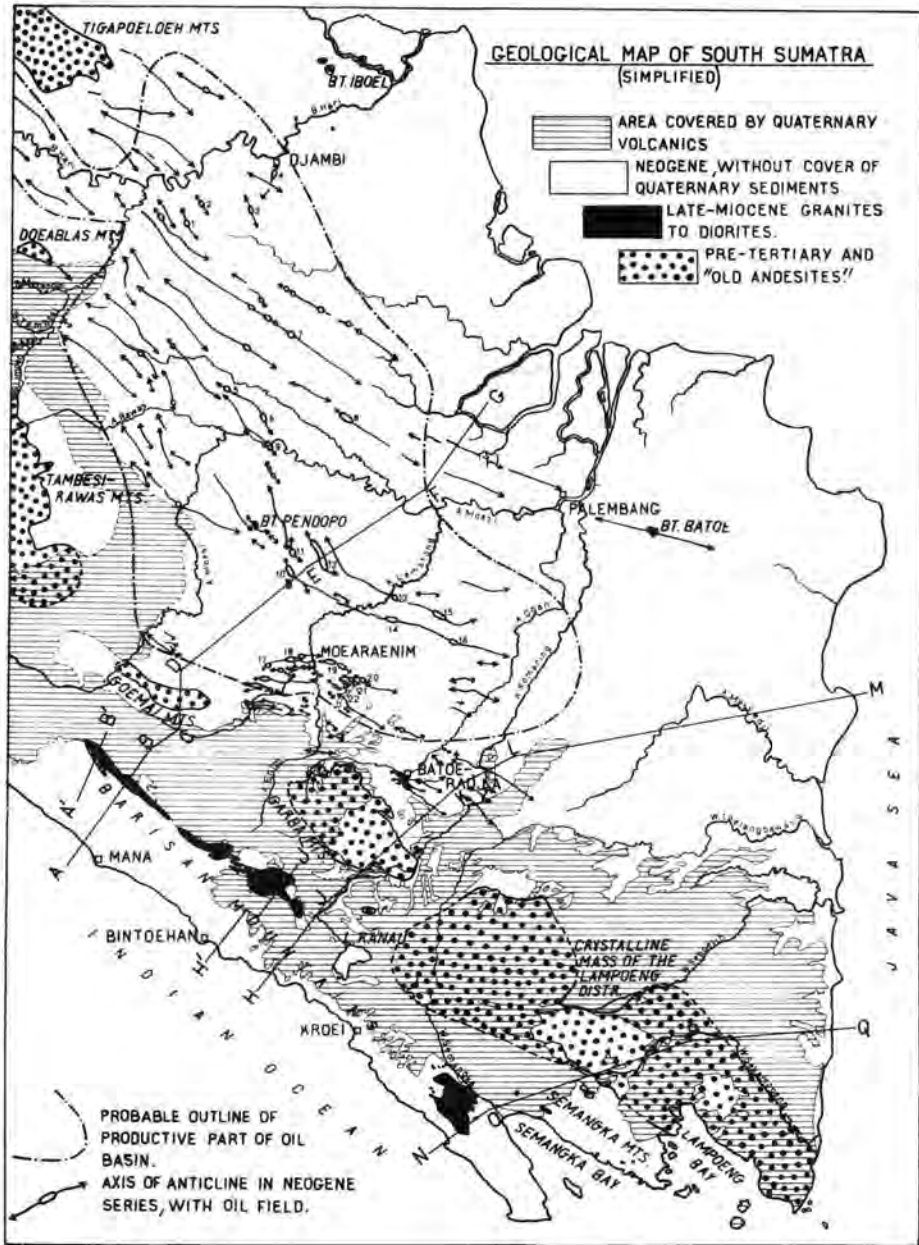
The area treated in this article covers the Residencies Palembang, Lampoeng Districts and parts of Djambi and Benkoelen<sup>3)</sup>. Apart from the presumably pre-Carboniferous and possibly even pre-Palaeozoic crystalline schists and granitic gneisses of the Lampoeng Districts, which primarily belong to an old mountain system of unknown extension and still obscure connections with metamorphic rocks elsewhere in the East Indian Archipelago, the rock formations of South Sumatra outside the Neogene basin of Djambi, Palembang and the Lampoeng Districts are distributed over three main orogenetic units of major importance in the larger western half or "Asiatic" part of the East Indian Archipelago. The sediments of the oil basin were folded in subsidiary and later phases of movements, which culminated in late-Miocene time in the Barisan zone. From NE. to SW. the three main orogenetic stems may be distinguished as: 1. The late-Jurassic *Malaya orogene*, the chief exposures of which are found on the Malayan Peninsula, the Tin Islands (Riouw Archipelago, Banka, Billiton) and in West and Central Borneo (Kapoeas region, Schwaner Mts., upper Mahakam region), whereas on Sumatra it is only visible in the Bt. Batoe SE. of Palembang, the Bt. Iboel in E. Djambi and possibly also in the Tigapoeloh Mts.; 2. The middle- or late-Cretaceous (or ev. Palaeocene) *Sumatra orogene*<sup>4)</sup>, exposed in the

1) R. W. VAN BEMMELEN, Explanation (Toelichting) to sheet 10 (Batoeradja) and sheet 6 (Kroeï) of the Geological Map of Sumatra (1932, 1933); K. A. F. R. MUSPER, Do. to sheets 15 (Praboemoelih) and 16 (Lahat) (1933, 1937); C. H. VAN RAALTEN, Do. to sheet 7 (Bintoehan) (1937); J. VAN TUYN, Do. to sheet 4 (Soekadana), sheet 8 (Menggala), sheet 13 (Wiralaga) and sheet 9 (Gedongratoe) (1932, 1934, 1934, 1937); J. WESTERVELD, Do. to sheet 5 (Kotaboemi) and sheet 3 (Bengkoemat) (1931, 1933); J. ZWIERZYCKI, Do. to sheet 1 (Teloekbetoeng) and sheet 2 (Kotaägoeng) (1931, 1932).

2) A. TOBLER, Topografische und Geologische Beschreibung der Petroleumgebiete bei Moeara Enim (Süd Sumatra). Tijdschr. v. h. Kon. Ned. Aardr. Gen., 2nd series, 23, 199—315 (1906); Do., Djambi-verslag. Jaarb. v. h. Mijnw. in Ned. O.-Indië, 48, Verh. III, pp. 585 (1919). With Atlas.

3) "oe" of Netherlands orthography to be pronounced as "u".

4) In a previous paper (J. WESTERVELD, „De tektonische bouw van Zuid-Sumatra“, Handel. v. h. 28ste Nederl. Nat.- en Geneesk. Congres, p. 264—267, 1941), the writer has



Scale 1 : 3.347.140.

Main oil fields:

1. Betoeng; 2. Badjoembang; 3. Tempino; 4. Kenali Assam; 5. Soeban Boeroeng;
6. Babat; 7. Sumpal; 8. Kloelang; 9. Mangoendjaja; 10. Benakat; 11. Djirak;
12. Talangakar-Pendopo; 13. Goenoengkemala; 14. Limau; 15. Talangdjimar;
16. Tandjoengmiring; 17. Soengei Ramok; 18. Tandjoeng Loentar; 19. Minjak Itam-Kampoeng Minjak; 20. Soeban Djerigi; 21. Batoekras; 22. Soengei Taham.



Tambesi-Rawas Mts., Goemai Mts., Garba Mts. and in the Crystalline Mass of the Lampoeng Districts, all cupolas forming part of a broad mountain system, which can be followed without interruption from the Tambesi-Rawas Mts. onward along the whole length of Sumatra between NW. Palembang and the north-point of Atjeh; 3. The late-Miocene *Soenda orogene*, represented by the folded Miocene sediments, effusive rocks and irruptives of the Barisan and Semangka Mts., which zone can be followed from S. Benkoelen until the SW.-part of the Government West Coast of Sumatra, where it evidently plunges below sea-level opposite the coast region of Tapanoeli, where the rocks of the Sumatra orogene are washed at various places by the Indian Ocean.

The Sumatra orogene forms the backbone of the island in Central and North Sumatra. On Java this late-Mesozoic mountain system is only exposed in the small pre-Tertiary cores of the South Serajoe Mts. and Djiwo Hills, while on the east-side of the area covered by the Malaya orogene equivalent structures of about the same age are very probably developed in the Meratoes and Bobaris Mts. of SE. Borneo.

The Soenda orogene, characterized by the occurrence of Miocene deposits in dominantly volcanic facies and by the development of Neogene, dacitic and dioritic to granitic intrusiva along its entire area of extension, can be traced from the Barisan Mts. in Benkoelen towards the southern ranges of Java, whence it takes its further course over the Lesser Soenda Islands as far as the Banda sea, from which region it proceeds with a sharp bend into the SW.-arm of Celebes and farther on into the western part of Central Celebes and the north-arm of this island. G. L. SMIT SIBINGA<sup>5)</sup> proposed the denomination "Soenda orogene" for the total assemblage of mountain structures developed on Sumatra, Java, the Lesser Soenda Islands and in the West Arc of Celebes. The name will be used here in a more restricted sense, applying it only to the Miocene magmatic zone indicated above.

#### STRATIGRAPHY AND IGNEOUS ROCKS.

*Crystalline schists and gneisses*, which presumably must be of at least pre-Carboniferous age in view of the entirely non-metamorphic state of the Anthracolitic formations of Sumatra, constitute the frame-work of the Crystalline Mass of the Lampoeng districts (section N—Q), while smaller exposures are found between Lake Ranau and the Garba Mts. and between the old-Miocene rocks of the Barisan Mts. (districts Mana and Bintohan, sections A'—B', H'—J'). This crystalline basement of S. Sumatra, which is partly covered by Miocene deposits and by products of Quaternary and pre-Neogene volcanism, can be traced from Lampoeng Bay in a NW.-direction until the Mana section of the Barisan Mts. It represents the only definite example of crystalline schists and gneisses on Sumatra and consists of an assemblage of orthogneisses (metamorphic granites, quartz-diorites, quartz-porphyrites and tuffs), biotite-, muscovite- and chlorite-schists, sericite-quartzites, graphitic zoisite-garnet-mica-schists, massive and schistose amphibolites, albite-sericite-schists and occasional marble beds; all rocks with a degree of crystallinity corresponding to the epi- to meso-zone of regional metamorphism as distinguished by U. GRUBENMANN.

*Permocarboniferous rocks.* A Permian rock suite of porphyrites and dark limestones with

suggested a late-Cretaceous or ev. old-Eocene age for the Sumatra orogene and its post-orogenic irruptive rocks. The lower age limit, however, has to be removed to the middle-Cretaceous, as all Cretaceous deposits of S. Sumatra presumably belong to the lower division of this formation.

The Malayan prefixes in this paper have the following meaning: Bt. = Boekit = Mountain top or hill; A. = Aer = River or water; B. = Batang = River; W. = Wai = River or water; S. = Soengei = River.

<sup>5)</sup> G. L. SMIT SIBINGA, The Malay double (triple) orogen. Proc. Kon. Akad. v Wetensch., Amsterdam, 36, 202—210, 323—330, 447—453 (1933).



*Glomospira*, *Neoschwagerina* and *Fusulina* sp. is known from the pre-Neogene core of the Bt. Pendopo on the Talangakar anticlinorium in Central Palembang<sup>6)</sup>. Late-Palaeozoic sandstones, conglomerates and liparitic to andesitic effusive rocks, together with limestones, which yielded a fauna of gastropods, brachiopods and Foraminifera of probably lower-Permian age, are developed at the Tambesi river on the NE.-side of the Tambesi-Rawas Mts.<sup>7)</sup> NW. of this locality upper-Carboniferous (to lower-Permian?) rocks in dominantly volcanic facies are developed in a broad syncline in Upper Djambi<sup>8)</sup>. Pebbles of Permocarboniferous *Fusulina* limestone were besides found in a conglomerate bed between Middle Palembang beds NW. of Palembang town<sup>9)</sup>, so that late-Palaeozoic rocks must form part of the pre-Neogene basement formations along the Palembang anticlinorium.

*Trias* (?). An indication to the existence of Triassic sediments in the Mesozoic slate formations of the Tambesi-Rawas Mts. is afforded by a find of *Thecosmilia* sp. in limestones along the Tambesi river<sup>10)</sup>. Triassic sediments are probably to be expected in the Tigapoeleoh and Doeablas Mts., the sedimentary rocks of which consist largely of strongly folded slates, interbedded with sandy layers, calcareous phyllites, a few marble beds and occasional volcanic material<sup>11)</sup>. Triassic are possibly also the quartz-sandstones exposed on Bt. Iboel.

*Jurassic sediments* are exclusively known with certainty from the Tambesi-Rawas Mts., where a small Dogger pelecypod fauna was found in sandy shales along the Temalang river N. of the Rawas river<sup>12)</sup>. *The S. Temalang shales are the least disputable Jurassic beds thus far discovered on Sumatra.*

*Cretaceous deposits* are known from the NE.-margin of the Tambesi-Rawas Mts., the Goemai Mts., the Semangka Mts., and very probably also from the Garba Mts. In the Tambesi-Rawas Mts. dull shales and limestones on the B. Asai and B. Limoen yielded a Valanginian fauna of Ammonoidea (e.g. *Neocomites* and *Thurmannites* sp.), pelecypods, gastropods and echinids<sup>13)</sup>. In the Goemai Mts. (section A—G), the pre-Tertiary rocks of which have all proved to be Cretaceous<sup>14)</sup>, the late-Mesozoic deposits were divided into two apparently conformable series, distinguished resp. as the Saling beds or upper division (thickness at least 400 m.) and the Lingsing beds or lower division (thickness at least 3000 m.). The Saling beds are composed of volcanic breccias, tuffs and basaltic to andesitic lavas with a greenstone appearance, interbedded with fossiliferous limestone banks, which yielded a probably lower-Cretaceous fauna of Nerineas, Lovceniporas, Lof-

<sup>6)</sup> Jaarb. v. h. Mijnw. in Nederl.-Indië, 60, Alg. Ged., 25 (1931).

<sup>7)</sup> A. TOBLER, Op. cit., 195—200, 293, 294 (1919).

O. E. MEYER, Brachiopoden des Perm und Unter-Carbon der Residentschaft Djambi (Sumatra). Verh. v. h. Geol. Mijnb. Gen. voor Nederl. en Kol.; Geol. serie, 5, 203—222 (1920—1922).

<sup>8)</sup> J. ZWIERZYCKI, Die geologischen Ergebnisse der Paläobotanischen Djambi-Expedition 1925. Jaarb. v. h. Mijnw. in Nederl.-Indië, 59, Verh. II, 1—70 (1930).

<sup>9)</sup> Netherlands East Indies Mining Service; quarterly report (1932).

<sup>10)</sup> A. TOBLER, Op. cit., 78 (1919).

<sup>11)</sup> A. TOBLER, Op. cit., 206—212, 310—315, 416 (1919).

<sup>12)</sup> F. FRECH and O. E. MEYER, Mitteljurassische Bivalven von Sungai Temalang im Schieferbarissan (Residentschaft Djambi). Verh. v. h. Geol. Mijnb. Gen. voor Ned. en Kol.; Geol. serie, 5, 223—229 (1920—1922).

<sup>13)</sup> E. BAUMBERGER, Die Kreidefossilien von Dusun Pobungo. Batu Kapur Menkadai und Sungai Pobungo (Djambi, Sumatra). Verh. v. h. Geol. Mijnb. Gen. voor Ned. en Kol.; Geol. serie, 8, 17—47 (1925).

<sup>14)</sup> K. A. F. R. MUSPER, Nieuwe fossielresten en de ouderdom der kalksteenen in het Pretertiair van het Goemaigebergte. De Ing. in Ned.-Indië; IV. Mijnbouw en Geologie, 1, 521—531 (1934).

Do., Explanation to sheet 16 (Lahat) (1937).

tusias, echinids, small Foraminifera and corals. The Lingsing beds are a series of thin-bedded shales, tuffaceous marls with Radiolaria and sponge spicules, Radiolaria-bearing hornstones, and an occasional limestone bed with small Foraminifera and *Orbitolina* sp. of a presumably lower-Cretaceous type. In the Semangka Mts. a strongly folded series of black shales, tuffaceous sandstones, beds of coral limestone and of black limestone with *Orbitolina* sp., also of a presumably lower-Cretaceous type, was found abutting on the crystalline rocks of the Lampoeng Mass (section N—Q). The Cretaceous age of the Upper and Lower Garba beds (section H—M), into which the pre-Tertiary deposits of the Garba Mts. were divided, is suggested by their great lithological similarity to the Cretaceous rocks of the Goemai Mts. The Upper Garba beds, only preserved in a few steep synclines, consist of tuffaceous marls with Radiolaria and of diabase tuffs. Similar beds are also exposed in the cores of some anticlines near Batoeradja. The Lower Garba beds are a strongly folded series of hydrothermally altered, andesitic, basaltic and dacitic tuffs and lava flows, interbedded with shales and limestone beds.

Although definite evidence is still lacking, a *transgressive position of the lower-Cretaceous* is suggested by the side-by-side occurrence of Cretaceous rocks and crystalline schists in Palembang and the Lampoeng Districts, apparently without any intercalation of Permocarboniferous and old-Mesozoic formations, which play such an important part in Central and North Sumatra.

*Pre-Tertiary intrusive rocks*, granites to diorites and allied types, are known from all the pre-Tertiary ranges. In the Tambesi-Rawas Mts., Goemai Mts., Garba Mts., the Crystalline Mass of the Lampoeng Districts, and possibly also in the Doeablas Mts. and the pre-Tertiary core of Bt. Pendopo, they probably all belong to one post-orogenic family, intimately connected with post-lower-Cretaceous folding in the zone of the Sumatra orogene. Their period of intrusion has to be located between the lower-Cretaceous and the Neogene, but a pre-Eocene age seems most probable in view of the fact that in Atjeh (N. Sumatra) the already deeply eroded Sumatra orogene is locally covered unconformably by Oligocene strata. The granites of the Tigapoeloh Mts. and the granosyenite of Bt. Batoe probably belong to the late-Jurassic Malaya orogene; almost certainly the rock of Bt. Batoe, which by its high content of potash and rare earths<sup>15)</sup> shows unmistakable relationship to the eruptive rocks of the Tin Islands. Still older epochs of magmatic activity are represented by the undatable granite-gneisses of the Lampoeng Districts and by detached bodies of granitic rocks, which occur together with the Permian deposits of the B. Tambesi in an overthrust mass above Mesozoic slates<sup>16)</sup>. A homologue of this overthrust granite is found in the B. Merangin-B. Mesoemai region in Upper Djambi, where a pre-upper-Carboniferous granite of analogous tectonic position occurs at the base of the volcanic upper-Carboniferous series described by J. ZWIERZYCKI<sup>17)</sup>.

The plutonic bodies of the Tambesi-Rawas Mts. are intrusive into Mesozoic slates and Jurassic (to Cretaceous?) limestones (pyrometasomatic iron and Cu-Pb-Zn ores!), while those of the Goemai and Garba Mts. are resp. intrusive into the Lingsing-Saling beds and the Garba beds (sections A—G, H—M). The Crystalline Mass of the Lampoeng Districts contains many intrusive granites (pyrometasomatic iron ores!), the most extensive body of which is exposed between the upper courses of W. Sekampoeng and W. Sepoetih (section N—Q). Dominant rock types in all these cupolas are granite to diorite, with on a minor scale gabbro and dikes of aplite, pegmatite, pyroxenite, porphyrite, dolerite, spessartite and kersantite. In the Doeablas Mts. the pre-Tertiary slate formation is in-

<sup>15)</sup> W. VAN TONGEREN. Mineralogical and chemical composition of the syenite-granite from Boekit Batoe near Palembang, Sumatra, Netherlands East Indies. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 39, 670—673 (1936).

Do., On the occurrence of rare elements in the Netherlands East Indies, etc. Dissertation, Utrecht: analysis, p. 148 (1938).

<sup>16)</sup> A. TOBLER, Op. cit., 195—200, 293, 294 (1919).

<sup>17)</sup> J. ZWIERZYCKI, Op. cit. (1930).

truded by granite, augite-syenite, essexite and dikes of diorite-porphyrite, hornblende-syenite, porphyry, aplite, tourmaline-bearing pegmatite and spessartite, while the plutonics of the Tigapoeloh Mts. consist of granite to diorite, joined by veins of aplite and pegmatite<sup>18)</sup>.

"Old andesites"<sup>19)</sup>. The general transgression of the lower-Miocene sea over the eroded structures of the Sumatra orogene was preceded in Eocene or early-Miocene time by a stage of terrestrial, dominantly andesitic volcanism, the frequently propylitized products of which still cover wide areas over the NW.-section of the crystalline Lampoeng Mass. the NW.-part of the Garba Mts. and the S.-part of the Tambesi-Rawas Mts. The Lower Kikim tuffs around the Goemai Mts. and andesitic rocks which occur between the pre-Tertiary rocks of the Bt. Pendopo (Permian and intrusive granite) and their Miocene cover also belong to these effusives. Part of the Tertiary andesites, breccias and tuffs of the Barisan and Semangka Mts. may probably be correlated with these "old andesites", but it is hardly possible to distinguish them from the old-Miocene volcanics of these mountain ranges. The "old andesites" are sometimes cut by Au-Ag veins of an epithermal type (NW.-section of the Lampoeng Mass, Tambesi-Rawas Mts. S. of the A. Rawas, in the latter region apparently associated with dacites and liparites).

*Neogene sediments and volcanics.* The following stratigraphical scheme applies in a general way to the Neogene formations of S. Sumatra (oil basin and Barisan zone):

Oil basin in SW. Palembang.		Barisan and Semangka Mts.
Upper	}	Marine Pliocene of the Benkoelen coast and Semangka valley.
Middle		~~~~~ unconformity.
Lower		"Intermediary Neogene" of Benkoelen (Lower Palembang beds?).
		~~~~~ local unconformity or stratigraphical gap?
	Telisa or Goemai beds.	
Batoeradja stage	}	Batoeradja — Telisa series (at many places chiefly in volcanic facies).
	( Batoeradja limestone, Basal beds (quartz-sandstone horizon(s), shales, layers of black lignite or wood horizons, sometimes volcanic deposits). )	(older Miocene)

The Neogene deposits of the oil basin attain their greatest thickness in the region E. of the Goemai Mts., where the Telisa and Palembang beds alone together measure about 7600 m. (Telisa beds  $\pm$  4800 m.; Lower Palembang beds 700—1000 m.; Middle Palembang beds 650—800 m.; Upper Palembang beds 500—1000 m.), which figure ought to be augmented with that for the Batoeradja stage, which around the Goemai Mts. consists of a basal quartz-sandstone horizon (75—200 m.), covered by a volcanic series of andesitic breccias, tuffs and lavas (the Upper Kikim tuffs) with an aggregate thickness of 2000—2500 m. on the S.-side of the range and 300—950 m. on its N.-flank. Along the northern margin of the Goemai Mts. the Telisa and Palembang beds show a very reduced thickness and the same phenomenon can be observed in the area of the Batoeradja folds and in the Lampoeng Districts, where the Neogene series covers a relatively stable region of slow former subsidence. In the case of the Goemai anticline its rather thin cover of Neogene deposits, especially on the N.-side, can be explained as a consequence

<sup>18)</sup> A. TOBLER, Op. cit., 379—381, 388, 389 (1919).

<sup>19)</sup> The term has also frequently been used to denote all Tertiary andesites.

of its early rising in a initial stage of the process of young-Tertiary folding. The Neogene stratigraphy of the Moearaenim region also applies more or less to Central and North Palembang and Djambi. Along the E.-side of the Tambesi-Rawas Mts., however, the entire Neogene series shows a little differentiated, tuffaceous development, while E. and SE. of the Garba Mts. the Neogene beds are developed in sandy, tuffaceous and conglomeratic facies. The Telisa series wedges out between its pre-Neogene basement and the Palembang beds along the Palembang anticlinorium (section A—G), so that the Lower Palembang beds in this region are lying immediately above pre-Tertiary rocks.

The *Batoeradja stage* is especially well-developed around the Goemai and Garba Mts. and in the anticlines near Batoeradja. Its basal beds are of less importance in the latter region, where the old-Miocene Batoeradja limestone (Tertiary e4—e5 according to W. LEOPOLD and I. M. VAN DER VLERK's scheme for the East Indian Tertiary<sup>20</sup>), characterized by *Eulepidinas*, *Spiroclypei*, *Miogypsina dehaarti* V. D. VLERK and *Trillina Howchini* SCHLUMB. as guide fossils, acquires a maximal thickness (up to 300 m.). In small basins along the upper courses of W. Sekampoeng and W. Sepoetih on either side of the Lampoeng Mass the basal beds consist of some hundreds of meters of quartz-sandstones and quartz-conglomerates with a few coal beds and capped by Batoeradja limestone. SW. of the Crystalline Mass this basal Miocene series passes side-ways into the volcanic old-Miocene of the Semangka Mts. (section N—Q). The Batoeradja stage merely represents a facial type of the lowest division of the Telisa series. On the Talangakar anticlinorium, where the Telisa beds have a thickness of 1000—1200 m., it is developed as a sandy deposit and contains an important oil horizon (oil fields Talangakar-Pendopo, Benakat etc.). In the Barisan and Semangka Mts. the old-Miocene, the Telisa beds inclusive, is largely developed as a series of andesitic lavas, tuffs and breccias with some sedimentary intercalations, e.g. shales and limestones with Batoeradja guide fossils. Only near Mana the Telisa beds show their normal sedimentary development.

The *Telisa beds* (upper part of Tertiary e and T. f) are a monotonous series of Globigerina marls and shales with intercalations of andesitic tuffs and breccias, beds of glauconitic sandstone, platy or concretionary limestones and occasional layers with plant remains. *Spiroclypei* were still found in the lower part of the series in association with *Lepidocyclinas* and other genera. In the Barisan Mts. near Mana the Telisa beds are developed in normal sedimentary facies (thickness 3000—4000 m.), but in the districts Bintoehan and Kroei and in the Semangka Mts. the series is almost entirely replaced by andesitic volcanics (see sections). The Telisa beds contain important oil horizons in Central Palembang and Djambi.

The *Lower Palembang beds* (late-Miocene) are a series of bluish green or gray, frequently glauconitic marls and claystones, interbedded with tuffaceous sandstones and glauconitic, concretionary, marly limestones. The formation contains abundant molluscs and Foraminifera (*Lepidocyclinas*, *Miogypsinas*, *Cycloclypei*, rotalides and other genera) and corresponds more or less to the upper-Miocene Badoei, Bodjongmanik, Njalindoeng and Tjilanang beds in W. Java<sup>21</sup>). The L. P. beds contain oil sands practically over the whole extension of the oil basin in Palembang and Djambi.

The "intermediary Neogene" of the Benkoelen coast region (distr. Mana and Bintoehan) presumably represents a stratigraphical equivalent of the L. P. beds, to which they correspond facially. NE. of Mana this series (thickness  $\pm$  1500 m.) apparently succeeds in

<sup>20</sup>) W. LEUPOLD and I. M. VAN DER VLERK, De Palaeontologie en Stratigrafie van Nederlandsch Oost-Indië; "The Tertiary", Leidsche Geol. Meded., 5, 611—648 (1931).

<sup>21</sup>) Guide fossils of the Bodjongmanik and Badoei beds in Central Bantam, W. Java (C. H. OOSTINGH, Mollusken als gidsfossielen voor het Neogeen in Nederlandsch-Indië. Hand. v. h. 8ste Ned.-Ind. Natuurw. congres, 508—516 (1938)), also found in the L. P. beds are: *Turritella subulata* MART., *Amusium hulshofi* MART., *Apolymetis grimesi elongata* (HAANSTRA and SPIKER), *Cultellus dilatatus* MART., *Siphocypraea caput-viperæ* (MART.).



conformable succession to the Telisa beds, although the mutual relations are obscured by a reverse fault (sect. A'—B', A—G). Near Bintoehan this series, which is generally rich in shell fragments, contains also pumice tuffs, silicified wood and silicified dacite tuffs, while it is probably separated from the Telisa beds in this district by a stratigraphical gap. The marine fauna of these beds mainly consists of molluscs and Foraminifera (*Lepidocyclinas*, *Miogypsinas*, *Cycloclypei*, e.g. *Cycloclypeus* ex. gr. *guembelianus* BRADY and *C. (Katacycloclypeus) annulatus* MART., which two species according to TAN SIN HOK<sup>22)</sup> are resp. restricted to the upper-Miocene to Pliocene and to the upper-Miocene).

The *Middle Palembang beds* near Moearaenim (late-Miocene to lower-Pliocene) consist of claystones, tuff-sandstones, interbedded with marly or glauconitic concretions, glauconite sands and several groups of brown-coal beds (total thickness of coal beds up to 47—90 m., but strongly variable). Marine horizons with molluscs, echinoderms, shark teeth and small Foraminifera are found in the lower part of this formation near the Goemai Mts. Oil horizons are known mainly on the Moearaenim anticlinorium.

The *Upper Palembang beds* (Pliocene to Pleistocene?) consist principally of acid pumice tuffs, tuff sands and kaoline-like clays, practically without marine horizons and with few coal strings. The formation contains no oil.

The *Pliocene of Benkoelen* and the Semangka valley lies unconformably above all older Neogene formations and shows a monoclinal, sea-ward dip of 5—10°, only locally interrupted by faults, in the coast region of Benkoelen. The formation is of marine-tuffaceous origin, contains abundant mollusc remains and consists of greenish, tuffaceous marls, calcareous marls, tuffaceous claystones, layers of pumice tuff, sometimes massive dacitic-liparitic tuffs, andesitic ocnglomerates and occasionally also andesitic lavas (total thickness of the series 800—1000 m.). Plant remains and layers of impure brown-coal are also frequently found. The series corresponds more or less to the upper-Pliocene Tjimatjeuri, Tjilegong, Bodjong, Kaliglagah and Sondé beds in W. and Central Java<sup>23)</sup>.

During the Batoeradja-Telisa epoch the Neogene sea of the oil basin stood in close connection with the Indian Ocean through wide passages around the Goemai and Garba Mts., which condition still persisted, albeit perhaps on a reduced scale, during the Lower Palembang and even locally — NW. of the Goemai Mts. — during the Middle Palembang epoch. Before the Upper Palembang epoch, however, all connections were apparently cut off by the rise of the Barisan zone and the Lampoeng Mass; the marine Pliocene of the west coast possibly corresponds to the terrestrial-volcanic U. P. beds on the E.-side of these structural units.

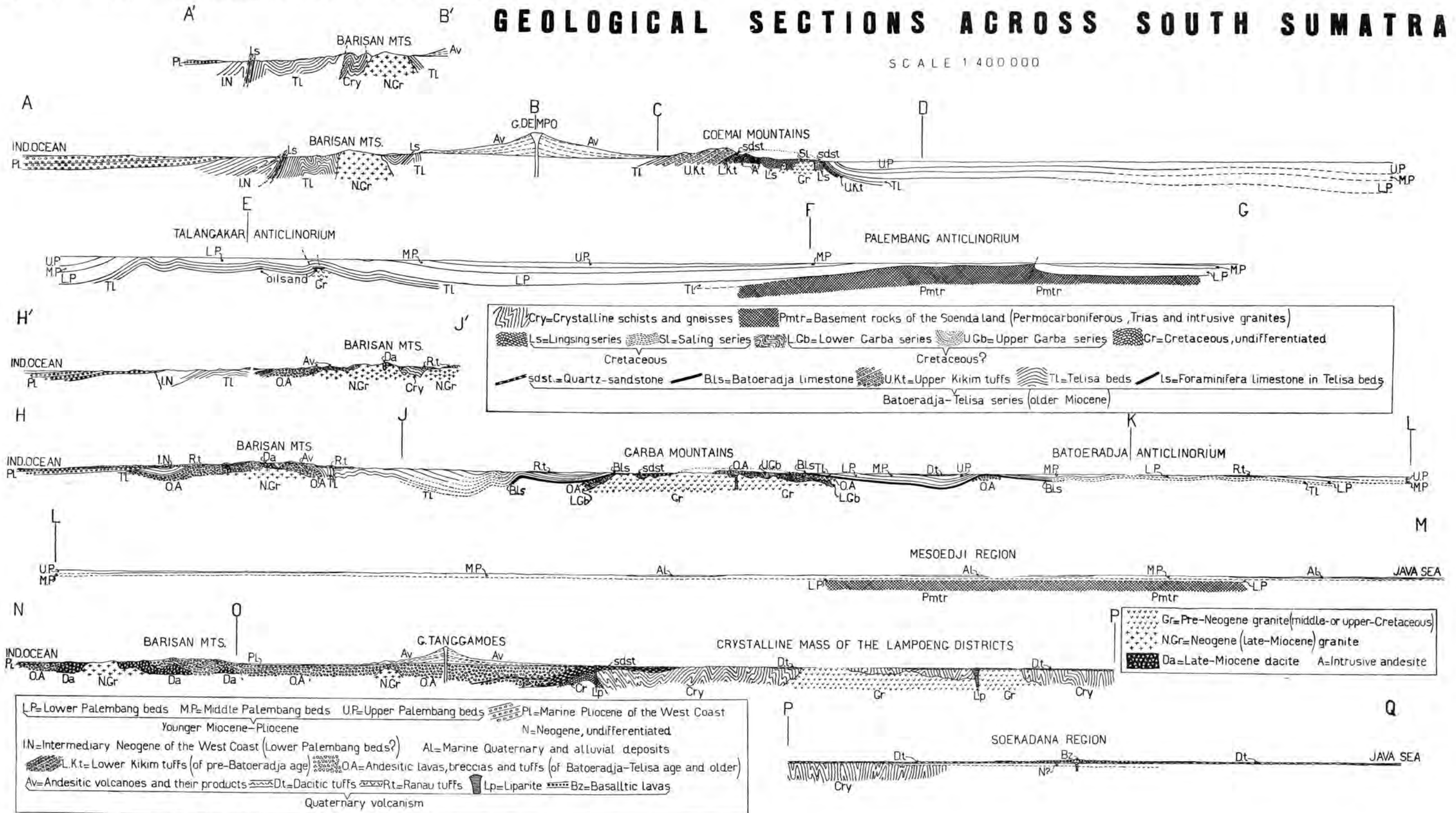
*Late-Miocene intrusive rocks.* The old-Miocene sediments and volcanics of the Barisan and Semangka Mts. are penetrated at many places by granitic to dioritic (on a minor scale also gabbroic) and dacitic rocks in bosses or batholithic bodies. The largest of these intrusions are found in the southern peninsula of Benkoelen, NE. of Bintoehan and NE. of Kroei, while similar intrusions are also found in the coast range of N. Benkoelen and in the region SE. of Padang (Gov. West Coast of Sumatra). The late-Miocene granites to diorites are responsible for extensive propylitizations and silicifications of the old-Miocene volcanics in the Barisan zone, while they have also to be considered as the parent rocks of the epithermal Au-Ag veins in N. Benkoelen (Lebong region) and near Padang. The massive dacites are intimately associated with the holocrystalline rocks, but in most cases seem to be slightly older.

<sup>22)</sup> TAN SIN HOK, On the genus *Cycloclypeus* Carpenter. Dienst v. d. Mijnb. in Ned.-Indië; Wetensch. Meded., 19 (1932).

<sup>23)</sup> C. H. OOSTINGH, Op. cit. (1938); also: Note on the stratigraphical relations between some Pliocene deposits in Java. De Ing. in Ned.-Indië; IV. Mijnb. en Geol., 6, 140—141 (1939). Guide fossils of the Tjilegong and Bodjong beds (Bantam, W. Java) also found in the Benkoelen Pliocene are: *Terebra insulindae* P. J. FISCHER, *Nuculana praeradiata* (O. BOETTIG.), *Turritella angulata bantamensis* MART., *Polinices (Neverita) sulcifera* (MART.), *Pecten javanus* MART., *Cardita javana* MART.

# GEOLOGICAL SECTIONS ACROSS SOUTH SUMATRA

SCALE 1:400 000



**Cry**=Crystalline schists and gneisses    **Pmtr**=Basement rocks of the Soenda land (Permocarboniferous, Trias and intrusive granites)  
**Ls**=Lingsing series    **Sl**=Saling series    **LGb**=Lower Garba series    **UGb**=Upper Garba series    **Cr**=Cretaceous, undifferentiated  
 Cretaceous    Cretaceous?  
**sdst**=Quartz-sandstone    **Bls**=Batoeradja limestone    **UKt**=Upper Kikim tuffs    **TL**=Telisa beds    **Ls**=Foraminifera limestone in Telisa beds  
 Batoeradja-Telisa series (older Miocene)

**Gr**=Pre-Neogene granite (middle- or upper-Cretaceous)  
**N.Gr**=Neogene (late-Miocene) granite  
**Da**=Late-Miocene dacite    **A**=Intrusive andesite

**LP**=Lower Palembang beds    **MP**=Middle Palembang beds    **UP**=Upper Palembang beds    **PL**=Marine Pliocene of the West Coast  
 Younger Miocene-Pliocene    **N**=Neogene, undifferentiated  
**IN**=Intermediary Neogene of the West Coast (Lower Palembang beds?)    **AL**=Marine Quaternary and alluvial deposits  
**L.K.t**=Lower Kikim tuffs (of pre-Batoeradja age)    **OA**=Andesitic lavas, breccias and tuffs (of Batoeradja-Telisa age and older)  
**Av**=Andesitic volcanoes and their products    **Dt**=Dacitic tuffs    **Rt**=Ranau tuffs    **Lp**=Liparite    **Bz**=Basaltic lavas  
 Quaternary volcanism



*Quaternary sediments and volcanics.* Marine Quaternary sediments are represented by upheaved coral reefs along the Benkoelen coast, especially near Bintoehan (up to 50 m. above sea-level); furthermore by extensive blankets of clay deposits with marine shells, which form large embayments between the Neogene hills of E. Palembang and E. Djambi. The marine Holocene beds on the eastern outskirts of the oil basin were formed during the post-Pleistocene period of partial submergence of the eastern coast region. Only in very recent time the sea again receded over a height of 5—10 m.<sup>24</sup>). *Quaternary stages of volcanism* produced the following five groups of effusive rocks, tuff mantles and volcanic cones: 1°. *Liparitic-perlitic lavas of fissure eruptions in the Pasoemah region* (SW. of the Goemai Mts.) and along the Semangka valley; 2°. *Dacitic pumice tufts and dacitic-liparitic necks of the Lampoeng Districts*; 3°. *Andesitic to basaltic volcanoes* within and NE. of the Barisan zone; 4°. *Liparitic-dacitic pumice tufts of the Ranau eruption*, deposited around Lake Ranau and E. of the Garba Mts.; 5°. *Basaltic lavas of the Soekadana fissure eruptions* in the eastern Lampoeng Districts. Groups 1 and 2 are the oldest and connected with longitudinal fault zones as channel ways. The acid necks of the Lampoeng Districts NW. of Lampoeng Bay (two of them indicated on section N—Q) are probably the eruption points of the acid Lampoeng tufts. The Ranau tufts, connected with the formation of the volcano-tectonic L. Ranau depression, are older than the youngest andesitic volcanoes, but younger than the oldest andesitic cones. The andesitic volcanoes are mainly located on diagonal or transverse fault zones.

#### TECTONICS.

The rocks of the Sumatra orogene, which were folded in the middle- or late Cretaceous (or ev. Palaeocene) epoch, are strongly, but not excessively folded; dynamo-metamorphism or regional metamorphism are apparently not developed on an intensive scale. Overthrusts of presumably not very large horizontal displacement are known from the NE.-flank of the Tambesi-Rawas Mts., where Permian rocks and detached masses of granite were thrown in a SW.-direction upon Mesozoic slates; furthermore from the SW.-flank of the Lampoeng Mass W. of Lampoeng Bay, where crystalline schists are separated by a NE.-ward dipping, reverse fault from the Cretaceous rocks of the Semangka Mts. (section N—Q). The Neogene deposits were strongly folded and also cross-faulted in the Barisan section of the larger Soenda orogene in late-Miocene time before the intrusion of the late-Miocene granites (to diorites) and dacites. Later movements mainly affected the Mio-Pliocene deposits of the oil basin, which were warped into three main anticlinoria in South and Central Palembang: the Moearaenim-Batoeradja anticlinorium, the Talangakar anticlinorium and the Palembang anticlinorium. In N. Palembang the Talangakar and Palembang anticlinorium unite into one broad system of folds. In the oil region the most complicated structures are found in the oil fields of the Moearaenim anticlinorium, which are segmented by cross faults (Soeban Djerigi oil field) or even struck by overthrusts (Batoekras and Minjak Itam-Kp. Minjak oil fields). Reverse faults (with NE.-ward dip), however, are also known from the folds on the Talangakar anticlinorium, as for instance on the Talangakar-Pendopo oil field (section A—G), along the SW.-flank of Bt. Pendopo, along the SW.-side of the Karangrigin oil field (S. of the Mangoendjaja oil field) and on various folds between the A. Moesi and A. Rawas. A steep flexure or even reverse fault is besides found on the NE.-flank of the Palembang anticline (section A—G). The arcual shape of the Moearaenim fold system may be explained as the result of the strong NE.-ward push exerted upon the mighty succession of poorly consolidated, Neogene beds in the former area of subsidence NE. of the Goemai Mts. through the tectonic depression between the Goemai and Garba Mts. The Barisan zone only underwent a gradual uplift and dissection into longitudinal fault blocks during the Pliocene and afterwards.

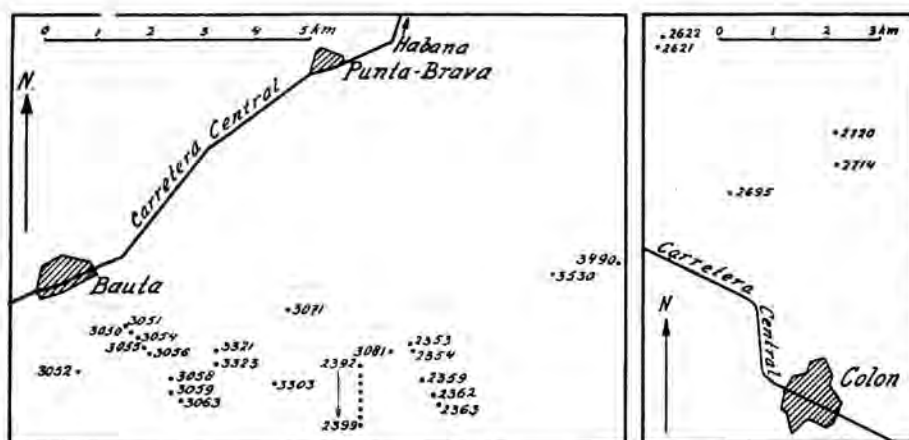
*Amsterdam, Geological Institute of the University.*

<sup>24</sup>) J. VAN TUYN, Over een recente daling van den zeespiegel in Nederlandsch Oost-Indië. Tijdschr. v. h. Kon. Ned. Aandr. Gen., 2nd series, 49, 89—99 (1932).

**Palaeontology.** — *Smaller Foraminifera from the Lower Oligocene of Cuba*, By R. C. VAN BELLEN, J. F. C. DE WITT PUYT, A. C. RUTGERS and J. VAN SOEST. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

Some years ago the geological institute of the university of Utrecht received from the Bataafsche Petroleum Maatschappij at The Hague a collection of washing-residues of marly clays from Cuba. The localities have been indicated on the map; they are situated to the WSW of Habana and in the neighbourhood of the town of Colon. The geologists of the B. P. M. regarded these claymarls as oligocene. The results of the study of this collection are to be found in this communication. In the tabular enumeration at the end of this communication have been indicated: 1. the different species and varieties which compose the faunula, 2. the localities, where each faunal element has been found, 3. the literature for each species, 4. data on the occurrence of each species in the Upper Cretaceous and in the great subdivisions of the Tertiary of Tropical America and in the recent fauna.



There have been found 140 species and varieties, 12 of which are new. The following may be said with regard to the age of the faunula.

8 species have been found in the Upper Cretaceous of Tropical America. Of these, 7 do not have any stratigraphical value, as they have lived as long as the Miocene, or partly do occur still in the recent fauna. *Spiroplectoides clotho* is the only species which has been found until now exclusively in upper cretaceous deposits; its determination, however, is uncertain. Our faunula, therefore, shows no relation at all with upper cretaceous faunae.

Not less than 61 species and varieties have been found in the Eocene of Tropical America. More than the half — 38 — are known also from the Oligocene of Tropical America, and 7, although not known from the Oligocene, have been found in younger tertiary deposits of Tropical America or occur in the recent fauna. A large percentage of the faunula, 16 species, viz. *Gaudryina cubana*, *Clavulinoides cubensis*, *Cl. havanensis*, *Cl. marielinus*, *Karrerriella chapapotensis*, *Listerella venezuelana*, *Planularia westermanni*, *Nonion mexicanum*, *Bolivina malkinae*, *Uvigerina havanensis*, *Siphogenerina transversa*

var. *cubensis*, *Valvulineria jacksonensis*, *Globigerina eocaena*, *Ruttenia coronaeformis*; *Planulina cocoensis* and *Planulina cocoensis* var. *cooperensis* has been found until now in Tropical America exclusively in the Eocene; 6 of these are restricted to Cuba. It is clear that the fauna has strong eocene affinities. On the other hand, the absence of the genus *Hantkenina*, so common in eocene deposits with this facies suggests a posteocene age.

Still more species and varieties — 75 — are known from the Oligocene of Tropical America. Of these, 38 occur also in the Eocene, and 13, whilst not being known from the Eocene have been found in miocene deposits or occur in the recent fauna. Not less than 24 species seem to be confined in Tropical America to the Oligocene, viz.: *Textularia mississippiensis* var. *alazanensis*, *Dorothia cylindrica*, *Cristellaria kemperi*, *Cr. peregrina* var. *matanzana*, *Cr. subpapillosa*, *Planularia thiadensi*, *Marginulina sublitua*, *Nodosaria* aff. *carinata*, *N. matanzana*, *N. obliquata*, *Saracenaria schencki*, *S. senni*, *Vaginulna elegans* var. *mexicana*, *Lagena sulcata* var. *strumosa*, *Gümbelina cubensis*, *Bolivina matanzana*, *Uvigerina canariensis* var., *U. cubana*, *Eponides byramensis* var. *cubensis*, *Siphonina advena*, *Anomalina alazanensis*, *Planulina alazanensis* and *Cibicides mexicanus*; of these, 10 have been found exclusively in Cuba. The affinities with oligocene faunae are apparently very great.

Only 40 species and varieties are known from the Miocene of Tropical America, and 29 of these have been found also in the Oligocene or Eocene of the region. Affinities with the Miocene, therefore, certainly exist, but they are much smaller than the affinities with the Eocene and Oligocene.

If all the washing-residues are from one and the same formation, there is no doubt that the faunula is of oligocene age, and, given the strong relations with the Eocene, may be regarded as Lower Oligocene. It is, however, very well possible that not all the samples are of the same age. The samples 2353—2363 f.i. which are located along a line about vertical to the general strike of the island may very well belong to lower and upper parts of one formation or even to two formations. Generally, the faunula of each sample is, however, too poor to discuss its age separately. Our conclusion is, therefore, that the general aspect of the whole of the samples is so that it suggests a lower oligocene age, that, therefore, certainly a part, probably even the greatest part of the samples must belong to the lower oligocene, but that it is possible that some of the samples belong to an older or younger stratigraphical unit.

A description of the new species and varieties and some remarks on other species are following here.

*Gaudryina jacksonensis* CUSHMAN (lit. 18, 32).

Our specimens differ from CUSHMAN's description by: 1. too large dimensions (average length 2.5 mm; maximum length 3.6 mm; breadth 1.1—1.75 mm), 2. having hardly visible sutures on triserial part. Moreover, there are in our material transitional forms between *G. jacksonensis* and *G. trinitatis*. *G. trinitatis* is triangular in cross section in the triserial part of the test, subcircular in the biserial part, where ribs are lacking. *G. jacksonensis* is triangular throughout, while ribs are lacking only on the last two chambers. The ribs on the transitional forms occur on some of the older biserial chambers, but are lacking on the last 3—5 chambers, which are more inflated than the preceding ones.

*Planularia brandsi* n. sp. DE WITT PUYT. (Fig. 37).

Test much flattened, spirally coiled, with a broad and thin keel. Chambers very distinct, strongly inflated, regularly increasing in size. Sutures limbate, depressed, straight, somewhat broadening towards periphery. Length 2 mm; breadth 1.3 mm; thickness 0.44 mm; thickness of strongly inflated proloculum 0.68 mm.

*Planularia westermanni* PIJERS. (Fig. 34).

For a full discussion of this species see lit. 79. In this publication *Pl. venezuelana* has been placed in the synonymy of *Pl. westermanni*. By a study of Cuban oligocene material,

recently received in Utrecht it turned out that *Pl. venezuelana* must be regarded as a distinct species.

*Planularia thiadensi* n. sp. DE WITT PUYT. (Fig. 38).

Synon. *Planularia* sp. in lit. 77, p. 94, pl. 16, fig. 2, 3.

Two specimens of our material agree very well with the form which THIADENS described from the oligocene of Santa Clara, Cuba. It differs from *Pl. cubensis* BERM. by its dimensions, by the curved "dorsal" and the straight "ventral" outline, by the broader sutures, the large number and the shape of chambers. It is very near to *Pl. dentata* (KARRER) as described and figured by LIEBUS from the dalmatian Eocene which is probably not the same as *Pl. dentata* (KARRER) described by KARRER from Moravia and Austria. Dimensions:  $3.2 \times 1.6 \times 0.2$  mm.

*Saracenaria schencki* CUSHM. a. HOBSON var. DE WITT PUYT. (Fig. 35, 36).

The specimens differ from *S. schencki* in lacking the distinct spinose processes and the keel. They might as well be regarded as a variety of *S. italica* DEFRANCE. Length 1.4 mm.

*Spiroplectoides clotho* (GRZYBOWSKI).

It is not sure, whether our specimens are arenaceous or non-arenaceous; in the first case they would belong to *Textularia*, in the second to *Spiroplectoides*. Test flattened with nearly parallel sides. Chambers numerous and of equal size in adult. Initial chambers hardly visible, arranged in a flat spiral. Aperture transverse and elliptic. Length 1.3 mm; breadth 0.37 mm.

*Bulimina inflata* SEGUENZA.

The Cuban specimens have an initial spine.

*Uvigerina auberiana* D'ORBIGNY. (Fig. 31, 32).

The Cuban specimens lack the initial spine, mentioned in lit. 42, p. 363. They are finely hispid; the short spines being locally arranged in rows.

*Uvigerina canariensis* D'ORBIGNY, var. NUTTALL. (Fig. 27, 28, 29, 30).

Some specimens agree very well with NUTTALL's variety; other ones differ by the presence of very faint striae covering the whole fossil or by complete smoothness of the test.

*Uvigerina havanensis* CUSHMAN and BERMUDEZ, var.

At the side of specimens, well agreeing with *U. havanensis* there are much smaller forms with an average length of 0.55 and a breadth of 0.37 mm with many basal spines and built up by fewer chambers, arranged in an elongate spiral, and with sutures not passing from one chamber to the next one. They are nearly related to *U. yazoensis* CUSHMAN.

*Pullenia sphaeroides* D'ORB., var. *cubensis* n. var. DE WITT PUYT. (Fig. 33).

The only difference with *P. sphaeroides* is the presence of 5 or, rarely, 6 chambers in the last coil.

*Eponides byramensis* CUSHM., var. *cubensis* PALMER a. BERM. (lit. 68).

According to the authors this variety is almost equally biconvex. In the typefigure, however, the ventral side is much more convex than the dorsal side. Our specimens agree with the typefigure. The limbation is very strong. Ventral umbo usually not filled. Diameter  $\leq 1.3$  mm, height  $\leq 0.8$  mm.

*Eponides haidingeri* (D'ORBIGNY).

According to different authors the number of chambers in the last formed whorl varies

strongly: 6 (lit. 66), 9 (lit. 5), 9 (lit. 59), 9 (lit. 10), 7 (lit. 28) and 5 (lit. 42). Probably this is caused by the indistinctness of the sutures. Our specimens have 9 chambers in the last formed whorl. The dorsal sutures are somewhat raised and limbate. The whole surface is finely perforated. On the ventral side the sutures are invisible. Diameter  $\leq 0.9$  mm.

*Eponides tshoppi* n. s. VAN BELLEN (Fig. 10, 11, 12).

Test biconvex. Ventral side somewhat more convex than dorsal side. Periphery rounded, not lobate, not keeled. Dorsal side showing 3 coils. Dorsal sutures limbate, flush with surface, somewhat oblique. Spiral suture limbate, flush with surface. About 8 chambers in last whorl. Ventral sutures indistinct, limbate, flush with surface, last one slightly depressed. Ventral umbo sometimes with area of clear shell material, produced by the meeting of the limbate sutures. Surface perforated. Aperture a slit at ventral side, from periphery to about  $\frac{1}{3}$  of distance to umbilicus. Diameter 1.10 mm; height 0.44 mm. Differs from *E. praecinctus* in missing the strongly limbate and raised ventral sutures, in having an umbonal mass of clear shell material, in having only 8 chambers in last whorl. Differs from *E. coccaensis* (lit. 23) in being ventrally more convex than dorsally and in having only 8 chambers in last whorl. It may be observed that in lit. 31 the description of *E. coccaensis* does not agree with the figures: see number of chambers in last whorl, dimension of last chamber, planoconvexity of test.

*Rotalia cubensis* n. s. VAN BELLEN. (Fig. 13, 14, 15).

Test almost equally biconvex. Dorsal side showing  $3\frac{1}{2}$  whorls, last one with about 10 chambers. Spiral suture limbate, somewhat raised. Dorsal sutures limbate, flush with surface. Ventral sutures emerging obliquely from the umbo, with a slight curvature backward near the periphery, last two depressed, rest flush with surface. Umbo filled with a knob of clear shell material. Periphery acute with a slight keel, well developed at the beginning of the last whorl and gradually disappearing to the end. Surface coarsely perforated. Aperture between umbo and periphery at ventral side, near to the periphery, but only visible in 2 of the 10 specimens. Diameter  $\leq 0.5$  mm; height  $\leq 0.2$  mm. Differs from *R. cf. partschiana* WHITE in being equally biconvex and in having more chambers in last whorl. Differs from *Cibicides ungerianus* by its aperture, in missing the typical hispid, dorsal umbo and in being equally biconvex.

*Siphonina advena* CUSHMAN.

Our specimens agree well with the description and figures in lit. 21. The description in lit. 47 does, however, not at all agree with the figure: see number of chambers in last whorl and diameter. Nor does the general aspect of the figure in lit. 21 agree with that in lit. 47. We have presumed that the descriptions in lit. 21 and lit. 47 and the figures in lit. 21 may be regarded as characteristic for the species. It differs from *S. bradyana* in missing the broad carina and the broad flaring lip, in having a longer neck and depressed sutures on the ventral side. Moreover the keel is not tubulated. It differs from *S. tenuicarinata* by the not-tubulated keel and the shape of the aperture.

*Siphonina tenuicarinata* CUSHMAN.

There is some variation in diameter of test, in form of aperture, in length of neck and development of keel.

*Siphonina reticulata* (CZJZEK).

There are two differences with the description: our form has 5 chambers in the last whorl and a not-wholly tubulated keel.

*Siphonina tubulosa* CUSHMAN.

There is some variation in diameter of test (0.25–0.37 mm) and in number of chambers in the last whorl (4–5). It differs from the foregoing species in having a wholly tubulated keel.



*Siphonia cubensis* n. sp. VAN BELLEN. (Fig. 1, 2, 3).

Test equally biconvex; periphery subacute; not keeled. Dorsal sutures very indistinct, curved, somewhat limbate, strongly oblique, flush with surface. Ventral sutures somewhat limbate, curved, flush with surface. Last chamber inflated. Aperture a broadly elliptical opening with a well developed neck and phialine lip, on the ventral side, close to the periphery; the axis of the ellipse making an angle with the plane of the periphery. Whole surface finely porous. Diameter  $\leq 0.62$  mm; height  $\leq 0.35$  mm. Differs from *S. pulchra* by situation of aperture, by absence of larger pores in central part of ventral face, by more distinct sutures, by smaller dimensions.

*Pulvinulinella cubensis* n. sp. VAN BELLEN. (Fig. 24, 25, 26).

Test biconvex, ventrally somewhat more than dorsally. Periphery acute, with a broad, thin carina. On dorsal side  $2\frac{1}{2}$  whorls visible, last one with about 10 chambers. Dorsal sutures strongly oblique, limbate, very slightly raised or flush with surface. Spiral suture limbate and raised. Ventral sutures oblique, limbate, flush with surface, near periphery slightly depressed. No ventral umbo. Aperture only visible in one of the six specimens. Differs from *P. velascoensis* in missing the strongly elevated sutures between the excavated areas over the dorsal side of chambers, in having limbate, ventral sutures, in missing the ventral umbo.

*Anomalina cubensis* n. sp. VAN BELLEN. (Fig. 4, 5, 6).

Dorsal side convex, ventral flat. Periphery subacute. Sutures strongly limbate and raised. About 15—16 chambers in last whorl. Dorsal side showing  $1\frac{1}{2}$ —2 whorls, the first small and covered by secondary shells substance, the last lying on a somewhat higher level. Ventral side with depressed umbilicus, in which sometimes small boss of clear shells substance. Aperture over the periphery, somewhat extending on dorsal side. Length 0.64 mm; breadth 0.54 mm; height 0.22 mm. Differs from *A. alazanensis* in having a dorsal convex side and a flattened ventral side and in having more limbate sutures. Differs from *A. mecatepecensis* in having not so strongly limbate sutures and in missing the coarsely perforated boss at the dorsal side. Differs from *A. bilateralis* in being planoconvex, in having more limbate sutures, in missing the dorsal umbonal boss.

*Planulina cocoaensis* CUSHMAN.

Our specimens differ from type specimens in having a mass of clear shells substance at dorsal side in stead of small protuberances.

*Planulina palmerae* n. sp. VAN BELLEN. (Fig. 7, 8, 9).

Our forms agree closely with the description of *P. marielana* by PALMER a. BERMUDEZ (lit. 68), which, however, does not agree with the original description by HADLEY (lit. 51). The differences are:

HADLEY:	PALMER-BERMUDEZ:
9 chambers in last whorl.	12—14 chambers in last whorl.
Ventral umbo a small, slightly depressed area.	Ventral umbo a slightly elevated knob of clear shells substance.
Diameter 0.5 mm.	Diameter 1.6 mm.
Dorsal side showing only last whorl, rest hidden by secondary shells substance.	Dorsal side showing $2\frac{1}{2}$ —3 whorls.
Sutures slightly limbate and elevated.	Sutures heavily limbate and elevated.

The specimen of PALMER and BERMUDEZ has therefore to be renamed; the new name has been given in honour of Mrs. PALMER. In our forms the sense of involution is sometimes clockwise, sometimes anticlockwise.



*Planulina mexicana* CUSHMAN.

Has more chambers (11) in last whorl than *P. cocoaensis* var. *cooperensis*.

*Planulina wuellerstorfi* (SCHWAGER).

Is very near to *Cibicides americanus*, the only difference being the raised ventral sutures of *P. wuellerstorfi*; the ventral sutures are depressed in *Cibicides americanus*. Diameter  $\leq 1$  mm.

*Cibicides americanus* (CUSHMAN).

Our specimens differ from original description (lit. 11) in having a small ventral umbonal knob. This is also visible in the figure of lit. 26.

*Cibicides floridanus* (CUSHMAN).

Ventral sutures of our specimens are slightly depressed. There is always a flat border; at about  $\frac{1}{6}$  of radius begins the convexity of the ventral side. Diameter 0.33—0.84 mm.

*Cibicides lobatulus* (D'ORBIGNY).

Concave-convex as well as biconvex forms have been brought to this species. Our form agrees closely with the original figure of D'ORBIGNY (lit. 66). It is ventrally convex, dorsally concave. Periphery strongly limbate and irregular. Ventral side showing only last whorl, dorsal side obscured by bad conservation. In last whorl 7 chambers. Ventral sutures depressed and curved; they meet each other in depressed umbilicus. Dorsal sutures depressed. Diameter 0.7 mm.

*Cibicides subtenuissimus* (NUTTALL).

The bosses not so pronounced as in NUTTALL's typefigures (lit. 59).

*Cibicides cubensis* n. sp. VAN BELLEN. (Fig. 21, 22, 23).

Test biconvex, dorsal side very slightly, ventral side more strongly so. Subacute keel. Dorsally  $1\frac{1}{2}$ —2 whorls visible. Dorsal sutures limbate, raised, oblique. Spiral sutures strongly limbate. Surface coarsely perforated. About 9 chambers in last whorl. Ventrally large, central boss of clear shellmaterial. Sutures strongly limbate, flush with surface. Aperture invisible in consequence of small diameter (0.3 mm). Height 0.18 mm. Diameter of ventral boss 0.11 mm. Agrees with *Cibicides spec. A* CUSHMAN in lit. 44.

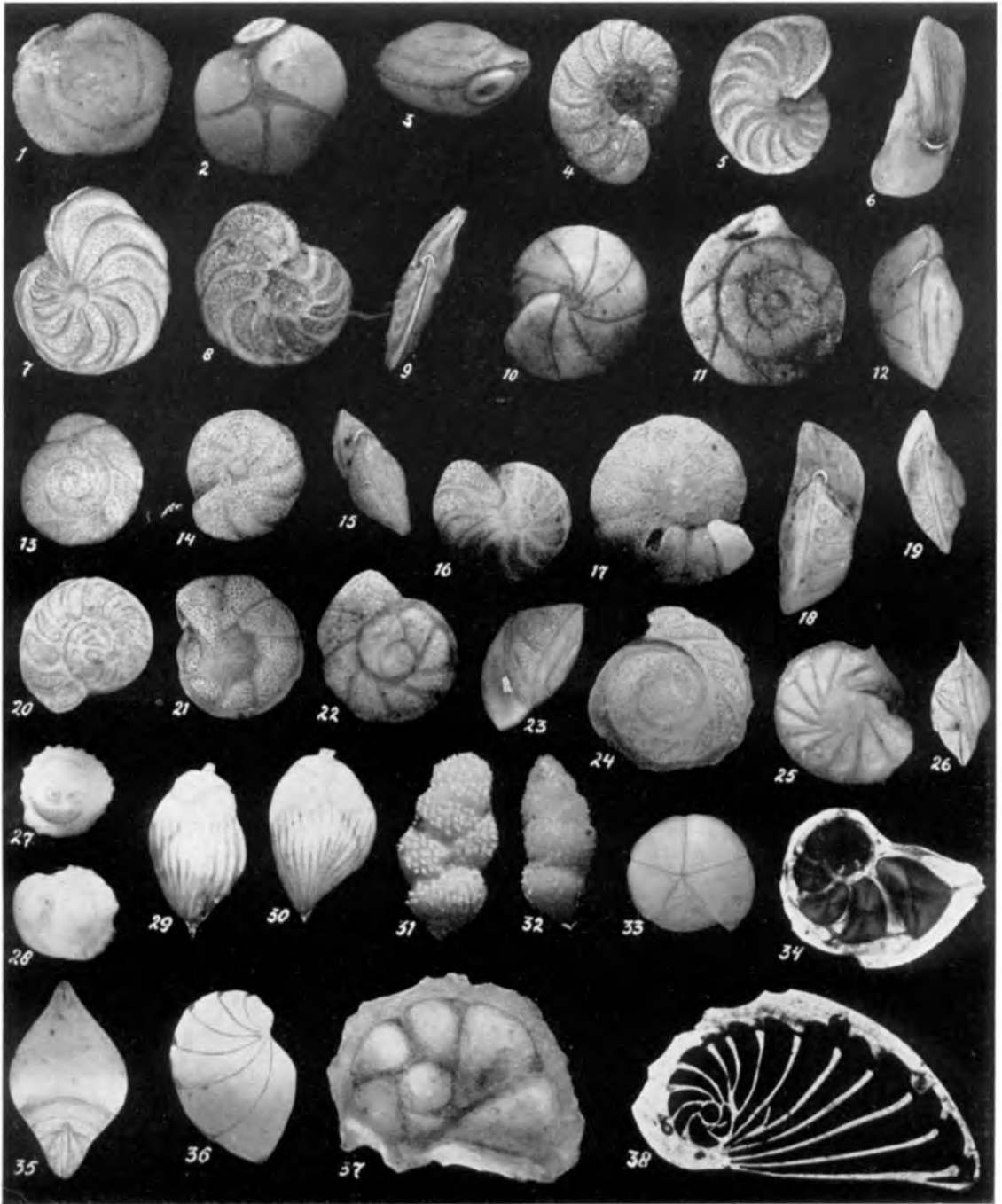
*Cibicides tschoppi* n. sp. VAN BELLEN. (Fig. 16, 17, 18, 19, 20).

Dorsal side flattened, ventral side convex. Periphery subacute with thickened keel, which is well developed on early chambers, but gradually disappears on final whorl. Dorsal side only showing last whorl, rest hidden by irregular mass of clear shellmaterial. Dorsal sutures curved; strongly limbate and raised in early part of last whorl, slightly limbate and depressed in last part. Spiral suture strongly limbate. Last whorl with 10—13 chambers. Ventral side somewhat evolute, showing slightly more than 1 whorl. Umbo with boss of clear shellmaterial. Sutures curved, slightly depressed. Surface coarsely perforated. Aperture an arched slit over the periphery. Diameter  $\leq 1.05$  mm; height  $\leq 0.4$  mm. Differs from *C. sassei* in having larger size and more chambers in last whorl, from *Eponides cocoaensis* in being planoconvex, in having a dorsal mass of clear shellmaterial, in having limbate dorsal sutures, and in its larger size, from *Planulina wuellerstorfi* in having a dorsal umbonal knob of clear shellmaterial and in its larger size, from *C. pseudoungerianus* in being planoconvex, in having a coarsely perforated ventral side, in having a keel and a not-lobulated periphery.

## LITERATURE.

1. W. F. SANDT and F. E. von ESTORFF. Lower Miocene Foraminifera from the Southern San Joaquin Valley, Cal. J. Pal. 7:154-174, pl. 25. (1935).
2. P. J. BERMUDEZ. Estudio microfaunológico de dos formaciones eocénicas de las cercanías de La Habana. Mem. Soc. Cubana Hist. Nat. 11. 152-180 (1937).
3. Foraminiferos pequeños de las margas eocénicas de Guanajuay, Prov. Pinar del Rio. Ibid. 11. 513-546. (1937). 12. 1-26 (1956).
4. BORNEHMANN. Die mikroscopische Fauna des Tertiarstratons von Hermsdorf bei Berlin. S.D.G.G. 7. 307-371. pl. 12-21 (1855).
5. S. B. BRADY. Foraminifera. Challenger Report. Zoology. 9. 814. crv pls (1884).
6. S. B. COLE. A Foraminiferal Fauna from the Guayabal Formation in Mexico. Bull. Amer. Pal. 14. no. 51. 48 pp. 5 pls (1927).
7. A Foraminiferal fauna from the Chapotepec Formation in Mexico. Ibid. 14. no. 53. 32 pp. 4 pls (1928).
8. S. B. COLE and R. GILLESPIE. Some small foraminifera from the Mason Formation of Mexico. Ibid. 15. no. 57B. 19 pp. 4 pls (1930).
9. R. M. CORTELL and J. R. EMIGLI. The Tranquilla Soals (Upper Eocene) of Panama and its foraminiferal fauna. J. Pal. 11. 289-305. pls. xii-xliiii. 1 fig. (1937).
10. J. A. CUSHMAN. A Monograph of the Foraminifera of the South Pacific Ocean. Bull. U.S. Nat. Mus. 71. 5. 81 pp. 31 pls (1915).
11. Some Miocene and Pliocene Foraminifera of the Coastal Plain of the United States. Bull. U.S. Geol. Surv. 676. 100 pp. 31 pls (1918).
12. The smaller fossil Foraminifera of the Panama Canal Zone. Bull. U.S. Nat. Museum. 103. 45-87. pls. xix-xxxiii (1918).
13. Fossil Foraminifera from the West Indies. Contr. to the Geol. & Pal. of the West Indies. Publ. Geol. Inst. 291. 21-71. xv pls (1919).
14. The Foraminifera of the Atlantic Ocean. Bull. U.S. Nat. Mus. 104. part 4. 228 pp. 41 pls (1923).
15. The Foraminifera of the Vicksburg Group. U.S. Geol. Surv. Prof. Paper 133. 11-71. pls 1-viii (1923).
16. New Foraminifera from the Upper Eocene of Mexico. Contr. Cushman Labor. For. Res. 1. 4-8. 1 pl (1925).
17. Some fossil Bolivians from Mexico. Ibid. 1. 81-89. pl. 12 (1926).
18. Some new Foraminifera from the Upper Eocene of the S.W. coastal plain of the U.S. Ibid. 2. 29-38. pl. 4, 5 (1926).
19. New and interesting Foraminifera from Mexico and Texas. Ibid. 3. 111-119. pl. 32, 33 (1927).
20. Some characteristic Mexican fossil Foraminifera. J. Pal. 1. 147-172. pls. 23-28 (1927).
21. Foraminifera of the genus *Siphonina* and related genera. Bull. U.S. Nat. Mus. 72. no. 20. 15 pp. 4 pls (1927).
22. Recent Foraminifera from the West Coast of America. Bull. Scripps Inst. Oceanogr. Techn. Ser. 1. 10. 119-188. pls. 1-6 (1927).
23. Additional Foraminifera from the Upper Eocene of Alabama. Contr. Cushman Lab. For. Res. 4. 73-79. pl. 10 (1928).
24. A late tertiary fauna of Venezuela and other related regions. Ibid. 5. 77-101. pls. 12-14 (1929).
25. Planulina arimansensis d'Orb. and *P. wuellerstorffi* (Schwager). Ibid. 5. 102-105. pl. 15 (1929).
26. The Foraminifera of the Chitral subfamily Virgulitidae. Ibid. 6. 9. 228 pp. 24 pls (1931).
27. The Foraminifera of the Atlantic Ocean. Bull. U.S. Nat. Mus. 104. part 8. 178 pp. 26 pls (1931).
28. A preliminary report on the Foraminifera of Tennessee. Bull. Geol. Dept. Tennessee. 41. 112 pp. 15 pls (1931).
29. Notes on the Foraminifera described by Satchell in 1931. Contr. Cushman Labor. For. Res. 7. 62-72. pls. 8, 9 (1931).
30. Eocene and Pliocene Foraminifera from the West Indies. Ibid. 9. 1-12. pls. 1, 2 (1933).
31. Upper eocene Foraminifera of the S.E. United States. U.S. Geol. Surv. Prof. Paper 181. 88 pp. 23 pls (1935).
32. A monograph of the foraminiferal family Verneuilinidae. Cushman Labor. For. Res. Spec. Publ. 7. 157 pp. 20 pls (1937).
33. A monograph of the foraminiferal family Valvulinidae. Ibid. no. 8. 210 pp. 24 pls (1937).
34. A monograph of the foraminiferal subfamily Virgulitidae. Ibid. no. 9. 228 pp. 24 pls (1937).
35. A monograph of the foraminiferal family Nonionidae. U.S. Geol. Surv. Prof. Paper 191. 91 pp. 20 pls (1939).
36. J. A. CUSHMAN and P. J. BERMUDEZ. Additional new species of Foraminifera and a new genus from the Eocene of Cuba. Contr. Cushman Labor. For. Res. 12. 55-63. pl. 10, 11 (1936).
37. Further species of Foraminifera from the Eocene of Cuba. Ibid. 13. 1-29. pl. 1, 2. (1937).
38. J. A. CUSHMAN and E. D. CAHILL. Miocene Foraminifera of the coastal plain of the Eastern United States. U.S. Geol. Surv. Prof. Paper 175A. 1-50. 13 pls (1933).
39. J. A. CUSHMAN and H. D. HOBSON. A foraminiferal fauna from the Type San Lorenzo Formation, Santa Cruz Co., Cal. Contr. Cushman Labor. For. Res. 11. 55-62. pl. 8, 9 (1935).
40. J. A. CUSHMAN and F. W. JARVIS. Cretaceous Foraminifera from Trinidad. Ibid. 4. 85-103. pl. 12-14 (1928).
41. Miocene Foraminifera from Buff Bay, Jamaica. J. Pal. 4. 353-368. pl. 32-34 (1930).
42. Upper Cretaceous Foraminifera from Trinidad. Proc. U.S. Nat. Mus. 80. 14. 60 pp. 16 pls (1932).
43. J. A. CUSHMAN and E. LAJWING. Miocene Foraminifera from Los Sauces Creek, Ventura Co., Cal. J. Pal. 5. 79-120. pl. 9-14. 5 figs (1931).
44. J. A. CUSHMAN and J. H. McMASTERS. Middle eocene Foraminifera from the Lajas formation, Ventura Co., Cal. Ibid. 10. 497-517. pls. 74-77. figs 1-4 (1936).
45. J. A. CUSHMAN and J. A. PARKER. Miocene Foraminifera from the Tumbler formation of the E. side of the San Joaquin valley, Cal. Contr. Cushman Labor. For. Res. 7. 1-16. pl. 1, 2. (1931).
46. J. A. CUSHMAN, R. E. and E. C. STEWART. Tertiary Foraminifera from Humboldt Co., Cal. Trans. San Diego Soc. Nat. Hist. 6. 44-94. 8 pls (1930).
47. J. A. CUSHMAN and C. WYTHE COCKE. The Hyrax calcareus marl of Mississippi and its Foraminifera. U.S. Geol. Surv. Prof. Paper 1298. 79-122. pls. 14-28 (1922).
48. J. CZERK. Beitrag zur Kenntnis der fossilen Foraminiferen des Pinar Beckens. Haidingers Naturw. Abh. 2. 1. 137-150. pls. 12, 13 (1848).
49. J. E. DORR. New data on the correlation of the Lower Oligocene of S. and C. America with that of S. Mexico. J. Pal. 7. 432-438 (1933).
50. J. J. GALLOWAY and W. MCKENRY. A lower tertiary fauna from Manabí, Ecuador. Bull. Amer. Pal. 15. 55. 56 pp. 6 pls (1929).
51. W. H. HADLEY. Some tertiary Foraminifera from the north coast of Cuba. Ibid. 20. 704. 40 pp. 5 pls (1934).
52. H. D. HEDBERG. Foraminifera of the Middle tertiary Carapita formation of northeastern Venezuela. J. Pal. 11. 661-669. pls. 90-92 (1937).
53. H. V. HOWE. Additions to the list of species occurring in the type Red Bluff Clay, Hissawee, Mississippi. J. Pal. 2. 173-176 (1928).
54. H. V. HOWE and E. WALLACE. Foraminifera of the Jackson Eocene at..... Louisiana. Louisiana Geol. Bull. 2. 118 pp. 15 pls. 2 figs (1932).
55. F. KÄRBER. Zur Foraminiferenfauna in Osterreich. Sitz. ber. Akad. Wiss. Wien. Math. Nat. Cl. 55. 331-368. pl. 1-5 (1867).
56. A. LEBENS. Die Tertiärfurmen in Albanien. Die Foraminiferen. Palaeontographica. 70. 41-114 (1928).
57. H. W. MATTHEW. Die Lagerung des deutschen Tertiärs. Palaeontographica. 90. Abt. A. 49-106. pls. 3-8 (1939).
58. W. L. F. NUTTALL. Notes on the Tertiary Foraminifera of Southern Mexico. J. Pal. 2. 372-376. pl. 50. (1928).
59. Tertiary Foraminifera from the Naparima Region, Trinidad (B. W. L.). Q. J. Geol. Soc. London. 84. 57-115. pls. 3-8 (1928).
60. Eocene Foraminifera from Mexico. J. Pal. 4. 271-293. pls. 23-25. 1 textfig. (1930).
61. Lower Oligocene Foraminifera from Mexico. Ibid. 6. 3-35. pls. 1-11. (1932).
62. Upper Eocene Foraminifera from Venezuela. Ibid. 9. 121-131. pls. 14, 15. (1935).
63. A. O'NEIGHY. Tableau méthodique de la classe des Céphalopodes. Ann. Sc. Nat. 7. 96-169, 245-314. pls. 10-17 (1826).
64. Foraminifères. In: R. de la SAGRA. Histoire physique.... de l'île de Cuba. 224 pp. Atlas. (1839).
65. Foraminifères. In: Voyages Amériques méridionales. 5. pt. 5. 1-77. pls. 1-9 (1839).
66. Foraminifères fossiles du bassin de Vienne (Autriche). 132 pp. 21 pls (1846).
67. D. A. PALMS. The foraminiferal genus Guebelina in the Tertiary of Cuba. Mem. Soc. Cubana Hist. Nat. 8. 73-76. figs. 1-8 (1934).
68. B. J. PALMER and P. J. BERMUDEZ. An oligocene foraminiferal fauna from Cuba. Mem. Soc. Cub. Hist. Nat. 10. 227-316. pls. 13-20 (1936).
69. F. J. PETERS. Geology and paleontology of Bonaire (D.W.I.). Geogr. Geol. Meded. Utrecht. Physogr. Geol. Reeks. 8. 103 pp. (1933).
70. Rutzenia, a new name for Bonarea Pipera. Contr. Cushman Labor. For. Res. 9. 30 (1933).
71. J. E. REUSS. Beiträge zur Kenntnis der tertiären Foraminiferen-Fauna. Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien. Math. Nat. Classe. 48. 36-71. pls. 1-8 (1865).
72. C. REUBACH. Fuselle Foraminiferen von San Nicobor. Reise der..... Novara. Geol. Theil. II. 2. 187-266. pls. 4-7 (1866).
73. R. E. and E. C. STEWART. Post-miocene Foraminifera from the Ventura Quadrangle, Ventura County, Cal. J. Pal. 6. 62-72. pls. 8, 9 (1930).
74. H. V. HOWE. Les Foraminifères de l'Eocène des environs de Paris. Mém. Soc. Géol. de France. 2. 3. 193 pp. pl. 9-27 (1882).
75. H. THALMAN. Nomenclator zu den Tafeln 1 bis 115 in H. B. BRADY's Werk über die Foraminiferen der Challenger-Expedition, London 1884.
76. Nachtrag zum Nomenclator zu BRADY's Tafelband der Foraminiferen der Challenger Expedition. Eol. Geol. Helvetiae. 26. 251-255 (1933).
77. A. A. THALMAN. Cretaceous and tertiary Foraminifera from southern Santa Clara Province, Cuba. J. Pal. 11. 91-109. pls. 15-19 (1937).
78. W. F. WHITE. Some index Foraminifera of the Tampico Embayment of Mexico. Ibid. 3. 30-57. pls. 4, 5. (1929).
79. J. F. G. DE WIT. Geologische u. paleontol. Beschreibung der Umgebung von Ljubuzki, Herzegovina. Acad. Thesis. Utrecht. 99 pp. 5 pls. Map. Sections. (1941).

R. C. VAN BELLEN, J. F. C. DE WITT PUYT, A. C. RUTGERS AND J. VAN SOEST:  
SMALLER FORAMINIFERA FROM THE LOWER OLIGOCENE OF CUBA.







**Zoology.** — *Note on a diseased dental condition in Hippopotamus amphibius L.* By D. A. HOIJER. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

An adult skull of *Hippopotamus amphibius L.* from Inhamissengo, Mozambique (cat. ost. n. don. H. P. N. MULLER, 1893) in the collection of the Rijksmuseum van Natuurlijke Historie at Leiden shows a remarkable abnormality in the arrangement of the lower incisors. Normally in hippopotami four incisors develop in the lower jaw. The cylindrical inner ones are the largest, their alveoli extend almost throughout the length of the symphysis. The incisors of the outer pair are smaller; they are laterally compressed and their upper margins are placed in a straight line with, or a little higher than those of the central ones. The depth of their alveoli varies from 0.45 to 0.60 of those of  $I_1$ .

In our specimen (fig. 1), instead of two large central incisors, there is on the right side, considerably behind the level of the outer incisors (the left was removed before the picture was taken) a peculiarly shaped alveolus. The tooth is lost, the alveolus is dorso-ventrally compressed, the horizontal diameter being 38 mm, the vertical only 28 mm. The depth is 70 mm, whilst the length of the symphysis measures 165 mm! The alveolus of this right  $I_1$  does not run parallel to those of the two  $I_2$ , but has an oblique direction, the posterior part is situated above that of the right  $I_2$  and below  $P_3$ . As a result of this position of  $I_1$  the anterior root of  $P_2$  ( $P_1$  does not occur in the permanent set) is partially absorbed and bent posteriorly so that the tooth can be easily removed from the jaw.  $P_3$ , of which only the roots are present, has undergone a rotation as can be seen in the photograph, causing a broadening of the jaw, which has, to a smaller extent, also occurred in the corresponding part of the left ramus. The presence of a thin bony scale, which has been formed inside the alveolus of the right  $I_1$  and which lies on its anterior wall (fig. 3, a), may also be taken as proof of the shifting of this incisor to a more posterior position. This bony scale shows a ridge which brought about a longitudinal groove in the incisor.

At the left side, corresponding in level with the alveolus of the right  $I_1$ , only a small opening, 11 mm in diameter, is present.

Two longitudinal sections were made through the symphysis, one through the middle of this opening, exactly halfway between the left  $I_2$  and the median plane and the second on a corresponding level at the right side. In normal jaws these sections should have passed longitudinally through the deep alveoli of the central incisors. Here at the left side indeed a cavity was found, resembling an alveolus as far as concerns its situation but much narrower, with a rough wall and at the anterior side passing into a number of narrow channels, one of which is seen in the section (fig. 2). In the cavity, and partly in an expansion of it, there lies an irregular mass of calcified dental tissue (c). This calcified mass has locally widened the cavity and has even caused a slight constriction of the alveolus of the adjacent incisor, so that the proximal extremity of the latter is more or less indented laterally (fig. 4, upper figure, lower side at the left). The cavity communicates with the alveolus of the left  $I_2$  by several small openings, whilst it opens to the upper surface of the symphysis by a round hole (b), the latter being the only distinct indication of this cavity at the outside of the jaw. The wall of the round hole is smooth in contradistinction to that of the cavity. In the upper part of the symphysis the layer of compact bone is very thick (e), in the lower part it has the normal thickness. Under the posterior part of the cavity the bony structure of the jaw is coarse and irregular, whilst next to this coarse part there is a region with finely cancellated bony structure (d).

In the right section (fig. 3), the central part shows the same coarse and irregular structure whilst in the lower part there is a cancellous region as in the left section. The solid and very hard exterior wall here too is very thick at the upper and posterior regions. The bony scale, which has already been referred to above, is shown in this section (a).

At first one is inclined to regard the cavity at the left side of the jaw as a dentigerous cyst, the fluid contents of which might have found an outlet through the round hole at the upper surface (b), this being the spot of least resistance. But against this supposition the following facts may be put forward:

The elongated shape of the cavity is quite similar to that found normally in very young animals, where it contains the germ of the permanent incisor. When cysts occur, they grow to a rounded shape, and in further development they cause an expansion of the jaw. Moreover the round hole has a smooth wall, whilst outlets of pus always are much smaller and have a more or less rough wall.

Therefore this hole must be regarded as the alveolus of the deciduous incisor.

The narrow and smooth channels, which run forward from the cavity are those which are present in normal jaws too, in the living animal they contain bloodvessels. They are always found between the teeth and especially in the frontal part of the lower jaw.

As the alveolus of the left first deciduous incisor corresponds in place exactly with the opening of the alveolus of the right central incisor it is probable that the right deciduous incisor also erupted in this uncommon spot.

For an explanation of the origin and cause of this abnormality two possibilities must be considered.

I. The incisors might have shifted to an uncommon position as a result of a narrowing of the jaw. This phenomenon has been met with in several species of mammals. In the present case, however, this explanation does not hold, for:

1. the jaw in this specimen is not narrower, but even broader than in some normal specimens, and
2. the teeth have shifted over a much greater distance than is usually caused by a narrowing of the jaw.

II. The deciduous incisors might have shifted to this abnormal position already before erupting. Neither COLYER (1936) nor BENNEJEANT (1936) mention cases of misdirection of the eruption of deciduous teeth, but this does not mean that it is impossible. The milk dentition in *Hippopotamus amphibius* L. is not long in use. SIGEL (1883, p. 11), e.g., records that the change of the lower central incisors occurs at the age of ca. 1¼ year, while the maximum duration of life (in zoological gardens; data from animals in the wild state are not known) recorded is 41 years (FLOWER, 1931, p. 225).

As Mr. C. N. VAN RIJSWIJK kindly informed me, abnormal eruption of deciduous teeth in man, due to trauma by delivery by forceps, has been recorded by HENRY A. P. WILD at the 53rd meeting of the American Dental Society of Europe at Lausanne, August 7—9, 1939. The latter cause seems to me the most probable, and, therefore, I believe that the present case must be explained as follows:

As a result of trauma in this exposed and vulnerable part of the jaw during or shortly after birth the germs of the central incisors may have become displaced and afterwards erupted behind the level of the outer incisors<sup>1)</sup>. These milk incisors may have become carious, perhaps also on account of their abnormal situation, and thereupon pulpitis and periodontitis originated in the left incisor. The rough wall of the cavity indicates the action

<sup>1)</sup> KERBERT records that in the twenty-five cases observed in the zoological garden at Amsterdam up to 1922 the birth always took place on land, though the animal was given free access to the water (KERBERT, 1922, p. 189). Dr. A. L. J. SUNIER kindly informed me that also in later years at Amsterdam it never occurred otherwise. Several cases are known, however, in which the animal was born in the water, e.g., that recorded by ALVING (1932). VEVERS (1926) assumes that in nature the young probably is born in a bed of reeds close to the edge of the water or in very shallow water.



of pus bacteria. The germ of the left central incisor became surrounded with pus and devitalised; the disease, which must have affected the animal at an early stage after the eruption of the deciduous incisors then developed into a chronic osteitis and may have caused the displacement of the right  $I_1$ , which for the rest has followed his predecessor and erupted, to a still more posterior position. In the meantime the osteitis has given rise to an eburnification in the upper section of the jaw, on the other hand to a rarefaction of the bony tissue in the lower section of the jaw. The small alveolus at the left side may have been filled with tissue, or, as is not uncommon when the eruption of the permanent tooth is prevented, the deciduous incisor may have subsisted for a long time; so the pus could not reach the small alveolus and its wall remained smooth.

As the animal is fully adult and no external expansion of perforations of the jaw are visible, it was only a local inflammation. The rest of the skull shows no morbid alterations except for a carious upper left fourth premolar. The disease was still progressing at the time when the animal was shot and could have given rise to osteomyelitis.

The importance of the diagnosis of this anomaly in the dentition of *Hippopotamus amphibius* L. is evident as the determination of the fossil hippopotami from the Siwaliks and Java for the greater part rests upon minor differences in the arrangement of the lower incisors.

Due to the endostomatic situation of the lower central incisors the outer incisors, especially the left one, are placed nearer to the mesial line and are larger than normally. The ratio of the distance separating the outer incisors (86 mm) to that between the lower canini (240 mm) is 0.36, while in normal specimens this ratio varies from 0.44 to 0.60. The depth of the alveolus of the outer incisor at the right side is 110 mm, at the left side 115 mm. In normal cases the corresponding central incisors would have had alveoli of at least 200 mm depth, the length of the symphysis in our specimen measures only 165 mm. The left outer incisor (upper tooth of fig. 4) with its indentation at the pulp cavity, is twisted for about 90°. Its situation at the pulp cavity is normal, the vertical diameter being the largest, while at the alveolar border the greatest diameter is placed horizontally. The obliquely abraded surface at the outer part of the extremities of both  $I_2$  is more pronounced than in normal specimens, in which the outer incisors oppose themselves more directly to the outer pair in the upper jaw and at times even are worn towards the inner side of their tips. The greatest diameter at the right side is 30 mm, at the left side 33 mm. In normal adult skulls with lower outer incisors from that size, the central incisors have a diameter of 50 mm or more!

Due to the shifting of the lower  $I_2$  nearer to the mesial line the upper  $I_2$  are slightly bent inwards. The narrow strip of enamel along the convex side of these upper teeth has cut a deep groove in the lower incisors (fig. 4).

The upper central incisors show no trace of friction with antagonists, the displaced right lower  $I_1$ , therefore, did not come into contact with one of them. The left is shorter than the right, their tips are rounded off like those of the tusks of an elephant, probably caused by rubbing against hard objects. The left on its posterior surface shows a horizontal so-called wedge-shaped defect (fig. 5), which cannot be explained as having originated by friction against an antagonist. Similar wedge-shaped defects have been recorded as occurring on the incisors and canini of horses, ruminants and Kamchatka-bears (BREUER, 1933, p. 113); like the former the latter feed on grass. The defect in our specimen is only shallow and cannot be artificial for it has a brown colour like undamaged parts of the tooth.

BREUER, who describes wedge-shaped defects on the posterior surface of the lower canini of *Ursus spelaeus* Rosenm.<sup>1)</sup> suggests that they are caused by mechanic erosion when tearing off grass (l.c., p. 106). Although BREUER's statements apply to defects on the lower teeth exclusively, in the present case the following explanation may hold:

<sup>1)</sup> KUBACSKA (1935) found them too on the external surface of the lower  $I_3$  opposing the canine, and on the upper canini of the same species (l.c., pl. V, fig. 3, 7).

Due to their endostomatic situation the central lower incisors could not perform their normal function while grazing and uprooting aquatic plants; the upper incisors took over the function of the lower ones. Consequently the vertical pulling movement was changed into a movement directed sideways to the right, and the grassblades and stalks were pulled off between the upper teeth. On the anterior surface of  $I_2$ , however, erosion was entirely prevented by its strip of enamel (fig. 5). The defect on the posterior surface of the first incisor is only shallow because the longitudinal strip of enamel along its outer surface more or less prevented the erosion.

The fact that the free part of the left upper  $I_1$  is shorter than the right indicates that it was more in use. As consequently the animal moved its head to the right when feeding in all probability it was left-handed.

For valuable information and kind advice I am greatly indebted to Dr. L. D. BRONGERSMA, Leiden; Dr. TH. E. DE JONGE, Amsterdam; Mr. C. N. VAN RIJSWIJK, D. D. S., The Hague; Dr. A. L. J. SUNIER, Amsterdam; Dr. J. D. A. WAIBOER, The Hague; and Dr. J. ZELDENRUST, Leiden.

#### LITERATURE.

- ALVING, TH., Flusspferdgeburt und andere Ereignisse im Zoo Kopenhagen. Zool. Gart., n.s., vol. V, pp. 34—37 (1932).
- BENNEJEANT, CH., Anomalies et variations dentaires chez les Primates. Clermont-Ferrand, 258 pp., 223 figs. (1936).
- BREUER, R., Über das Vorkommen sogenannter keilförmiger Defekte an den Zähnen von *Ursus spelaeus* und deren Bedeutung für die Paläobiologie. Palaeobiologica, vol. V, pp. 103—114, pl. VI—X (1933).
- COLYER, F., Variations and diseases of the teeth of animals. London, VIII+ 750 pp., 1007 figs. (1936).
- FLOWER, S. S., Contributions to our knowledge of the duration of life in vertebrate animals. Proc. Zool. Soc. London, pp. 145—234 (1931).
- JENTINK, F. A., Catalogue Ostéologique des Mammifères. Muséum d'Histoire Naturelle des Pays-Bas, vol. IX, Leiden, 360 pp., 12 pls. (1887).
- KERBERT, C., Over dracht, geboorte, puberteit en levensduur van *Hippopotamus amphibius* L. Bijdragen tot de dierkunde, Feestnummer Dr. Max Weber, pp. 185—191 (1922).
- KUBACSKA, A., Pathologische Untersuchungen an ungarländischen Versteinerungen. V. Kieferknochen-Erkrankungen und Anomalien der Zähne bei dem Höhlenbären. Math. u. Naturw. Anz. d. Ungar. Akad. d. Wiss., vol. LII, pp. 695—712, pl. IV, V (1935).
- , Id., VIII. Pathologisch veränderte Metapodien und Phalangen pliozöner Raubtiere. Palaeobiologica, vol. VI, pp. 214—219, pl. XVI—XVIII (1938).
- SIGEL, W. L., Das Nilpferd des Zoologischen Gartens zu Hamburg. Zool. Gart., vol. XXIV, pp. 10—21 (1883).
- VEVERS, G. M., Some notes on the recent birth of a *Hippopotamus* (*H. amphibius*) in the Gardens. Proc. Zool. Soc. London, pp. 1097—1100, 2 textfigs. (1926).



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

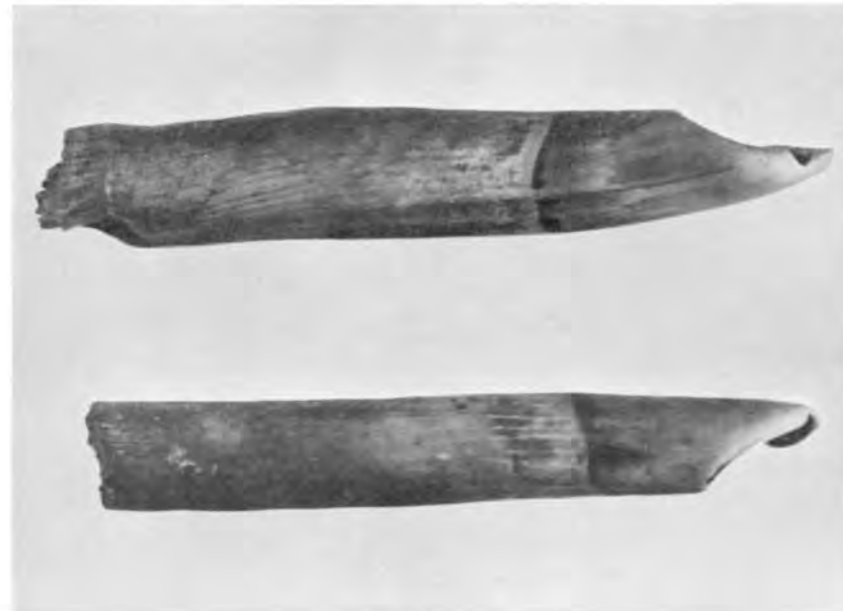


Fig. 4.



Fig. 5.

EXPLANATION OF FIGURES.

Fig. 1. *Hippopotamus amphibius* L. Rijksmuseum van Natuurlijke Historie, Leiden, cat. ost. n. Frontal part of the mandible showing the abnormal arrangement of the incisors.  $P_3$  at the right side is rotated. The left  $I_2$  has been removed. About  $\frac{1}{3}$  nat. size.

Fig. 2. Vertical section through the left part of the symphysis, inner view. *a*: alveolus of the left  $I_2$ ; *b*: alveolus of the left  $id_1$ ; *c*: dental mass in situ; *d*: cancellated part of the bony structure; *e*: upper part of the symphysis with eburnification. About  $\frac{1}{2}$  nat. size.

Fig. 3. Vertical section through the right part of the symphysis, inner view. *a*: bony scale on the anterior wall of the alveolus of the right  $I_1$ . About  $\frac{1}{2}$  nat. size.

Fig. 4. Lower right and left  $I_2$  from the specimen shown in fig. 1, viewed from above, showing the indentation in the left (upper fig.) and the grooves in the abraded surfaces. About  $\frac{1}{2}$  nat. size.

Fig. 5. Left frontal part of the maxillary, side view, showing the wedge-shaped defect on the posterior surface of  $I_1$ . About  $\frac{4}{5}$  nat. size.

**Comparative Physiology.** — *Ueber den Tonus des Schneckenfußes (Helix pomatia L.).*  
I. *Der Tonus gemessen an der Pedalkonstanz.* (Vorläufige Mitteilung <sup>1)</sup>). Von  
N. POSTMA. (Aus dem Institut für vergleichende Physiologie der Universität zu  
Utrecht.) (Communicated by Prof. H. J. JORDAN.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

#### A. Einleitung.

Es gehört zu den Funktionen des Gastropodenfußes (*Aplysia*, *Helix*, *Arion*, *Limax*) sich durch Zug an seinen Enden dehnen, d.h. plastisch deformieren zu lassen. Hierdurch reguliert er (übrigens auch der Rest des Hautmuskelschlauches) den Innendruck des Schizozöls. JORDAN hat diese Funktion früher mit der auxotonischen Methode untersucht, da diese den biologischen Verhältnissen der Selbstentlastung bei Dehnung entspricht. Hierbei kommt es zu einem Grenzwert der Belastung, mit der die Viskosität (der sogenannte Tonus) dieser glatten Muskeln im Gleichgewicht ist, sodass weitere plastische Dehnung vom Erreichen dieses Zustandes an unterbleibt. Diesen Zustand nannte JORDAN (5 und 6) die „Konstanz“. Je nach den Versuchsbedingungen werden wir verschiedene Formen der Konstanz wie folgt unterscheiden:

I. **Pedalkonstanz.** Die Ganglien, vor allem die Pedalganglien, sind vorhanden.

a. **Muskelkonstanz** nennt JORDAN in diesem Falle das in Frage stehende Gleichgewicht bei niedriger Belastung.

b. **Zentralkonstanz**, die besonderen Gesetzen entspricht, tritt bei hoher Belastung auf.

II. Wenn man alle Ganglien vor der Belastung extirpiert, bleibt der Muskulatur als Zentralnervensystem das immanente Nervennetz (BIEDERMANN). Obwohl der Einfluss dieses Netzes auf den Tonus noch unbekannt ist, nennen wir das entsprechende Gleichgewicht in diesem Zustande, um der Möglichkeit des Bestehens einer solchen niedrigsten zentralen Innervation des Tonus gerecht zu werden, „**Netzkonstanz**“.

Die verschiedenen Formen von Konstanz sind offenbar Masse für den Grad des Tonus. Man wird sich fragen müssen, an welcher Stelle der Dehnungskurve (Zeit-Längenkurve) die Konstanz eintritt, also bei welcher Länge, nach welcher Dehnungszeit und, vor allem bei auxotonischer Methode, bei welcher Last. Je niedriger der Tonus ist, desto geringer wird die konstant getragene Last und desto länger der Muskel bei Eintritt des Gleichgewichtes sein. Weitere Fragen sind: wie ändert sich die Konstanz, wie steigt oder fällt der Tonus, wenn die Versuchsbedingungen geändert werden?

Ein zweites Mass für den Tonus ist der Widerstand des Muskels, der bei der Dehnung überwunden werden muss. Wie passt sich der sich dehnende Muskel der Last an, welche ist die Form der Dehnungskurve, deutet sie auf mehr oder weniger Widerstand gegen passive Dehnung? Bisher war in den Versuchen unseres Institutes dieser Widerstand, also der Neigungswinkel der Dehnungskurve gegen die X-Achse, das am meisten gebrauchte Mass für den Tonus. Aufgabe dieser Arbeit ist unter anderem, in dieser Beziehung auch die verschiedenen Formen der Konstanz zu ihrem Rechte kommen zu lassen; wir beschränken uns in dieser Mitteilung auf die Pedalkonstanz.

JORDAN hat die nachfolgenden Unterschiede zwischen diesen Konstanztypen feststellen können:

**Muskelkonstanz** (mit G. pedale, bei geringer Last) ist niedriger (d.h. sie tritt bei grösserer Länge des Fusses auf) als **Netzkonstanz** (ohne G. pedale) und die auxotonische Dehnungskurve des ganglienlosen Fusses liegt bei niedriger Last immer oberhalb der Kurve des Muskels, der mit dem Pedalganglion in Verbindung steht.

**Zentralkonstanz** (mit G. pedale, bei hoher Last) ist höher als **Netzkonstanz**, aber in der Dehnungskurve tritt eine zwiefältige Ganglienwirkung auf: erst Beschleunigung der Dehnung, bis zu einem gewissen Punkte, dann aber Umkehrung dieser tonushemmenden

<sup>1)</sup> Mit Unterstützung der Niederl. Regierung aus den Einkünften der „Zomerpostzegels“.



Funktion, so dass zuletzt das ganglienlose Tier stets tiefere Konstanz zeigt als das normale. Diese Umkehrung der Ganglienwirkung hat JORDAN (14) als „Umschlag“ bezeichnet. Da die auxotonische Dehnungskurve, die zu Netzkonstanz führt, schliesslich bei Eintreten der Zentralkonstanz diejenige des Objektes mit G. pedale überholt, schneiden beide Kurven einander.

Durch folgende Methoden kann man die Konstanz beeinflussen:

1. *Chemisch:* a. Bepinselung der Pedalganglien mit 2% Kokainlösung dämpft deren Aktivitätszustand durch schwache Kokainisierung derart, dass sie Erniedrigung der Pedalkonstanz bedingt. Steigerung des Erregungszustandes durch Bepinselung der genannten Ganglien mit Kochsalzlösung oder durch Auflegung von Kochsalzkristallen hat Erhöhung der Pedalkonstanz zur Folge. b. Injektion einer schwachen Dosis Kokain in die Muskulatur oder Bepinselung des Fusses mit diesem Alkaloid setzt den Tonus herab und verursacht Abschwächung der Muskelkonstanz.

2. *Reflektorisch:* In JORDANS „Halbtierversuchen“ wird der Schneckenfuss durch einen Schnitt in der Medianebene derart in seine beiden symmetrischen Hälften geteilt, dass diese nur noch durch das Zentralnervensystem verbunden sind. Ein analoges Präparat gewinnt JORDAN nach Exstirpation der Ganglien, dadurch, dass er bei der Halbierung des Fusses eine rostrale Muskelbrücke ausspart. Beide Hälften sind nunmehr lediglich durch das Nervenetz in dieser Brücke mit einander verbunden.

Die eine Fushälfte des Präparates mit Ganglien wird durch mittelhohe Belastung zur Konstanz gebracht. Wir nennen diese Hälfte die „registrierende“ Hälfte; sie befindet sich nunmehr offenbar in einem Zustand, den man „Mittelkonstanz“ nennen könnte<sup>1)</sup>. Wird nun die andere Hälfte mit hohem Gewicht belastet, dann schwindet die Konstanz der „registrierenden Hälfte“: sie lässt sich aufs Neue durch unveränderte Belastung dehnen; Entlastung der schwer belasteten Hälfte hat Wiederverkürzung der registrierenden zur Folge. Es tritt daher in beiden Hälften eine Koordination des tonischen Muskelzustandes auf.

Eine derartige Koordination zeigt sich nicht nur, wenn die Tonusänderung durch Belastung oder Entlastung hervorgerufen wird; man kann den Tonus der einen Hälfte auch durch Reizung steigern, oder durch Kokaïnisierung vermindern, immer folgt ihr die registrierende Hälfte.

Im wesentlichen die gleichen Erscheinungen erhält man, wenn die beiden Hälften nur durch eine Muskelbrücke miteinander verbunden sind und die Ganglien fehlen. Jedoch sind dann die Tonusänderungen in der registrierenden Hälfte u.a. wegen des starken Dekrements und der geringeren Leitungsgeschwindigkeit in den Nervenetzen, viel schwächer; sie äussern sich am besten durch entsprechende Aenderungen der Steilheit der Dehnungskurve. Ein ähnlicher aber geringerer Unterschied als zwischen Pedal- und Netzkonstanz ergibt sich für Zentral- und Muskelkonstanz: Bei dieser fand JORDAN im Halbtierversuch bei niedrigerer Belastung „unter sonst gleichen Bedingungen in sehr geringem Grade Tonusfall, und Entlastung bedingt Stillstand, keine Steigerung“ (5, S. 214 u. 6, S. 547).

Von 1907 an ist die auxotonische durch die isotonische Dehnungsmethode ersetzt worden. Der ganglienlose Fuss lässt sich bei dieser konstanten Belastung nach einer kleinen, elastischen Streckung langsam und gleichmässig dehnen (11 u. 12). Ueber eine Konstanz wird in den entsprechenden Arbeiten JORDANS nicht mehr berichtet. Da die Muskellänge an sich kein Mass für den Tonus ist, wird die Dehnungsgeschwindigkeit, das heisst die Längenänderung als Funktion der Zeit, als solches verwendet. Es ist noch zu bemerken, dass nach 1907 ein Tragen der Last durch die Muskulatur ohne Ganglien an Kontraktur, einem pathologischen Zustande, zugeschrieben und also bei der Beschreibung und Deutung der Tonuserscheinungen des Schneckenfusses ausser Acht gelassen wurde. Daher hat JORDAN keine Netz- neben der Pedalkonstanz unterschieden.

<sup>1)</sup> Später handelt es sich um „die Reaktion einer Fushälfte auf eine geringe Last“, also um Muskelkonstanz (7, S. 215 gegenüber 5, S. 213).

Andererseits werden von 1907 an die Muskel- und Zentralkonstanz unter dem Namen Zentraltonus zusammengefasst. Sowohl bei geringer wie bei hoher Belastung zeigt der unverändert belasteten Muskel mit Pedalganglien nach einem Umschlag (Abb. 1 bei A') ein Tragen der Last und die Dehnungskurve kreuzt immer jene des ganglienlosen Fusses (Abb. 1 in B). Für den Zentraltonus ist die Länge des Muskels bei dieser Konstanz das Mass für den Tonus.

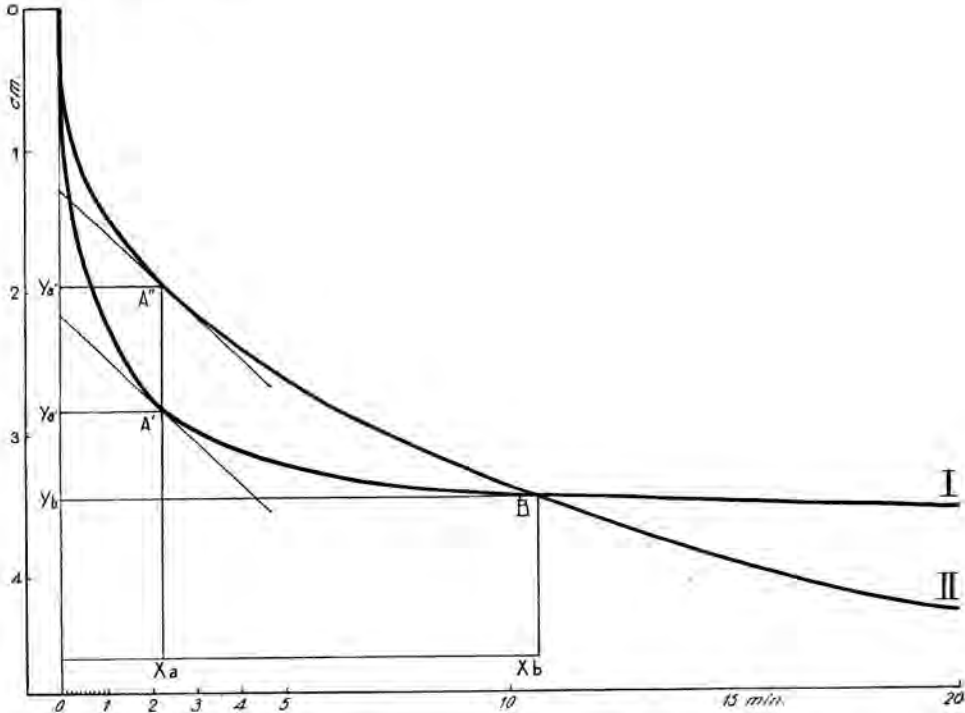


Abb. 1. Dehnungskurven zweier Helixfüsse: I mit Pedalganglien, II ohne Ganglien. Der Fuss mit Ganglien zeigt zuerst wesentlich niedrigeren Tonus als der andere (Tonuslösung durch die Pedalganglien). In A' erfolgt durch Ganglieneinfluss der „Umschlag“: Der Neigungswinkel der Tangente ist gleich demjenigen von Kurve I in Punkt A'' (gleiche Dehnungsgeschwindigkeit). Der Umschlag tritt gut 2 min nach Belastungsanfang auf; durch ihn wird daher der „Tonusspiegel“ in beiden Füßen für kurze Zeit gleich gemacht. In B, in dem beide Kurven einander schneiden (fast 11 min nach Belastungsanfang), ist das Tonusniveau beider Füße für ganz kurze Zeit gleich, bei verschiedenem Widerstand gegen Dehnung.

Bei meinen Versuchen über die Wiederherstellung des Tonus nach seinem Verlust durch passive Dehnung hat sich aber gezeigt: 1. Dass der Helixfuss mit Pedalganglien ganz verschieden reagiert je nach dem die Belastung hoch oder niedrig ist, dass sich also auch bei der Dehnung mit konstanter Last Unterschiede ergeben, die einer Zentral- und einer Muskelkonstanz entsprechen. 2. Weiter ergaben sich Umstände, unter denen die Länge, bei welcher der Pedaltonus die Last trägt, d.h. der Zustand, den ich Pedaltonusniveau nennen werde (siehe unten), sich verändert. 3. Endlich zeigte sich, dass bei dem seiner Ganglien beraubten Helixfuss auch Konstanz auftreten kann, trotzdem in meinen Versuchen konstante Last zur Anwendung kam und die Objekte sicherlich normal waren.



Unter Umständen kann diese Netzkonstanz auf dem gleichen Niveau liegen wie die Pedalkonstanz. Hierüber wird in einer folgenden Mitteilung berichtet werden.

Bevor ich näher auf meine Ergebnisse eingehe, noch eine Bemerkung zur Nomenklatur: Wenn man mit „Tonus“ das eine Mal die Länge des Muskels, das andere Mal den Dehnungswiderstand andeutet (5, S. 203; 6, S. 547/48), so gibt es nur einen einzigen Zustand, bei dem beide Definitionen gelten, nämlich während absoluter Konstanz, bei idealem Zentraltonus. Unter allen anderen Bedingungen müssen wir schärfer definieren um Misverständnisse zu vermeiden. Ich habe daher (23) unterschieden:

**Tonusniveau**, als die *Länge* des Muskels, unabhängig von dem gebotenen Widerstand;

**Tonusspiegel**, als der *Dehnungswiderstand* bei beliebiger Länge und Anwendung gleicher Last in allen verglichenen Versuchen.

B. Methodisches.

Wo liegt das Zentraltonusniveau? Im Falle eines idealen Zentraltonus (Kurve I, Abb. 1) ist die Antwort leicht zu geben: man misst die Länge des Muskels in Punkt B, und die Anfangslänge (O) und addiert hierzu die Dehnungsstrecke O—Yb.

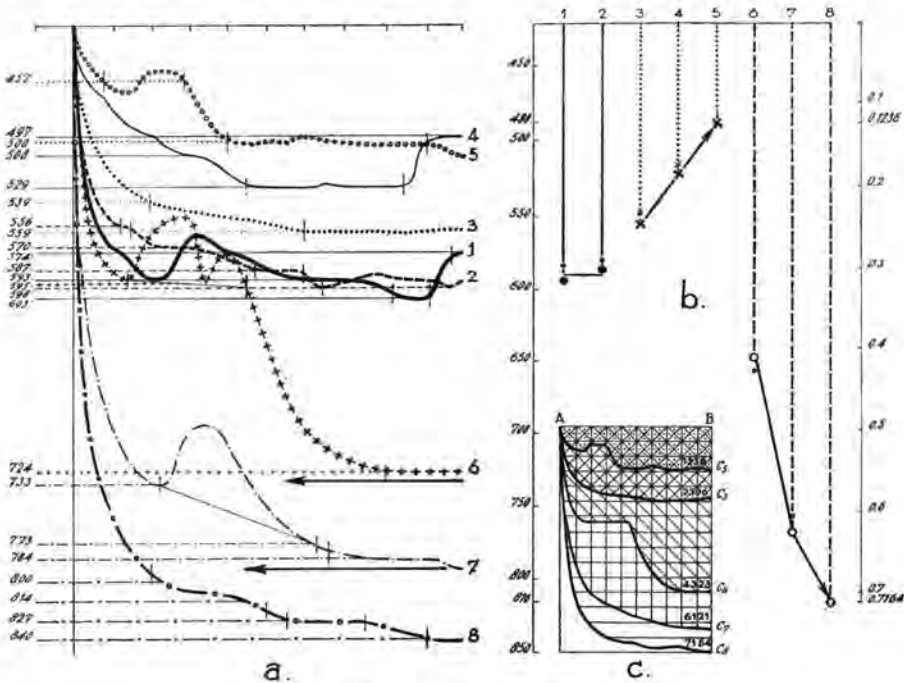


Abb. 2. Erklärung im Text.

Schwieriger aber wird die Beantwortung unserer Frage, wenn zwar Konstanz eintritt, diese aber nach kürzerer oder längerer Zeit mit einer anderen bei geringerer oder grösserer Länge vertauscht wird. (Abb. 2 a, Kurve 5, 4, 2, 6 u. 8). Ich habe dann ein mittleres Niveau berechnet aus den verschiedenen gemessenen Niveaux, der Dauer ihrer Aufrechterhaltung und zwar bei einer auf 10 min beschränkten Dauer der Dehnung; Mittleres

$$\text{Niveau} = \frac{t_1 \cdot l_1 + t_2 \cdot l_2 + \dots + t_n \cdot l_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}, \text{ z.B. für Kurve 5: } \frac{2 \times 4,57 + 5 \times 5,00}{2 + 5} = 4,88 \text{ cm.}$$

Zur Kontrolle habe ich die Oberflächen zwischen den Kurven 5 bis 8 und das Achsensystem AB—BC<sub>5</sub>/BC<sub>8</sub> (Abb. 2 c) ausgeschnitten und die Papierstücke gewogen (dritte Kolumne der Tabelle):

	Berechnet	Gewogen
Kurve 5	4.88 cm	0.1236 g
Kurve 3	5.54 ..	0.2396 ..
Kurve 5	6.47 ..	0.4323 ..
Kurve 7	7.66 ..	0.6121 ..
Kurve 8	8.19 ..	0.7164 ..
Differenz zwischen höchstem und niedrigstem Niveau (8-5)	3.28 cm	0.5928 g

In der Abb. 2 b sind die gefundenen Werte dergestalt als Ordinaten aufgetragen (links die Längen in 0,01 cm, rechts die Gewichte), dass die Extreme (Niveaux 5 und 8) je auf einem Punkte der Y-Achse zusammenfallen: Länge 4,88 = Gewicht 0,1236; Länge 8,19 = Gewicht 0,7164. Es zeigt sich dann, dass die Partner der übrigen Wahrnehmungspaare (Längenmerkmale dick, Gewichtszeichen dünn gezeichnet) fast aufeinanderfallen. Die Methode der Ausmessung der Kurven und Berechnung der Niveaux ist also befriedigend.

### C. Ergebnisse.

#### 1. Einfluss der Belastung.

Es gibt ziemlich viele Fällen (ungefähr 40%), in denen jede Ueberkreuzung der Dehnungskurven zweier Füße, von denen bei dem einen die übergeordneten Ganglien entfernt wurden, ausbleibt. Die Kurve des Fusses ohne Ganglien läuft dann dauernd oberhalb oder unterhalb der pedaltonischen Kurve (Dehnungskurve des Fusses mit Pedalganglien). So drängt sich, die Frage auf, ob das Niveau der Pedalkonstanz und der Tonusspiegel des ganglienlosen Fusses oder, seltener, das Niveau der Netzkonstanz von äusseren Faktoren bestimmt sein können, Faktoren, die noch aufzusuchen wären, oder von unkontrollierbarer endogener Natur sind.

Ergebnisse des Studiums der pedaltonischen Wiederholungskurven an ein und demselben Fusse (17, 23, 24 und 25) deuteten darauf hin, dass die Länge, welche bei einer vorhergehenden Dehnung erreicht wurde, grossen Einfluss auf das Niveau der Pedalkonstanz der nächstfolgenden Dehnung habe: Kurve 7, Abb. 2 a, zeigt den Umschlag auf dem Niveau, auf welchem die Kurve 6 endete, Kurve 8 desgleichen in Bezug auf 7 (man beachte die Pfeile). Nun wird der Schneckenfuss vor dem Dehnungsversuche, nämlich bei der Präparation (vgl. 11 u. 12), immer etwas ausgedehnt und somit mehr oder weniger gespannt. Das Präparat erreicht dadurch eine bestimmte Länge, die wir die „Spannungslänge“ nennen wollen. Tatsächlich stimmt die Länge des Fusses, die nach der eigentlichen Dehnung, durch die Pedalkonstanz behauptet wird, mit der Spannungslänge überein:

*Versuchsserie PK-R-L. C, 7. u. 8.-III-1934. 12 Schnecken von 18 g;  
Spannungslänge  $6\frac{1}{4}$  cm; Belastung variiert.*

Belastung (jede Gruppe 4 Tiere)	5 g	10 g	20 g
Niveau in cm Länge	$6.13 \pm 0.37$	$6.32 \pm 0.61$	$6.27 \pm 0.71$
Dehnungsstrecke in cm	$1.40 \pm 0.38$	$1.67 \pm 0.53$	$2.12 \pm 0.37$

*Versuchsserie PK-R-L/G, 19. u. 20.-III-1934. 11 Schnecken von 18 g und 4 von 21 g;  
Belastung 20 g; Spannungslänge 6 oder 7 cm.*

Grösse der Tiere	18 g (6 Füße)	18 g (5 Füße)	21 g (4 Füße)
Spannungslänge	6 cm	7 cm	7 cm
Niveau in cm Länge	$5.97 \pm 0.32$	$6.97 \pm 0.38$	$6.83 \pm 0.32$

Die Grösse der Last und das Verhältnis zwischen Last und Grösse des Objektes haben keine Verschiebung des Niveaus zurfolge; *nur die Spannungslänge ist bestimmend.*

Dass die Grösse der Last gar keinen Einfluss auf das Niveau hat, gilt nicht für den Zentraltonus bei Wiederholungskurven an ein und demselben Fusse. Es ist uns gelungen (vgl. 13, 15, 16, 17 und 23) durch ein besonderes Verfahren nach tonischer Dehnung den ursprünglichen Zustand derart wieder herzustellen, dass man die Dehnungskurve des ruhenden Fusses von der anfänglichen Länge aus beliebig oft wiederholen kann (Abb. 2, Kurven 1 und 2). Um solche identische Wiederholungskurven zu erhalten, ist es erforderlich den Helixfuss mit mittelhoher Last zu dehnen und darauf ganz Widerstandslos, wenn nötig mittels schwacher „reflektorischer“ Reizung, zur Verkürzung zu bringen.

Welche Belastung als „mittelhoch“ gilt, muss jedesmal experimentell bestimmt werden. Im Beispiel der Abb. 2 war es 10 g; geringere Last (5 g) bringt das Niveau der aufeinanderfolgenden Kurven immer höher; Kurve 3, 4 und 5. Grössere Last (20 g) setzt das Niveau stets mehr herab (Kurven 6, 7 und 8). In Abb. 2 b sind die Abänderungen der Niveaux schematisch dargestellt.

Ich habe einige Anweisungen dafür, dass die Mittelbelastung bestimmt ist durch die Last, welche der Fuss vor der Präparation zu tragen hatte. Für mittelgrosse Schnecken (18—23 g Gewicht) ist die Mittelbelastung etwa 10 g.

*In Bezug auf das Niveau der pedaltonischen Wiederholungskurve ist also nur eine bestimmte Belastung indifferent, kleinere und grössere Lasten ändern das Niveau in bestimmter Weise.* Das Niveau der ersten Dehnungskurve zeigt diese Wechselbeziehung nicht.

## 2. Einfluss der Kälte und Wärme.

Der Tonus des Schneckenfusses verhält sich in seiner stationären Form der Temperatur gegenüber wie ein plastischer Körper: die Kälte steigert den viskösen Widerstand des seiner Ganglien beraubten Fusses, Wärme vermindert ihn.

Auch die Pedalkonstanz (Zentraltonus) hat JORDAN einer Viskositätserhöhung zugeschrieben (8), die ebenfalls durch Wärme aufgehoben werden kann (9 und 10). Wenn die Konstanz lediglich auf Viskosität zurückzuführen wäre, so müsste nicht nur Wärme das Niveau vermindern, sondern Kälte müsste es steigern. Dieses letztere ist aber nicht der Fall, wie sich aus einer Reihe von Versuchen ergab.

*Kälte hat nämlich keinen Einfluss auf das Niveau, Wärme über 22° C. setzt dahingegen in der Tat das Niveau herab:* bei 27° ist es um 11.6 %, bei 32° um 19.8 % erniedrigt. Zwei Ursachen könnte man für diese Verminderung verantwortlich machen. Neben Herabsetzung von Viskosität durch Wärme, käme vielleicht auch eine Wirkung der Wärme auf das zentrale Nervensystem in Frage. Wir werden dies späterhin zu untersuchen haben.

## 3. Einfluss vom Wassergehalt des Fusses.

Ich habe (26, 27, 28) die Bedeutung der Hydratation des Fusses für den peripheren Tonus feststellen können:

Während des Winterschlafes sind die Schnecken wasserarm; der Wassergehalt des Fusses weist nach BELLION (1) und FISCHER (3) 9 % Verlust auf. Ich habe Füsse solcher wasserarmen Tiere gedehnt und die Kurven verglichen mit entsprechenden Kurven von Präparaten, die Tieren entnommen waren, die reichlich Wasser aufnehmen konnten. Dieser Wasseraufnahme belief sich, bezogen auf das Gewicht der trocken gehaltenen Schnecken nach Abzug des Gehäuses auf etwa 37 %; VON BRAND (2) fand 21 %, HOWES & WELLS (4) 30 % Gewichtszunahme. Der Wassergehalt der Fussmuskeln wurde nach Aufnahme der Dehnungskurve bestimmt; sie zeigen eine durchschnittliche Zunahme von nur 4 %. Gegenüber dieser geringen Aenderung stand ein sehr beträchtlicher Unterschied im tonischen Widerstand: 10 min nach der Belastung war die Dehnungsstrecke der feucht gehaltenen Tiere um 43 %, der Elevationswinkel um 38 % grösser als bei den trocken gehaltenen Vergleichsexemplaren. Das aufgenommene Wasser, wovon nur etwa ein Zehntel dem Fusse zugute kommt, vermindert also den viskösen Widerstand sehr

beträchtlich. Uebrigens verursacht diese Fraktion einen auffallend gleichförmigen Verlauf der Dehnungskurven von Füssen ohne Ganglien, während bei den trockenen Tieren zwischen den Kurven verschiedener Füsse grosse Unterschiede vorkommen (26, Abb. 1). Trockenheit kann daher offenbar in verschiedenen Graden auftreten, im Gegensatz zur Sättigung mit Wasser. Erniedrigt dieses Wasser auch das Niveau der Pedalkonstanz?

Wir vergleichen das Niveau des Pedaltonus von wasserreichen und wasserarmen Schneckenfüssen mit demjenigen von Füssen mit normalem Wassergehalt. *Extreme Wasseraufnahme beeinflusst das Niveau der Pedalkonstanz nicht* (im Gegensatz zum ganglienlosen Fuss, bei dem der visköse Widerstand durch Wasseraufnahme stark abnimmt). *Wasserarmut dahingegen erhöht das Niveau dieser Konstanz.* In drei Versuchsserien zu 13, 14 und 12 Tieren erhielt ich folgende Mittelwerte dieser Steigerung in % der Spannungslänge: Das Niveau steigt um 17.5, 13.0 und 11.3 %. Hierbei betrug der Wasserverlust im Mittel 2.5 % und war der Durchschnitt aller Niveausteigerungen bei 39 Tieren 12.5 %.

#### 4. Einfluss des jeweiligen Aktivitätszustandes der Pedalganglien auf das Niveau der Pedalkonstanz.

JORDAN und seine Mitarbeiter (5, 6 u. 16) haben gezeigt, dass der Aktivitätszustand der Pedalganglien das Niveau der Pedalkonstanz entschieden beeinflusst (Versuche bei denen Kokain oder Kochsalz auf die Ganglia pedalia gebracht wird (siehe S. 1152)). Wenn wir annehmen, dass auch normalerweise Schwankungen des Aktivitätszustandes der Tonuszentren auftreten, so sind wir in der Lage zu erklären warum in etwa 40 % der Fälle die Dehnungskurve eines Fusses mit Ganglien und diejenige eines Fusses ohne Ganglien einander nicht schneiden: Falls nämlich der Fuss mit Ganglien sich unter Einfluss seines Zentrums in niederem tonischen Aktivitätszustand befindet, kann das Niveau der Pedalkonstanz so niedrig zu liegen kommen, dass die Netzkonstanz dauernd oberhalb dieses Niveau bleibt. In solchen Fällen ist der tonuslösende Einfluss der Ganglien auf die Dehnungskurve (vor dem Umschlage) besonders gross, während eine solche Hemmung bei der Dehnung des ganglienlosen Fusses naturgemäss fehlt.

Eine entgegengesetzte Kombination trifft man bei einem Vergleichspaar, bei welchem der Fuss mit Ganglien auf eine hohe „Mittellast“ eingestellt ist, sodass die benutzte geringere Belastung die Senkungsgeschwindigkeit der ersten steilen Strecke nicht erhöht (vgl. Mitt. II: Die Tonuslösung). Hat dieser Fuss überdies einen hohen Tonusspiegel und der ganglienlose einen niedrigeren, so kann die pedaltonische Kurve bis zum Umschlag neben oder ganz oberhalb der Kurve des Fusses ohne Ganglien bleiben. Auch dann werden solche Kurvenpaare einander nicht schneiden. Wir kommen in einer gesonderten Mitteilung auf solche „tonische Stimmungen“ unserer Objekte zurück (Vergl. auch Lit. No. 19 und 20).

Tatsächlich wird das Niveau der Pedalkonstanz durch schwache Kokainisierung der Pedalganglien herabgedrückt und zwar um durchschnittlich 13,8 % der Spannungslänge. Kochsalzlösung, die man auf gleiche Weise auf die Pedalganglien aufträgt, steigert dahingegen das Niveau. In zwei Versuchsserien erhielten wir als Mittelwerte von je 8 Versuchen eine Steigerung von 12,4 und 19,2 % der Spannungslänge.

#### D. Deutung der Ergebnisse und Zusammenfassung.

JORDAN hat am ganglienlosen Helixfuss vor allem die Statik des Tonus untersucht, um für sie im Verhalten von plastischen Stoffen ein Modell zu finden. Unsere Aufgabe war, weiter zu gehen auf dem von uns schon früher eingeschlagenen Wege, die Dynamik des ganglienlosen Fusses zu studieren, durch welche er sich von den nicht biologischen Modellen und dem Fuss mit Ganglien unterscheidet, und daher ausgesprochener Dynamik, näher kommt. Hierzu musste auch die Pedalkonstanz aufs Neue untersucht werden. Die Einflüsse, die diese Konstanz verändern, wie Kokain, Kochsalz (5 und 6), Belastung (9 und 10), hatte man früher erst nach Eintritt der Pedalkonstanz einwirken lassen; oder aber der betreffende Eingriff hatte zwischen der Aufnahme von Wiederholungskurven stattgefunden (Last 23; Kokain, Kochsalz 16). Nunmehr wurden die betreffenden Ver-

suchsbedingungen schon vor Applikation der ersten Belastung verwirklicht und sodann die reaktive Veränderung der Pedalkonstanz quantitativ mit Normalkurven verglichen. Dies war möglich geworden, da wir in der Spannungslänge ein Normalmass für das Konstanzniveau hatten. Untersucht wurde ausserdem, welchen Einfluss Wärme, Kälte und Wassergehalt des Fusses auf die Lage des Pedalkonstanzniveaus haben.

Wärme und zwar erst oberhalb 22° C vermindert das Niveau der Pedalkonstanz. Dehydratation steigert es: weder Kälte noch reichliche Wasseraufnahme ändern das Niveau. Diese Einseitigkeit der Wirkung stützt nicht die Meinung, dass Konstanz lediglich durch gesteigerte Viskosität zuwegegebracht wird. Bei vergleichenden Versuchsserien braucht man daher nicht genau auf den Wassergehalt der Versuchstiere und auf die Temperatur während der Dehnung zu achten, solange man den extremen Grad dieser beiden Faktoren vermeidet.

Biologisch sind diese Verhältnisse wohl zu verstehen: bei extremer Wärme und bei Trockenheit kriechen die Schnecken nicht. Sie sind dann meist zurückgezogen in ihrem Gehäuse. Sie brauchen also keine Regulierung des Muskelzustandes während des Kriechens bei sehr warmer, trockener Witterung. Offenbar wird dahingegen der Einfluss der Kälte und ausgiebiger Wasseraufnahme bei Regen irgendwie ausgeglichen: Diese beiden Faktoren stören hierdurch die Leistungen der Muskulatur offenbar nicht. Für die Hydratation mag das damit zusammenhängen, dass die Muskelkolloide über einen gewissen Sättigungsgrad kein Wasser aufnehmen.

#### LITERATUR.

1. BELLION, M., Recherches expérimentales sur l'hibernation de l'escargot (*Helix pomatia* L.). Diss. Lyon, No. d'ordre 44, 1909 und Ann. Un. Lyon (N. S.), 27, 1909; 2. BRAND, TH. V., Zs. vergl. Physiol. 14, 200, 1931; 3. FISCHER, P. M., Recherches sur la vie ralentie de l'Escargot (*Helix pomatia* L.), Thèse sci. natur., Paris, 1931; 4. HOWES N. H. und G. P. WELLS, J. exp. Biol. 11, 328, 1934; 5. JORDAN, H. J., Pflüg. Arch. 106, 189, 1905; 6. JORDAN, H. J., Ibid. 110, 533, 1905; 7. JORDAN, H. J., Ergebn. Physiol. 16, 87, 1918; 8. JORDAN, H. J., Biol. Ztbl. 39, 462, 1919; 9. JORDAN, H. J., Verh. D. Zool. Ges. 31 Jahresvers. Kiel 108, 1926; 10. JORDAN, H. J., und J. D. F. HARDENBERG, Zs. vergl. Physiol. 4, 545, 1926; 11. JORDAN H. J. und G. C. HIRSCH, Uebungen aus der vergleichende Physiologie, Springer, Berlin, S. 224 f.f. und 241 f.f., 1927; 12. JORDAN, H. J. und P. J. V. D. FEEN, Abderhalden's Hb. Biol. Arb. Meth. Abt. IX, Tl. 4, S. 295 f.f. und 357 f.f., 1929; 13. JORDAN, H. J., Arch. Néerl. Zool. 1, 1, 1934; 14. JORDAN, H. J., Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 38, 358 (1935); 15. JORDAN, H. J., Ergebn. Physiol. 40, 439, 1938; 16. JORDAN, H. J., Frl. C. E. SLUITER und N. POSTMA, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 41, 1032 (1938); 17. MAAS, J. A., Arch. Néerl. Physiol., T. XXIII, 1, 1938; 18. POSTMA, N., Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 36, 360 (1933); 19. POSTMA, N., Acta Brev. Neerl. 4, 106, 1934; 20. POSTMA, N., Ned. Tsch. v. Geneesk., 78, 3638, 1934; 21. POSTMA, N., Acta Brev. Neerl., 4, 109, 1934; 22. POSTMA, N., Ned. Tsch. v. Geneesk., 78, 3640, 1934; 23. POSTMA, N., Onderzoekingen betreffende het herstel van de tonus bij de slakkevoet (*Helix pomatia* L.) door prikkeling en betreffende de invloed van het centrale zenuwstelsel daarop. Diss. Utrecht 1935; 24. POSTMA, N., Acta Brev. Neerl., 5, 149, 1935; 25. POSTMA, N., Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 38, 1036 (1935); 26. POSTMA, N., Ibid., 39, 891 (1936); 27. POSTMA, N., Acta Brev. Neerl., 6, 119, 1936; 28. POSTMA, N., Ned. Tsch. v. Geneesk., 80, 3629, 1936; 29. SWINDEREN, J. W. DE MAREES VAN, De regeling van den tonus in de spieren van *Helix pomatia*. Diss. Utrecht 1927; 30. SWINDEREN, J. W. DE MAREES VAN, Arch. Néerl. Physiol., 13, 571, 1928.



**Medicine.** — *Some considerations concerning our knowledge of the action of the auditory organ.* Part II. By J. BIJTEL. (Communicated by Prof. A. DE KLEYN.)

(Communicated at the meeting of October 25, 1941.)

Surveying the present state of our knowledge we can distinguish for the sake of the summary:

- I. The "leading thoughts" forming the basis of the investigations.
- II. The technical methods.

This distinction cannot always be sharply maintained.

An important starting-point of recent investigations and views about the activity of the hearing-apparatus, more especially about the process of conduction in the auditory nerve, is the idea that each cycle of a sound-stimulus gives one nerve-impulse. In the physiology of the auditory organ, more often than with regard to any other organ, the study of the process of conduction in the centripetal nervous elements has come to the fore. This train of thought can be understood very well. The mechanical phenomena attending sound can be determined very well at least at the source of sound, as regards form and size and when they are transmitted as an identical vibrational process through the auditory nerve, this also holds good for the attending phenomenon, which we then ought to perceive as an action-current of the nerve. This does not hold good e.g. for a light-stimulus on the eye. It is true that the wave-length of light can be measured accurately and that the corresponding vibrational number can be determined, but there is no electric measuring-apparatus which might registrate action-currents of the frequency of light at the optical nerve directly. With regard to the sensation of taste, smell, pain and pressure, we are dealing with stimuli of quite a different character, not with a series of equal impulses working on the peripheral organ and coming back periodically. The sensation of vibration might again be compared with hearing. So in a certain respect the auditory nerve is *the* object for seeking, experimentally, the connection between outer stimulus and the process of nerve-conduction. In working it out, meanwhile, the classical conception that the process of nerve-conduction is qualitatively independent of that which happens at the end-organ and has the same typical characteristics for all the nerves, has been given up at once. The whole plan of the investigations about the process of conduction in the auditory nerve presupposes an exceptional position of this nerve. It is taken as a matter of course that each cycle of a sound-vibration gives a nerve-impulse. We pointed out already that the electrophysiological phenomena, as they are observed with a special technical method, point in this direction. In our opinion, however, the applied technical method is not of such a character that we may speak of a crucial experiment. We know further that a certain number of cycles is necessary for a full, well-defined sound-impression. Up to 500 cycles this number is fairly constant, namely 8—10. Supposing this number to be 10 cycles a second, the minimal duration for a tone of 100 cycles a second is equal to 0,1 second, for a tone of 500 cycles a second it is equal to 0,02 second. So one can say that up to 500 cycles a second the necessary minimal duration of the acting sound is inversely proportional to the frequency. Above 500 cycles a second the minimal duration diminishes less strongly with the frequency and increases a little above 5000 cycles a second. There must be a minimal duration, however, for a well-definable perception. Sounds of less than this minimal duration give a so-called click-perception, the power to distinguish pitch being then strongly weakened. One cannot draw a certain conclusion from this about the significance of this phenomenon. Assuming, however, — for the present as an hypothesis — that one nerve-impulse is



necessary and sufficient for a complete perception, one is led to think that the minimal number of cycles necessary for a complete perception gives one nerve-impulse, in other words that for one nerve-impulse a series of some cycles is necessary. Nor can this be quite right, because a series of a shorter duration than that which is minimally necessary for the originating of a well-definable impression still gives a certain perception. We only want to elucidate that on account of the above-mentioned facts in general doubt of the axiom: one cycle = one nerve-impulse and with this doubt of the now predominating views about the process of conduction in the auditory nerve, is fully justified.

Indissolubly connected with the above-mentioned classical conception of the process of conduction of excitation in a nerve is the principle of independent excitability, which means that several influences can have a direct exciting action on the nerve-fibres with the same — invariable — consequence as adequate excitation of the end-organ. If we try to approach the question from this angle, we can only do so if we take the auditory nerve of man, this being able to inform us of the ultimate result, the perception. As a stimulus we must in the first place consider the electric current. If, there being excitation with alternating currents of different frequencies, the sound-perception that arises is always the same, this can at once be considered to speak against the now predominating conception. In literature some data of such experiments are to be found, which point to the fact that such a simple state of affairs does not occur. Rather is it concluded that in certain circumstances the perceived sound is determined by the very frequency of the exciting current. This then ought to be attributed to excitation of the cochlea-apparatus, perhaps also of the middle ear. It is assumed that electrostatic influences in the peripheral auditory organ play a part here. So, to make a pure experiment, it would be necessary to excite, as an object, an auditory nerve without a peripheral organ, so e.g. after extirpation of the labyrinth. It remains to be asked in how far in this case one is still dealing with a sufficiently active auditory nerve.

The stimulation with electric currents also brings technical difficulties with it. For one does not stimulate the auditory nerve directly, but brings the current to the bodily surface. The density of the current in the auditory nerve is unknown here. When one uses a direct current with one electrode close to the outer ear and one so-called indifferent electrode at a distance one can certainly stimulate the *nervus octavus*, as appears from the phenomenon of the galvanic nystagmus. One may assume that this also holds good for alternating currents of a relatively low frequency up to e.g. 50 cycles a second. When the frequency is higher, however, one undoubtedly gets more complicated situations with the dividing of the current. Influences of capacity must be strongly felt in this region of less conducting bony tissue that has a very complicated relation to the non-bony tissue.

The demonstrative force of stimulation of the auditory nerve when operations are resorted to must always be considered limited because of morbid qualities or inferiority<sup>1)</sup>. The same holds good for tinnitus, when often, too, the influence of a still present peripheral apparatus must be taken into account.

All things considered we may not yet at once expect a conclusive result from investigations in this direction. Nevertheless we think that we must pay attention to them.

A second item about which an axiom obtains is the analytical power of the auditory organ. We know from daily observation that the ear possesses a power to distinguish qualitatively, several sorts of sounds and tones. Probably the idea has arisen from this that the auditory organ in a physical sense analyses every sound in its components and that higher centres again build sound-images from these components. For this conception,

<sup>1)</sup> VON BÉKÉSY, [BÉKÉSY, G. VON, *Zeitschr. f. technische Physik* 17, 522 (1936)] mentions such an experiment, in which during an operation the auditory nerve was stimulated by alternating currents of different frequencies between 1.5 and 6000 Herz. 1.5—30 Herz give murmurs of an impulsive character. At 30 Herz the impulses fuse to a tone. From 100—6000 Herz the exciting currents are followed by an invariable sound-impression. VON BÉKÉSY does not give any further details.

however, we have no sufficient arguments. HELMHOLTZ<sup>1)</sup> devotes to this subject a chapter of "Die Lehre von den Tonempfindungen". From this it appears that the separate perception of overtones from a sound is only possible with the help of tricks, so that special attention is drawn to a certain overtone. It appears that one must know the components that one wants to perceive separately. Such a component in itself must be produced as a tone and its image retained in the memory, so that immediately afterwards one can find this component again in a sound. The argumentation of HELMHOLTZ mainly limits itself to showing that the ear does not perceive overtones that cannot be shown physically in the sound. It appears further that the overtones do not only determine the timbre, but also the subjective impression of pitch. This subjective element in determining the pitch of a sound sometimes leads to differences in judgment, even among persons with very talented and trained ears, of which HELMHOLTZ gives striking examples. Something similar we also find mentioned in HOOGERWERF<sup>2)</sup>. The curves of a vowel that is sung give fundamental tones that are sometimes 1 or 2 octaves lower than the singer, comparing with a tuning-fork, meant. HOOGERWERF attributes this to the varying sensitivity of the auditory organ to varying pitches. Owing to this it may happen that an overtone in a sound, e.g. the human voice, predominates, the pitch being determined subjectively.

In this connection we draw attention to the fact that impulses of a periodical character, but in themselves not having the form of a sinus, can bring about a tone-perception. SCHOUTEN<sup>3)</sup> showed this. In a compound sound with several higher overtones, from which the fundamental tone has been eliminated, this fundamental tone can be perceived. This tone is then caused by the periodical impulses of the complexes of the harmonics. SCHOUTEN expresses this in this way, that the low tone, the so-called residue, appears to be correlated to the periodicity of the vibration, which arises when the high harmonics are joined. This fundamental tone is described as a strong, sharp sound and can even be perceived beside the fundamental tone, which may be added again. This residue-tone gives no beats with a frequency that differs little from it and so does not occur as a vibration having the form of a sinus and being physically present in the sound. So at any rate the auditory organ appears also to be sensitive to physical impulses of a character quite different from the vibrations that have the form of a sinus. SCHOUTEN thinks that the localisation-theory can be made to agree with this phenomenon.

Also as regards this datum it is difficult to judge the physiological importance at once. We think, however, that we may say that the phenomenon points in this direction: the auditory organ has not so much a sharp analytical power, but is rather prepared to make all physical periodicity into sound-impressions.

The opposite of the ordinary conception — analysis in the peripheral followed by synthesis in the central organ — would bring with it that certain psychical images are formed of sounds which up to a certain point can be analysed. If the ordinary conception were the right one, then it is indeed strange that the recognising of separate components is so difficult. It is true that neither for the other conception can we give conclusive evidence, but in our opinion the axiom of sound-analysis in the auditory organ as the primary element in the function must again be considered as a problem.

## II. The technical methods.

We already pointed out several technical difficulties, namely as regards the currents of action and the direct excitation of the auditory nerve.

As long as the currents of action are not determined by direct measurement at the auditory nerve without amplifiers according to the requirements of classical electrophysiology, one cannot draw conclusions from this phenomenon.

1) HELMHOLTZ, H., Die Lehre der Tonempfindungen, 2e Auflage, 1e Abt. Vierter Abschnitt, blz. 84, Braunschweig 1865.

2) HOOGERWERF, S., Onderzoekingen met de snaarphonograaf, Diss. Leiden 1924.

3) SCHOUTEN, J. F., Philips Technisch tijdschrift 5, 298 (1940).

No less attention ought to be paid to an exact view of the sound-stimulus. Several attempts have been made to measure this stimulus. These attempts were nearly always limited to determining the energy at the source of excitation. In literature we only found a few data about the energy which reaches the tympanic membrane, namely measurements of the resonance in the auditory canal. FLEMING<sup>1)</sup> published an investigation regarding the measurement of the sound-pressure near the tympanic membrane. VON BÉKÉSY<sup>2)</sup> also drew attention to the resonance in the auditory canal. It appears that for tones in the resonance-region of the auditory canal the sound-pressure at the tympanic membrane is considerably higher than would be the case at the place of the tympanic membrane with free propagation of the sound. VON BÉKÉSY found for 2500 cycles a second a value about 5 times greater at the tympanic membrane. In this case vibrating membranes were used as sound-producers. When one uses tuning-forks the field of sound is so complicated that a calculation has not yet appeared possible.

In the circumstances in which we must work it is never possible to speak of a free propagation, unless this is perhaps approached when there are low tones. In every walled-in space standing waves arise. With the help of sound-damping walls one can reduce this phenomenon, but as soon as a person on whom the experiment will be made is brought into a room a surface that re-echoes sound is introduced. We have paid attention to this problem, which has led to the construction of a room with a special form by Prof. ZWIKKER<sup>3)</sup>, in which room in principle it would not be possible for a sound-ray to return and interfere with an approaching wave. The principle appeared to be right. Inevitable technical imperfections, meanwhile, again cause standing waves above 500 cycles a second.

Now we have not at all yet given a full treatment of the subject of the technical methods. We only touched a few points and remarked that no technical execution gives a conclusive solution. By saying so we do not underrate the value of modern technical methods for practical purposes. We think, however, that the often far-reaching conclusions from routine-investigations are not considered critically enough. One should be aware of the fact that it is really only the true value of energy or sound-pressure at the tympanic membrane that may be considered as a measure for the sound-stimulus.

With the above we think we have sufficiently accounted for our remarks made at the beginning. In the first place there ought to be a critical reconsideration of our fundamental notions. In principle a different vision will not be an entirely new vision. Vitalistic and materialistic ways of thought have alternated in history and have been expressed in many ways. Though nowadays one cannot speak of a conflict between these extremes, they are still to be recognised as different biological ways of thinking also as regards the subjects treated here. It cannot at all be said that a purely materialistic way of thinking predominates. Nevertheless, with regard to the auditory organ the identification with a physical instrument often comes too much to the fore. We shall always have to be aware of the fact that the auditory organ ultimately has a psychical function in the living organism. We must be aware of the fact that the function of the whole organ is directed to this and determined by it.

The realisation that the many special problems which have arisen in course of time are removing us further and further from the main point — a satisfactory notion of the function of hearing — led us to the above considerations and the indicating of lines of action along which our knowledge, which is now of a rather chaotic character, will have to come to a more correct conception.

<sup>1)</sup> FLEMING, N., *Nature*, **143**, 642 (1939).

<sup>2)</sup> BÉKÉSY, G. VON, *Acta Otolaryngologica* **27**, 281 (1939).

<sup>3)</sup> ZWIKKER, C. *Nederlandsche Keel-neus-oorheelkundige Vereeniging, Amsterdam, Verslag der 64e vergadering*, 13 (1937). *Ned. Tijdschr. v. Geneesk.* **82**, 4281 (1938).

BIJTEL, J., *Nederlandsche Keel-neus-oorheelkundige Vereeniging, Amsterdam, Verslag der 66e vergadering*, 9 (1938). *Ned. Tijdschr. v. Geneesk.* **83**, 3649 (1939).

**ERRATA** dans la communication de Prof. J. WOLFF: „Inégalités remplies par les fonctions univalentes.“ (Proc. 27 Sept. 1941):

- p. 956 ligne 10  $z_n$  lire  $z$   
 p. 956 ligne 25 *cependent* lire *cependant*  
 p. 960 ligne 14  $><$  à supprimer  
 p. 960 ligne 22 *indépendente* lire *indépendante*  
 p. 960 ligne 27 lire tels que,  $z$  tendant vers  $it$  sur  $\Gamma_t$ ,  
 p. 960 lignes 31, 32, 33, 34 lire

**THÉORÈME VI A.** À toute famille de courbes  $r_\alpha \left\{ 1 - |z| = \psi \left( \arg \frac{z}{\alpha} \right) \right\}$  dans  $D$ , tangentes aux points  $\alpha$  à la circonférence  $|z| = 1$ ,  $\psi(u)$  étant une fonction convexe, il correspond une plénitude de points  $\alpha$  tels que,  $z$  tendant vers  $\alpha$  sur  $r_\alpha$ ,

$$f'(z) = o \left( \frac{\sqrt{|z-\alpha|}}{1-|z|} \right).$$

- p. 962 ligne 9  $\int_{z'_1}^{z_1}$  lire  $\int_{z'_2}^{z_2}$   
 p. 963 ligne 8 *positis* lire *positifs*.



# PROCEEDINGS

VOLUME XLIV

No. 10

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: M. W. WOERDEMAN

## CONTENTS

- LANGELAAN, J. W.: "The ultimate structure of the striped muscle fibre of the frog distinguishable with the microscope", p. 1166.
- JORDAN, H. J., und N. POSTMA: "Ueber den Tonus des Schneckenfusses (*Helix pomatia* L.)". III. Zwei antagonistische Zentren in den Pedalganglien. (Vorläufige Mitteilung). p. 1169.
- BURGERS, J. M.: "On the influence of the concentration of a suspension upon the sedimentation velocity (in particular for a suspension of spherical particles)", p. 1177.
- WEITZENBÖCK, R., und W. J. BOS: "Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im  $R_4$ ". (Siebente Mitteilung), p. 1185.
- KLEYN, A. de: "Some remarks on symmetrical hearing remnants", p. 1190.
- VEEN, S. C. VAN: "Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art". III. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 1198.
- VEEN, S. C. VAN: "Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergenten Reihen". III. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 1206.
- WOLFF, J.: "Domaines d'univalence et d'étoilement des fonctions holomorphes à partie réelle positive dans un demi-plan". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 1210.
- FUNKE, G. L.: "The growth of the petioles of waterplants in solutions of phytohormones". II. (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING), p. 1214.
- WESSEM, A. VAN: "On rocks from the isles of Soegi, Tjombol and Tjitlim. Riouw Archipelago. Netherlands East Indies". (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 1219.
- GERMERAAD, H.: "On the rocks of the isle of Koendoer. Riouw-Archipelago. Neth. East Indies". (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 1227.
- REGTEREN ALTENA, C. O. VAN: "Old Tertiary Mollusca from Curaçao". (Communicated by Prof. L. RUTTEN). (With one plate), p. 1234.
- POSTMA, N.: "Ueber den Tonus des Schneckenfusses (*Helix pomatia* L.)". II. Die Tonuslösung. (Vorläufige Mitteilung). (Communicated by Prof. H. J. JORDAN), p. 1239.
- GREWEL, F.: "Classification of the disorders of language, speaking and voice". (Communicated by Prof. A. DE KLEYN), p. 1248.



**Medicine.** — *The ultimate structure of the striped muscle fibre of the frog distinguishable with the microscope.* By J. W. LANGELAAN.

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

On a previous occasion I gave a short account of my researches on the structure of the muscle fibre, and especially drew your attention to an interferential pattern caused by a fresh and structurally intact fibre. This pattern consists of a fine, narrow striation of the *q*-stripe. White dashes alternate regularly with small dark strokes. The period of this pattern approximately amounts to 0.7 micron. The white dashes represent the light maxima, the dark strokes the minima of the interference figure. The *l*-stripe presents no recognisable structure with the interferential arrangement of the microscope. The interference pattern forms the only indication of the existence of a regular structure of the fibre, of which the characteristic dimensions are commensurable with the wave-length of the visible light.

The interferential method, by which the pattern can be rendered visible, forms a strict application of ABBE's theory on microscopical vision. This spectrum theory has been laid down in a compendious, mathematical form by LUMMER and REICHE<sup>1</sup>). Unfortunately these authors dealt only with the problem of twodimensional gratings, but the muscle fibre is a tridimensional one. The method consists of the appliance of a narrow incident beam of which the divergence angle is equal to, or smaller than, 3°, monochromatic light, and a darkfield objective-lens according to the method of SPIERER<sup>2</sup>). The small opaque shield upon the curved surface of the front lens of the objective screens off the central bundle (spectrum of zero order) of the incident beam diffracted at the object. In this way the darkfield is made. An adjustable diaphragm, forming the exit-pupil of the objective, makes it possible to restrict the number of the spectra which co-operate in the formation of the interferential pattern.

The analysis of the primary interferential image, present in the neighbourhood of the principal focal plane of the objective, indicates that the interferential pattern, called forth by the microscopic structure of the muscle fibre, arises from the joint effect of two intercrossing gratings. The elements of which these patterns are composed run in a diagonal direction in respect of the length of the fibre. They intercross at an angle varying between 60° and 80°. When the interferential pattern is screened off by a diaphragm, placed in the neighbourhood of the principal focal plane of the objective, a vague image remains of the ordinary cross striation of the muscle fibre. The diameter of the alternating light and dark stripes amounts to about 1 micron. This image becomes more distinctly visible when the divergence of the incident beam is increased and the exit diaphragm of the objective widely opened. This image obviously results from a periodic variation in the density of the fibre, causing a variation in the permeability of the tissue to light. The structure of this differentiation is submicroscopic, for it cannot be distinguished with the microscope, nor does it give rise to observable interferences.

A method, not essentially new, renders it possible to convert a plastic muscle fibre into a brittle one without materially disturbing the microscopical structure of the fibre nor its characteristic dimensions. For this purpose a fresh and structurally intact sartorius muscle, extended to its natural length, is put into an aqueous solution of chromalum of 3 to 5 percent. In this solution the plastic fibres become hard and brittle in the course of about two months. If, now, one tries to cut the muscle on an ice-microtome, the fibres are crushed.

1) LUMMER und REICHE, *Lehre v. d. Bildentstehung i. Mikroskop*, 1910.

2) SPIERER, *Ch. Koll. Zeits.* 51 (1), 162—163 (1930); 53 (1) 88—90 (1930).

by the knife and burst. This always happens independently of the direction in which the muscle is cut.

The fragments, resulting from the bursting of the fibres, prove to be split off along preformed cleavage planes, in the same way as a brittle crystal would do under similar circumstances. Most of the fragments split off along a plane parallel to the surface of the fibre. This plane represents the tangential cleavage plane. The smaller side of these fragments is formed by the radial cleavage plane, whilst the third side is formed by the transverse, or BOWMAN, cleavage plane. The directions of these planes are determined by the internal structure of the fibre. They represent the faces of the structure. The configuration of the fragments indicates that they have split off from an orthogonal grating. The measurement of the length of the sides of the fragments proves that they are all even multiples of a unit length of about 0.5 micron. This dimension represents the diameter of a single structural leaf of the grating. It follows from this observation that the layers of which the grating has been built up are each composed of two leaves. Near the margin of the fragments small zones often occur, of which the diameter is about 0.5 micron. These thin, single-leaved edges arise through the bursting of the fibre when crushed by the knife. I never deliberately succeeded by means of needles or other mechanical contrivances in splitting up a layer into its leaves.

The single-leaved edges present no distinguishable structure when observed by means of white light and the image-forming arrangement of the microscope. Photos, however, made by means of violet light ( $\lambda = 445$  millimicra) and an incident beam with a rather small divergence angle, show the structure of the leaf. The image present on the photographic plate consists of two sets of point rows, intercrossing at right angles. The points are equidistant, having in both directions a period of about 0.5 micron. The same observation can be made on the radial face of the fragments. The points visible on the photos are diffraction (AIRY) disks. They represent therefore the images of some submicroscopical detail, made self-luminous by the light of the incident beam. The real structure of the detail remains, of course, undetermined.

The photograms can be measured, and prove that the period of the point row in the longitudinal direction of the fibre amounts to 0.55 micron. The period in the tangential and radial directions varies round 0.45 micron. The arithmetical means of the measurements in these directions indicate, however, that the tangential period is slightly greater than this figure, and the radial period slightly less. This may be indicated by writing for the tangential period  $0.45^5$  and for the radial period the figure  $0.44^5$ . The basic cell of the microscopic grating is, therefore, a simple rhombic prism, closely approaching a tetragonal one. It must, however, be emphasized, that this represents the basic cell of the contractile part of the fibre for the basic cell of the sarcoplasmatic part is slightly more complicated.

The description of the structure of the microscopic grating has been based upon images presented by a single structural leaf, for this excludes axial interferences. As far as I know axial interferences have always been neglected notwithstanding that they may produce interferences under conditions, making interference entirely unexpected. For that reason axial interferences superposed upon a microscopic image are not recognised. Lateral interferences are well known and also treated theoretically, though their effects often fail to be recognised<sup>3)</sup>.

Experiments made by means of an appropriate buffer-solution, render it possible to follow the desintegration of the microscopic grating for several hours. In this solution the traces of but one element becomes visible, when using a paraboloid darkfield condenser. The only element which becomes observable in this buffer is a short thread-like fibril of which the characteristic diameter is submicroscopic. For that reason it cannot be seen with the image-forming constellation. A great number of these fibrils, still bearing their negative electric charges, adhere to the coverglass, other ones, after having lost their

<sup>3)</sup> RAYLEIGH, Scientific Papers, IV (222), 235—260 (1903).

charges, cling together and form small, irregularly shaped granules. The largest of these granules are of microscopic dimensions. The fibrils, adherent to the coverglass, execute brownian, pendulating movements. The similarity in shape and dimension of the diffraction figures, caused by the moving fibrils, render it probable that they have all approximately the same length and diameter.

The most probable conclusion to be drawn from these experiments is, now, that the muscle fibre forms a tridimensional, rhombic grating, closely approaching a tetragonal grating. The dimensions of the three periods, characterising the grating, approach the limit of the resolving power of the objective-lenses. The elements composing the grating are most probably thread-like filaments. The submicroscopic knot-points of this filamentous grating can be made self-luminous. These self-luminous points appear in the image as the diffraction disks, composing the orthogonal point-rows observable in the photograms made by means of violet light and the image-forming arrangement.

---

**Comparative Physiology.** — *Ueber den Tonus des Schneckenfusses (Helix pomatia L.), III. Zwei antagonistische Zentren in den Pedalganglien.* (Vorläufige Mitteilung.) Von H. J. JORDAN und N. POSTMA<sup>1)</sup>. (Aus dem Institut für vergleichende Physiologie der Universität zu Utrecht.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

#### A. Einleitung.

Auf Grund seiner Erfahrungen an *Aplysia* war JORDAN (1) zur Ueberzeugung gekommen, dass die Pedalganglien den Tonus der Muskulatur dieser Schnecken lediglich durch Hemmung (und „Lösung“) regulieren. Er verfügte über keine Versuchsergebnisse, die ihn zwangen, neben einem hemmenden, die Existenz eines erregenden Zentrums in diesen Ganglien anzunehmen. Exstirpation der Ganglien hat stets starke Steigerung des Muskeltonus zur Folge.

Wenn man eine *Aplysia* eine Nachtlang in den Eisschrank bringt, so findet man das Tier am folgenden Morgen vollkommen erschläft, die Muskulatur tonuslos. Bringt man das Tier nun in zimmerwarmes Seewasser, so tritt tonische Verkürzung auf und nach einigen Minuten ist es wieder normal. Macht man den Versuch mit einer *Aplysia*, der die Ganglien exstirpiert wurden, so verläuft der Prozess des Tonusverlustes im Eisschrank wie beim normalen Tiere. Die Wiederherstellung des Tonus im zimmerwarmen Wasser dahingegen erfolgt in ungemein übertriebenem Ausmass: das Tier schrumpft zu einem harten unförmigen Klumpen (vergl. 2). Es war JORDAN nie gelungen durch Reizung der Pedalganglien und der diese Zentren mit den Muskeln verbindenden Nerven „Tonuslösung“ zu erhalten.

Schwache Kokainisierung der Pedalganglien aber verursacht Tonuslösung in den Parapodien. Kokainisiert man eine Tierhälfte, so fällt auch der Tonus in der anderen, die mit der kokainisierten Hälfte nur durch das zentrale Nervensystem verbunden ist.

All das machte den Eindruck, als ob die Regulierung auf dem Prinzipie der „Isostasie“ beruhe, die sich am allgeringsten in der Gleichheit des Tonus innerhalb der Gesamtmuskulatur offenbart. Es könnte sich daher um eine Ausgleichung des Aktivitätszustandes in allen Teilen (Muskeln und Ganglien) handeln, deren Mechanik natürlich unbekannt bleibt. Prinzipiell an dieser Form, die Erscheinungen zu beschreiben, ist die Auffassung, dass die Pedalganglien für den Tonus *ein einheitliches Zentrum* sind, und eine Differenzierung zwischen erregendem und hemmendem Zentrum in diesen Ganglien fehlt.

Diese Einheitlichkeitshypothese wurde später zur Beschreibung der Ergebnisse ausgebaut, die JORDAN bei seinen Untersuchungen an *Helix pomatia* erhalten hatte (Siehe II, S. 1244). Mittlerweile haben POSTMA und MAAS die Möglichkeit gefunden, an ein und demselben *Helix*fuss zahlreiche Wiederholungskurven zu erhalten (6 u. 5). Nach jeder Dehnung wird der Fuss wieder zur Ausgangslänge gebracht und er lässt sich mit der gleichen Gesetzmässigkeit wie die „erste oder ursprüngliche Dehnungskurve“ durch „indifferente“ Last wieder dehnen.

Mit Hülfe dieser Wiederholungskurven gelang es POSTMA (6 u. 7) eine feste Norm für das Niveau der Pedalkonstanz zu gewinnen. Bei der Präparation wird der Fuss immer etwas gedehnt; in diesem gespannten Zustand werden die Ganglien für die kommenden Eingriffe freigelegt. Wenn man nun, ohne jeden weiteren Eingriff, den Fuss an den Ordinatenschreiber des Kymographions befestigt und mit einem bestimmten „indifferenten“ Gewicht belastet, so tritt die typische pedaltönische Dehnungskurve auf und zwar mit einer Pedalkonstanz, die bei der „Spannungslänge“ der Präparation liegt und bei richtiger

<sup>1)</sup> Die Versuche wurden durch N. POSTMA, mit Unterstützung der Niederl. Regierung aus den Einkünften der „Zomerpostzegels“, ausgeführt.

Wahl des Gewichtes, in den aufeinanderfolgenden Wiederholungskurven unverändert bleibt. Das „indifferente“ Gewicht muss für jedes Objekt bestimmt werden. Die Spannungslänge ist ein festes Mass für die Einflüsse der Pedalganglien. Wenn man ein zu niedriges Gewicht wählt, so steigt in den aufeinanderfolgenden Wiederholungskurven das Niveau allmählich, während es ebenso allmählich absinkt, wenn das Gewicht höher ist als das indifferente.

JORDAN hatte seine Eingriffe immer erst nach Erreichen der Pedalkonstanz ausgeführt. Den Einfluss dieser Eingriffe auf die erste steile Strecke der pedalonischen Dehnungskurve hatte er daher nicht beobachtet. Dies hat nun POSTMA (8, Mitteilung II) getan und neue, für unser Verständnis der zentralen Tonusregulierung wichtige Resultate erhalten. Im Laufe dieser Untersuchungen ergaben sich zahlreiche Erscheinungen, die es immer schwieriger machten, an der Einheitlichkeit der Ganglien fest zu halten, Erscheinungen, die POSTMA am Schluss seiner Mitteilung II zusammengefasst hat. Auch die Arbeiten über den Einfluss des Aktivitätszustandes der Ganglien auf den Tonus (von JORDAN, Frl. SLUITER und POSTMA) und auf die Regulierung der Herzstätigkeit (von N. v. TIEL), beide bei *Helix pomatia*, hatten einige Resultate ergeben, die auf das Vorhandensein echter Hemmungszentren und hemmender Impulse hinweisen, sodass wir schon zu Anfang unserer Untersuchungen nicht zweifelten, dass wir zu einer neuen Auffassung des zentralen Geschehens bei unserm Objekte würden kommen müssen.

Unsere häufig wiederholten Versuche mit partieller Vergiftung der Ganglien mit Kokain und mit Kochsalz haben bei *Helix* niemals diejenige Reproduzierbarkeit gezeigt, die notwendig gewesen wäre, um eine feinere Analyse der Ganglienbezirke und ihrer vermuteten spezifischen Funktionen durchzuführen. Wir entschlossen uns zu versuchen, ob wir, an Stelle von unkontrollierbar diffundierenden Chemikalien, den konstanten Strom in einer Stärke verwenden könnten, in welcher er keine Reizung, wohl aber Elektrotonus verursacht. Denn wir wussten, dass Reizung und Veränderung des Aktivitätszustandes der Ganglien verschiedene Resultate haben. Die einfache Technik, vor allem die Form der unpolarisierbaren Chlorsilberelektroden, wird in der ausführlichen Publikation beschrieben werden. Hier sei nur vorweg genommen, dass die infraoesophageale Ganglienmasse zwischen beide Elektroden kommt, sodass die eine dorsal, die andere ventral liegt. Durch einen Umpoler kann man den Katelektrotonus entweder dorsal oder ventral erzeugen. Versuche mit einer indifferenten Elektrode sind noch im Gang.

Zu den ältern Versuchen, in welchen Kokain oder Kochsalz immer dorsal appliziert worden war, wurden neue hinzugefügt, mit ventraler Applikation der genannten Chemikalien. Dadurch konnten die widersprechenden Resultate älterer Untersuchungen aufgeklärt und die Ergebnisse der elektrotonischen Versuche bestätigt werden.

Weiterhin wurden die Versuche von POSTMA (8) mit mechanischer Reizung von Ganglien und Nerven wiederholt, unter Anwendung von Einzelöffnungsschlägen und genauer Abstufung der Reizstärke.

## B. Ergebnisse.

### I. Versuche mit konstantem Strom.

Der Kürze halber sprechen wir bei Versuchen, bei denen die dorsale Elektrode die Kathode des subliminalen konstanten Stromes war, von *dorsalem Strom*. Lag dahingegen die Kathode ventral, so reden wir von *ventralem Strom*. Es hat sich als vorteilhaft erwiesen, unterhalb der Stromstärke zu bleiben, bei welcher Schluss und Oeffnung Zuckung erzeugen würden.

#### 1. Veränderung des Aktivitätszustandes in den Pedalganglien durch den Elektrotonus.

Der *dorsale Strom* erhöht als primäre Reaktion das Niveau der Pedalkonstanz, das in Vorversuchen, zugleich mit der Bestimmung der indifferenten Last, festgestellt worden war. Der *ventrale Strom* erniedrigt dahingegen diese Konstanz in aufeinanderfolgenden Wieder-



holungskurven (Abb. 1). Diese Versuche sind sehr reproduzierbar (100 %). Es ist gleichgültig ob man die Kathode erst dorsal schaltet und daraufhin umpolt oder umgekehrt. Offenbar enthalten die Pedalganglien zwei topographisch geschiedene Zentra. Wie

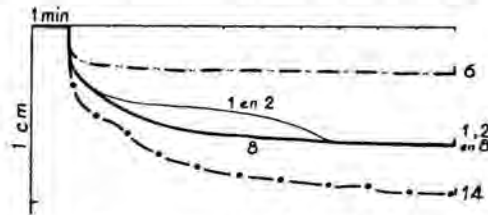


Abb. 1. Wiederholungskurven von einem Schneckenfuss im Zusammenhang mit den Pedalganglien. Dehnungskurven mit 10 g Last von 10 Minuten Dauer. Ordinate: effektive Längenänderung des Fusses (Ordinatenschreiber nach N. POSTMA, 1933); Abszissen: die Zeit. Versuche mit konstantem Strom (Electrotonus). 1 und 2: Vorversuche, ohne Strom. Von Kurve 5 an (nicht gezeichnet) Strom geschlossen, dorsale Elektrode ist Kathode. 6: Niveausteigerung durch dorsalen Strom; am Ende dieser Dehnung wird der Strom geöffnet. 8: ohne Strom; vor Kurve 11 (nicht gezeichnet) Stromschluss, ventrale Elektrode ist nunmehr die Kathode. 14: Niveauperlust durch ventralen Strom.

N. V. TIEL (9) für die extracardiale Regulierung des Helixherzens in den Visceralganglien ein erregendes und ein hemmendes Zentrum fand, so ergab sich aus unsern vorliegenden Versuchen die Existenz eines erregenden und eines hemmenden Tonuszentrums, welches letzteres, bei Erhöhung seines Aktivitätszustandes, das Niveau der Pedalkonstanz erniedrigt. Damit fällt die Möglichkeit, den Gesamtkomplex der Erscheinungen mit dem Schema der einheitlichen Ganglienwirkung auf Grund des Ausgleichsprinzips zu beschreiben. Die Eindeutigkeit dieser Versuche beruht offenbar auf dem Gegensatz zwischen Katelektrotonus und Anelektrotonus, wodurch eine gleichzeitige Aktivitätserhöhung in beiden antagonistischen Zentren ausgeschlossen ist. Bei unseren früheren Versuchen über Aktivitätserhöhung und -erniedrigung mit Kochsalz und Kokain war das, der Diffusion dieser Stoffe wegen, natürlich anders.

## 2. Summation verschiedener Einflüsse auf die Konstanz.

Wie erwähnt steigt unter Einwirkung geringer Last das Niveau der Pedalkonstanz in aufeinanderfolgenden Wiederholungskurven (6 u. 7). Dieser Anstieg unterbleibt bei gleichzeitiger Einschaltung des ventralen Stromes. Wiederholungskurven mit hoher Last zeigen zunehmenden Niveauperlust der Pedalkonstanz, der durch dorsalen Strom neutralisiert wird. Gleichsinnige Einflüsse unterstützen einander. Wenn bei einem bestimmten Fuss bei einem Gewicht von 10 g das Niveau der Pedalkonstanz oberhalb der Normalen liegt, d.h. 10 g unzulänglich sind, um das Gleichgewicht der Konstanz zu erreichen, genügt ein schwacher ventraler Strom, der an sich keine sichtbare Veränderung im Verhalten des Präparates herbeigeführt haben würde, um normales Konstanzniveau zu erreichen und zu behaupten. Das Gleiche hätte mit einer Last von 20 g direkt erreicht werden können. Wenn man den ventralen Strom unterbricht, ist der Tonuspegel erniedrigt. Nunmehr wirken 20 g als „hohe“ Last, die in aufeinanderfolgenden Wiederholungskurven mehr und mehr das Konstanzniveau herabdrückt. Bei dorsalem Strom steigt das Niveau; 20 g werden auf gleichem Niveau getragen als 10 g.

## II. Chemischer Einfluss auf den Aktivitätszustand beider Zentren nach unsern neuen Gesichtspunkten.

### 1. Ein Kochsalzkristall kommt auf die ventrale Seite der Ganglien.

a. Untersucht werden die **Wiederholungskurven**. Die erste, steile Strecke der Dehnungskurven ist nunmehr steiler und länger, als im Vorversuch bei „normalem“ Zustand



der Ganglien. Das Niveau der Pedalkonstanz wird erniedrigt. Man kann beim gleichen Präparat das Kochsalz ventral wegnemen und es, nach Drehung der Ganglienmasse um  $180^\circ$ , dorsal auflegen. Dann wird die erste Strecke der folgenden Wiederholungskurven weniger steil und die Pedalkonstanz kommt auf ein höheres Niveau.

b. Die „ursprüngliche“ Kurve. Ein Kochsalzkristall kommt vor Aufnahme der ersten („ursprünglichen“) Dehnungskurve auf die ventrale Seite der Pedalganglien. Die erste steile Dehnungsstrecke tritt nunmehr in 100 % der Fälle auf. Die Pedalkonstanz kommt um 13,8 % der Normallänge (der sogenannten Spannungslänge) niedriger zu liegen. Um dieser Resultate sicher zu sein, darf man höchstens 5 Minuten nach Auflegen des Kristalles mit der Aufnahme der Dehnungskurve warten. Wenn man 15 Minuten gewartet hat, so tritt eine entgegengesetzte Abänderung auf. Die steile Strecke ist nur in 25 % der Fälle nachzuweisen (gegenüber 61 % normal) und das Niveau der Pedalkonstanz steigt und zwar um 15,4 % der Muskellänge, die normaler Pedalkonstanz entsprechen haben würde. Offenbar besitzen die Pedalganglien ein ventrales Hemmungs- und ein dorsales Erregungszentrum für den Tonus; nach längerer Zeit erreicht das diffundierende Kochsalz, von der ventralen Seite kommend, auch das dorsale Zentrum, welches, wenn einmal seine Schwelle überschritten worden ist, die Erscheinungen beherrscht.

## 2. Kokain. Versuche an Wiederholungskurven.

Kokain dringt offenbar schnell in das Gangliengewebe ein, sodass die Dämpfungerscheinungen, die es nach Vergiftung verursacht, schnell auftreten. Für unsere Versuche aber hat dieser Umstand die nachteilige Folge, dass die Resultate schon nach kurzer Zeit ihre Eindeutigkeit verlieren, da das Kokain seine Wirkung dann nicht mehr auf das untersuchte Zentrum (hier also das ventrale Hemmungszentrum) beschränkt. Es tritt dann nämlich zugleich Dämpfung des Erregungszentrums auf, deren Wirkung den Effekt der Vergiftung des Hemmungszentrums bedeckt: Die erste Wiederholungskurve nach Auftragen des Kokains kommt in der Regel zu früh, um überhaupt Wirkung zu zeigen, die

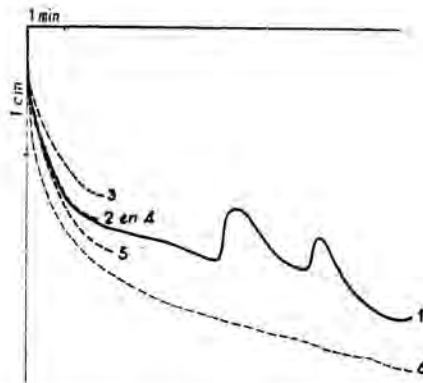


Abb. 2. Wiederholungskurven von einem pedaltönenen Präparat, Ganglien um  $180^\circ$  gedreht (um die Längsachse). Versuche mit Kokain auf der ventralen Seite der Ganglien. Dehnungskurven mit 20 g Last; 1 und 6 von 10 Minuten Dauer; die übrigen von 2 Minuten Dauer. 1: Ohne Kokain, Normalkurve; nach zwei Aufnahmen wird Kokain appliziert. 2: 6 Minuten nach Applikation (zu kurze Einwirkungsdauer, noch kein Effekt). 3: nach 16 Minuten: Dämpfung des ventralen lösenden Zentrums maximal. Sodann erreicht das diffundierende Kokain das dorsale Erregungszentrum mehr und mehr. 4: nach 21 Minuten Gleichgewicht zwischen Hemmungs- und Erregungsdämpfung. 5: nach 31 und 6: nach 36 Minuten (zunehmende Erregungsdämpfung): Erniedrigung des Tonuspiegels und des Niveau.

zweite aber, bei der üblichen Kurvendauer von 10 Minuten schon zu spät für reine Dämpfung der Hemmung.

Daher mussten wir die Zeitdauer der Aufnahme der einzelnen Wiederholungskurven auf einige Minuten beschränken. Die erste steile Kurvenstrecke geht nun, durch Dämpfung der Hemmung, verloren; in aufeinanderfolgenden Wiederholungskurven wird diese Dehnungsstrecke weniger steil, bis etwa 16 Minuten nach der Vergiftung (Abb. 2). Dann wird die Strecke wieder steiler und länger (Dämpfung des erregenden Zentrums); sehr deutlicher Unterschied mit Kurve 3 ist nach etwa 31 Minuten (Kurve 6) festzustellen. In der kurzen Zeit, welche diese Kurvenaufnahmen dauern dürfen, wird keine Konstanz erreicht, sodass wir über den Einfluss rein ventraler Dämpfung auf das Konstanzniveau nichts aussagen können. Schon bei einer Dehnung, die 10 Minuten dauert, fanden wir, vor allem bei nicht zu geringer Last, Niveauverlust, welcher ohne Kokainvergiftung nicht aufgetreten sein würde; Niveauerhöhung wurde aber niemals wahrgenommen. Da bald danach auch, wie gesagt, Verlängerung der steilen Strecke auftritt, schliessen wir auf Dämpfung des erregenden Zentrums, die inzwischen weiter vorgeschritten ist. Die früher oft störend empfundene Zweideutigkeit der Resultate bei (dorsaler!) Ganglienkokainisierung, ist daher offenbar als ein Streit zwischen beiden Zentren, je nach ihrem Vergiftungsgrad, aufzufassen.

### III. Tonuslösung durch Reizung mit Induktionsströmen.

Auf Grund unsrer Ergebnisse haben wir ältere Versuche wieder aufgenommen, um die Frage zu entscheiden, ob man Tonuslösung auch durch Reizung hervorrufen kann. Bislang war uns das nicht gelungen. Nur der Fall des Tonusspiegels, den wir bei Auflegen eines Kochsalzkristalles dorsal auf die Pedalganglien beobachtet hatten, wies auf die Möglichkeit eines positiven Ergebnisses direkter Ganglienreizung hin.

#### 1. Reizung der Pedalganglien durch Einzelöffnungsschläge.

a. *Ventrale Reizung* (Abb. 3). Schwellenreize (R. A. 30 cm) erzielen geringfügigen Tonusfall, der mit der Reizstärke zunimmt (bis R. A. 26 cm). Bei R. A. 28 cm wird die Schwelle des erregenden Zentrums überschritten. Bei R. A. 22 cm trat reine Kontraktion auf. Ein neutrales Gebiet der Reizgrösse, bei welcher also keinerlei Reaktion auftritt, war nicht festzustellen. Eventuelle Muskelverkürzungen kommen stets vor der Tonuslösung.

b. *Dorsale Reizung* (*Kathode rostro-dorsal*). Die schwächsten Reaktionen (R. A. 55—53 cm) bestehen aus Spiegelerniedrigung (während bei ventralen Reizen lediglich Niveauserniedrigung, d.h. kurzes Absinken der Kurve, auftritt). Daher verhindert schwache dorsale Reizung die Behauptung einer Konstanz. Bei zunehmender Reizstärke (R. A. 48—40) fanden wir ein neutrales Gebiet, wobei also keinerlei Reaktion auftrat. Bei R. A. 35 und 34 cm fand sich geringe Tonuserhöhung; Reizung bei R. A. 25 cm erzeugte Kontraktion.

#### 2. Reflexreizung (*Einzelöffnungsschläge*) eines der *Nn. palliales*.

Auch hier fanden wir bei schwacher Reizung Tonuslösung, bei starken Reizen nur Kontraktion, während auch hier zwischen beiden Gebieten eine neutrale Zone liegt, in welcher offenbar die Wirkungen beider Zentren miteinander im Gleichgewicht sind.

#### 3. Reizung der Pedalnerven mit Einzelöffnungsschlägen und Nervendurchschneidung.

a. *Elektrische Reizung der caudalen Nerven* mittels untergeschobener Elektroden; die Kathode liegt myopolar; zwischen Anode und Pedalganglien sind die Nervenstränge durch Erhitzen zerstört, um Reflexwirkung auszuschliessen. Auch bei dieser Technik ergab sich ein Unterschied zwischen schwacher und starker Reizung. Schwache Reize verursachen Fall der Kurve (nach langer Latenz). Stärkere Reize verursachen erst Kontraktion, sodann Tonusfall. Zuweilen heben beide Wirkungen einander auf. Starke Reize haben Kontraktion zur Folge, hiernach bleibt der Tonusspiegel erhöht.

b. Um alle Pedalnerven reizen zu können, wurden sie in Strängen zusammengebunden; die Knoten lagen nahe an der Ganglienmasse. Nachdem die Elektroden auf den Strängen befestigt waren, wurden die Stränge von den Pedalganglien getrennt. Erst wurden die Versuche mit elektrischer Reizung ausgeführt; dann reizten wir die Nerven mechanisch.

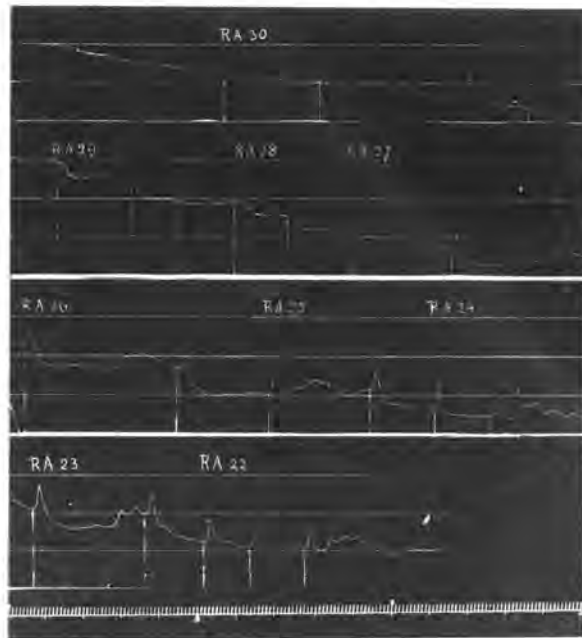


Abb. 3. Ursprüngliche Kurve eines Schneckenfusses mit Ganglienmasse, die  $180^\circ$  um die Längsachse gedreht ist. Reizung der Ganglien mit Einzelöffnungsschlägen, Kathode auf der ventralen Seite, Anode indifferent. R. A. bedeutet Reizstärke in cm Rollenabstand, Liminale Reize lösen nur Niveauverlust aus (R. A. 30 und 29); stärkere Reize ergeben mehr Niveauverminderung, denen eine Kontraktion vorausgeht (R. A. 28 bis 23). Starke Reize haben nur Kontraktion zur Folge (R. A. 22). Die vertikalen Linien geben den Augenblick der Reizung an.

α. *Mechanische Reize* (Durchschneidung der Nervenbündel). Diese Methode, bei der Veränderung der Reizstärke ausgeschlossen ist, ergab bei Durchschneidung rostraler Stränge nichts oder Erschlaffung, bei Durchschneidung caudaler Stränge Verkürzung oder nichts.

β. *Elektrische Einzelreize* bestätigen die Versuche mit Durchschneidung (Abb. 4): Schwächere Reize wirken lösend, wobei die Tonuslösung mit der Reizstärke abnimmt. Stärkere Reize haben Verkürzung mit Erhöhung des Tonusniveau zur Folge. Auch hier zeigten die rostralen Stränge überwiegend lösende Wirkung. Offenbar laufen in den Pedalnerven spezifisch hemmende (neben erregenden) Fasern, die in den rostralen Strängen überwiegen, und in allen Strängen niedrigere Reizschwelle haben als die erregenden Fasern.

### C. Zusammenfassung.

1. Um den Aktivitätszustand der Zentren streng lokalisiert zu erhöhen und zu erniedrigen werden die Pedalganglien von *Helix pomatia* während der Dehnung mit schwachen konstanten Strömen durchströmt. Hierbei liegt in einer Versuchsreihe die Kathode dorsal

und die Anode ventral, in andern Versuchen umgekehrt. Dorsaler Katelektrotonus erhöht das Niveau der Pedalkonstanz, ventraler Katelektrotonus erniedrigt dieses Niveau.

2. Kochsalzkristalle, ventral aufgelegt, verstärken die Tonuslösung: die erste steile Strecke der Dehnungskurve tritt nunmehr in 100 % der Kurven auf; sie ist länger als in Versuchen ohne Aktivierung des ventralen Teiles der Ganglien. Das Niveau der Pedalkonstanz wird erniedrigt. Auf die Dauer steigt das Niveau, da zweifellos das Kochsalz bis in den dorsalen Teil der Ganglien durchdringt.

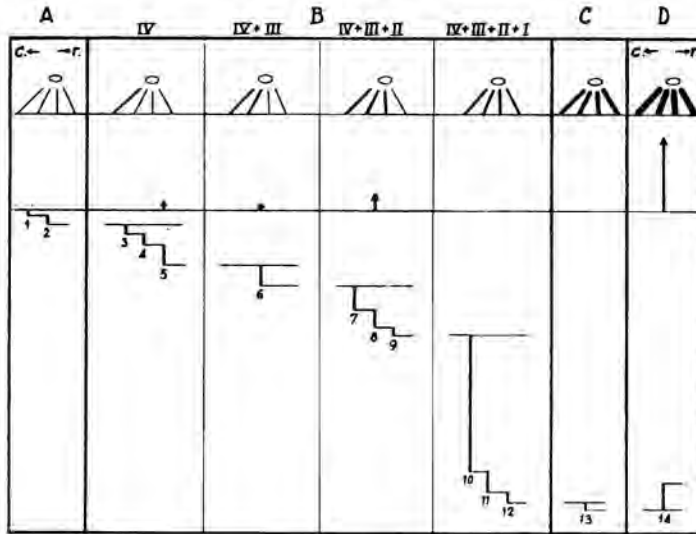


Abb. 4. Schema der Effekte einer Reizung der Nn. pedales eines Schneckenfusses ohne Ganglien; Einzelöffnungsschläge. *Erste horizontale Reihe:* die vier (IV bis I) von den Pedalganglien getrennten Nervenstränge; c = caudale, r = rostrale Richtung. Auf jedem Strang wird eine Anode und eine Kathode (letztere myopolär) befestigt, welche verbunden sind mit je einer Sekundärrolle. In allen vier Sekundärrollen werden die Ströme gleichzeitig durch eine einzige Primärrolle induziert. In der ersten vertikalen Kolonne sind alle Sekundärrollen um einen gleichen grösseren Abstand von der gemeinsamen primären entfernt (Reizstärke A). Dann wird die Rolle des Stranges IV näher zur primären geschoben, dieser Strang also stärker gereizt (Stärke B); später folgt Rolle III, u.s.w. Nachdem alle vier Stränge mit Stärke B gereizt worden sind, werden alle vier sekundäre Rollen noch mehr der primären Rolle genähert; Reizstärke C. Die Reizstärke wird sodann für alle 4 Stränge noch einmal verstärkt (Stärke D). Die Stränge sind nach Massgabe der zunehmenden Reizstärke dicker gezeichnet. *Zweite horizontale Reihe:* Die Pfeile bedeuten Kontraktionsauschläge, als auf stillstehendem Kymographion aufgezeichnet. *Dritte horizontale Reihe:* Niveauverlust oder -erhöhung, auf stillstehendem Kymographion.

*Ergebnisse:* Reizstärke A löst nur Erschlaffung aus. Stärke B ruft in den Strängen IV, III und II Tonusverlust, bisweilen (Reizung 5, 6 und 8) vorher auch Verkürzung hervor; sobald Strang I hinzukommt, erfolgt ausgiebige Erschlaffung (10), keine Kontraktion. Erst mit sehr starken Reizen (D) tritt Kontraktion mit Tonussteigerung auf (14).

3. Kokain, ventral appliziert, bringt die steile Strecke zum Verschwinden und das Niveau der Pedalkonstanz wird erniedrigt. Später tritt die steile Strecke wieder auf und die Pedalkonstanz verschwindet. Zweifellos hat das diffundierende Kokain inzwischen den dorsalen Teil der Ganglien erreicht.

4. Reizung der ventralen Seite der Ganglien mit liminalen Einzelöffnungsschlägen verursacht Verminderung des Tonusniveau; bei stärkeren Reize tritt erst Kontraktion, sodann grössere Verminderung des Tonusniveau auf. Bei starken Reizen treten lediglich Einzelverkürzungen, ohne Einfluss auf das Niveau der Konstanz auf.

5. Schwache Reizung der dorsalen Seite der Ganglien ruft Verminderung des tonischen Widerstandes im Laufe der Dehnung hervor. Stärkere Reizung bleibt ohne Effekt, starke Reizung hat Einzelverkürzungen, ohne Einfluss auf den Tonus, zur Folge. Reizung eines Pallialnerven ergibt Resultate wie dorsale Ganglienreizung.

6. Bei Reizung der Pedalnerven (ohne Pedalganglien) zeigt sich, dass die Pedalstränge hemmende und erregende Fasern führen. Die hemmenden Fasern finden sich überwiegend in den rostralen Strängen. Sie haben in allen Strängen eine niedrigere Schwelle als die erregenden Fasern.

7. *Allgemeine Schlüsse aus diesen Ergebnissen:* Die Resultate zwingen uns, das Vorhandensein eines dorsalen erregenden und eines ventralen hemmenden Tonuszentrums in den Pedalganglien anzunehmen. Im Gegensatz zu unserer früheren Auffassung werden die pedaltoneische Erscheinungen (Spiegelerniedrigung und Konstanzerzeugung) quantitativ durch das Verhältnis des Aktivitätszustandes beider Zentren bestimmt. Offenbar erfolgt jede Form von zentraler Regulierung durch Impulse, im Falle von Tonuserniedrigung durch spezifische Hemmungsfasern in den Pedalnerven, vor allem in den rostralen, welche Fasern eine niedrigere Reizschwelle haben als die erregende Fasern.

#### LITERATUR.

1. JORDAN, H. J., *Ergebn. d. Physiol.* **16**, 87 (1918);
2. JORDAN, H. J., *Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam* **38**, 358 (1935);
3. JORDAN, H. J., FRL. C. E. SLUITER u. N. POSTMA, *Ibid.* **41**, 1032 (1938);
4. JORDAN, H. J., *Schweiz. Mediz. Wchschr.* **71**, Nr. 12, 1941;
5. MAAS, J. A., *Arch. Néerl. Physiol.* **13**, 1 (1938);
6. POSTMA, N., *Onderzoekingen betreffende het herstel van de tonus bij de slakkevoet (Helix pomatia L.) u.s.w.*, Diss. Math. Naturw. Fac. Univ. Utrecht (1935);
7. POSTMA, N., *Proc. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam*, **44**, 1151 (1941);
8. POSTMA, N., *Ibid.*, **44**, 1239 (1941);
9. TIEL, N. VAN, *Ibid.* **43**, 1332 (1940).

**Hydrodynamics.** — *On the influence of the concentration of a suspension upon the sedimentation velocity* (in particular for a suspension of spherical particles) \*).  
By J. M. BURGERS. (Mededeeling No. 42 uit het Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

8. In the preceding part of this paper a general picture has been given of the problem of the sedimentation velocity of small particles in a viscous liquid, and those features have been pointed out which require a more thoroughgoing investigation. The difficulties inherent in the problem are mainly due to the circumstance that according to STOKES'S equations the velocities produced in an unlimited field by a moving particle *A* decrease proportionally to the inverse *first* power of the distance. The influence exerted upon a neighbouring particle *B* in such a field appears to be always of the same sign (the particle *B* is dragged along in the direction of the motion of *A*), and is of the order of magnitude  $a/r$ , *a* being the radius of a particle and *r* the distance between *A* and *B*. In an assembly containing a great number of particles the contributions to be derived from more and more distant groups consequently do not form a converging series, and the resulting effect will be dependent upon the extent and the shape of the assembly, as well as upon the conditions imposed by the properties of the surrounding field.

When the suspension is enclosed in a vessel, a return flow somewhere must occur, as was mentioned before in 3.; in this case, along with the positive effect between neighbouring particles, there will be a negative effect between particles at distances from each other comparable with the dimensions of the vessel. In consequence of the fact that these two effects nearly balance each other, the resulting average effect (which appears to be of negative sign) becomes of a much higher order of smallness, *viz.* of the order  $ns$ , where *n* is the number of particles in the suspension per unit volume, and *s* is the volume of a particle. When the mean distance between two particles is put equal to  $r_{\text{mean}}$ , which quantity will be of the order  $n^{-1/3}$ , we can also say that the resulting average effect is of the order  $a^3/r_{\text{mean}}^3$ .

It may be surmised that the precise numerical magnitude of this resulting average effect should be rather sensitive to circumstances which may affect the balancing between the "positive" and the "negative" regions of the field. In particular it might be supposed that the form of the vessel — which is the determining factor in the calculation of the function  $\chi$  in eq. (12) — greatly may affect this balancing. In the developments of sections 5.—7. this possibility presented itself in the result that the equation derived for the mean value of  $\Phi_m$  contained terms depending upon the value of  $\partial\Phi/\partial n$  along the walls of the vessel, for which a general expression could not be found.

The possibility that the sedimentation velocity should be dependent upon the shape of the vessel nevertheless does not appear to be readily acceptable<sup>5)</sup>. In the discussion of the paper at the meeting of the Academy of October 25 Professor VENING MEINESZ raised the question whether it would be possible to solve the problem for a suspension

---

\*) Continued from these Proceedings 44, 1941, p. 1051. — The reader will have observed that an error of print has crept into the formula for *r*, given at p. 1048, line 6 from above; this formula must read:

$$r = \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2\}^{1/2}.$$

<sup>5)</sup> It should be stated that in all cases to be considered the suspension is assumed to be homogeneous; *i.e.* we suppose that the number of particles per unit volume (*n*) everywhere in the field has the same value.



extending indefinitely in all directions, provided the boundary condition which in the case of a suspension enclosed in a vessel is imposed by the impermeability of the walls were replaced by an equivalent condition of another type. This cannot be done, however, so long as the solution for the infinite field as given by STOKES is taken as a basis. In a private discussion with Professor BIEZENO, to which I owe much in clearing up the difficulty encountered, the latter proposed to replace STOKES' solution by a different one, in which a return flow in the more distant parts of the field is automatically combined with the ordinary STOKES' flow in the immediate neighbourhood of the particle <sup>6)</sup>.

It appears that this actually can be done. Although the procedure at first sight may seem to be somewhat artificial, it will be shown that it can be used in constructing a solution of the problem, which will enable us to treat the various questions mentioned before — the one concerning the correction for the hydrostatic pressure, that for the effective viscosity, and that for the field of flow — from a unified point of view. The procedure to be followed at the same time makes it possible to obtain an estimate of the influence of a preferential distribution of the distances of the particles in the neighbourhood of a given one, such as may appear e.g. when repulsive forces are acting between the particles <sup>7)</sup>.

9. The solution to be used represents the field of flow produced by a concentrated force of magnitude  $F$  acting at the origin, combined with a "diffuse" field of force given by:

$$X = -(\kappa^3 F / 8\pi) e^{-\kappa r} \dots \dots \dots (25)$$

Here  $\kappa$  is a small quantity, of such nature that  $1/\kappa$  represents a distance large in comparison with the average distance between the particles. All forces are in the direction of the  $x$ -axis. The integral of  $X$  taken over the whole field is equal to  $-F$ , so that the force system is an *equilibrium system*.

Introducing the function:

$$\Psi = + \frac{F}{8\pi\kappa\eta} \left[ e^{-\kappa r} + \frac{4}{\kappa r} e^{-\kappa r} - \frac{4}{\kappa r} \right] \dots \dots \dots (26)$$

which satisfies the relation:

$$\eta \Delta \Delta \Psi = -X \dots \dots \dots (26a)$$

( $\eta$  being the true viscosity of the pure liquid) the field of flow can be described by the equations:

$$u_1 = \Delta \Psi - \partial^2 \Psi / \partial x^2; \quad v_1 = -\partial^2 \Psi / \partial x \partial y; \quad w_1 = -\partial^2 \Psi / \partial x \partial z \dots \dots (27)$$

<sup>6)</sup> A field of flow differing from that determined by STOKES's formulae, is also obtained when OSEEN's theory is applied (compare e.g. J. M. BURGERS, these Proceedings 23, 1921, p. 1087 and fig. 11 at p. 1091). The distribution of the current given by OSEEN's theory, however, is dependent upon the magnitude of the REYNOLDS number  $Re = 2 \rho u_0 a / \eta$  ( $u_0$  being the velocity of the particle); moreover its general character makes it appear less promising than the type of flow discussed below in section 9.

<sup>7)</sup> As was pointed out by Professor KRUYT at the meeting of the Academy, the presence of repulsive forces must be considered as an essential feature of the majority of stable suspensions. Hence the assumption provisionally made in the preceding part of the paper, that the particle  $B$  may take in all positions relatively to  $A$  with equal probability, in many cases will not be applicable.

When the pressure  $p$  is taken equal to  $-\eta \partial(\Delta \Psi)/\partial x$ , then in consequence of the relation (26a) this field satisfies the equations:

$$\eta \Delta u = \partial p / \partial x - X; \quad \eta \Delta v = \partial p / \partial y; \quad \eta \Delta w = \partial p / \partial z,$$

together with the equation of continuity.

In order to obtain a field which at the same time will satisfy the boundary conditions at the surface of a spherical particle of radius  $a$ , we add a second field of flow, described by the equations:

$$u_{II} = \partial^2 q / \partial x^2; \quad v_{II} = \partial^2 q / \partial x \partial y; \quad w_{II} = \partial^2 q / \partial x \partial z \quad \dots \quad (28a)$$

where:  $q = -F a^2 / 24 \pi \eta r \quad \dots \quad (28b)$

As  $\Delta q = 0$ , this field satisfies the equations of motion with  $p = 0, X = 0$ <sup>8)</sup>.

For the resulting field we find:

$$u = u_I + u_{II} = \frac{F \kappa}{8 \pi \eta} \left\{ e^{-\kappa r} \left( 1 + \frac{3}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^3} \right) - \frac{x^2}{r^2} \left( 1 + \frac{5}{a} + \frac{12}{a^2} + \frac{12}{a^3} \right) \right\} - \left( 1 - \frac{3x^2}{r^2} \right) \frac{4}{a^3} \left. \right\} + \frac{F}{8 \pi \eta} \left( \frac{a^2}{3r^3} - \frac{a^2 x^2}{r^5} \right) \quad (29)$$

where for shortness has been written:  $\kappa = \kappa r$ .

So long as  $\kappa r$  is small in comparison with unity, we may develop the exponential function; we then find:

$$\Psi = \text{const.} + \frac{Fr}{8 \pi \eta} - \frac{F \kappa r^2}{48 \pi \eta} \quad \dots \quad (30a)$$

$$u = \frac{F}{8 \pi \eta} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} + \frac{a^2}{3r^3} - \frac{a^2 x^2}{r^5} - \frac{2\kappa}{3} \dots \right\} \quad \dots \quad (30b)$$

where the terms not written out are of the order  $\kappa^3 r^2$  and vanish for  $r = 0$ . At the surface of the spherical particle, where  $r = a$ , the velocity becomes:  $u_0 = (F/6\pi\eta a) \cdot (1 - \frac{1}{2}\kappa a \dots)$ . In view of the condition imposed upon  $\kappa$  the term  $\frac{1}{2}\kappa a$  is so small in comparison with unity that it wholly can be neglected; we therefore come back to the velocity which is given by the ordinary STOKES' formula, *viz.*:

$$u_0 = F/6\pi\eta a \quad \dots \quad (30c)$$

On the other hand for values of  $r$  so large that  $\kappa r$  is large in comparison with unity, the exponential function decreases to zero, and there remains:

$$\Psi = -F/2\pi\kappa^2\eta r \quad (\text{with: } \Delta \Psi = 0) \quad \dots \quad (31a)$$

$$u = -\frac{F}{8\pi\eta} \left( \frac{4}{\kappa^2} - \frac{a^2}{3} \right) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right) \quad \dots \quad (31b)$$

It will be observed that the mean value of  $u$  taken over a spherical surface ( $r = \text{constant}$ ) becomes zero in this case.

It may be mentioned that a current function  $\psi$  can be constructed, so that:

$$u = \frac{1}{2\pi\omega} \frac{\partial \psi}{\partial \omega}; \quad v_\omega = -\frac{1}{2\pi\omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots \quad (32)$$

<sup>8)</sup> It can be shown that the field of flow described by eqs. (28a), (28b) may be considered as being produced by a multiplet consisting of six equal forces of magnitude  $f$ , respectively acting at the points  $+\varepsilon, 0, 0; -\varepsilon, 0, 0; 0, +\varepsilon, 0; 0, -\varepsilon, 0; 0, 0, +\varepsilon; 0, 0, -\varepsilon$ ; combined with a force of magnitude  $-6f$ , acting at the origin, provided  $2f\varepsilon^2 = Fa^2/3$ .

The equilibrium of the whole system thus is not disturbed.

where:  $\omega = (y^2 + z^2)^{1/2}$ ;  $v_{\omega} = (v^2 + \omega^2)^{1/2}$ . This function is given by:

$$\psi = -\frac{F \omega^2}{4 \eta r} \left[ e^{-\tau} \left( 1 + \frac{4}{\sigma} + \frac{4}{\sigma^2} \right) - \frac{4}{\sigma^2} + \frac{a^2}{3 r^2} \right] \dots (33)$$

This expression becomes zero for  $\omega = 0$  and for  $\omega = \infty$ . Hence, provided  $x$  is different from zero, the integral  $\iint dy dz u$ , extended over an unlimited plane  $x = \text{constant}$ , is zero. — When  $r$  is equal to  $a$ , the expression (33), after development of the exponential function, takes the value:  $\psi = (F \omega^2 / 6 \eta a) (1 - \frac{1}{2} \kappa a) = \pi \omega^2 u_0$ , from which it follows that:  $\iint dy dz u = -\pi \omega^2 u_0$ , when the integral is extended over that part of a plane  $x = \text{constant}$  (with  $|x| < a$ ), which lies outside of the spherical surface  $r = a$ . Hence:

$$\iiint dx dy dz u = -(4 \pi a^3 / 3) u_0 \dots (34)$$

where the integral is extended over the whole of space outside of the spherical surface  $r = a$ .

10. We now are in a position to build up a description of the field of flow which is adapted to our purpose.

The suspension consists of a liquid of density  $\rho$ , which is acted upon by a force  $\rho g$  per unit volume, and in which are embedded  $n$  particles per unit volume, every one of which is acted upon by a force  $W = s \rho_p g$  ( $s$  again being the volume and  $\rho_p$  being the density of a particle). All forces act in the same direction, which is assumed to be the direction of the  $x$ -axis. The total system of forces can be analysed into the following components:

a) a continuous field of force with the intensity  $\rho g + n F$  per unit volume (where  $F$  will be determined below), acting through the whole space, i.e. both through the space taken in by the liquid and through that taken in by the particles;

b) a set of "equilibrium systems" of the type considered in 9, each system having its centre at the centre of a particle, so that there are  $n$  systems per unit volume of the field.

It is not difficult to prove from eq. (25) that in an infinitely extended field the resultant effect of the "diffuse" fields of the equilibrium systems is equivalent to a continuous force of magnitude  $-n F$  per unit volume, acting throughout the whole field<sup>9)</sup>. Combining this with the field mentioned under a), we come back upon the force  $\rho g$  per unit volume acting upon the liquid, and a force  $s \rho_p g$  acting upon every particle. The total force acting upon a particle thus will have the value  $F + s \rho_p g$ . As this must be equal to  $W$ , we obtain the equation:

$$F = W - s \rho_p g = s (\rho_p - \rho) g \dots (35)$$

The field of force considered under a) does not give rise to any flow. It is kept in equilibrium by a pressure gradient of the constant magnitude<sup>10)</sup>:

$$\partial p_m / \partial x = \rho g + n F = \rho g + n s (\rho_p - \rho) g \dots (36)$$

<sup>9)</sup> This result will be more and more accurate when  $\kappa$  is so small that the irregularities in the spatial distribution of the particles are averaged out over distances of the order  $1/\kappa$ .

<sup>10)</sup> This pressure gradient may be assumed to act through the interior of a particle. It is kept in equilibrium there by a force of magnitude  $s. (\partial p_m / \partial x)$  in the direction of the  $x$ -axis. If we add to this the force  $-s n F$ , which is necessary to balance the pressure distribution corresponding to the continuous force  $-n F$  that was obtained as the resultant of the "diffuse" fields, and further the force  $F$  itself acting upon a particle, we obtain the total amount:

$$F - s n F + s. (\partial p_m / \partial x) = W$$

by (35) and (36).

As the system of forces considered under *b*) is an equilibrium system, which, although it may give rise to local pressures, will not produce a constant average pressure gradient throughout the whole field, the expression (36) at the same time represents the *mean hydrostatic pressure gradient* in the field. This corresponds to what was mentioned in connection with eq. (2) of the preceding part of this paper.

On the other hand, every one of the "equilibrium systems" will produce a field of flow as described by the equations of section 9. The force *F* determining the intensity of a single system appears to be given by eq. (35), i.e. by eq. (1) of the preceding part of this paper with  $\rho_S = \rho$ , that is, with  $\rho_S$  equal to the density of the pure liquid. Hence the correction indicated by eq. (3) must *not* be applied when the calculations are performed according to the scheme developed here.

There now is no longer any danger that the contributions to the velocity at an arbitrary point of the field, to be derived from the infinite number of particles, will form a divergent series. This follows from the result embodied in eq. (34), and will appear also from the calculations to be developed later on in section 17.

11. We now proceed to the investigation of the influence exerted by a particle *A* upon another particle *B*, and of *B*'s reaction upon *A*. It is convenient again to assume provisionally that only *A* is acted upon by the gravitational force, whereas *B* is supposed to have the same density as the liquid, so that it is carried along by the motion of the latter.

If the components of the velocity of the flow, produced by the motion of *A*, are denoted by *u*, *v*, *w*, it follows from the considerations of section 4. that the components of the velocity taken up by *B* will be:

$$u_m = u + \frac{1}{6} a^2 \Delta u; \quad v_m = v + \frac{1}{6} a^2 \Delta v; \quad w_m = w + \frac{1}{6} a^2 \Delta w. \quad (37)$$

*u*, *v*, *w* here representing the values of these quantities at the centre of *B*.

The particle *B* at the same time will take up a rotation, the components of the angular velocity having the magnitude:

$$\omega_x = \frac{1}{2} (\partial w / \partial y - \partial v / \partial z), \text{ etc.} \quad (38)$$

where the values of the derivatives likewise must be taken at the centre of *B*.

When these motions (translation and rotation) are given to *B*, there will not yet be equality of the velocity of the liquid on the one hand, and the velocity of the points of the surface of *B* on the other hand. The difference between the velocity components of the liquid and those of the surface of *B* can be expressed by means of the formulae:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= x' D_{11} + y' D_{12} + z' D_{13} + \text{terms of the 2nd, 3rd, ...} \\ &\hspace{15em} \text{degree in } x', y', z' \dots \dots \dots \\ v^* &= x' D_{21} + y' D_{22} + z' D_{23} + \dots \dots \dots \\ w^* &= x' D_{31} + y' D_{32} + z' D_{33} + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Here *x'*, *y'*, *z'* are the coordinates of a point of the surface of *B*, with the centre of *B* as origin; further:

$$D_{11} = \partial u / \partial x; \quad D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} (\partial v / \partial x + \partial u / \partial y), \text{ etc.} \quad (40)$$

The mean values of the terms of the second degree in the expressions (39) for *u\**, *v\**, *w\**, taken over the surface of the sphere, are zero when the values (37) are given to the components of the translational velocity of *B*.

It is possible to get rid of the terms of the first degree in the expressions (39) by assuming in *B* to be present certain doublets, combined with some multiplets of higher order, by means of which an appropriate system of additional velocities is called forth in

the liquid. In order to do this most conveniently we introduce a new system of coordinates  $x'', y'', z''$ , orientated in such a way that in this system  $D_{12} = D_{13} = D_{23} = 0$ . We begin by taking  $z' = 0$ ; then the  $x', y'$ -plane becomes a meridian plane, and  $D_{13} = D_{23} = 0$ .

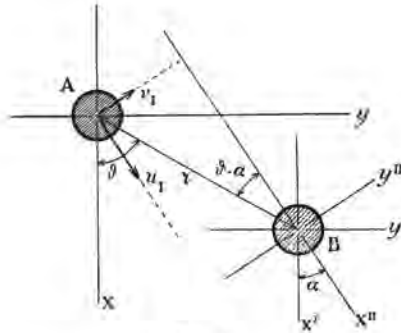


Fig. 1.

In the meridian plane we introduce axes  $x'', y''$  (compare fig. 1); the angle  $\alpha$  between the  $x''$ -axis and the  $x'$ -axis being determined by:  $\operatorname{tg} 2\alpha = 2D_{12}/(D_{11} - D_{22})$ . With  $z'' = z'$  the linear terms of (39) can be transformed into:

$$u^* = x'' D_1; \quad v^* = y'' D_2; \quad w^* = z'' D_3 \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

(all quantities now referring to the new axes), where:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= D_{11} \cos^2 \alpha + D_{22} \sin^2 \alpha + 2 D_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ D_2 &= D_{11} \sin^2 \alpha + D_{22} \cos^2 \alpha - 2 D_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ D_3 &= D_{33} \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad (42)$$

It will be seen that:  $D_1 + D_2 + D_3 = D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0$ .

12. The field of flow produced by a doublet is given by eqs. (9.3) of the "Second Report on Viscosity and Plasticity" (p. 133). We introduce 3 doublets, having the following orientations:  $M_1$  parallel to the  $x''$ -axis;  $M_2$  parallel to the  $y''$ -axis;  $M_3$  parallel to the  $z''$ -axis. It can be deduced from the equations mentioned that the resulting field vanishes when  $M_1 = M_2 = M_3$ . Consequently without loss of generality we can take:  $M_1 + M_2 + M_3 = 0$ , so that  $M_1 = -(M_2 + M_3)$ .

The expressions for the components of the velocity produced by these doublets can then be brought into the form:

$$u_{II} = -(3x''/8\pi\eta r''^3) Q_1; \quad v_{II} = -(3y''/8\pi\eta r''^3) Q_1; \quad w_{II} = -(3z''/8\pi\eta r''^3) Q_1 \quad (43)$$

where  $r'' = (x''^2 + y''^2 + z''^2)^{1/2}$ , and:

$$Q_1 = M_2 \left( 1 - \frac{2y''^2 + z''^2}{r''^2} \right) + M_3 \left( 1 - \frac{y''^2 + 2z''^2}{r''^2} \right).$$

The field produced by the doublets  $M_1, M_2, M_3$  still must be combined with a field produced by two multiplets of higher order, presenting the velocity components:

$$u_{II} = x'' Q_2; \quad v_{II} = y'' (Q_2 + 6B/r''^5); \quad w_{II} = z'' (Q_2 + 6C/r''^5) \quad (44)$$

where: 
$$Q_2 = B \left( \frac{3}{r''^5} - \frac{15y''^2}{r''^7} \right) + C \left( \frac{3}{r''^5} - \frac{15z''^2}{r''^7} \right).$$

We now introduce the condition that the resulting field produced by these doublets and multiplets shall annul the quantities given by (41) at the surface of the spherical particle *B*. This requires:

$$u^* + u_1 + u_{11} = 0, \text{ etc. for } r'' = a. \quad (45)$$

The solution of these equations gives:

$$B = (2M_2 + M_3) a^2 / 40 \pi \eta; \quad C = (M_2 + 2M_3) a^2 / 40 \pi \eta. \quad (46)$$

and:  $M_1 = -2k\eta D_1; \quad M_2 = -2k\eta D_2; \quad M_3 = -2k\eta D_3 \quad (47)$

with: <sup>11)</sup>  $k = 10\pi a^3 / 3 = 2,5 s. \quad (48)$

13. The next step is to find the velocity which the particle *A* derives from the additional field considered in the preceding section. We may call this the "induced velocity" of *A*. For this purpose we calculate the velocity of this field at the centre of *A*; in order to make the expressions not too complicated, we shall give attention to the field produced by the doublets *M*<sub>1</sub>, *M*<sub>2</sub>, *M*<sub>3</sub> only.

Referring to fig. 1 we must put in eqs. (43):  $r'' = r; \quad x'' = -r \cos(\vartheta - \alpha); \quad y'' = -r \sin(\vartheta - \alpha); \quad z'' = 0;$  after some reduction we obtain:

$$u_1 = + (5a^3 / 2r^2) Q_3 \cos(\vartheta - \alpha); \quad v_1 = + (5a^3 / 2r^2) Q_3 \sin(\vartheta - \alpha); \quad w_1 = 0 \quad (49)$$

where:  $Q_3 = D_1 \cos^2(\vartheta - \alpha) + D_2 \sin^2(\vartheta - \alpha).$

Hence the component in the *x*-direction of the "induced velocity" becomes:

$$u_i = u_1 \cos \alpha - v_1 \sin \alpha = (5a^3 / 2r^2) Q_3 \cos \vartheta. \quad (50)$$

In order to obtain the values of *a*, *D*<sub>1</sub>, *D*<sub>2</sub> to be substituted into this expression, we introduce a further simplification and restrict to the most important terms in the equations for *u*, *v*, *w*. For shortness we omit the factor *F*/8πη; the expressions to be used then take the forms:

$$u = 1/r + x^2/r^3; \quad v = xy/r^3; \quad w = xz/r^3 \quad (51)$$

from which:

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= x/r^3 - 3x^3/r^5; & D_{12} &= -3x^2y/r^5 \\ D_{22} &= x/r^3 - 3xy^2/r^5 \\ D_{33} &= x/r^3 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

and:  $\alpha = \vartheta; \quad D_1 = -2x/r^3; \quad D_2 = D_3 = +x/r^3. \quad (53)$

Equation (50) then gives:

$$u_i = -5a^3 x^2/r^6 = -5a^3 \cos^2 \vartheta / r^4. \quad (54)$$

The reader will have observed that in the deduction of the last expressions terms which are of higher orders with respect to *a*/*r* have been neglected. The incorporation of these terms would have yielded rather cumbersome formulae; besides, in that case it would have become necessary to introduce a compensational field likewise for the still remaining terms of the second degree in (39), and possibly also for further reactions between the

<sup>11)</sup> When this result is combined with eq. (8) of the preceding part of this paper, we obtain a proof of EINSTEIN's formula for the specific increase of the viscosity of a suspension of spherical particles.



particles *A* and *B* and other particles. The expression (54) consequently will be valid only for not too large values of the ratio *a/r*. It may be noted on the other hand, as was stated already in footnote 4) to section 4., that the errors may remain small even when the particles should happen to be at a small distance from each other.

14. Summing up the results obtained, we have found that, under the influence of the field of flow produced by the falling particle *A*, the particle *B* is carried along with a velocity, the component in the direction of the *x*-axis of which is given by:

$$u_m = u + \frac{1}{8} a^2 \Delta u \dots \dots \dots (37a)$$

*u* being the velocity at the centre of *B*; whereas the particle *A*, in consequence of the disturbance due to the presence of *B*, experiences an induced velocity *u<sub>i</sub>*, as given by (54), which is of negative sign and thus evidently represents a retardation of the motion of *A*.

In making use of (37a) we must take account of the terms of the order *1/r* and those of the order *a<sup>2</sup>/r<sup>3</sup>*. For two particles at a distance *r* from each other, which still is small in comparison with *1/κ*, these terms are sufficient. Writing *x = r cos θ*, we then have:

$$u = (1 + \cos^2 \vartheta)/r + a^2 (1 - 3 \cos^2 \vartheta)/3 r^3,$$

and: 
$$u_m = (1 + \cos^2 \vartheta)/r + 2 a^2 (1 - 3 \cos^2 \vartheta)/3 r^3 \dots \dots (37b)$$

In (54) the approximation has been restricted to terms of the order *a<sup>2</sup>/r<sup>4</sup>*.

The expressions for *u<sub>m</sub>* and *u<sub>i</sub>* remain the same when the positions of the particles are interchanged, as they depend upon *cos<sup>2</sup> θ*. Hence when now we consider two particles both of which experience the action of the gravitational force, they will acquire the same resultant velocity<sup>12)</sup>:

$$u_{res} = \frac{F}{8 \pi \eta} \left( \frac{4}{3 a} + u_m + u_i \right) = \frac{F}{8 \pi \eta} \left\{ \frac{4}{3 a} + \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{r} + \frac{2 a^2 (1 - 3 \cos^2 \vartheta)}{3 r^3} - \frac{5 a^3 \cos^2 \vartheta}{r^4} \right\},$$

where the factor *F/8 π η* has been restored, and where terms of higher orders have been neglected<sup>13)</sup>.

The investigation of the influence which a particle experiences from the surrounding ones in a suspension of unlimited extent will be given in a subsequent part of this paper.

(To be continued.)

<sup>12)</sup> The two particles will also acquire velocities in directions perpendicular to the *x*-axis. It would appear that these velocities likewise are the same for both particles, so that their distance and their positions relatively to each other are not changed. Compare: C. W. OSEEN, *Hydrodynamik* (Leipzig 1927), p. 157.

<sup>13)</sup> In the expression between the brackets there would also appear the term  $- 2\kappa/3$ , and terms of the order  $\kappa^2 a^2$ , etc. As mentioned already before, these certainly can be neglected, as it has been assumed that  $\kappa r \ll 1$ , so that  $\kappa a$  will be much smaller still.

**Mathematics.** — *Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im  $R_4$ .* (Siebente Mitteilung.) Von R. WEITZENBÖCK und W. J. BOS.

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

Im Anschluss an die vorige Mitteilungen zählen wir hier die projektiven Ausartungen der  $F_2^3$  im  $R_4$  auf.

§ 22.

Die am Schluss der ersten Mitteilung gegebene Klassifikation ergibt:

$$M'_{02} \neq 0, H \equiv 0, F_2^3 \text{ in einem } R_3(v').$$

Die Geraden  $p_{ik}$  und  $q_{ik}$  sind Erzeugenden der  $F_2^3$ ; d.h.:  $\varrho v'_i = (p^2 q^2)_i$ . Weiter haben wir (Vgl. (196)):

$$H \equiv (pu')(pb^2 b_1^2) + \frac{2}{3} t (qu')(qa^2 a_1^2) \equiv 0.$$

Oder:

$$(pu')(pb^2 b_1^2) = 0$$

$$(qu')(qa^2 a_1^2) = 0.$$

Die Gerade  $p$  liegt also im Brennraum des Ebenenkomplexes  $K_b$  und  $q$  liegt im Brennraum des Komplexes  $K_a$ .

Aus den Gleichungen  $M'_{pa} = 0$  und  $M'_{qb} = 0$  (194) erhalten wir:  $p$  resp.  $q$  ist ein singulärer Strahl des Komplexes  $K_a$  resp.  $K_b$  und liegt also auch im Brennraum des Komplexes  $K_a$  resp.  $K_b$ .

Der Raum  $v'$  ist also der Brennraum der beiden Komplexe  $K_a$  und  $K_b$ :

$$\varrho v'_i = (p^2 q^2)_i = \lambda (a^2 a^2)_i = \mu (b^2 b^2)_i. \quad \dots \quad (212)$$

Wir wählen das Koordinatensystem derartig, dass der Raum  $v'$  die Gleichung  $u'_5 = 0$  hat. Dann ist also  $p_{i5} = 0, q_{i5} = 0, a_{i5} = 0, b_{i5} = 0$ .

Dies gibt die folgende Darstellung der  $F_2^3$  im Raume  $v'$ :

$$O_{ik}(t) = p_{ik} + t \cdot a_{ik} + t^2 \cdot b_{ik} + t^3 \cdot q_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \dots \quad (213)$$

Aus  $M'_{00} = 0(t)$  ergeben sich, analog (194), die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (p^2 p_1^2) = 0 \quad (p^2 a^2) = 0 \\ 2(p^2 b^2) + (a^2 a_1^2) = 0 \\ (p^2 q^2) + (a^2 b^2) = 0 \\ (b^2 b_1^2) + 2(a^2 q^2) = 0 \\ (b^2 q^2) = 0 \quad (q^2 q_1^2) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (214)$$

Wir betrachten die vier Strahlenkomplexe  $K_p, K_a, K_b$  und  $K_q$ .

Wenn

$$\Delta = |A_{ik}| \neq 0, \text{ (wo } A_{11} = (p^2 p_1^2), A_{12} = (p^2 a^2), \text{ u. s. w.)} \quad (215)$$

gibt es zwei Geraden  $L$  und  $M$ , welche allen vier Strahlenkomplexen angehören.

Die Komplexe  $K_p$  und  $K_q$  sind speziell; also schneiden  $p$  und  $q$  die Geraden  $L$  und  $M$ .  $L$  und  $M$  sind Leitlinien der  $F_2^3$ , denn jede Erzeugende  $O_{ik}(t)$  schneidet  $L$  und  $M$ .

Nennen wir die Schnittpunkte von  $p$  mit  $L$  und  $M$  resp. 1 und 3 und die Schnittpunkte von  $q$  mit  $L$  und  $M$  resp. 2 und 4, dann ist:

$$p_{ik} = (13)_{ik}, q_{ik} = (24)_{ik}, L_{ik} = (12)_{ik}, M_{ik} = (34)_{ik}.$$

Die Umformung des Ausdrucks (1234) ( $a^2 \pi^2$ ) ergibt:

$$(1234)(a^2 \pi^2) = -(a^2 24)(13 \pi^2) + (a^2 23)(14 \pi^2) + (a^2 14)(23 \pi^2).$$

Damit ist  $a_{ik}$  dargestellt als eine lineare Kombination der Linienkoordinaten  $(13)_{ik}$ ,  $(14)_{ik}$  und  $(23)_{ik}$ .

Ebenso erhält man  $b_{ik}$  als eine lineare Kombination der Grössen:  $(24)_{ik}$ ,  $(23)_{ik}$  und  $(14)_{ik}$ .

Dies führt zu folgendem Ansatz: Wir setzen:

$$y = 1 + t \cdot 2 \dots \dots \dots (L)$$

$$z = 3 + t(3 + 4) + t^2 \cdot 4 \dots \dots \dots (M)$$

Die Geraden  $L$  und  $M$  sind dann ein-zweideutig auf einander bezogen.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte liefern die folgende Darstellung der  $F_2^3$ .

$$O_{ik}(t) = (13)_{ik} + \{(13)_{ik} + (14)_{ik} + (23)_{ik}\} t + \\ + \{(14)_{ik} + (23)_{ik} + (24)_{ik}\} t^2 + (24)_{ik} t^3.$$

Eine lineare Parametertransformation gestattet uns auch die Darstellung:

$$y = 1 + t \cdot 2 \dots \dots \dots (L)$$

$$z = 3 + t^2 \cdot 4 \dots \dots \dots (M)$$

und also

$$O_{ik}(t) = (13)_{ik} + t \cdot (23)_{ik} + t^2 (14)_{ik} + t^3 (24)_{ik} \dots \dots (216)$$

Man kann also in diesem Falle mit Hilfe einer Parametertransformation die  $F_2^3$  in eine Gestalt bringen bei welcher die Komplexe  $K_a$  und  $K_b$  speziell sind.

Wenden wir uns jetzt dem Falle zu, dass die vier Komplexe  $K_p$ ,  $K_a$ ,  $K_b$  und  $K_q$  nur eine Gerade  $L$  gemeinsam haben.

Dann ist:  $\Delta = |A_{ik}| = 0$  (vgl. 215)

Also nach (214):

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}(a^2 a_1^2) & -(a^2 b^2) \\ 0 & (a^2 a_1^2) & (a^2 b^2) & -\frac{1}{2}(b^2 b_1^2) \\ -\frac{1}{2}(a^2 a_1^2) & (a^2 b^2) & (b^2 b_1^2) & 0 \\ -(a^2 b^2) & -\frac{1}{2}(b^2 b_1^2) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = \{(a^2 b^2)^2 - \frac{1}{4}(a^2 a_1^2)(b^2 b_1^2)\}^2 = 0.$$

Also:

$$4(a^2 b)^2 - (a^2 a_1^2)(b^2 b_1^2) = 0. \quad (217)$$

Die weitere Rechnung wird einfacher wenn wir die homogenen Grössen  $a_{ik}$  und  $b_{ik}$  derartig wählen dass:  $(a^2 a_1^2) = 2(a^2 b^2)$  und also mit (217):

$$(a^2 a_1^2) = 2(a^2 b^2) = (b^2 b_1^2) = 2f$$

ist.

War z.B. ursprünglich  $\frac{(a^2 a_1^2)}{2(a^2 b^2)} = c$  dann nehmen wir:

$$\hat{p}_{ik} = \frac{p_{ik}}{c^2}; \hat{a}_{ik} = \frac{a_{ik}}{c}; \hat{b}_{ik} = b_{ik}; \hat{q}_{ik} = c \cdot q_{ik}; \hat{t} = \frac{t}{c}$$

es ist dann

$$\hat{O}_{ik}(t) = \frac{O_{ik}(t)}{c^2} \quad \text{und} \quad \frac{(\hat{a}^2 \hat{a}_1^2)}{2(\hat{a}^2 \hat{b}^2)} = 1.$$

Die Gleichung der doppelten Leitlinie ist dann gegeben durch:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -f & -f & (p\pi')^2 \\ 0 & 2f & f & -f & (a\pi')^2 \\ -f & f & 2f & 0 & (b\pi')^2 \\ -f & -f & 0 & 0 & (q\pi')^2 \\ (p\pi')^2 & (a\pi')^2 & (b\pi')^2 & (q\pi')^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies gibt:

$$2f^3 [(p\pi')^2 + (a\pi')^2 + (b\pi')^2 + (q\pi')^2]^2 = 0.$$

Die Leitlinie  $L$  ist also:

$$L_{ik} = p_{ik} + a_{ik} + b_{ik} + q_{ik}$$

d.h.  $L_{ik}$  ist die Erzeugende  $t = 1$ .

Nennen wir die Schnittpunkte von  $L_{ik}$  mit  $p$  und  $q$  resp. 1 und 2, und wählen wir auf  $p$  einen von 1 verschiedenen Punkt 3.

Wir legen dann durch den Punkt 3 und die Erzeugende  $q$  ( $t = \infty$ ) eine Ebene  $(w'x) \equiv (3q^2x) = 0$  und schneiden diese Ebene mit den Erzeugenden  $O_{ik}(t)$  (Gl (213)).  
Also:

$$(3q^2 0)(0u') \equiv (3q^2 1)(3u') + (3q^2 a)(au')t + \\ + (3q^2 b)(bu')t^2 + (3q^2 q_1)(q_1 u')t^3 = 0.$$

Da der letzte Term verschwindet bekommen wir also einen Kegelschnitt, der den Punkt 2 enthält und dessen Punkte durch die Erzeugenden  $O_{ik}(t)$  projektiv auf die der Leitlinie  $L$  bezogen sind.

Die Fläche  $F_2^3$  kann man also in diesem Falle darstellen mit Hilfe einer nicht singulären (1, 1) Korrespondenz zwischen den Punkten einer Gerade  $L$  und den Punkten eines Kegelschnittes  $K$ , wobei  $L$  und  $K$  einen Punkt gemeinsam haben.

Wir setzen:

$$y = 1 + t \cdot 2 \dots \dots \dots (L)$$

$$z = 3 + t \cdot (2-3-4) + t^2 \cdot 4 \quad (K \text{ enthält den Punkt } 2) \dots \dots (K)$$

Also:

$$O_{ik}(t) = (13)_{ik} + t \{ (12)_{ik} - (13)_{ik} - (14)_{ik} + (23)_{ik} \} + \dots \dots \dots (219)$$

$$+ t^2 \{ (14)_{ik} - (23)_{ik} - (24)_{ik} \} + t^3 (24)_{ik}$$

Der Parameterwert  $t = 1$  gibt die Leitlinie  $L_{ik} = (12)_{ik}$ .  
 Wie zu erwarten war haben wir also die zwei bekannten Typen (216) und (219) der nicht ausgearteten und nicht abwickelbaren Regelflächen  $F_2^3$  im  $R_3$  gefunden.

§ 23.

Die Fläche  $F_2^3$  (192) ist abwickelbar wenn  $M'_{02} \equiv 0$ , also wegen (195) wenn:

$$\left. \begin{aligned} M'_{pb} &= 0 \\ M'_{pq} &= 0 \\ M'_{aq} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (220)$$

Mit (194) haben wir in diesem Falle:

$$M'_{aa} = 0, M'_{ab} = 0, M'_{bb} = 0.$$

Die Grössen  $a_{ik}$  und  $b_{ik}$  sind Linienkoordinaten und jede der vier Geraden  $p, a, b$ , und  $q$  schneidet die drei anderen.

Wir haben also die Möglichkeiten:

1. Es gibt keinen Punkt, welcher den vier Geraden angehört.  
 Die vier Geraden liegen in einer Ebene und man erhält für die  $O_{ik}(t)$  die Darstellung:

$$O_{ik}(t) = (12) + t \cdot (23) + t^2 \cdot (34) + t^3 \cdot (41).$$

- 1, 2, 3, 4 sind allgemeine Punkte der Ebene.  
 Die Geraden  $O_{ik}(t)$  bilden hier eine ebene Kurve dritter Klasse.

2. Die vier Geraden haben einen Punkt 1 gemeinsam und liegen nicht in einem  $R_3$ .

Also:

$$O_{ik}(t) = (12) + t \cdot (13) + t^2 \cdot (14) + t^3 \cdot (15) \quad (\text{mit } (12345) \neq 0).$$

Die Erzeugenden bilden einen Kegel dritter Ordnung im  $R_3$ .

3. Die vier Geraden haben einen Punkt 1 gemeinsam und liegen in einem  $R_3$ , aber nicht in einer Ebene:

$$O_{ik}(t) = (12) + t \cdot (13) + t^2 \cdot (14) + t^3 \cdot (15) \quad (\text{mit } (12345) = 0).$$

Die  $O_{ik}$  bilden einen Kegel dritter Ordnung im  $R_3$ .

4. Die vier Geraden haben einen Punkt 1 gemeinsam und liegen in einer Ebene. Die Erzeugenden bilden einen Geradenbüschel.

Zum Schluss noch einige Bemerkungen.

1.  $(pu')$   $(pb^2b_1^2) = 0$  genügt zum Verschwinden des Ausdruckes  $H$  (196). Denn wir

erhalten dann aus (194):  $(pu')(pa^2q^2) = 0$  oder  $(au')(ap^2q^2) = 0$ . Zu Beginn des Paragraphen 22 zeigten wir:

Wenn  $(pu')(pb^2b_1^2) = 0$  dann ist  $(p^2q^2)_i = \mu(b^2b_1^2)_i$  (Gl. (212)). Also auch  $(au')(ab^2b_1^2) = 0$ . Also:  $(au')(aa^2q^2) = 0$ , oder:  $(qu')(qa^2a_1^2) = 0$ .

Dies gibt:  $H \equiv 0$ .

2. Weiter kann man leicht zeigen:

$M'_{aa} = 0$  genügt zum Verschwinden des Ausdruckes  $H$ ; und auch wenn  $M'_{pq} = 0$ , ist  $H \equiv 0$ .

Betrachten wir die Formeln (217) und (220) dann haben wir also:

$$M'_{aa} = 0, M'_{pq} \neq 0, \quad F_2^3 \text{ im } R_3. \text{ Typus I (216)}$$

$$M'_{aa} = 0, M'_{pq} = 0, M'_{bb} \neq 0 \quad F_2^3 \text{ im } R_3. \text{ Typus II (219)}$$

$$M'_{aa} = 0, M'_{pq} = 0, M'_{bb} = 0 \quad F_2^3 \text{ abwickelbar.}$$



**Medicine.** — *Some remarks on symmetrical hearing remnants.* By A. DE KLEYN.

(Communicated at the meeting of June 28, 1941.)

In 1936 LANGENBECK<sup>1)</sup> communicated the result of his audiometric examinations and pointed to the fact that in most cases of hereditary deaf-mutism he found symmetrical hearing remnants. He also spoke of symmetrical hearing remnants when the patients had no hearing residues at all on either side. From the results of his investigations he further concluded that in doubtful cases the presence of symmetrical hearing rests furnished strong evidence of an hereditary genesis, especially when it is combined with a vestibular apparatus which can be easily stimulated. LANGENBECK was so convinced of the truth of his conclusion that he thought that his denomination "Symmetriegesetz der erblichen Taubheit" was not putting the matter too strongly.

The difficulty that in some cases deafness with symmetrical hearing rests only develops in connection with a disease, e.g. infectious diseases, was solved by him by accepting the presence of a hereditary inferiority of the hearing organs of these patients and supposing that these were damaged identically at both sides by the toxins of the infectious germs. On the other hand he did not think that this could be the case in persons who had no hereditary transmission, for he wrote: "Es wird jedenfalls durch die obengenannten Beobachtungen noch in keiner Weise bewiesen, dass eine toxische auf dem Blutwege erfolgende Schädigung beim Erbgesunden auf beiden Ohren symmetrisch gleiche Hörausfälle erzeugen kann".

As an example of symmetrical hearing remnants in two types of hereditary deafness the following observations made by myself are recorded.

Fig. 1 concerns a boy, 20 years of age, with congenital hereditary deaf-mutism. The

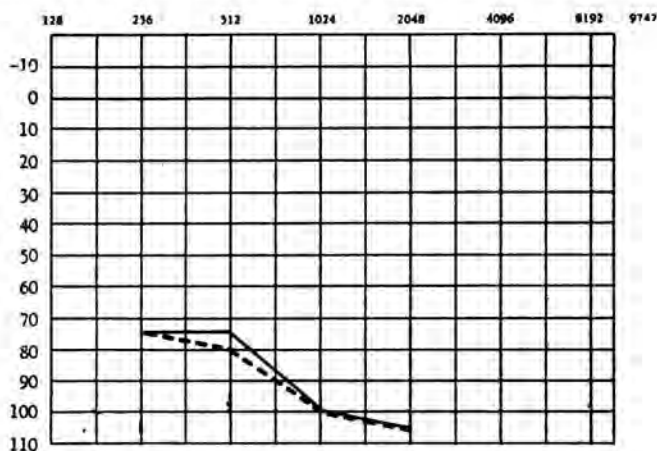


Fig. 1.

heredity was clear from the fact that in his family more cases of deaf-mutism were found. Examination with the audiometer (Western Electric) revealed that only the tones with 256, 512, 1024 and 2048<sup>2)</sup> frequencies were heard while the minimum receptibility for these tones was about the same bilaterally<sup>3)</sup>, which means that this patient had symmetrical hearing remnants.

<sup>1)</sup> LANGENBECK, B., *Ztschr. f. Hals-Nasen-Ohrenheilk.*, 39, 223, 286 (1936).

<sup>2)</sup> In all audiograms ————— means the perceptibility of air-conduction of the right ear, - - - - - of the left ear.

<sup>3)</sup> Differences of 5 decibels are by this audiometer within the fault of perceptibility.

Fig. 2 concerns another type of hereditary deafness, the so-called hereditary degenerative internal-ear-deafness, developing a shorter or longer time after birth and causing a variable degree of deafness. In this case the hearing remnants of a girl, 15 years of age, were completely symmetrical. Patient was an only child and suffered from an increasing deafness since she was 6 years of age. The inheritability of deafness was out of the question: both her father and her uncle (40 and 41 years of age) showed the same type of deafness, both had almost symmetrical hearing rests.

Not in all cases of true hereditary deafness, symmetrical hearing remnants are found, however. LANGENBECK himself observed such cases. According to him these are patients whose audiograms only showed a symmetry for the higher, not for the lower frequencies. In many of these cases the asymmetry is supposed to be caused by a former otitis of one of the ears. Yet LANGENBECK speaks of "Regelfälle" as far as his "Symmetriegesetz" is concerned, with slight disturbances in the audiogram of one ear: "Die Abweichungen müssen aber durch überstandene Erkrankungen und Rückstände zu erklären sein, insbesondere müssen linke und rechte Hörkurve auf grosse Strecken identisch verlaufen und vor allem an den oberen Hörgrenze wieder zusammenlaufen".

We did not meet with distinct cases of this type among our own patients.

On the other hand we found that symmetrical hearing remnants in true cases of hereditary deafness are often absent and this to a much greater extent than is recorded of the patients of LANGENBECK.

Fig. 3a and 3b represent a typical example. Four children of deaf-mute parents are also deaf-mute and a brother of their father as well. Three of these 4 children were examined. A boy, 12 years of age, had no hearing residue at all and could be considered to belong to the symmetry-cases of LANGENBECK on the understanding that one accepts that bilateral absence is also a symmetry. One brother of 8 years, however, perceived only tones of 1024 frequencies with his right ear, whereas the left ear heard tones of 256, 512 and 1024 frequencies (fig. 3a). Another brother 6 years of age, had completely asymmetric audiograms: with the right ear tones of 128, 256 and 512 frequencies, with the left one those of 256, 512, 1024 and 2048 frequencies were heard, so that the symmetry-law of LANGENBECK is altogether out of the question.

The audiograms shown in fig. 4 and 5 are also completely asymmetric. Fig. 4 is of a girl, 13 years of age, with true hereditary congenital deaf-mutism and shows a pronounced asymmetry especially in the region of the middle and higher tones. Fig. 5 shows the audiograms of a deaf-mute girl of 14 years. Two brothers and one sister were also deaf-mute, six other children had good hearing. The sister of her mother also suffered from deaf-mutism. The complete asymmetry of these audiograms needs no further description.

To these examples one could add many others: in themselves, however, they form no considerable objection to the examination of inheritability. They only prove that, if symmetrical hearing remnants were absent, one might not conclude that heredity plays not a part.

The main question on the contrary, is, if one is justified in accepting a hereditary genesis in those cases where symmetrical hearing residues are found. LANGENBECK holds this opinion although it must be granted that his conclusions are extremely cautious.

However, many cases observed by us in the last years, are contrary to this conception.

Fig. 6 shows the completely symmetrical hearing remnants of a 14 years old deaf-mute boy. When he was 1½ year of age, speaking strikingly well for his age, he suffered from a parotitis after which he became almost completely deaf. In this case the symmetry of the hearing rests, as shown in the figure, is very obvious. Both parents of this child had a good hearing, while, as far as could be gathered, no deafness was found in the family. In my opinion there is no reason therefore to accept the possibility of a hereditary genesis.

No more is this the case in a boy of 14 years of age, whose audiograms are shown in fig. 7. He belonged to a family of 5 children of which 3 died when very young. This patient showed symptoms of a congenital lues; the Wassermann reaction was strongly positive. A brother of 15 years had no luetic symptoms, although in his case the

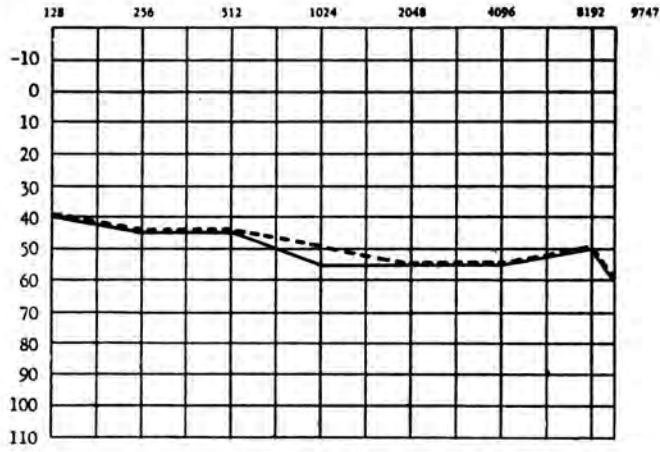


Fig. 2.

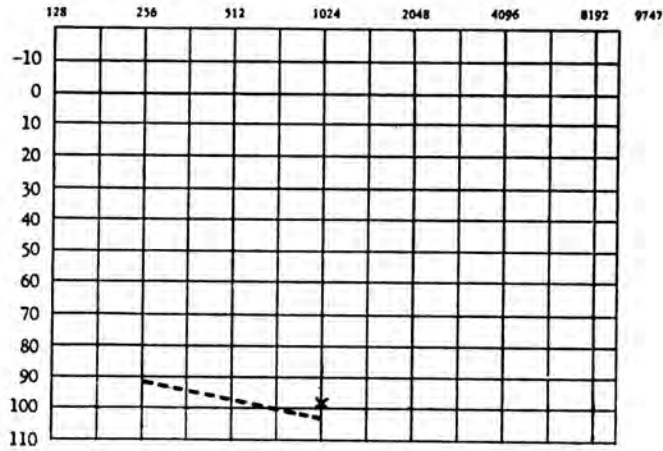


Fig. 3a.

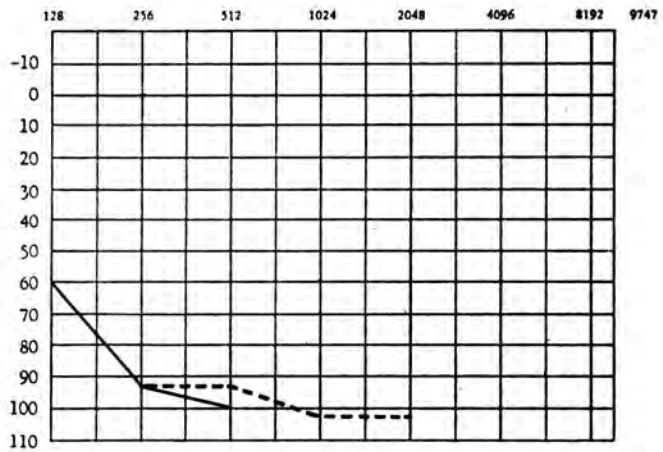


Fig. 3b.

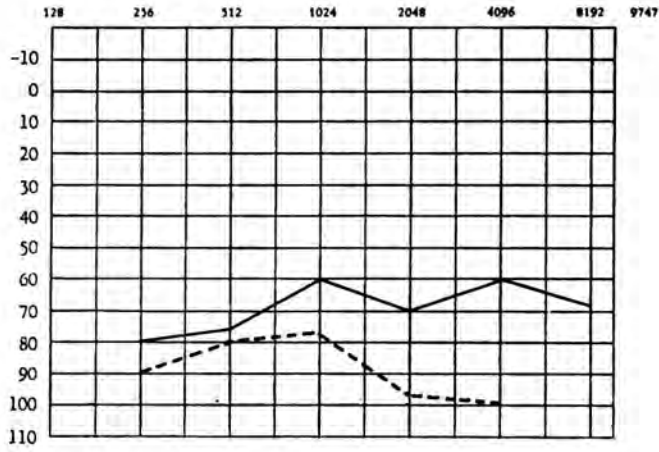


Fig. 4.

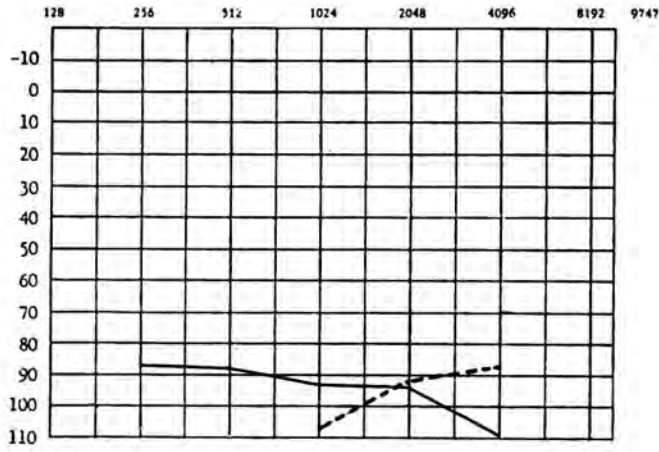


Fig. 5.

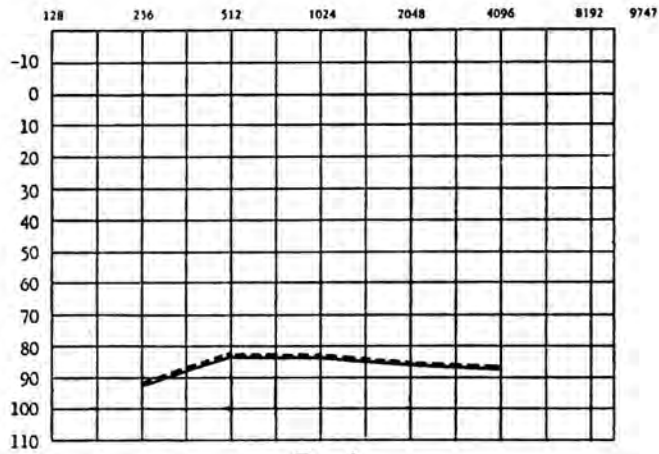


Fig. 6.

Wassermann reaction was also strongly positive. In the family no deaf-mutism or a severe degree of deafness occurred. So in this case the cause of the deaf-mutism must most probably be ascribed to lues. However, the hearing remnants, shown in fig. 7, were completely symmetric.

Probably to save his "Symmetriegesetz" for such cases, LANGENBECK gave the following explanation which is not convincing: "Findet man aber derartige Anamnesen in unbelasteten Familien, und bei Prüflingen, die sich auch als Regelfälle im Sinne des Symmetriegesetzes erweisen, so muss man auch daran denken, dass in der Familie solcher Prüflinge die Manifestationstendenz der erblichen Taubheit so gering sein kann, dass es erst des Anstosses einer toxischen Schädigung bedarf, um die Erbkrankheit zum Durchbruch kommen zu lassen."

To me it does not seem difficult to find with such reasoning an explanation of any diversity of his "Law of symmetry".

The case described below, however, would have brought LANGENBECK himself into difficulties.

A young woman had suffered from a repeated otitis from her 3rd year. At the right side a radical operation had to be performed, at the left a conservative treatment was sufficient. In the course of years both ears became dry, but the acuity of hearing had suffered much by all the inflammations so that when patient was 33 years of age, she suffered from a pronounced deafness. The audiograms of both ears, however, were completely symmetric (fig. 8). In the family no cases of deafness occurred.

LANGENBECK discussed the question whether it is possible that symmetrical hearing rests can be left after an inflammation and thought this must be denied: "Denn dass eine auf entzündlichem Wege entstandene Schwerhörigkeit zufällig gerade auf beide Ohren genau den gleichen Hörausfall hervorrufen sollte, wird man nicht annehmen können." Yet in our patient mentioned above such symmetrical hearing remnants were found.

*Summarizing the above mentioned facts, one has to assume that although in many cases of hereditary deafness symmetrical hearing remnants are found, it is neither permitted to deny such a hereditary genesis when such a symmetry is absent, nor to accept a hereditary genesis when a symmetry is present.*

The opinion of SCHWARZ<sup>1)</sup> that a deafness "selbst nach exakter Untersuchung und nach eingehender Beobachtung aus dem Befund allein nicht mit der erforderlichen Sicherheit als erbbedingt oder umweltbedingt auseinander zuhalten ist" remains right and we cannot support the idea of LANGENBECK: "Somit kann man die These voll und ganz aufrechterhalten, dass die Symmetrie der Hörreste bei erblicher Taubheit, bzw. Schwerhörigkeit, ein brauchbares Symptom für die Beurteilung der Erblichkeit ist."

From the above mentioned it is evident that symmetrical hearing remnants are only of a relative value for the investigation of heredity. In spite of this fact it has been a great merit of LANGENBECK that he has emphasized the above mentioned symmetry.

In his communication he pointed also to the fact, already known for a long time, that audiograms of individuals with a normal hearing are generally of a striking symmetry and that, if these, having a certain pitch, are somewhat divergent from the standard audiogram of normal individuals, this divergence is in many cases of precisely the same extent for both ears. Sometimes the same holds good for the audiograms of several members of a family so that the term "Familienhörkurve" would not be exaggerated.

In patients suffering from presbycusis too a striking symmetry in the audiograms of both ears is often found. A typical example is seen in fig. 9. It concerns a man of 74 years of age, who had never had any ear disease, so that the disturbances in the audiograms had to be ascribed to his age.

LANGENBECK tried to explain the symmetry by accepting the same demolition both for

1) LANGENBECK, cit. blz. 223.

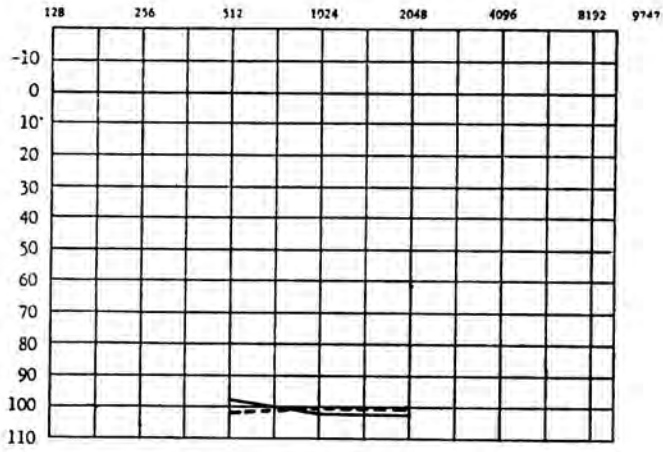


Fig. 7.

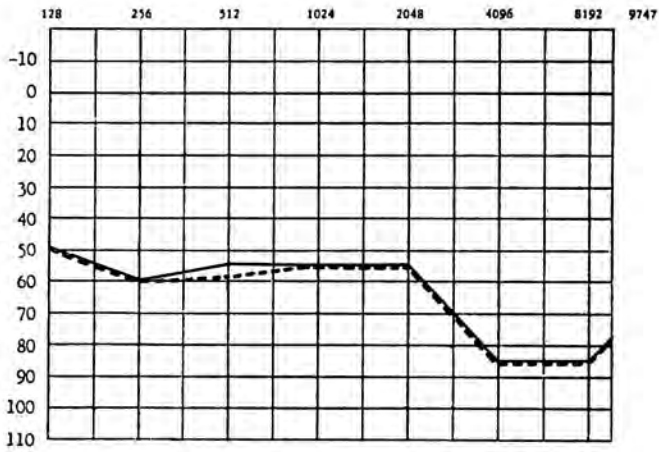


Fig. 8.



Fig. 9.



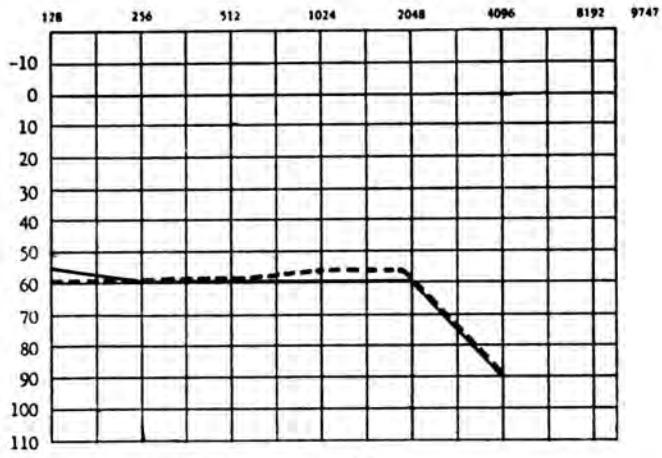


Fig. 10.

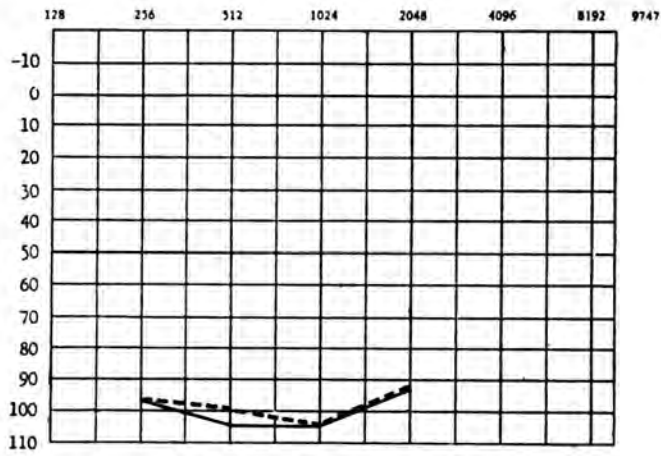


Fig. 11.

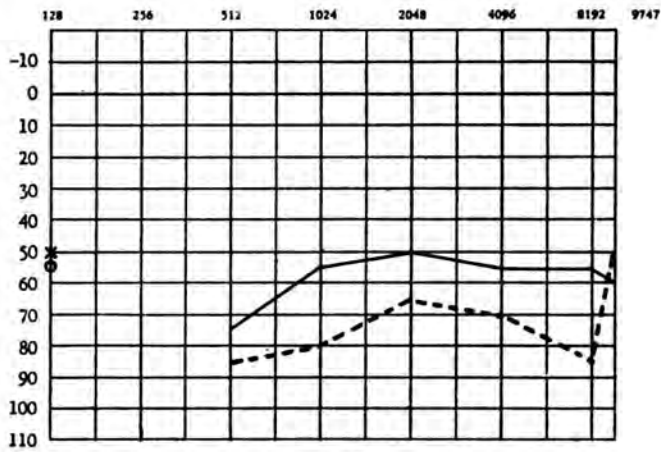


Fig. 12.

the left and the right ear, which as he says is completely determined by hereditary endogenous factors. In my opinion it is not necessary to think especially of hereditary factors; it may as well be assumed that the symmetry develops owing to constitutional non-hereditary factors, which, although varying individually, are present to the same extent at the left and at the right. So when both ears are damaged by some agents, either by an infectious disease (fig. 6 and 7) or by an inflammation, it is not strange that both ears lose an equal part of their function and that another more resistant part is kept. The result is that symmetrical hearing remnants are found, which as far as their extension is concerned, can differ very much individually.

*Some observations from the Otorhinological Clinic of Amsterdam revealed the remarkable fact that these symmetrical hearing remnants can also develop when the function of the ears is not lost simultaneously but with intervals of years.*

Some observations from the Otorhinological Clinic of Amsterdam revealed the remarkable fact that these symmetrical hearing remnants can also develop when the function of the ears is not lost simultaneously but with intervals of years.

I. The medical history of the above mentioned patient (fig. 8) points already in this direction. This woman, suffering from a bilateral otitis media, had been deaf in the right ear for many years and it had undergone a radical operation. The hearing of the left ear was sufficient. However, this acuity also gradually diminished and reached a level completely identical to that of the other side.

II. Another example is found in a woman, 65 years of age, who, after a pregnancy, became deaf in one ear. Many years after this, after an attack of malaria, which was treated with large doses of chinine, the other ear also became suddenly deaf: after this the hearing rests were completely symmetrical at both sides (fig. 10). Further acoustic and otoscopic examination revealed a bilateral middle ear-deafness.

III. Fig. 11 shows the symmetrical hearing residue of a man of 28 years of age, who, as long as he remembers, had been deaf in his left ear. In his family deafness was unknown. He was a hair-dresser but had never met with any difficulty in commerce because, as he said himself, his right ear was completely sound. His family-doctor had also never noticed any deafness. Some days before his admission to the clinic he awoke completely deaf. Extensive internal, neurological and serological examination revealed no cause for the deafness. It was very remarkable that also in this case the hearing rests were completely symmetrical.

IV. The last example is that of a girl of 9 years, the youngest of 5 children of whom two are very deaf and have symmetrical hearing rests, whereas the two others have a good hearing. We have known both the patient and the whole family for years.

The left ear of the patient was very deaf, the right one on the contrary completely normal. Some days before admission to the clinic patient stumbled and fell. Immediately after this she was very deaf in the right ear, although she had not lost consciousness after her fall. Fig. 12 shows the audiograms of both ears. Here a true symmetry was altogether out of the question, but it was a remarkable fact that where a tone of 128 frequencies was heard at both sides (x and o on the figure) it was impossible to perceive a tone of 256 frequencies neither with the right nor with the left ear, although the greatest intensity that the audiometer could supply was used. On the other hand tones above this frequency were heard with both ears. So for both ears only the perception of a tone of 256 frequencies was failing.

In my opinion all these observations are best explained by accepting the fact that a certain and *bilateral equal* part of the function of the hearing organs is more vulnerable than the remaining less vulnerable part and that if both ears are severely damaged by some cause, it may happen that only this more vulnerable part is put out of function. The remaining part will then manifest itself in symmetrical hearing remnants of the right and the left ear.

**Mathematics.** — *Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art.* III. Von S. C. VAN VEEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

§ 3. *Die Entwicklung des vollständigen elliptischen Integrales zweiter Art.*  
Das vollständige elliptische Integral zweiter Art wird definiert durch

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}; 1; k^2\right). \quad (37)$$

Wenn  $k_n$ ,  $a_n$  und  $b_n$  die Hilfsgrößen aus § 1 bezeichnen, so gilt

**Hilfssatz 2:** Für ganzes  $n \geq 1$  ist

$$2E(k_n) = \frac{a_{n-1}}{a_n} E(k_{n-1}) + \frac{b_{n-1}}{a_n} K(k_{n-1}) \quad \dots \quad (38)$$

$$= \frac{a_{n-1}}{a_n} E(k_{n-1}) + \frac{b_n^2}{a_n^2} K(k_n) \quad \dots \quad (38')$$

(LANDENSchen Transformation für vollständige elliptische Integrale zweiter Art).

**Beweis:** Wendet man auf

$$E(p, \beta) = \int_0^{\beta} \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

die LANDENSche Transformation

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin 2\omega}{p + \cos 2\omega}$$

an, so findet man

$$\cos \varphi = \frac{p + \cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2p \cos 2\omega + p^2}};$$

$$\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \omega} = \frac{1 + p \cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2p \cos 2\omega + p^2}};$$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{2(1 + p \cos 2\omega)}{1 + 2p \cos 2\omega + p^2}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 E(p, \beta) + p \cdot \sin \beta &= \int_0^{\beta} (\sqrt{1-p^2 \sin^2 \varphi} + p \cos \varphi) d\varphi = \\
 &= 2 \int_0^{\beta_1} \frac{1+p \cos 2\omega}{\sqrt{1+2p \cos 2\omega + p^2}} d\omega = \frac{2}{1+p} \int_0^{\beta_1} \frac{1+p-2p \sin^2 \omega}{\sqrt{1-\frac{4p}{(1+p)^2} \sin^2 \omega}} d\omega = \\
 &= (1+p) \int_0^{\beta_1} \sqrt{1-\frac{4p}{(1+p)^2} \sin^2 \omega} d\omega + (1-p) \int_0^{\beta_1} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{4p}{(1+p)^2} \sin^2 \omega}} = \\
 &= (1+p) \cdot E\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}, \beta_1\right) + (1-p) F\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}, \beta_1\right).
 \end{aligned} \tag{39}$$

mit

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin 2\beta_1}{p + \cos 2\beta_1}$$

Wenn  $\omega$  das Intervall  $(0, \frac{\pi}{2})$  durchläuft, so durchläuft  $\varphi$  das Intervall  $(0, \pi)$  und man findet aus (39)

$$\begin{aligned}
 E(p, \pi) &= (1+p) \cdot E\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}, \frac{\pi}{2}\right) + \\
 &+ (1-p) F\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}, \frac{\pi}{2}\right) = (1+p) E\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}\right) + (1-p) K\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}\right).
 \end{aligned} \tag{40}$$

Setzt man

$$\frac{2\sqrt{p}}{1+p} = k_{n-1}$$

also, wegen (9)

$$p = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}} = k_n,$$

und, wegen (6) und (7)

$$1+p = 1+k_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad 1-p = 1-k_n = \frac{b_{n-1}}{a_n},$$

so geht (40) über in (38), und wegen (12) und (1) in (38').

**Satz VI:** Für ganzes  $n \geq 1$  ist

$$E(k_1) = 2^{n-1} a_n E(k_n) - \frac{1}{2a_n} K(k_n) \cdot \sum_{m=2}^n 2^{m-1} b_m^2. \quad \dots \tag{41}$$

und für ganzes  $n \geq 2$  ist

$$E(k_1) = \pi a_n \cdot 2^{n-3} \cdot F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; k_n^2\right) - \frac{\pi}{2 a_n} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k_n^2\right) \cdot \sum_{m=2}^{n-1} 2^{m-2} \cdot b_m^2. \quad (42)$$

**Beweis:** Wegen (38) ist

$$\sum_{m=2}^n \{2^m a_m E(k_m) - 2^{m-1} a_{m-1} E(k_{m-1})\} = \sum_{m=2}^n 2^{m-1} b_{m-1} K(k_{m-1}).$$

also, wegen (12) und (1)

$$2^n a_n E(k_n) - 2 E(k_1) = K(k_1) \cdot \sum_{m=2}^n 2^{m-1} b_{m-1} \cdot a_{m-1} = K(k_1) \sum_{m=2}^n 2^{m-1} b_m^2 = \frac{K(k_n)}{a_n} \sum_{m=2}^n 2^{m-1} b_m^2,$$

womit (41) bewiesen ist.

Für  $n \geq 2$  folgt aus (41)

$$\begin{aligned} E(k_1) &= 2^{n-1} a_n E(k_n) - \frac{2^{n-2} b_n^2}{a_n} \cdot K(k_n) - \frac{K(k_n)}{a_n} \cdot \sum_{m=2}^{n-1} 2^{m-2} b_m^2 = \\ &= 2^{n-2} \cdot a_n \{2 E(k_n) - (1 - k_n^2) K(k_n)\} - \frac{K(k_n)}{a_n} \sum_{m=2}^{n-1} 2^{m-2} b_m^2 \quad (\text{wegen (8)}) \\ &= -2^{n-3} a_n \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m - \frac{1}{2}) \cdot \Gamma(m + \frac{1}{2})}{(m!)^2} k_n^{2m} + (1 - k_n^2) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{m!}\right)^2 k_n^{2m} \right\} \\ &\quad - \frac{K(k_n)}{a_n} \sum_{m=2}^{n-1} 2^{m-2} b_m^2 = 2^{n-5} a_n \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m - \frac{1}{2})}{m!}\right)^2 k_n^{2m} - \frac{K(k_n)}{a_n} \cdot \sum_{m=2}^{n-1} 2^{m-2} b_m^2 = \\ &= 2^{n-3} \pi a_n \cdot F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; k_n^2\right) - \frac{\pi}{2 a_n} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k_n^2\right) \cdot \sum_{m=2}^{n-1} 2^{m-2} b_m^2, \end{aligned}$$

womit (42) bewiesen ist.

A.  $k$  liegt nicht in der Nähe von 1.

Aus (3) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} b_2^2 &= \cos a, \\ b_2^2 + 2 b_3^2 &= \cos a + 2 \cos^2 \frac{a}{2} \sqrt{\cos a} = \sqrt{\cos a} (1 + \sqrt{\cos a} + \cos a), \\ b_2^2 + 2 b_3^2 + 4 b_4^2 &= \cos a + 2 \cos \frac{a}{2} \sqrt{\cos a} \left( \sqrt{\cos a} + \cos \frac{a}{2} \sqrt{\cos a} + \cos^2 \frac{a}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

u. s. w.

Endlich ergibt sich aus (41), bzw. (42), und (43), für  $n = 1, \dots, 5$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \sin^2 a\right) \dots \dots \dots (E I)$$

$$E(k) = \frac{\pi \cos^2 \frac{a}{2}}{2} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}\right); \dots \dots (E II)$$

$$E(k) = \pi \left( \frac{1 + \sqrt{\cos a}}{2} \right)^2 F \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \left( \frac{1 - \sqrt{\cos a}}{1 + \sqrt{\cos a}} \right)^4 \right) - \frac{2\pi \cos a}{(1 + \sqrt{\cos a})^2} \cdot F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left( \frac{1 - \sqrt{\cos a}}{1 + \sqrt{\cos a}} \right)^4 \right); \quad (E III)$$

$$E(k) = 2\pi \left( \frac{\cos \frac{a}{2} + \sqrt[4]{\cos a}}{2} \right)^2 F \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \left( \frac{\cos \frac{a}{2} - \sqrt[4]{\cos a}}{\cos \frac{a}{2} + \sqrt[4]{\cos a}} \right)^4 \right) - \frac{2\pi \sqrt{\cos a} (1 + \sqrt{\cos a} + \cos a)}{\left( \cos \frac{a}{2} + \sqrt[4]{\cos a} \right)^2} F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left( \frac{\cos \frac{a}{2} - \sqrt[4]{\cos a}}{\cos \frac{a}{2} + \sqrt[4]{\cos a}} \right)^4 \right); \quad (E IV)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{4} \left( 1 + \sqrt{\cos a} + 2 \sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[4]{\cos a} \right)^2 \cdot F \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \left( \frac{1 + \sqrt{\cos a} - 2 \sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[4]{\cos a}}{1 + \sqrt{\cos a} + 2 \sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[4]{\cos a}} \right)^4 \right) - 8\pi \frac{\left\{ \cos a + 2 \cos \frac{a}{2} \cdot \sqrt[4]{\cos a} \cdot \left( \sqrt{\cos a} + \cos \frac{a}{2} \cdot \sqrt[4]{\cos a} + \cos^2 \frac{a}{2} \right) \right\}}{\left( 1 + \sqrt{\cos a} + 2 \sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[4]{\cos a} \right)^2} \cdot F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left( \frac{1 + \sqrt{\cos a} - 2 \sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[4]{\cos a}}{1 + \sqrt{\cos a} + 2 \sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[4]{\cos a}} \right)^4 \right); \quad (E V)$$

u. s. w.

Wegen

$$k_n \approx \frac{\sin^{2n-1} a}{2^{2n-2}}$$

für kleine Werte von  $k$ , ist die Stärke der Konvergenz mit der der Reihen (K) zu vergleichen. Die Hauptglieder der letzten drei Reihen sind

$$E(k) \approx \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{(1 + \sqrt{\cos a})^4 - 8 \cos a}{(1 + \sqrt{\cos a})^2} \right\}; \dots \dots \dots (E III')$$

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\left( \cos \frac{a}{2} + \sqrt[4]{\cos a} \right)^4 - 4 \sqrt{\cos a} (1 + \sqrt{\cos a} + \cos a)}{\left( \cos \frac{a}{2} + \sqrt[4]{\cos a} \right)^2} \right\}; \quad (E IV')$$



$$E(k) \approx \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{\left( \left( 1 + \sqrt{\cos a} + 2 \sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[3]{\cos a} \right)^4 - 32 \left( \cos a + 2 \cos \frac{a}{2} \sqrt[3]{\cos a} \cdot \left( \sqrt{\cos a} + \cos \frac{a}{2} \sqrt[3]{\cos a} + \cos^2 \frac{a}{2} \right) \right) \right)}{\left( 1 + \sqrt{\cos a} + 2 \sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[3]{\cos a} \right)^2} \right\}. \quad (EV')$$

FEHLERTABELLE.

$\alpha$	$k_1 = \sin \alpha$	Fehler in		
		$E III'$	$E IV'$	$E V'$
$\leq 45^\circ$	$\leq 0,70711$	$\leq 1,9 \cdot 10^{-5}$	$\leq 6,7 \cdot 10^{-11}$	$\leq 8 \cdot 10^{-21}$
$60^\circ$	0,86603	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$4,2 \cdot 10^{-17}$
$70^\circ$	0,93969	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \cdot 10^{-14}$
$80^\circ$	0,98481	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$4,6 \cdot 10^{-11}$
$85^\circ$	0,99619	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-9}$
$89^\circ$	0,99985	$9,5 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-6}$
$90^\circ$	1	$0,215 = 1 - \frac{\pi}{4}$	$0,215 = 1 - \frac{\pi}{4}$	$0,215 = 1 - \frac{\pi}{4}$

Die Reihen (E) konvergieren im ganzen Gebiet  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , obgleich die Konvergenzstärke für  $k = 1$  ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) ziemlich gering ist. Sie sind jedoch noch sehr gut verwendbar, wenn der Unterschied zwischen  $k$  und 1 gering ist.

Die Anwendung von (15) auf die Reihen E liefert fast gleich genaue Abschätzungen, mit ziemlich einfachen Hauptgliedern, zumal für (E III) und (E IV), nämlich

$$E(k) \approx \frac{\pi \sqrt[3]{\cos a}}{2 \cos \frac{a}{2}} (1 - \sqrt{\cos a} + \cos a); \quad (EE III')$$

$$E(k) \approx \frac{\pi \sqrt{\cos a} \left\{ \sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[3]{\cos a} \cdot (1 + \sqrt{\cos a})^2 - (1 + \sqrt{\cos a} + \cos a) \right\}}{\sqrt{\cos \frac{a}{2}} \cdot \sqrt[3]{\cos a} \cdot (1 + \sqrt{\cos a})}; \quad (EE IV')$$

B.  $k$  liegt in der Nähe von 1.

Hilfssatz 3: Wenn  $l_n$  und  $c_n$  die in § 2 definierten Hilfsgrößen bezeichnen, so ist für  $n \geq 1$

$$E(k_1) = E(\sqrt{1-l_1^2}) = c_n E\sqrt{1-l_n^2} + K(k_1) \sum_{m=2}^n 2^{m-1} l_m c_m^2. \quad (44)$$

Beweis: Wir setzen in (40)

$$p = \sqrt{1-l_{m-1}^2}$$

also

$$\frac{2\sqrt{p}}{1+p} = \sqrt{1 - \left( \frac{1 - \sqrt{1-l_{m-1}^2}}{1 + \sqrt{1-l_{m-1}^2}} \right)^2} = \sqrt{1-l_m^2}.$$

(40) geht über in

$$2 \cdot E(\sqrt{1-l_{m-1}^2}) = (1 + \sqrt{1-l_{m-1}^2}) E(\sqrt{1-l_m^2}) + (1 - \sqrt{1-l_{m-1}^2}) K(\sqrt{1-l_m^2})$$

oder, wegen (33)

$$\begin{aligned} c_{m-1} E(\sqrt{1-l_{m-1}^2}) &= c_m E(\sqrt{1-l_m^2}) + c_m l_m K(\sqrt{1-l_m^2}) = \\ &= c_m E(\sqrt{1-l_m^2}) + 2^{m-1} l_m c_m^2 K(k) \end{aligned} \quad (\text{wegen (34)}),$$

und

$$\sum_{m=2}^n \{c_{m-1} E(\sqrt{1-l_{m-1}^2}) - c_m E(\sqrt{1-l_m^2})\} = K(k) \sum_{m=2}^n 2^{m-1} l_m c_m^2 = K(k) \cdot A_n$$

w. z. b. w.

**Zusatz:** Für  $m \geq 3$  ist, wegen (30) und (31)

$$\left. \begin{aligned} l_m c_m^2 &= \frac{c_{m-1} - d_{m-1}}{c_{m-1} + d_{m-1}} \cdot c_m^2 = \frac{c_{m-1}^2 - d_{m-1}^2}{4} = \frac{(c_{m-2} + d_{m-2})^2 - 4c_{m-2} \cdot d_{m-2}}{16} = \\ &= \left(\frac{c_{m-2} - d_{m-2}}{4}\right)^2 = \left(\frac{c_{m-3} + d_{m-3} - 2\sqrt{c_{m-3} \cdot d_{m-3}}}{8}\right)^2 = \frac{(\sqrt{c_{m-3}} - \sqrt{d_{m-3}})^4}{64} \\ l_2 c_2^2 &= \frac{1}{4} \cos^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Man findet somit, wegen (30), (32) und (45) <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \sum_{m=2}^2 2^{m-1} l_m c_m^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha; \\ A_3 &= \sum_{m=2}^3 2^{m-1} l_m c_m^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} (1 - \sin \alpha)^2 = \frac{1}{4} (1 - \sin \alpha) (3 + \sin \alpha); \\ A_4 &= \sum_{m=2}^4 2^{m-1} l_m c_m^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} (1 - \sin \alpha)^2 + \frac{1}{8} (1 - \sqrt{\sin \alpha})^4; \\ A_5 &= \sum_{m=2}^5 2^{m-1} l_m c_m^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} (1 - \sin \alpha)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{8} (1 - \sqrt{\sin \alpha})^4 + \frac{1}{4} \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) - \sqrt{\sin \alpha} \right\}^4 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

u. s. w.

Anwendung von (26) und (35) auf (44) liefert unmittelbar

**Satz VII:** Für ganzes  $n \geq 1$  ist

$$\left. \begin{aligned} E(k_1) &= c_n F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; l_n^2\right) + \frac{c_n}{2} l_n^2 \log \frac{4}{l_n} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 2; l_n^2\right) \\ &- \frac{2c_n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} \sum_{q=m}^{\infty} \frac{\Gamma(q+\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(q+\frac{3}{2})}{q!(q+1)!} l_n^{2q+2} + A_n K(k_1), \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

wo  $K(k_1)$  durch (35), und  $A_n$  durch (46) bestimmt ist.

1) Vgl. den Zusatz am Ende dieses Berichtes. Weiter ist  $A_n = \sum_{m=1}^{n-1} 2^{m-2} l_m^2 c_m^2$ .

Wir lassen die explizite Darstellung der Sonderfälle  $n=1, \dots, 5$  fort, und geben nur die Hauptglieder für  $n=3, 4$  und  $5$ . Sie lauten <sup>1)</sup>

$$E(k_1) \approx c_n + A_n K^{*'}(k_1),$$

also, wegen (30) und (46):

$$E(k_1) \approx \left( \frac{1 + \sqrt{\sin a}}{2} \right)^2 + \frac{1(1 - \sin a)(3 + \sin a)}{2(1 + \sqrt{\sin a})^2} \log 2 \left( \frac{1 + \sqrt{\sin a}}{1 - \sqrt{\sin a}} \right); \quad (E^* III')$$

$$E(k_1) \approx \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) + \sqrt[4]{\sin a}}{2} \right)^2 + \frac{\left\{ \frac{1}{8} \cos^2 a + \frac{1}{4} (1 - \sin a)^2 + \frac{1}{8} (1 - \sqrt{\sin a})^4 \right\}}{\left( \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) + \sqrt[4]{\sin a} \right)^2} \log 2 \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) + \sqrt[4]{\sin a}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) - \sqrt[4]{\sin a}} \right); \quad (E^* IV')$$

$$E(k_1) \approx \left( \frac{1 + \sqrt{\sin a} + 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin a}}}{2} \right)^2 + \frac{\left[ \frac{1}{8} \cos^2 a + \frac{1}{4} (1 - \sin a) + \frac{1}{8} (1 - \sqrt{\sin a})^4 + \frac{1}{4} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) - \sqrt[4]{\sin a} \right\}^4 \right]}{\left( 1 + \sqrt{\sin a} + 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin a}} \right)^2} \log 2 \left( \frac{1 + \sqrt{\sin a} + 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin a}}}{1 + \sqrt{\sin a} - 2 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\sin a}}} \right) \quad (E^* V')$$

Die Fehler sind wegen (47)

$$\begin{aligned} &\approx l_n^2 \left( \frac{c_n}{4} + \frac{c_n}{2} \log \frac{4}{l_n} - \frac{c_n}{2} + \frac{A_n}{2^{n+1} \cdot c_n} \log \frac{4}{l_n} - \frac{A_n}{2^{n+1} c_n} \right) = \\ &= \frac{c_n l_n^2}{4} \left( 2 \log \frac{4}{l_n} - 1 \right) + \frac{A_n l_n^2}{2^{n+1} c_n} \left( \log \frac{4}{l_n} - 1 \right). \end{aligned}$$

Sie betragen im Gebiet  $\frac{\pi}{4} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$

$n$	Fehler bei Verwendung von $E^*$
3	$\leq 1,9 \cdot 10^{-5}$
4	$6,4 \cdot 10^{-11}$
5	$7,6 \cdot 10^{-21}$

<sup>1)</sup> Vgl. den Zusatz.

Die Anwendung der Annäherungsformeln  $E'$  im Gebiet  $0 \leq a \leq \frac{\pi}{4}$ , und  $E''$  im Gebiet  $\frac{\pi}{4} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$  verbürgt somit schon Genauigkeit

in 4 Stellen für  $q = 3$ ,  
 „ 9 „ „  $q = 4$ ,  
 „ 19 „ „  $q = 5$ ,

im ganzen Gebiet  $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ .

(Zusatz bei der Korrektur):

Aus

$$1 + l_m = \frac{c_{m-1}}{c_m}, \text{ und } l_{m-1} = \frac{2\sqrt{l_m}}{1 + l_m} \quad (\text{vgl. (33)})$$

ergibt sich

$$l_{m-1} c_{m-1} = 2 c_m \sqrt{l_m}.$$

Also ist für  $m > 1$

$$2^{2m-2} \cdot \frac{c_m^2}{c_1^2} = \prod_{p=2}^m \frac{2^2 c_p^2}{c_{p-1}^2} = \prod_{p=2}^m \frac{l_{p-1}^2}{l_p} = \frac{l_1}{l_m} \cdot (l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_{m-1}),$$

oder

$$A_n = \sum_{m=2}^n 2^{m-1} l_m c_m^2 = l_1 \sum_{m=2}^n \frac{l_1 l_2 \cdot \dots \cdot l_{m-1}}{2^{m-1}}; (n > 1) \dots \quad (\alpha)$$

(vgl. (46) und (47)).

Unter Vernachlässigung von  $l_n^2$  u.s.w. ergibt sich wegen  $(\alpha)$  und (35) für die Hauptglieder von (47) den einfach gebildeten Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} E(k_1) &\approx c_n + K(k_1) \sum_{m=2}^n 2^{m-1} l_m c_m^2 + \frac{c_n}{2} l_n^2 \log \frac{4}{l_n} \\ &\approx c_n + \frac{1}{2^{n-1} c_n} \log \frac{4}{l_n} \sum_{m=2}^{n+1} 2^{m-1} c_m^2 = \\ &= c_n + \frac{l_1}{2^{n-1} c_n} \sum_{m=1}^n \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_m}{2^m}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (\beta)$$

(Fortsetzung folgt.)

**Mathematics.** — Ueber die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergenten Reihen. III. Von S. C. VAN VEEN, (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

§ 2.  $\alpha$  in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\beta$  klein.

A. Das unvollständige elliptische Integral erster Art.

$$\begin{aligned}
 F(\sin \alpha, \beta) &= \int_0^{\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\beta} \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)}} = \\
 &= \int_0^{\beta} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{(1 - \sin \alpha \cdot \sin^2 \varphi)^2 - (1 - \sin \alpha)^2 \sin^2 \varphi}} \\
 &= \int_0^{\beta} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{(1 - \sin \alpha \cdot \sin^2 \varphi)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \frac{(1 - \sin \alpha)^{2n} \sin^{2n} \varphi}{(1 - \sin \alpha \sin^2 \varphi)^{2n}} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) (1 - \sin \alpha)^{2n} \int_0^{\sin \beta} \frac{x^{2n} \, dx}{(1 - \sin \alpha \cdot x^2)^{2n+1}} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \frac{(1 - \sin \alpha)^{2n}}{(\sin \alpha)^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^{\sqrt{\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}}} \frac{y^{2n} \, dy}{(1 - y^2)^{2n+1}}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Setzt man

$$y = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \text{ oder } z = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y},$$

also

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{1-y^2}; \quad \frac{y}{1-y^2} = \frac{e^{4z} - 1}{4e^{2z}} = \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{4}$$

und

$$\frac{1 - \sin \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} = x; \quad \frac{1 + \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}}{1 - \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}} = w,$$

so wird

$$\int_0^{\sin \beta \sqrt{\sin \alpha}} \frac{y^{2n} dy}{(1-y^2)^{2n+1}} = \int_0^{\frac{1}{2} \log w} \left( \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{4} \right)^{2n} dz = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \int_0^{\frac{1}{2} \log w} e^{4(n-p)z} dz =$$

$$= \frac{1}{4^{2n+1}} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{w^{2(n-p)}}{n-p} + \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{4^{2n}} \frac{1}{2} \log w =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \log w + \frac{w^{2n}}{4^{2n+1}} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{w^{-2p}}{n-p}$$
(26)

Aus (25) und (26) ergibt sich

$$F(\sin \alpha, \beta) = \frac{1}{2\sqrt{\sin \alpha}} \log w \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \left( \frac{x}{2} \right)^{2n}$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{\sin \alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \left( \frac{xw}{4} \right)^{2n} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{w^{-2p}}{n-p}$$
(27)

mit  $x = \frac{1 - \sin \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}}; w = \frac{1 + \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}}{1 - \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}}$

Die erste Reihe in (27) konvergiert für

$$\frac{x}{2} = \frac{1 - \sin \alpha}{2\sqrt{\sin \alpha}} \leq 1, \text{ oder } \sin \alpha \geq 3 - 2\sqrt{2}; \alpha \geq 9^\circ.53'.$$

Die Konvergenz ist sehr stark, wenn  $\alpha$  in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$  liegt. Auch die zweite Reihe in (27) konvergiert dann stark, wenn wenigstens  $\sin \beta$  nicht in der Nähe von 1 liegt. Wegen

$$\left| \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{w^{-2p}}{n-p} \right| < \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} w^{-2p} = (1 + w^{-2})^{2n} = \left\{ \frac{2(1 + \sin^2 \beta \sin \alpha)}{(1 + \sin \beta \sqrt{\sin \alpha})^2} \right\}^{2n}$$

bildet  $\frac{xw}{4} \cdot \frac{2(1 + \sin^2 \beta \sin \alpha)}{(1 + \sin \beta \sqrt{\sin \alpha})^2} = \frac{x}{2} \frac{1 + \sin^2 \beta \sin \alpha}{1 - \sin^2 \beta \sin \alpha} < 1$

oder  $0 \leq \sin^2 \beta < \frac{2-x}{(2+x) \sin \alpha} \dots \dots \dots (28)$

eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der zweiten Reihe in (27). (Die erste Reihe konvergiert dann auch, wegen  $x \leq 2$ ) (vgl. Fig. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 44 911 (1941)).

Das Hauptglied der Reihe (27) ist

$$F(\sin \alpha, \beta) \approx \frac{1}{2\sqrt{\sin \alpha}} \log w = \frac{1}{2\sqrt{\sin \alpha}} \log \frac{1 + \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}}{1 - \sin \beta \sqrt{\sin \alpha}}, \quad (29)$$



## B. Das unvollständige elliptische Integral zweiter Art.

$$\begin{aligned}
 E(\sin \alpha, \beta) &= \int_0^\beta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \int_0^\beta \frac{\cos \varphi (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)}{\sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)}} \, d\varphi = \\
 &= \int_0^\beta \frac{\cos \varphi (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi) \, d\varphi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)^2 - (1 - \sin^2 \alpha)^2 \sin^2 \varphi}} = \\
 &= \int_0^\beta \frac{\cos \varphi (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi) \, d\varphi}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \frac{(1 - \sin^2 \alpha)^{2n} \sin^{2n} \varphi}{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)^{2n}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) x^{2n} \int_0^{\sin \beta \sqrt{\sin \alpha}} \frac{y^{2n} (1 - \sin \alpha y^2)}{(1 - y^2)^{2n+1}} \, dy = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) x^{2n} \int_0^{\frac{\log w}{2}} \left( \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{4} \right)^{2n} \left\{ 1 - \sin \alpha \cdot \left( \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \right)^2 \right\} dz.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Für  $n \geq 1$  ist

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\frac{\log w}{2}} \left( \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{4} \right)^{2n} \left\{ 1 - \sin \alpha \left( \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \right)^2 \right\} dz = \\
 &= \frac{1}{4^{2n}} \int_0^{\frac{\log w}{2}} (e^{2z} - e^{-2z})^{2n} dz - \frac{\sin \alpha}{4^{2n}} \int_0^{\frac{\log w}{2}} \frac{(e^{2z} - e^{-2z})^{2n} (e^z - e^{-z})^4}{(e^{2z} + e^{-2z})^2} dz = \\
 &= \frac{1}{4^{2n}} \int_0^{\frac{\log w}{2}} (e^{2z} - e^{-2z})^{2n} dz - \frac{\sin \alpha}{4^{2n}} \int_0^{\frac{\log w}{2}} (e^{2z} - e^{-2z})^{2n} dz - \frac{8 \sin \alpha}{4^{2n}} \int_0^{\frac{\log w}{2}} (e^{2z} - e^{-2z})^{2n-2} dz \\
 &+ \frac{\sin \alpha}{4^{2n-1}} \int_0^{\frac{\log w}{2}} (e^{2z} - e^{-2z})^{2n-2} (e^{2z} + e^{-2z}) dz = \\
 &= \frac{1 - \sin \alpha}{4^{2n+1}} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{w^{2(n-p)}}{n-p} + \frac{(-1)^n}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{(1 - \sin \alpha)}{2} \log w \\
 &- \frac{8 \sin \alpha}{4^{2n+1}} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq n-1}}^{2n-2} (-1)^p \binom{2n-2}{p} \frac{w^{2(n-1-p)}}{n-1-p} - \\
 &\quad \frac{(-1)^{n-1} \cdot 8}{4^{2n}} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \log w + \frac{\sin \alpha}{4^{2n-1}} \cdot \frac{(w - w^{-1})^{2n-1}}{2n-1}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Für  $n = 0$  ist

$$\int_0^{\frac{\log w}{2}} \left\{ 1 - \sin a \left( \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \right)^2 \right\} dz = \int_0^{\frac{\log w}{2}} \left\{ (1 - \sin a) + \frac{4 \sin a \cdot e^{2z}}{(e^{2z} + 1)^2} \right\} dz = \left. \begin{aligned} &= \frac{1 - \sin a}{2} \log w - \frac{2 \sin a}{w + 1} + \sin a = \frac{1 - \sin a}{2} \log w + \sin a \left( \frac{w - 1}{w + 1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Aus (30), (31) und (32) ergibt sich nach einiger Reduktion die Entwicklung

$$\left. \begin{aligned} E(\sin a, \beta) &= \frac{x}{2} \log w + \sin \beta \cdot \sin a + \frac{2w \sqrt{\sin a}}{w^2 - 1} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left\{ \frac{x(w^2 - 1)}{4w} \right\}^2} \right] \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\sin a}} \log w \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \left( \frac{x}{2} \right)^{2n} \left( 1 + \frac{2n+1}{2n-1} \sin a \right) \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{\sin a}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right) \left( \frac{xw}{4} \right)^{2n} \\ &\left\{ (1 - \sin a) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq n}}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{w^{-2p}}{n-p} - 8 \sin a \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq n-1}}^{2n-2} (-1)^p \binom{2n-2}{p} \cdot \frac{w^{-2p-2}}{n-p-1} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

mit

$$x = \frac{1 - \sin a}{\sqrt{\sin a}}; \quad w = \frac{1 + \sin \beta \sqrt{\sin a}}{1 - \sin \beta \sqrt{\sin a}}$$

mit dem Hauptglied

$$\left. \begin{aligned} E(\sin a, \beta) &\approx \frac{x}{2} \log w + \sin \beta \cdot \sin a = \\ &= \frac{1 - \sin a}{2\sqrt{\sin a}} \cdot \log \frac{1 + \sin \beta \cdot \sqrt{\sin a}}{1 - \sin \beta \cdot \sqrt{\sin a}} + \sin \beta \cdot \sin a \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Die Konvergenzbedingungen der Reihen (33) sind identisch mit den Bedingungen der Reihen (27), also:

Hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe (33) ist

$$0 \leq \sin^2 \beta < \frac{2 - x}{(2 + x) \sin a} \dots \dots \dots (35)$$

(Fortsetzung folgt.)

**Mathematics.** — *Domaines d'univalence et d'étoilement des fonctions holomorphes à partie réelle positive dans un demi-plan.* Par Prof. J. WOLFF. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

On sait que toute fonction  $w(z)$  holomorphe et à partie réelle positive dans le demi-plan  $D(x > 0)$  de la variable complexe  $z = x + iy$  peut être représentée d'une seule manière par la formule

$$w(z) = \lambda z + H(z) \quad \dots \quad (1)$$

où la constante  $\lambda$ , appelée la dérivée angulaire de  $w(z)$  à l'infini, est un nombre fini positif ou nul et  $H(z)$  une fonction holomorphe à partie réelle positive dans  $D$ , dont la dérivée angulaire à l'infini est nulle.

Il est connu que  $z H(z)$  a pour  $z$  infini une limite angulaire  $\mu$  positive ou infinie, et que,  $u(z)$  étant la partie réelle de  $H(z)$ , sur toute droite  $y = \text{const.}$  le produit  $x \cdot u(x + iy)$  ne décroît jamais lorsque  $x$  croît et tend vers  $\mu$  pour  $x \rightarrow \infty$ :

$$u(z) \leq \frac{\mu}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot u(x + iy) = \mu \quad \dots \quad (2)$$

Considérons dans  $D$  la classe  $C(\lambda, \mu)$  des fonctions (1) pour lesquelles les nombres  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes données,  $\lambda > 0$ ,  $0 < \mu < \infty$ .

Posons les deux questions:

1. Chercher la borne inférieure  $b$  des nombres réels et non négatifs  $a$  tels que toutes les fonctions de la classe  $C(\lambda, \mu)$  soient univalentes dans les demi-plans  $x > a$ .

2. Chercher la borne inférieure  $b'$  des nombres  $a'$  tels que pour toutes les fonctions (1) de  $C(\lambda, \mu)$  les images des droites verticales  $x = \text{const.} > a'$ , réalisées par la transformation  $w = w(z)$ , coupent toute droite horizontale  $y = \text{const.}$  en un seul point au plus.

Le demi-plan  $\Delta(x > b')$  est le plus grand demi-plan dans  $D$  où toute fonction  $w(z)$  de  $C(\lambda, \mu)$  est étoilée par rapport au point à l'infini de l'axe réel. Il est clair que  $\Delta(x > b')$  est le plus grand demi-plan dans  $D$ , où toute fonction de  $C(\lambda, \mu)$  jouit de la propriété:

$$\text{partie réelle de la dérivée} = \Re(w') > 0 \quad \dots \quad (3)$$

L'étoilement entraîne l'univalence, donc  $b \leq b'$ .

On voit l'analogie avec les recherches connues sur le plus grand cercle  $|z| = \rho$  d'univalence et d'étoilement pour les fonctions  $w = az + \dots$ ,  $|a| < 1$ , holomorphes et de valeurs absolues  $< 1$  dans le cercle-unité<sup>1)</sup>. L'analogie se montre mieux encore, si nous supposons  $\lambda > 1$ , ce qui ne nuit pas à la généralité; car alors le point à l'infini est le point attractif pour les itérés  $z_1 = w(z)$ ,  $z_2 = w(z_1)$ , ... et joue le rôle du point attractif  $z = 0$  dans le cercle-unité, l'inégalité  $\Re(w) > x$  entrant à la place de l'inégalité  $|w| < |z|$  dans le cercle-unité.

L'inégalité connue  $|H'(z)| \leq \frac{\mu}{x}$  et l'inégalité (2) montrent que

$$|H'(z)| \leq \frac{\mu}{x^2} \quad \dots \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Par exemple: J. DIEUDONNÉ, *Polynômes et fonctions bornées d'une variable complexe*. Ann. Sc. de l'École normale supérieure, série 3, tome 48, 1931, p. 307-358.

De (1) et (4) on tire

$$\Re(w') \cong \lambda - \frac{\mu}{x^2} \dots \dots \dots (5)$$

De (5) on conclut immédiatement que  $b' \cong \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$ .

Cherchons maintenant les fonctions de la classe  $C(\lambda, \mu)$  pour lesquelles  $\Delta\left(x > \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)$  est le plus grand demi-plan d'étoilement. Dans ce but représentons  $H(z)$  par une intégrale de STIELTJES étendue sur l'axe imaginaire  $z = ti, -\infty < t < \infty$ :

$$H(z) = \frac{1}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z-ti} + \frac{1}{1+ti} \right) d\psi(t) + c \dots \dots (6)$$

où  $\psi(t)$  est une fonction non-décroissante telle que les intégrales  $\int_1^{\infty} \frac{d\psi}{t^2}$  et  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{d\psi}{t^2}$  sont convergentes, et  $c$  une constante. De (6) résulte

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{x d\psi}{|z-ti|^2} + \frac{1}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{|1+ti|^2} + \Re(c) \dots (7)$$

La somme des deux derniers termes dans (7) étant  $\geq 0$ , (2) exige qu'elle soit = 0:

$$u(z) = \frac{x}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{|z-ti|^2} \dots \dots \dots (8)$$

Il suit de (2) et de (8) que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + t^2} d\psi = \pi\mu \dots \dots \dots (9)$$

Soit  $N$  un nombre fini positif. En vertu de (2) et (9) on a pour  $z = x > 0$

$$\int_{t=-N}^N \frac{x^2}{x^2 + t^2} d\psi \cong \pi\mu.$$

Remplaçons le premier membre de la dernière inégalité par sa limite pour  $x \rightarrow \infty$ . Il vient

$$\int_{t=-N}^N d\psi \cong \pi\mu.$$

Cela étant quel que soit  $N$ , nous concluons que

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} d\psi \cong \pi\mu.$$

D'autre part (9) montre que  $\int_{t=-\infty}^{\infty} d\psi \geq \pi\mu$ , donc

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} d\psi = \pi\mu. \dots \dots \dots (10)$$

Étudions maintenant la conduite de  $u(z)$  dans un demi-plan  $\Delta_0 (x > x_0 > 0)$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre positif. L'équation (10) met en évidence l'existence d'un nombre positif  $N$  tel que

$$\int_{|t|>N} d\psi < \varepsilon \dots \dots \dots (11)$$

$z$  étant dans  $\Delta_0$  on déduit de (11)

$$\frac{x}{\pi} \int_{|t|>N} \frac{d\psi}{|z-ti|^2} \leq \frac{\varepsilon}{\pi x} \leq \frac{\varepsilon}{\pi x_0} \dots \dots \dots (12)$$

Pour  $z \rightarrow \infty$  dans  $\Delta_0$  nous avons en vertu de (10)

$$\frac{x}{\pi} \int_{|t| \leq N} \frac{d\psi}{|z-ti|^2} \rightarrow 0, \text{ uniformément dans } \Delta_0. \dots \dots \dots (13)$$

(8), (12) et (13) montrent que

$$u(z) \rightarrow 0 \text{ pour } z \rightarrow \infty, \text{ uniformément dans } \Delta_0. \dots \dots \dots (14)$$

Et, parceque  $|H'(z)| \leq \frac{\mu}{x}$  et  $\Re(w') = \lambda + \Re(H')$ , il vient

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Re(w') = \lambda > 0, \text{ uniformément dans } \Delta_0. \dots \dots \dots (15)$$

Conséquence de (15) est: condition nécessaire et suffisante pour que  $\Delta(x > \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}})$  soit le plus grand demi-plan d'étoilement est que la droite  $x = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} = x_0$  contienne un point fini  $z_0 = x_0 + iy_0$  satisfaisant à  $\Re\{w'(z_0)\} = 0$ , donc  $\Re\{H'(z_0)\} = -\lambda$ . Or, en vertu de (6)

$$H'(z_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{(z_0-ti)^2},$$

d'où en vertu de (10)

$$\Re\{H'(z_0)\} \leq -\frac{1}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{|z_0-ti|^2} \leq -\frac{\mu}{x_0^2} = -\lambda$$

et l'égalité  $\Re\{H'(z_0)\} = -\lambda$  ne se produit que si  $\psi(t)$  est constante pour  $y > y_0$  et pour  $y < y_0$ , donc si  $\psi(y_0+0) - \psi(y_0-0) = \pi\mu$ .

Les fonctions cherchées satisfont par conséquent à

$$H'(z) = -\frac{\mu}{(z-iy_0)^2}$$

dans  $D$ , donc

$$H(z) = \frac{\mu}{z-iy_0}, \quad -\infty < y_0 < \infty.$$

La constante additive est nulle en vertu de  $xH(x) \rightarrow \mu$  pour  $x \rightarrow \infty$ . Inversement pour toutes ces fonctions  $H'(z_0) = -\frac{\mu}{x_0^2} = -\lambda$ , donc  $w'(z_0) = 0$ , par suite  $\Delta\left(x > \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)$  est le plus grand demi-plan d'univalence et d'étoilement pour les fonctions  $w(z) = \lambda z + \frac{\mu}{z-iy_0}$  et pour aucune autre fonction de la classe  $C(\lambda, \mu)$ . Nous avons démontré le

**THÉORÈME L.** Toute fonction de la classe  $C(\lambda, \mu)$  est étoilée, donc univalente dans  $\Delta\left(x > \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)$ . Les seules fonctions de la classe pour lesquelles  $\Delta$  est le plus grand demi-plan d'univalence, donc d'étoilement, sont

$$w(z) = \lambda z + \frac{\mu}{z-ki}, \quad -\infty < k < \infty.$$

L'équation (14) donne le

**THÉORÈME II.** Toute fonction  $H(z)$  holomorphe et à partie réelle positive dans  $D$ , pour laquelle la limite angulaire de  $zH(z)$  pour  $z$  infini est finie, jouit de la propriété que dans tout demi-plan  $x > x_0 > 0$  la partie réelle de  $H(z)$ , donc de même la dérivée  $H'(z)$ , tendent uniformément vers zéro quand  $z \rightarrow \infty$ .



**Botany.** — *The growth of the petioles of waterplants in solutions of phytohormones.* (From the Botanical Institute, Government University, Leyden.) II. By G. L. FUNKE. (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

#### V. Cell elongation—cell division.

I have measured the length of the cells of epidermis and subepidermal layer in more than 150 petioles and in each at 5 places: above, at  $\frac{1}{4}$  from the top, in the middle, at  $\frac{3}{4}$  from the top and below. They confirm completely the outcome of the thousands of measurements made in foregoing years, viz. that in the vast majority of cases the definite length is reached partly by cell elongation and partly by the formation of new cells. It is impossible to say more or less exactly in how far each of them accounts for the rapid increase in length of the petiole; now one may take the upperhand, now the other; sometimes elongation or division is more important in the whole extension of the petiole, sometimes only in one or some parts of it. Many factors probably influence both processes of growth, many of which, esp. the internal ones, escape thus far our control (age, respiration, assimilation, food storage, etc.). There is hardly any phenomenon in plant life so capricious as the cell dimensions. Yet there is one rule which holds true fairly generally, viz. that cell elongation is the principle means of reaching the definite length whenever a leaf is in unfavorable conditions, internal or external. Old age, sickness, poisonous solutions, etc. are invariably followed by strong cell elongation, and reversely, whenever I find abnormally long cells I feel intitled to conclude from that fact that the petiole in question has somehow suffered from injury (comp. 2). A striking example is shown by *Limnanthemum nymphaeoides* (9); concentrations 0.25 mg/L and 5 mg/L alpha-naphtalene acetic acid are resp. sub- and super-optimal for the longitudinal growth of its petioles; although the lengths reached in these concentrations are about the same, the cell lengths in 5 mg/L are abnormal for this species and  $\pm 2$  à 3 times those in 0.25; externally no difference is to be seen, but all measurements show that the growth had been achieved in different circumstances and therefore in totally different ways.

A selection of my measurements may illustrate sufficiently what has been said above.

Table 6a gives the data of a few specimens of *N. amazonum*. It happens that with the progression of the season the petioles show longer cells; therefore control specimens have been measured at different periods in summer. I would point out the following facts: No. 2 in 0.25 mg/L naphtalene acetic acid, although the longest petiole of Nos. 2—5, has by far the shortest cells; the concentrations 0.5 and 1 mg/L are obviously noxious. No. 4 has much longer cells than No. 3, although it is shorter; this is an example of the capriciousness which one meets so often and for which there is not always a ready explanation. No. 7, three times longer than No. 6, has cells of the same order of length; Nos. 8 and 9 have about twice the length of No. 7; if we only compared these three, we would be inclined to assume cell elongation as the only means of reaching the greater length; this assumption, however, has to be abandoned when we compare Nos. 8 and 9 with No. 6. No. 11 shows long cells over the whole extension, but No. 10, of the same age, is only  $\pm \frac{1}{4}$  its length and this relation is nowhere to be found in the cell dimensions. No. 14 is much shorter than No. 13; it is a striking example of a petiole which has done its utmost without succeeding in reaching the surface of the water; this exertion is consequently clearly expressed by its abnormally long cells.

Table 6b, *N. Boucheana*. No. 3 was a rather old leaf which was visibly injured by the 0.5 mg/L solution; it was strongly twisted and broke off while being measured some days

TABLE 6a. Celllengths of *Nymphaea amazonum*.

No.	Particulars (conc. of horm. mg/L; depth water; date)	Length pet. in cm	Dimenstons leaf blade in mm (middle vein — greatest breadth)	Average length of cells in micra									
				Epidermis					Subepidermis				
				a	$\frac{1}{4}$	m	$\frac{3}{4}$	b	a	$\frac{1}{4}$	m	$\frac{3}{4}$	b
1	Control 20 cm 4/VI	46	73— 65	100	135	105	80	60	135	175	175	130	115
2	Napht. $\frac{1}{4}$ 20 cm 23/VI	170	41— 52	80	170	165	170	220	95	225	225	335	295
3	Napht. $\frac{1}{4}$ 20 cm 4/VI	140	81— 96	185	270	220	255	320	195	290	265	360	370
4	Napht. $\frac{1}{4}$ 20 cm 4/VI	124	94—102	330	465	375 <sup>1)</sup>	320	350	250	455	505	590	485
5	Napht. 1 20 cm 19/VI	139	70— 83	335 <sup>1)</sup>	580	380	305	290	315	505	460	485	455
6	Control Vict. Basin 30/VII	51	115—158	50	80	100	95	90	75	120	180	215	150
7	Control 200 cm 1/VIII	152	104—175	40	65	110	130	115	70	140	150	190	185
8	Napht. $\frac{1}{4}$ 150 cm 2/VII	310	158—230	100	115	195	385 <sup>1)</sup>	200	145	165	285	445	305
9	Napht. $\frac{1}{4}$ 150 cm 30/VII	300	115—180	70	160	215	275	290	110	225	315	375	470
10	Control Vict. Basin 19/IX	42	48— 71	65	150	120	110	60	135	305	240	210	145
11	Napht. $\frac{1}{4}$ 40 cm 17/IX	370	50— 74	225	435	520	560	315	175	330	360	435	430
12	Contr.: seedling 5 cm 25/VIII	8	22— 29	85	90	105	90	145	85	105	135	120	140
13	Napht. $\frac{1}{4}$ ; seedl. 200 cm 16/IX	137	22— 28	105	270	370	365	225	110	275	310	295	340
14	Napht. $\frac{1}{4}$ ; seedl. 200 cm 16/IX	90	23— 29	135	385	460	460	380	190	370	355	525	350

TABLE 6b. *Nymphaea Boucheana*.

1	Control 20 cm 3/VI	29	25— 25	80	195	175	205	190	105	210	185	210	225
2	Napht. $\frac{1}{4}$ 20 cm 4/VI	140	27— 30	230	365	290	330	230	240	320	330	340	290
3	Napht. $\frac{1}{4}$ 20 cm 28/V	77	41— 48	210	590	465	460	450	240	520	500	585	370

TABLE 6c. *Nymphaea Devoniensis*.

1	Control Vict. Basin 29/VIII-41	42		65	110	90	65	100	80	170	130	100	140
2	Control Ghent 1939	50		27	110	150	135	135	92	110	210	160	195
3	Napht. 3 Ghent 1939	53		134	380	385	350	230	200	315	405	325	370
4	Napht. $\frac{1}{4}$ 40 cm 18/IX-41	213		180	170	220	270	235	175	170	210	245	265

TABLE 6d. *Nymphaea zanzibariensis rosea*.

1	Contr.: seedling 10 cm 29/VIII	19	28— 36	110	190	150	90	80	130	250	210	135	105
2	Napht. $\frac{1}{4}$ ; seedl. 200 cm 16/IX	226	27— 36	135	270	330	310	200	130	210	320	435	260

TABLE 6e. *Nymphaea Lotus lilacina*.

1	Contr.: seedling 5 cm 29/VIII	10	36— 38	50	55	70	60	62	65	70	95	85	105
2	Contr.: seedling 200 cm 16/IX	60	36— 39	250 <sup>1)</sup>	395	720	665	365	230 <sup>2)</sup>	415	565	620	490
3	Napht. $\frac{1}{4}$ ; seedl. 200 cm 16/IX	199	35— 40	150	430	365	460	230	170	390	390	460	310

a means: above;  $\frac{1}{4}$ : at  $\frac{1}{4}$  from the top; m: in the middle;  $\frac{3}{4}$ : at  $\frac{3}{4}$  from the top; b: below.

1): many newly divided cells; 2): at  $\frac{1}{4}$  from the top 435; 3): at  $\frac{1}{4}$  from the top 315.

before the end of the experiment; its unfavorable condition is neatly revealed by the cell dimensions.

Table 6c, *N. Devoniensis*. In 3 mg/L naphthalene acetic acid growth was equal to that in the control, but the cell dimensions are a warning against the erroneous conclusion that this hormone would have no influence on the longitudinal growth.

Table 6d, *N. zanzibariensis rosea*. The data speak for themselves.

Table 6e, *N. Lotus lilacina*. No. 2 is one of the very rare examples in which cell elongation may be considered as the only means of reaching the definite length of the petiole; indeed it is a specimen which has been in the same unfavorable conditions as No. 14 of *amazonum* and evidently still worse; that in a normally grown petiole, cell division plays its part, is once more neatly demonstrated by No. 3.

These examples can be multiplied; my data are at the disposal of anyone interested.

Two striking facts appear from these measurements. The dimensions of the leafblades (length of middle vein and greatest breadth) indicate that no relation exists between the assimilating surface and the longitudinal growth of the petioles. The cell divisions must take place at a very rapid rate, otherwise the fact cannot be explained that so very few indications of it were visible, esp. in the longest petioles.

## VI. Discussion.

Has the greatest length, which a petiole of *Nymphaea* can reach, been attained by the several treatments? This question must certainly be answered in the negative. Several species of *Nymphaea* are grown in the basin of *Victoria regia* where they get rich food and high temperature. They show a luxuriant development and notwithstanding the shallowness of the water,  $\pm 20$  cm, they form petioles of considerable length. I measured: *N. Lotus lilacina* up to 120 cm, *N. Lotus var.* up to 180 cm, *N. capensis* up to 130 cm, *N. hybrida var. hort. Oberg. Graebner* up to 230 cm. These petioles are much thicker than those grown in my experiments; they take several weeks to reach their full length and therefore, as I expected, their cell dimensions indicate a high degree of division (comp. my observations on *Victoria regia*, Nos 1, 2); the blades are large (middle vein up to 240 mm, greatest breadth up to 460 mm). If we could transport these plants in basins of, let us say, 400 or 500 cm deep, I feel convinced that they could easily outgrow them and more than that. Theoretically we could force the petioles to elongate indefinitely by growing them in shallow basins, but at the same time by preventing the blades from reaching the surface. I have tried this with *Victoria regia* (2); the petioles reached indeed a greater length, but they soon showed signs of decaying and their abnormally long cells were another indication that this treatment is injurious; yet it might be worth while to try it again with the more robust petioles of *Nymphaeaceae*.

Adding alpha-naphthalene acetic acid to the *Victoria* basin would be another way of testing the growth potentialities and a very tempting one; the quantity of hormone needed would not be enormous, 2 à 2½ gr for a concentration of ¼ mg/L; it would be interesting to observe at the same time the reactions of other waterplants, of *Victoria* itself in the first place; but just because I was confident of a striking result, the consequences deterred me.

It must be emphasized, however, that my plant material in the controls, though vigorous and healthy, was not grown in such optimal conditions and therefore never reached dimensions exceeding those mentioned in the tables. The tremendous growth, as well the lengths reached as its amazingly rapid pace, were entirely due to the height of the water column and (or) to the hormones.

Of the three substances used, alpha-naphthalene acetic acid has by far the greatest activity in furthering the longitudinal growth of the petioles of *Nymphaeaceae*. This holds true for quite a number of other phenomena in plant life, e.g. the rooting response of cuttings (VAN DER LEK and KRIJTHE, 12, RAPPAPORT, 14), the parthenocarpy of fruits (HUBERT and MATON, 10, 11; see also 6), the inhibition of buds in seedlings

(MATON, 13). The sensitiveness of *Nymphaeaceae* is such that I feel intitled to propose a *Nymphaea*-test besides the *Avena*- and *Pisum*-tests. THIMANN and SCHNEIDER (15) give the concentrations in mg/L of alpha-naphtalene acetic acid giving minimal and maximal responses of straight growth of *Pisum*; when we compare these with mine for *Nymphaea* (table 7) we see that the latter is by far more sensitive; and we should not

TABLE 7. Concentrations in mg/L of alpha-naphtalene acetic acid giving minimal and maximal responses of straight growth.

	Minimum	Maximum
<i>Pisum</i> (THIMANN and SCHNEIDER)	0.05	4
<i>Nymphaea</i>	0.016	0.25

forget that the lowest concentration of 0.016 is probably still too high and that, while a maximum response in *Pisum* means an elongation of 30 à 50 %, in *Nymphaea* it may mean one of some hundreds percent. THIMANN and SCHNEIDER rightly point out the dangers of comparing testmethods as the relative activities of the auxins vary widely with the test plants. Notwithstanding this I think that these data indicate all the same that *Nymphaeaceae* may be considered as very sensitive plants worthy of further examination. On the other hand, we should never forget that they present serious practical difficulties: they can only be grown in summer; their size is such that we are restricted to a small number of specimens which are far from being uniform and whose leaves give only partly the right response; growing them under the carefully controlled conditions as are usual with *Pisum* and *Avena* is excluded; seedlings unfortunately appear to be less suitable. Considering all this I am fully aware that my proposal of establishing a *Nymphaea*-test can have hardly any practical value; but all the same circumstances may occur in which future investigators can consider its possibilities.

It is noticeable that the growth of the leafblades is not influenced at all by the hormones; in higher concentrations they show hypo- or epinastic curvature, but in the concentrations optimal for the growth of the petioles, they do not react at all. This is still more striking when we consider the flowerstalks; these do not elongate, neither as response to deepening of the waterlayer, nor to the addition of hormones; they were sometimes somewhat coiled and this was the only indication of their being "aware of" the presence of auxins.

#### VII. Summary.

1. The growth potentialities of the petioles of *Nymphaeaceae* and some other plants are feeble in the early seedling stage; they increase gradually and strongly and decrease only when the plants are getting old.

2. Each leaf shows individually a parallel behaviour and consequently it only gives the utmost responses to external growth-promoting factors when it is at the suitable age.

3. The two main factors inducing a sudden vigorous renewal of growth of the adult petioles are: (1) deepening of the waterlayer; (2) adding of growth substances to the water. (1) is especially efficient when the plants are young; (2) becomes gradually equally important until later on it takes the upper hand and finally can be the only means of attaining the extreme dimensions.

4. At the suitable age both factors combined or the latter alone result in causing amazing achievements of growth, up to 130 and 160 cm in 48 hours, provided the temperature is between 25° and 30°; when it is between 20° and 25° the same result can be reached but it takes more time.

5. Of the three hormones used, heteroauxin has the least influence, beta-indole butyric acid more and by far the most active is alpha-naphtalene acetic acid.

6. The optimal concentration of alpha-naphtalene acetic acid is about 0.25 mg/L.

( $0.25 \times 10^{-7} = \pm 7 \times 10^{-8}$  mol); in lower concentrations, even in  $\frac{1}{10}$  mg/L ( $3.1 \times 10^{-8} = \pm 6 \times 10^{-9}$  mol) individual petioles may give responses which are nearly as strong as the average one in 0.25 mg/L. Owing to the imposed scarcity of the plant material it can be ascertained only with some restriction that there exists a relation between the concentrations  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{1000}$ ,  $\frac{1}{10000}$  and  $\frac{1}{100000}$  mg/L and growth; higher concentrations are becoming gradually more noxious.

7. The sensitivity of the petioles of *Nymphaeaceae* appear to be 10 à 16 times greater than that of *Pisum*; there are, however, practical objections against establishing a *Nymphaea*-test.

8. The longitudinal growth, even the extremely rapid one, is achieved by cell elongation as well by cell division; the first one takes the upper hand whenever a leaf is in unfavorable conditions, but elongation is never the only means of reaching the definite length; this proves especially to be the case in solutions of more than 0.25 mg/L.

9. The leaf blades are not affected by the hormones in low concentrations, nor are, curiously enough, the flower stalks.

I want to express my heartfelt thanks to the Board of Trustees of the University of Leiden, to the Director of the Botanical Institute, to the scientific and technical staffs of the laboratory and gardens, to the Director, the scientific and technical staffs of the State Herbarium, who, with the utmost kindness, enabled me to continue my research work in my present circumstances.

I have great pleasure in thanking the Direction of the N.V. Amsterdamsche Chinine-fabriek, Amsterdam, who provided me with the growth substances.

*Botanical Institute.*

Leyden, October 1941.

#### LITERATURE.

1. FUNKE, G. L., Nat. wet. Tijdschr., 16, 47—58 (1934).
2. ———, Nat. wet. Tijdschr., 16, 245—261 (1934).
3. ———, Journ. Physiol., 90, 1—2 (1937).
4. FUNKE, G. L. and P. M. BARTELS, Biol. Jaarb., 4, 316—344 (1937).
5. FUNKE, G. L., Biol. Jaarb., 5, 382—403 (1938).
6. ———, Biol. Jaarb., 6, 334—350 (1939).
7. ———, Biol. Jaarb., 7, 274—283 (1940).
8. ———, Bull. Soc. d'Hist. Nat. Toulouse, 73, 1—3 (1940).
9. ———, Biol. Jaarb., 8, at press (1941).
10. HUBERT, B. and J. MATON, Biol. Jaarb., 6, 245—285 (1939).
11. HUBERT, B. and J. MATON, Nat. wet. Tijdschr., 21, 339—348 (1939).
12. LEK, H. A. A. VAN DER en E. KRIJTJE, Meded. Landb. H. S. Wag., 44, 3—91 (1940).
13. MATON, J., Biol. Jaarb., 7, 178—254 (1940).
14. RAPPAPORT, J., Biol. Jaarb., 7, 350—362 (1940).
15. THIMANN, K. V. and C. L. SCHNEIDER, Am. Journ. Bot., 26, 328—333 (1939).
16. VEGIS, A., Acta Soc. Biol. Latviae, 7, 87—102 (1937).



**Geology.** — *On rocks from the isles of Soegi, Tjombol and Tjitlim. Riouw Archipelago. Netherlands East Indies.* By A. VAN WESSEM. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

#### *Introduction.*

The rock-samples, described in this article, are in the collections of the "Mineralogisch-Geologisch Instituut" at Utrecht. They have been collected in 1930 by Dr. P. M. ROGGEVEEN, geologist of the Billiton My. at that time, during a geological investigation in the Riouw-Archipelago and have been donated to the above-mentioned Institute. The Billiton My. kindly put at our disposal the reports of ROGGEVEEN.

The oldest investigation has been done by R. EVERWIJN (1), who visited the isle of Soegi in 1863. He only mentions the occurrence of white and variegated silicified sandstones; his foreman FLEURY detected some iron-containing sand but no trace of cassiterite. Much later, in 1925 A. BOTHÉ (2) publishes a report which contains the results of an investigation for tinstone in the Riouw-Archipelago. By this exploration it has been stated, that on Soegi and Tjombol there exists a slightly folded shale- and sandstone-series. From the S. coast of Tjitlim he reports eruptive-rocks: granitites and a dike of dark porphyritic rock. On Soegi a sandstone was found from which tinstone-grains could be separated. In 1925 BOTHÉ (3) again treats of the geology of these islands. Besides the already mentioned sandstones there occur slates, phyllitic shales, and phyllite-conglomerates. On Soegi and Tjombol the general strike is North-West, this in accordance with other islands of the Riouw-Archipelago.

The description of ROGGEVEEN is much more discursive. Of the sediments he mentions sandstones, many conglomerates, claystones, and their transitions; they are often red. At one side the sandstones pass into conglomerates, at the other side into claystones. There occur quartzitic, mica-containing and schistose sandstones. In S. Soegi carbonized plant-remains have been found in a conglomerate; here, also silicified wood has been found, belonging to *Protocupressinoxylon malayense* (4). According to ROGGEVEEN the pebble-material in the conglomerates has a polygeneous composition: quartz, quartzitic material, sandstone-fragments, claystone, fragments of siliceous slate etc. are the most important components. He regards all these sediments as Trias. The sediments show lateritization, especially on the low coasts of E. Soegi and W. Tjombol. On the E. coast of Tjitlim ROGGEVEEN has collected remarkable pebbles from a conglomerate, among which also pebbles of volcanic rocks. He suggests that these are related to the "syenite-porphyrific" rocks of E. Tjitlim regarded by BOTHÉ as granitites. Our microscopical research proved the possibility of the identity of the effusive pebbles with the volcanics of E. Tjitlim, which, however, are no syenites but quartzporphyrites and related rocks. Our study proved moreover that this conglomerate also contains pebbles of luxullianite, cranodioriteaplite, chert, and a kaolinquartzrock. This conglomerate, thus, is probably younger than the eruptive rocks in the neighbourhood and certainly younger than the tin-ore-bearing rocks of the region: occurrence of Luxullianite in pebbles. It is uncertain, whether this conglomerate has the same age as the other sediments of the islands, regarded by ROGGEVEEN as Trias. If the conglomerate and the other sediments have the same age, then the complex must very probably be post-triassic, as even the tin-granitites are regarded as post-triassic. It remains, however, possible that the conglomerate of S. E. Tjitlim is younger than the rest of the sediments. ROGGEVEEN himself suggests this possibility as he mentions the occurrence of a metamorphic sandstone in the vicinity of the eruptive-rocks of S. E. Tjitlim. This sandstone does not occur in our collection (see, however, later on, sub "Quartzitic Rocks"). ROGGEVEEN found inclusions in the volcanics of S. E.



Tjiltim, of which he suggests that they are also of eruptive origin. In my samples, however, I did not find a single inclusion. In E. Soegi and W. Tjombol ROGGEVEEN has found rocks, which point to the possible occurrence of an older formation. Near kampong Kang (E. Soegi) he found a talcschist and on Poeloe Pait (also E. Soegi) a siliceous

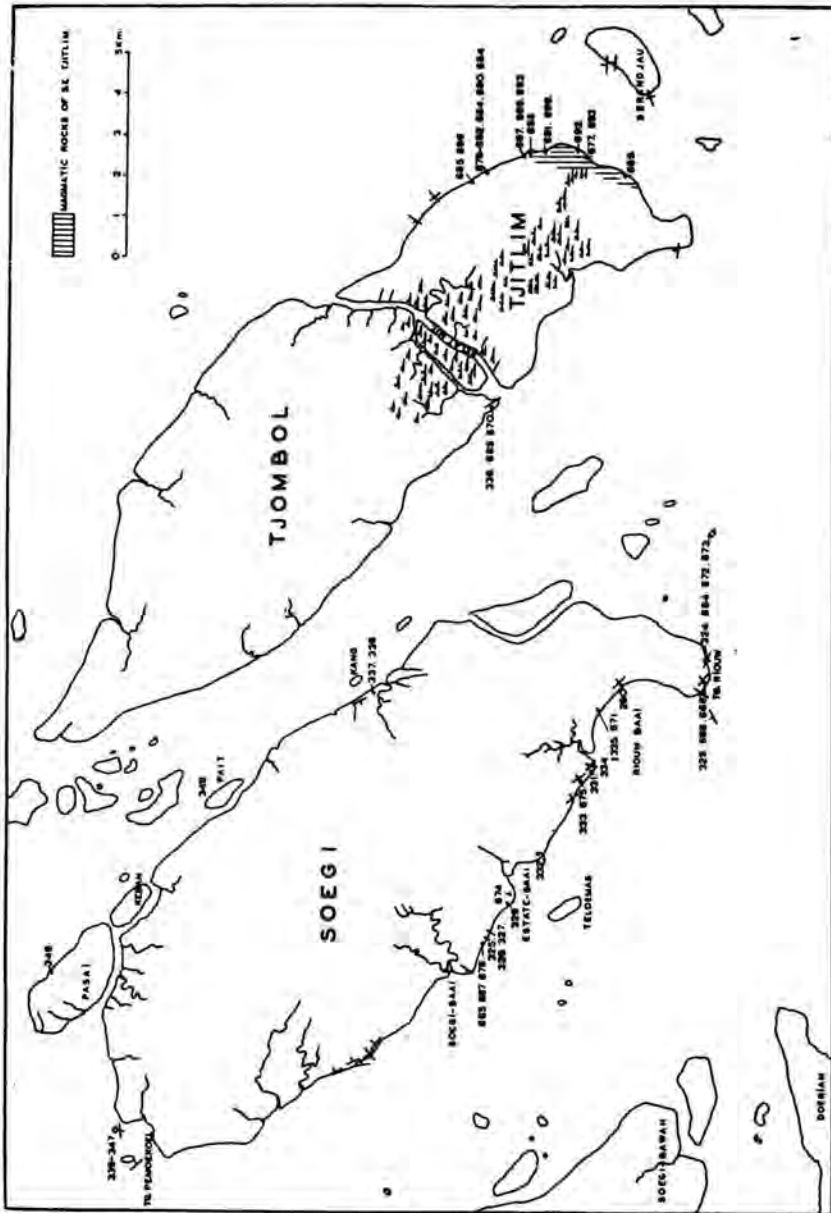


Fig. 1.

talcschist. The microscope proves that they are sericiteschist (Kang) and a quartz-sericiteschist (P. Pait). Moreover he mentions the occurrence of metamorphic sediments and gabbro-diorite from E. Soegi but they have been found in isolated fragments and may have been brought from elsewhere. As stated above, the normal sediments from these islands are regarded by ROGGEVEEN as Trias. The discovery of the *Protocupressinoxylon*

can only prove their mesozoic age. The somewhat metamorphic sediments from E. Soegi are regarded as permocarboniferous; the eruptive rocks of S. E. Tjitlim as jurassic or cretaceous.

According to ROGGEVEEN the tectonics in the region are governed by the Malacca-direction; this is expressed in the topography.

On N. Soegi, however, divergences of this direction occur, here the strike is nearly E.—W. Soegi and probably Tjombol can be regarded as synclines with hard rocks while the strait between them might be an anticline where older, less resistant rocks, have been eroded. Some small faults have been observed in the Soegi-rocks. As compared with the Billiton-sediments, the rocks of Soegi are only slightly disturbed and in consequence their petrographical habit is young. No trace of tin-stone has been found on these islands. Granites do not occur anywhere. The eruptive rocks of E. Tjitlim do not show pneumatolytic influence. The occurrence of granites on Soegi and Tjombol at a small depth is not probable, as the islands lie in a synclinal region. Tinore-veins in the sediments, therefore, cannot be expected, this in accordance with the relative quiet structure.

*Description of the rock samples<sup>1)</sup>.*

*Schists (338, 339, 348, 349).*

The samples 338, 339 and 349 which macroscopically are more or less distinctly schistous, show microscopically a directed texture. They are very finegrained. Quartz and sericite are the most important components. In 338 and 339 sericite dominates, in 349 on the contrary quartz is the dominating mineral. Here, sericite appears in sometimes very distinct bands which cause a parallel-texture. In 338 we observe rather many, small, albite-grains, some tourmaline and, on fissures, rather much limonite; it is a quartz- and albite-containing sericitechist. In 339 we find beside quartz and sericite very much epidote; it is a sericite-epidote-schist. In 349 we observe again some albite and limonite. In this sample, accumulations of rather coarse quartz-grains are not rare. It is an albite-containing quartzsericiteschist. Sample 348 gives the impression of a medium-grained quartzite. It is rather strongly sericitized. It contains, however, numerous bipyramides of quartz, clearly idiomorphic, partly with glass-inclusions, partly corroded and possibly also some sericitized feldspar-phenocrysts. The rock, therefore, must be a somewhat schistous, silicified and sericitized quartz-porphyrite or quartz-porphyrite-tuff.

*Cherts (341, 342, 344—347, 680, 685, 686).*

The first six samples are pebbles from a conglomerate at Pemoekoel; 680 is from the conglomerate of S. E. Tjitlim, while 685 and 686 seem to be samples from an outcropping chert near the aforementioned conglomerate. On the map, however, ROGGEVEEN does not indicate at this spot a chert, but conglomeratic sandstone. The samples consist almost wholly of a silicified mass. Locally we observe in 685 and 686 nests and veinlets with coarser quartz or with chalcedony, often in spherulites (341, 685). In 346 there lies a green flush over the silicified mass. This is caused by a pale-green pleochroic mineral; refraction and double-refraction point to chlorite. Sericite we find in small quantities in 345, 680, 685 and 686. It occurs in 680 among the coarser quartzgrains, which have recrystallized in seams in a later stage; the sericite congregates in the axis of the veinlets. That might point to a pneumatolytic influence. Possibly very small grains of a coaly substance are present in 685 and 686. Magnetite and limonite are rare. A certain lamination can be distinguished in 343. Unmistakable radiolaria occur in 341 and 347 and possibly also in 685.

*Quartzitic rocks (324, 340, 687, 688).*

With regard to the structure only 340, a pebble from a conglomerate, can be called

<sup>1)</sup> The numbers of the samples correspond with those of the yearcatalogue of 1941 of the "Mineralogisch-Geologisch Instituut" at Utrecht and with those of the map.

a true quartzite. It consists almost wholly of small interlocked quartzgrains, a single muscovitescale, much magnetite and some limonite. 324 is a white-yellow, finegrained rock with many parallel quartz-veins. Under the microscope it presents a fine-grained aggregate of partly spherulitic quartz-crystals with many veins, which are built up by large quartz-crystals. The sample seems to be a transition-rock between chert and quartzite. The two other samples (687, 688) which come from the eruptive zone of S. E. Tjitlim represent possibly the "metamorphosed sandstone" mentioned by ROGGEVEEN. They equally consist of a fine-grained siliceous matrix with quartz-veins; these contain fine crystals of haematite, partly altered into limonite; in the matrix occur many fragments and crystals of pyrite. The origin of these rocks is uncertain; with regard to the mineralization it may be supposed, that they are related to the magmatic rocks in the vicinity. There is, however, no indication that they are metamorphosed sandstones.

*Shales (328, 667, 676).*

All these samples are from the W. coast of Soegi; we observe in these gray, fine-grained, clastic rocks a more or less distinct stratification, especially in 328. Quartz is always present in angular or in more rounded grains. In 667 we find feldspar in small fragments. Sericite in small scales and rare muscovite represent the micas. Chloritous substance occurs in 676. Opaque complexes are caused by kaolin and iron-ore (667). Coal in minute particles, some limonite and very small rutile-needles can be distinguished in 328. Nr 667 contains very much glauconite; it may be called a glauconitic shale.

*Sandstones (343, 668).*

They are red-weathered rocks. In contrast with 343, 668 shows a distinct stratification. Quartz is by far the most important component; the grains are often typically rounded. Sericite is present in small quantities; in 343 sericite is the result of weathering of rare feldspar-grains. Muscovite and feldspar are present in only small quantities (343). In 668 opaque complexes are probably caused by kaolin-accumulations and iron-ore. Chlorite occurs in small quantities (668), limonite in small aggregates (343). The occurrence of epidote, tourmaline and zircon in 343 is remarkable; the thin-section presents at least 4 well-rounded grains of tourmaline, partly green, partly blue. The zircons are rather large, max. 150 micron.

*Graywackes (325, 326, 327, 330, 332, 333, 334, 665).*

Most samples are grey, partly well-stratified rocks; one sample (330) is red-weathered. The samples are characterized by a distinct clastic structure, which changes from coarse-grained (326, 327, 333, 334) to fine-grained (325, 330, 332); quartz is an important component; mostly it is rounded, but in some samples it is angular or even splintery (325, 665). The quartz is sometimes cataclastic and shows almost ever undulatory extinction. Sericite is present in large quantities. In some cases its arising from feldspar can be observed very well (330, 333, 334). In 326 and 327 the sericite is arranged in garlands around the quartz. Muscovite-plates are numerous and sometimes showing bent and broken lamellae. In 334 albite-grains can be observed. Orthoclase is always sericitized. A particular place is hold by large fragments of silicified material. These fragments are sometimes rounded and they are very fine-grained: they are chert-fragments. Clastic quartzite-fragments are also present, while in 327 a fragment of porphyritic material can be observed; it is very likely the rock of 348. Further we find biotite (333), rare tourmaline (325, 333), chlorite and epidote (325, 332, 333, 334, 665) and zoisite (334, 665). Ores, e.g. magnetite (325, 326, 327, 332, 333), sulphur-iron-combinations and limonite are not rare and in 330 limonite is very common. The matrix of the rocks contains as recognizable components quartz, sericite and silicified material. The occurrence of numerous chert-fragments and of the porphyritic material in 327 prove, that the graywackes belong to a younger part of the sediment-formation, than the cherts and that they are younger than the schists.

*Graywacke-sandstones (329, 336, 666, 669, 670).*

All these red-weathered, coarse-grained, clastic rocks are from S. Soegi and S. Tjombol. The most important component is quartz; it occurs in rounded, but also in angular, often undulatory, sometimes cataclastic grains. The larger quartzgrains are cemented either by fine secondary quartz (336) or by small sericite-scales (666, 669, 670). In 666 we observe an intergrowth of quartz and sericite, which makes their arising from felspar probable. Muscovite in small quantities (329); chlorite occurs in 660. Rather coarse grains of tourmaline we meet in 329, 666, 669 and 670. Epidote (329) and opaque complexes like kaolin (666) and iron-ore (limonite) (329, 336, 666, 669), and magnetite (329) occur. Fragments of fine-grained silicified material in 329 and 669 give these rocksamples the appearance of graywackes. The nrs. 669 and 670 are strongly pressed. It is remarkable that the quartzitefragments in 670 have not yet adapted themselves to the prevalent press-direction of this rocksample, which is indicated by the arrangement of the sericiteplates.

*Graywackeconglomerates (331, 335, 671, 675).*

These gray, coarsely to finely conglomeratic rocks are all from S. W. SOEGI. Large chertfragments, in which in some cases rests of Radiolaria have been conserved, take, especially in 331, an important place. Quartz occurs sometimes in very large rounded grains; they are often cataclastic or show an undulatory extinction. Quartzitefragments with beautiful "mosaic texture" can be observed in 331. In the nrs. 331 and 335 we observe large slatefragments which show a directed texture; their components are small quartzgrains, sericite, some felspar, chlorite, coaly substance and traces of iron-ore. In the cement quartz, sericite and silicified material occur; the cement is locally green-yellow coloured by limonite and chlorite. In 675 conglomeratic bands alternate with bands which wholly consist of quartz; the latter probably are veins. Nr. 675 contains many foreign pebbles. Besides the already mentioned components we stated the presence of: 1) isolated plates of biotite; 2) some grains of what is considered to be staurolite; 3) crystals of plagioclase; 4) many grains of groundmass of porphyritic material (their plagioclases show often fluidal arrangement); 5) grains of corroded quartz, which are to be regarded as phenocrysts of a porphyritic rock and 6) grains of epidote-zoisite.

*Porphyrites, Quartzporphyrites and their tuffs (664, 672, 673, 677, 683, 684, 690, 691, 692, 694, 695, 696).*

The first three are from S. Soegi; the other ones from S. E. Tjitlim, partly from a conglomerate. All are characterized by a more or less distinct porphyritic texture. Later-on, however, processes have been active which have effaced the porphyritic texture to a certain degree. In 672, 690, 694, 695 and 696 f.i. we observe a strong silicification.

Nrs. 690, 691, 692, 695 and 696 are porphyrites. Among the phenocrysts oligoclase-andesine occupies an important place. Some are fresh, other ones show a profound alteration. In 690 and 696 it is almost wholly sericitized. 695 is wholly silicified, so that the felspar can only be recognized by its outlines. In 691 the felspar is replaced by calcite; in some phenocrysts the beginning of this alteration can be observed. Amphibole- and biotitephenocrysts can only be identified by their outlines. They are often wholly replaced by chlorite, limonite etc. The lavenderblue polarizationcolours of the chlorite in 691 point to pennin. Unimportant are apatite (690, 691), sulphidic ore (692) and titanite (691). In 695 and 696 we observe much magnetite. The fine-grained groundmass is composed of plagioclase, which is more acid than the plagioclase of the phenocrysts, quartz and probably some orthoclase.

The nrs. 690, 695 and 696 are altered porphyrites. They are strongly silicified, sericitized (690) and show some mineralization. In 695 a small vein, filled with heulandite is present, in which, very remarkably, nice idiomorphic magnetite-crystals are enclosed.

The nrs. 664, 677, 683, 684 and 694 are quartzporphyrites; 672 and 673 are quartz-porphyrity-tuffs. The phenocrysts are: quartz (sometimes corroded), plagioclase (more

or less sericitized, probably albite-oligoclase), amphibole and biotite, for a great part replaced by chlorite and limonite. Apatite and iron-ore occur, but only in small quantities; in 677, however, there is much ore. In 677 and 683 the groundmass is holocrystalline; it consists of plagioclase (likely albite), quartz and orthoclase. In 664, 673 and 684 we find a hyaline matrix. In 664 and 673 the groundmass has become partly crystalline, while in 672 and 684 the whole matrix is devitrified. Considering the composition, grain dimensions, the presence of splintered quartz etc. of 672 and 673 we call them quartzporphyrite-tuffs. As weathering-products of the phenocrysts and the groundmass-components kaolin, limonite, sericite and chlorite may be mentioned.

The three samples from Soegi agree well inter se by the existence of a hyaline matrix and the absence of felspar phenocrysts; they are quartzporphyrites.

The components of the conglomerate from Tjitlim are also quartzporphyrites, which differ from the foregoing three by the presence of large silicified felspar-phenocrysts; the groundmass is here equally silicified.

The quartzporphyrites from the volcanic complex of Tjitlim present less quartz-phenocrysts and more felspar-phenocrysts. Porphyrites without quartz have only been sampled from the volcanic outcrop. Thus, it is possible that the pebbles from the conglomerate have been derived from the volcanic outcrop, but the microscopic difference between the samples is so great, that we cannot regard this relation as proved.

*Luxullianites (679, 682).*

These samples have been found in the conglomerate of S. E. Tjitlim. They are granular rocks are built up by the following minerals: quartz (often clear and with many liquid-inclusions; in 682 beautiful transverse sections of idiomorphic crystals; in 679 and 682 large quartzgrains with felspar-like circumference and with relics of lamellation), tourmaline (in large quantities, its colour changing from colourless and light-yellow to dark-brown or nearly black; beautiful tourmaline-suns can be observed), apatite, topaz, zircon and possibly some cassiterite, a single muscovite-plate in 679; further some ore, probably magnetite, in 682. As the felspars have been altered into quartz, we must call these rocks silicified Luxullianites.

*Diorite (693), found as isolated rock in S. E. Tjitlim.*

The sample is holocrystalline, and strongly altered. We can distinguish the following minerals. Plagioclase: only rarely rests of crystals with lamellation can be found; nearly all felspar is sericitized; it is probably albite-oligoclase. Kaolin fills the weathered plagioclases. Muscovite occurs in rather coarse scales. Biotite is the dominating dark mineral. It shows strong pleochroism. Chlorite and complexes of limonite can be regarded as its alteration-products. Amphibole is in minority with respect to biotite. It sometimes still shows distinct traces of idiomorphism; its colour is pale-green, only a little pleochroitic; it has been partly replaced by chlorite. Finally we observe some topaz, also apatite and rather much haematite. Obviously the veinrock 689 belongs to the sequence of this diorite.

*Amphibole-dioriteporphyrite (689).*

This sample is from S. E. Tjitlim. Its structure is holocrystalline porphyritic. In a groundmass, which shows a microgranitic texture, and which consists of plagioclase, quartz, orthoclase and some amphibole, the following phenocrysts can be distinguished: plagioclase (index of refraction and lamellation point to albite and albite-oligoclase; the felspar is sericitized and epidotized), amphibole (in pale-green idiomorphic crystals), chlorite, epidote and some calcite (can be regarded as alteration-products of amphibole). Besides amphibole, a pale-yellow augite occurs (probably diopside). Haematite in rather large quantities and finally some titanite.

*Granodioriteaplite (678).*

This is a pebble from the conglomerate of S. E. Tjitlim; its structure is holocrystalline.



The slide consists for the greater part of a typical granophyric intergrowth of quartz and an acid plagioclase. The plagioclase is often dusty and somewhat sericitized. There also occur plagioclases in idiomorphic to hypidiomorphic grains; these show a distinct twinning and are also somewhat dusty; they are oligoclase-andesine. Zoisite, epidote and sericite appear as its alteration-products. Microcline in hypidiomorphic crystals which show gridiron-twinning. Some quartz-crystals are idiomorphic. Biotite occurs in rare green-brown plates, also in radiated aggregates; its pleochroism is not strong and locally it has been altered into chlorite. In the biotite we observe rutile in the shape of sagenite. Finally some zircon and apatite may be mentioned.

*Vein deposits (337, 674).*

337, clearly a part of a quartzvein, is, according to its location, associated with the schistose rocks of E. Soegi. 674, a quartz-limonite-rock, with very fine idiomorphic crystals of quartz, is equally a part of a vein.

#### SUMMARY.

The rocks from the islands under consideration belong to different formations.

1. It is fairly probable that the schistose rocks among which a schistose quartzporphyrite are the oldest and that they belong to the permocarboniferous.

2. It is not quite clear whether chert-samples have been found in situ or that they are all pebbles from the conglomerates at Pemoekoel and Tjitlim. It is possible that the cherts 685 and 686 have been taken from outcropping rocks but the fact that ROGGEVEEN indicates at this locality "conglomeratic sandstone" makes the supposition somewhat doubtful. Thus, it is uncertain, whether a chert-formation occurs on the islands.

3. The most important formation of the islands is a sequence of sandstones, quartzites, graywackes, graywacke-sandstones, graywacke-conglomerates and shales. When unweathered they are all gray rocks with only traces of metamorphosis (f.i. the graywacke-sandstone 670, see above). It is probable that the quartzporphyrites from S. Soegi are intercalations in this formation. The following can be said about the age. The absence of general metamorphosis proves that the formation is younger than the permocarboniferous. The presence of pebbles and rounded grains of radiolarite and chert in many of the clastic rocks proves that the formation is younger than the cherts; it is, however, possible that the difference of age is only slight. In some of the rocks grains of tourmaline have been found. As tourmaline is among the heavy minerals of clastic rocks everywhere an ordinary component, we do not feel justified to say that its presence proves that the formation is younger than the tin-ore formation of the region. If, however, the conglomerate of S. E. Tjitlim, with its pebbles of luxullianite and granodiorite-aplite belongs to the graywacke-sandstone formation, it will be justified to regard, at least a part of the clastic formation, as younger than the tin-granites. From the field-observations of ROGGEVEEN it cannot be deduced whether this conglomerate really belongs to the clastic formation. Perhaps Mr. ROGGEVEEN, when returned to Europe, will be in the possibility to give certainty about this important question. The formation is generally regarded as Trias, and, in this case, must be older than the tin-granites. Besides radiolarites and chert there occur most interesting foreign pebbles and grains in the rocks. Material of porphyritic rocks, quartz-phenocrysts of quartzporphyrites (or porphyries), rounded fragments of quartzites, large plagioclases, crystals of biotite and staurolite give indications about the nature of the rocks which have provided the clastic material.

4. In S. E. Tjitlim an outcrop with volcanic rocks has been found. They consist of quartzporphyrites, porphyrites, a diorite (found only as isolated fragment) and an amphibole-diorite-porphyrite. It is very probable that all these rocks belong together. ROGGEVEEN's supposition that they would have metamorphosed sandstones is not proved by our microscopical research. It is possible that the porphyrite-pebbles of the conglomerate of S. E. Tjitlim belong to this sequence; this, however, cannot be proved, as there exists undoubtable differences between the pebbles and the outcropping volcanic rocks.



## LITERATURE.

1. EVERWIJN, R., Verslag van een onderzoek naar tinerts op eenige eilanden, behoorende tot de residentie Riouw. Jaarboek van het Mijnwezen in Ned. Oost-Indië, deel 2, pp. 73—123 (1872).
  2. BOTHÉ, A. CHR. D., Het voorkomen van tinerts in den Riau Archipel en op de eilandengroep van Poelau Toedjoe (Anambas- en Natoena-eilanden). Verslagen en Mededeelingen van den Dienst van den Mijnbouw, no. 18 (1925).
  3. —————, Geologische verkenningen in den Riouw-Lingga Archipel en de eilandengroep der Poelau Toedjoe (Anambas- en Natoena-eilanden). Jaarboek van het Mijnwezen in N. O. I., Verh. II, pp. 101—152 (1925) (printed in 1928).
  4. ROGGEVEEN, P. M., Mesozoïsches Koniferenholz (*Protocupressinoxylon malayense* n.s.) von der Insel Soegi im Riouw-Archipel, Niederländisch Ost-Indien, Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 35, 580—584 (1932).
-

**Geology.** — *On the rocks of the isle of Koendoer, Riouw-Archipelago, Neth. East Indies.*  
By J. H. GERMERAAD. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

*Introduction.*

In 1930, Dr. P. M. ROGGEVEEN, geologist of the Billiton Mij. at that time, carried out a geological investigation in the Riouw-Archipelago. The rock-samples, collected by him, have been donated to the Mineralogisch-Geologisch Instituut at Utrecht whereas the Billiton Mij. kindly put at our disposal the reports of ROGGEVEEN. The rock-samples from Koendoer have been examined by the author.

In 1863 EVERWIJN and FLEURIJ (1) made a flying survey in the island. According to EVERWIJN, Koendoer is situated on the NW or W of Karimon and has a smaller size (sic.). He already knows the occurrence of granite and sandstone, also of tourmaline and some tinstone. From the mouth of the Tameris he reports magnetite, but probably this has been wolframite.

By exploration of BOTHÉ, BOERS, KROES and LOTH (2) it has been stated, that contact-slates exist at Bt. Penindjau (Bt. Salak) N of the granite. In the Tameris and the Timon-valley tinore has been deposited in placers; in the "kollong" of the latter a quartzvein with tinstone (S 105, D 80 N) has altered the granite into greisen. Possibly EVERWIJN has taken this greisen for a sandstone. Parallel to this quartzvein many tourmaline-strings with tinstone occur in the granite; in the Sg. Limau and the placers of Sg. Gemoeroe and Sg. Koendoer tinore has been found. According to their estimation the quantity of tinore is considerable.

According to the detailed report of BOTHÉ in 1925 (3) Koendoer is very flat; in the N low hills exist and slowly streaming brooklets empty into the sea with wide mouths; the watersheds have nearly disappeared. S Koendoer is one large swamp, but there are small hills of granite in the southernmost part. BOTHÉ mentions the occurrence of Trias. He knows granite, granitite, tourmaline-granitite, pegmatite and amphibole-granitite; tourmaline, topaz and tinstone indicate pneumatolysis. According to GISOLF the rock-samples belong to the upper part of the batholith. There are also quartzmica-rocks, considered as differentiations of the magma. A quartz-greisen in the Timonvalley is a pneumatolytic product of the granite; it contains tinstone, tourmaline, mica and quartz. The strike of the above mentioned quartzvein is now given as 150°, probably a misprint. Wolframite occurs abundantly.

The exploration of ROGGEVEEN was much more extensive. The eldest rocks are the crystalline schists of Songkop, perhaps Prae-Carboniferous, because the Carboniferous of Malacca is less regional metamorphic. They are finegrained hornblende-schists with constant composition: hornblende, quartz, epidote and in smaller quantity sphene and sulphidic ore. As a consequence of the directed position of the hornblende crystals the rocks are schistose; the quartz appears in thin, lenticular layers. The rocks show fine, minute folding, visible in thin sections. Possibly these rocks are homologous with those of Merak, Temblas and Tg. Malolo (Karimon). By our examination it has been stated, that they contain only a small quantity of quartz, but much albite; no epidote but zoisite. Squeezed rests of oligoclase-veins also occur (214). According to ROGGEVEEN these amphibolites are parschists, but we are of the opinion that they are orthoschists. On Koendoer the Carboniferous is absent.

Probably, the rocks regarded as Trias cover the Prae-Carboniferous discordantly. The absence of regional metamorphism in the Trias proves the higher age of the amphibolites. Its contact-metamorphosis proves that it is older than the granite. The absence of granite-

material in the Trias-conglomerates on Toelang indicates the same. The triassic rocks of this isle are red conglomerates with much quartz (elements up to 5 cm), with lenticules of schisty quartz-sericite-shales and sandstone. On Seraja clay sediments exist. In trenches on the Bt. Djerat weathered, contact-metamorphic clay-sediments occur. According to

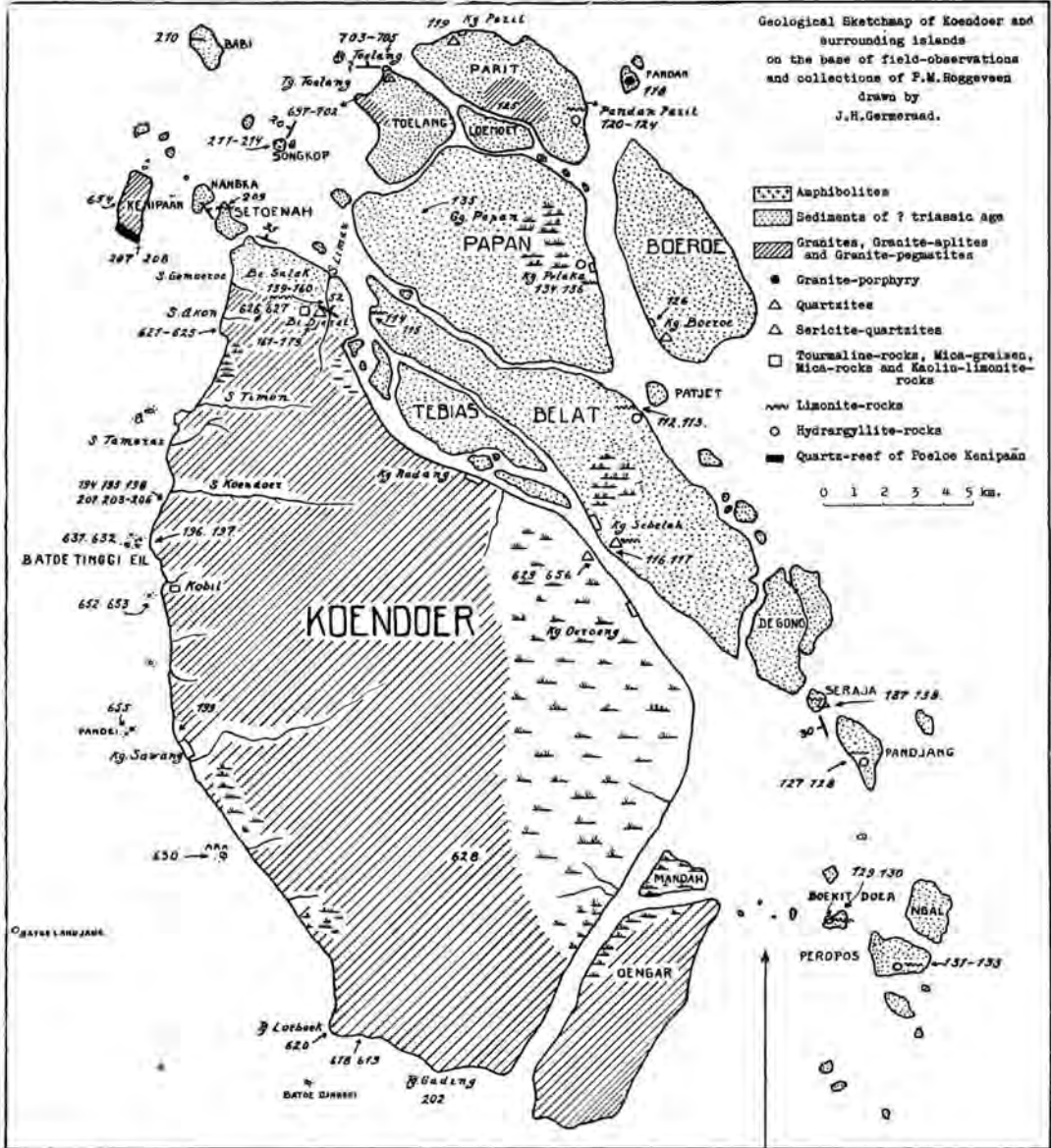


Fig. 1.

The indication  $\Delta$  for sericite-quartzites in the explanation of the map should be  $\triangle$ .

ROGGEVEEN they are chialtolite-schists and knotted schists, but they do not appear in the examined material. The other triassic sediments in this region are intensely lateritic, e.g. on Belat, Pandjang, N. Koendoer, etc. The granite-samples of this region never show this alteration. Sometimes limonitebanks indicate the bedding of the original sediments, e.g. in the neighbourhood of Setoenah. On the beach of Parit at Kg. Parit many rounded

quartzgrains occur, probably a relic of the N Toelang-formation. On the N slope of the Gg. Papan some weathered pieces of schists and veinquartz were observed. At Kg. Boeroe on Boeroe finegrained, silicified rocks exist. The age of all these rocks is not certain. The resemblance with the fossil-bearing rocks on Malacca, Singapore and Lingga makes a triassic age probable. At any case they are older than the granites.

Many granites and connected rocks have been sampled by ROGGEVEEN; their description follows later on.

It is pointed out by ROGGEVEEN, that the tinore has been mainly observed in the granites and for a small part in the contact-zone. In normal sediments no tinore has been found; possibly this is caused by the relatively slight folding, making the sediments impermeable for the tin-bearing fluids. Quite different are the vertically folded sediments on Billiton.

ROGGEVEEN observes that many phenomena prove the tectonic analogy between Malacca and Riouw. They are: 1<sup>o</sup>. direction of the sediments is about NW—SE; 2<sup>o</sup>. strike of the quartzdike of S Kenipaän ca 130°; 3<sup>o</sup>. topographic directions often NW—SE, e.g. on Belat; 4<sup>o</sup>. strike of the contactplane of granite and sediments in N Koendoer ca 115°; 5<sup>o</sup>. many greisen strings have the same directions; 6<sup>o</sup>. slightly parallel position of the orthoclase-crystals in the granite itself with direction about 115—160°.

The batholith of Koendoer can not be connected with the granite-massif of Karimon, which is proved by the different facies of the rocks. The rocks and isles of granite between Koendoer and Sumatra indicate the probable continuation of the Koendqermassif below Sumatra. On the E-coast of Sumatra the granite-hill Senggoenoeng proves this suggestion. Possibly the quartzporphyry (after our opinion: granite-porphyry) of Pandan is a roof-intrusion of the Karimongranite.

The very distinctive directions of the crystalline schists of Songkop may be relics of an older folding, as ROGGEVEEN suggests. Remarkable is their direction of the minute-folding, the strike of which coincides with the direction of Malacca.

*Description of the rock-samples of Koendoer, collected by ROGGEVEEN<sup>1)</sup>.*

*Amphibolites (211, 212, 213, 214).*

Finegrained, schistose, green-gray rocks with thin lightcoloured veins. In 211—213 green amphibole (pleochroism: lightgreen-bluegreen) dominates, while albite and zoisite occur in much smaller quantities. In 212 zoisite is so abundant, that we may speak of zoisite-amphibolite. Quartz is very rare; accessory are small titanite-grains ("ant eggs"). In all these rocks we observe a strong schistosity. The metamorphosis has taken place in the epizone and is typically regional. Sample 214 consists chiefly of oligoclase in large grains, which are slightly sericitized, just as the albite in the amphibole-bearing part of the thin-section. It also contains some chlorite. In connection with the Temblas-, Merak- and Karimon-samples we may conclude, that this is an altered plagioclase-vein, strongly squeezed by dynamic forces. The amphibolite is considered by us as a metamorphosed gabbro, just in contrary with the opinion of ROGGEVEEN, who speaks of para-schists.

*Quartzites (117, 119, 126, 138, 142, 143, 148, 149, 629, 656).*

These rocks, strongly varying in colour are all characterized by the domination of quartz. The quartzgrains join together without leaving interspace; they extinguish undulatory or they are cataclastic. Some of them are well-stratified (148, 149); they contain rare ore-grains, possibly magnetite. This mineral is abundant in 119, where it is concentrated in zones; a small quantity of limonite is present. Secondary limonite is more abundant in 138, macroscopically a lightbrown rock; epidote, muscovite and calcite are accessory. Two very dark, purplebrown samples in which the dark layers alternate with

<sup>1)</sup> The numbers of the samples correspond with those of the year-catalogue of 1941 of the Mineralogisch-Geologisch Instituut at Utrecht and with those of the map.

light ones (629, 656) contain much haematite, concentrated in the dark layers. In 656 limonite in concentric radiated aggregates occurs in fissures. Some tourmaline is present in small prisms. In 142 and 143 dark and light coloured layers also alternate: the dark ones consist of big, idiomorphic crystals of pneumatolytic tourmaline (pleochroism: yellowwhite-darkbrown) and some sericite (142), epidote and magnetite (143). Two samples are quartzitic sandstones (117, 126): the originally clastic elements are mostly quartz, for a small part, however, finegrained quartzite. Pneumatolytic minerals are tourmaline and sericite; limonite is secondary.

*Tourmaline-rocks (139, 144, 146, 147, 166).*

Except 166, they all have a limonitized habit. There is always much idiomorphic and cataclastic (except 166) tourmaline (pleochroism: lightbrown-darkbrown). In the sections the larger prisms are clearly orientated in one direction. In 166 the tourmaline appears in big idiomorphic prisms, together with some non-undulatory quartz. Quartz also occurs (one grain) in 146. Very much limonite was observed in the thin-sections, filling the fissures. In 139 and 146 some epidote-grains occur. Magnetite appears in 146 and 147, haematite in 139 and 147. All the rocks are compact. The origin is always pneumatolytic.

*Sericite-quartzites (703, 704, 705).*

The samples 703 and 704 are finegrained with some big quartzgrains; in 705 we find a sericitized and an unaltered part. Microscopically we observe strongly cataclastic quartz, originally big round quartzgrains (quartz-sand), which are deformed cataclastically to ovaloids or totally crushed. Streaks of limonite surround the former sandgrains; sericite-strings appear between them and are of pneumatolytic origin, just as the non-cataclastic tourmaline, which has a pleochroism: lightgreen-bluegreen and occurs in small prisms. In 703 and 704 leucoxene has been observed; in 705 much haematite. In this last sample there also occurs a part without sericite, which proves, that the original rock is a pure, strongly cataclastic quartzite. After stress, these rocks have been pneumatolysed.

*Micagreisens (162, 163, 164, 167, 169).*

Limonitized rocks, mostly schistose, often with tourmaline. Very much muscovite — often bent — is present in big aggregates. Much clear, undulatory quartz often occurs in layers. In all the samples we observe tourmaline, which is abundant in 167 and 179. Of pneumatolytic origin are also polysynthetically twinned ("calcite-like") tinstone crystals, which appear in big grains in 179. All sections show much limonite, bordering on the muscovite. Epidote (162—164, 179) and ore (probably magnetite) are accessory. In 162 we observe a special tourmaline-zone, in 164 a quartzvein. We do not know the genesis of these rocks: weathered, pneumatolytic sediments or pneumatolytic altered orthorocks. All the samples have been collected in the Kollong Sg. Limau.

*Mica-rocks (151, 156, 157).*

These rocks are closely connected with the micagreisens. Large muscovite in bent crystals is predominant. Besides, much limonite (156, 157) or tourmaline (151), depending from the degree of pneumatolysis. Always some magnetite has been found.

*Limonite-rocks (112, 114, 115, 116, 120, 122, 128, 129, 133, 134, 137, 140, 141, 145, 150, 153, 154, 159, 175, 176, 209, 210).*

They mainly contain limonite. Besides we observe magnetite? (128, 140, 141, 153, 154, 175, 176), haematite (114, 116, 120, 122, 129, 137, 150, 154, 209), quartz (150, 175, 210; in 145 and 154 a fine grained mass is probably quartz) and sometimes kaolin (112, 120, 128, 210). Hydrargillite, common in fissures of 115, 120, 122, 128, 129, 133, 134, 137, 140, 145, 150, 154, 175) is secondary. Calcite (122, 175) and tourmaline (145, 150, 175), which



is always pleochroitic: lightgray-bluegray may be present. Accessory is an epidote-grain in 175. The limonite has been often deposited in fissures, then having a concretionary structure. The texture of the samples is often compact (112, 114, 115, 116, 122, 128, 129, 133, 134, 140, 149, 175), sometimes however porous (the other samples). The tourmaline indicates pneumatolytic influence; the mineral is only found in the samples from the contact in the Bt. Djerat and from the Kollong Sg. Limau. The hydrargillite-bearing rocks pass into the hydrargillite-rocks, the tourmaline-bearing ones into the tourmaline-rocks. Closely related to the limonite-rocks is an iron-ore concretion from Parit (123), which is strongly weathered.

*Kaolin-limonite-rocks (152, 155).*

They are closely related to the limonite-rocks and contain moreover kaolin, which is abundant in 155. Small prisms of tourmaline indicate pneumatolytic influence.

*Hydrargillite-rocks (113, 121, 124, 127, 130, 131, 132, 136).*

Hydrargillite dominates in these samples; it has partly been deposited in fissures and then shows beautiful twin-lamellation. Besides, a varying quantity of limonite occurs, often in fissures. Tourmaline (in the contact-zone of the granite-aplite of Parit, 121, 124) some epidote (113, 124) and ore (124, 130) are observed. The structure of the samples is mostly porous, sometimes a little compact and often schistose.

*Granites (194, 199, 200, 202, 618—621, 625—628, 630—632, 652—655).*

Coarse grained rocks, always containing orthoclase, microcline and their perthites with albite or albite-oligoclase. Independent albite crystals also occur, they are always sericitized and sometimes zoisitized (200, 625). Big, clear, mostly undulatory or cataclastic quartzgrains abundantly (in 200 scarcely) occur in the thin sections. In all the samples muscovite and biotite appear, the latter with pleochroism: lightbrown-darkbrown and often with pleochroitic haloes around zircon (not observed in 620, 628, 630, 653) and sagenite-texture of rutile-needles (202, 619, 625, 626). Often the biotite is altered into chlorite. Muscovite is absent in 621, 625, 631, 655; both micas are absent in 200 where the dark components are represented by green hornblende. Pneumatolytic minerals are tourmaline (not in 194, 200, 619, 626, 654, 655), topaz (not in 200, 625, 626, 654), fluorite (194, 618, 619, 632, 652—655) and sericite (not in 200). Accessories are epidote (not in 628, 630, 655), apatite (not in 194, 202, 620, 626, 630, 632, 652, 653), ore (not in 628, 630), garnet (628, 630, 653), leucoxene (627, 630) or titanite (200) and often secondary limonite. In 200 coarse flakes of chlorite occur in the plagioclase. Cataclastic influence is often observed, very strong in 618, in which even the feldspars are crushed. A pronounced direction is nowhere observed. The texture is always holocrystalline, allotriomorphic to hypidiomorphic granular.

*Granite-aplites, a). From Parit (125) and Toelang (697—702).*

Finegrained rocks, light coloured (yellow or gray) with dark spots. They all contain much orthoclase, the samples of Toelang moreover microcline and perthitic intergrowth of these two with plagioclase. In 697 some myrmekite. Much, in 125 few, albite-oligoclase, which is strongly sericitized and in 125 also chloritized. The feldspars are broken by cataclasis, the clear quartz is broken and crushed. The biotite has been found in rare small crystals and is altered into chlorite. 700 and 702 contain zircongains; when they lie in the biotite they are surrounded by pleochroitic haloes. Fluorite appears in 697, 698, 700 and 701, thus in most of the Toelang-samples, but not in that of Parit. Neither topaz nor tourmaline has been found, the pneumatolysis therefore has not been powerful. Accessories are epidote (697—702), some ore (125, 697), and leucoxene (698—700). The texture always is holocrystalline, allotriomorphic-fine-granular. A pronounced direction has not been observed.



b) *From Koendoer (196, 197, 622—624).*

They are much more fine-grained than the Koendoer-granite; 196 is the only coarse-grained sample. Always much orthoclase and micropertthite; in 623 moreover some microcline. Besides we observe albite or albite-oligoclase, clear, undulatory or cataclastic quartz, which was originally interlocked. In 196 quite chloritized biotite appears in thin streaks. Always much tourmaline with pleochroism yellow-brown; besides some garnet (196, 624). Pneumatolytic minerals are also sericite (not in 623) and topaz (196); no fluorite. Accessory are epidote (not in 623), ore (196) and chlorite (196). Texture always holocrystalline, allotriomorphic-granular. No pronounced direction occurs. The samples 622 and 623 are aplite-veins in granite.

*Granite-porphry (118).*

Fine-grained, yellow-gray rock with large quartz- and felsparphenocrists. Microscopically we observe many, large, corroded quartzphenocrists; besides, phenocrists of kaolinized orthoclase and sericitized albite are present. Chlorite and haematite also occur in the felspar. Nearly always the felspar is twinned. The groundmass contains the same minerals: quartz, orthoclase, albite, sericite, chlorite and haematite; accessory is epidote. The texture of the groundmass is rather porous, microgranitic and relatively coarsegrained. Texture of the rock holocrystalline-porphyrific.

*Granite-pegmatites (195, 198, 201, 203, 204, 206, 630).*

Always coarsegrained rocks which contain mainly orthoclase and micropertthite, sometimes also much microcline-micropertthite. The strongly twinned plagioclase is albite. Many large quartzgrains, mostly undulatory and cataclastic (not in 195 and 204). Always sericite (not in 206), tourmaline (not in 204) and topaz (not in 195 and 203). Garnet in 195 and 630. Accessories are epidote (198, 201, 206) and ore (203, 630). In 195 limonite appears between the grains, in 206 chlorite occurs. Always the texture is holocrystalline, allotriomorphic-very-coarsely-granular, with graphic intergrowth. No typical direction has been observed.

*Quartz-veins (pp. with Cassiterite and Wolframite) (135, 158, 160, 161, 165, 168—174, 177, 178, 205, 207, 208).*

They are mainly composed of clear, undulatory, sometimes cataclastic, coarsegrained quartz. Besides, one or more ores have been observed. 177 and 178 only consist of tinstone, but are probably closely connected with quartz-veins. Cassiterite also appears in 161, 168, 171; in 161 and 168 the second ore is wolframite. This mineral becomes abundant in 160, 161, 165, 168—170, 172, 174. Always small quantities of limonite have been observed. Tourmaline occurs in 158, 161, 165, 168, 170, 171, 173, 205; pleochroism: yellow-brown or blue-gray. In 161 and 165 a small quantity of muscovite has been found. Quartz is the only component of 135. In 205, the only sample collected in the centre of the granite area, nearly the only component is cataclastic quartz; besides we find some tourmaline. On Kenipaän a large quartzreef (its length is given by ROGGEVEEN: 700 m) exists. It was stated microscopically, that the samples 207 and 208 consist only of coarse-grained, clear, cataclastic quartz; it seems possible, that this reef is closely related with the granite-massif of Koendoer.

*Summary*

Probably the oldest rocks occur on Songkop; they are amphibolites with ortho-character. On Merak, Temblas and Tg. Malolo (Karimon) closely related rocks have been collected; the description of these samples will be published later-on by my colleagues VAN RAADSHOOVEN and SWART. According to ROGGEVEEN these rocks are pre-carboniferous.

At any case they are older than the sediments (quartzite, quartzitic sandstone, sericite-quartzite, limonite rocks, kaolin-limonite rocks, hydrargyllite rocks) of the Northern and Northeastern part of the area. These appear in a NW—SE directed region. Their distribution has been indicated on the added map. According to ROGGEVEEN their age may be triassic, because of their similarity with triassic, fossil-containing rocks on Malacca, Singapore and Lingga. It is very remarkable, that the triassic rocks have been so strongly lateritized, whereas the granite-samples in our collection do not show any lateritization. One might be tempted to suppose, that the lateritization is not a recent or subrecent process, but that it has been pre-granitic. We do not believe, that this supposition would be right. If the triassic rocks have been lateritized in pre-granitic time, they must have outcropped at that time, because lateritization takes place at or directly below the surface. The lateritic sediments then must have been buried under a thick cover of younger rocks, as the granitic magma has crystallized as a true abyssal rock, which must have taken place at a rather great depth in the earth's crust. Afterwards this hypothetic cover must have been removed without leaving any traces. In our opinion this supposition is too hypothetical to be permitted, only for the explanation of the lateritized trias at the side of the non-lateritized granite. We prefer to suppose, that the alteration was much easier in the sediments than in the coarsely crystalline granite. Moreover Mr. ROGGEVEEN of course has taken the best samples he could get from the granite and it is possible that at other localities this granite presents stronger alteration. We may add, that on the neighbouring island of Sumatra strong lateritization of different young sediments occurs frequently.

At any case the granite-massif of Koendoer is younger than the ?triassic sediments: at N Koendoer, Parit and Toelang clear metamorphism has been observed. The granite itself has contained much gas in its fluid stage, because tourmaline and topaz have been found at several points in the granite and at the contacts with the sediments of the Trias, while in the granite itself fluorite frequently occurs. In the sediments the tourmaline is absent in all samples which have been collected at large distance of the contact.

It is of interest that the ?triassic sediments, the abyssal rocks and the veinrocks show strong cataclasis whereas no signs of cataclasis can be observed in most of the tourmaline. This proves that the magma intruded during the period when orogenic forces were very active but that orogenic action had come generally to an end when the pneumatolytic tourmaline was formed. Only in some samples from the contact zone in N. Koendoer crushing of the tourmalines has been observed.

#### LITERATURE.

1. R. EVERWIJN, Verslag van een onderzoek naar tinerts op eenige eilanden behorende tot de residentie Riouw. Jaarboek van het Mijnwezen in Ned. Oost-Indië, 1872, Deel 2, pag. 73—123.
2. A. CHR. D. BOTHÉ, Het voorkomen van tinerts in den Riau Archipel en op de eilandengroep van Poelau Toedjoe (Anambas- en Natoena-eilanden). Verslagen en Mededeelingen van den Dienst van den Mijnbouw, No. 18, 1925.
3. ———, Geologische verkenningen in den Riouw-Lingga Archipel en de eilandengroep der Poelau Toedjoe (Anambas- en Natoena-eilanden). Jaarboek van het Mijnwezen in N. O. I., 1925. Verh. II, pag. 101—152 (printed in 1928).

**Palaeontology.** — *Old Tertiary Mollusca from Curaçao.* By C. O. VAN REGTEREN ALJENA. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

The Mollusca dealt with in this paper were collected by Dr. P. WAGENAAR HUMMELINCK on September 7th 1936 and belong to the collection of the Geological Institution of the University of Utrecht. They all derive from a marly limestone exposed at the steep N edge of the Seroe Mainchi (= Mainsjie), a hill immediately S of the St.-Joris bay, in the island of Curaçao (textfig. 1). The marly limestone is exposed at some 15 m below the top, which has an altitude of 43 m; it is covered by a thin layer of quaternary limestone, and, contrary to the latter, contains a considerable amount of quartz grains. Most of the casts had been loosened from the rock by desintegration and were found at a lower level on the talus. The present locality has been mentioned by HUMMELINCK (1940, p. 21) as ".....probably also an eocene marl in the S, forming the Seroe Mainsjie", but there are no previous records in literature.



Fig. 1.

I received a great number of fossils, mostly casts and impressions of Gastropods and Lamellibranchs for examination. The preservation of the greater part is rather bad, so that only few of them could be identified with some accuracy, and only very few with such accuracy that they give some hold for determining the age of the bed. The samples contain no Foraminifera; apart from the Mollusca there is only one badly preserved fragment of a coral.

The following Mollusca have been identified:

Gastropoda

*Architectonica* spec., 1 cast, and 1 fragment of a second specimen

*Ampullina* ? spec., 1 specimen

*Polinices* spec., 1 specimen

Lamellibranchia

*Arca* spec., 1 specimen

*Venericardia parinensis* OLSSON, 1 specimen

*Cardium* spec., 3 specimens

*Clementia* cf. *parinensis* OLSSON, 20 specimens

Tellinidae gen. spec., 1 cast

*Raetomya arbolensis falconensis* (RUTSCH), 2 specimens.

The presence of a *Venericardia* of the *planicosta* LAM. group and of the genus *Raetomya* at once makes it clear that these fossils are of lower palaeogene age. *Venericardia parinensis* has been found in the Salina, Pale Greda, and Parinas formations in Peru (OLSSON 1928), and in some localities in Trinidad presumably belonging to the upper palaeocene (RUTSCH 1936, pp. 174 seq.). According to RUTSCH (1936, p. 180) the lower palaeogene formations distinguished in Peru by OLSSON can be paralleled with the divisions of the conformable period in E North America and Europe as appears from the following stratigraphical table.

Peru	E North America		Europe			
Saman	EOCENE	Jackson	EOCENE	Bartonien s. l.	Bartonien s. str. (= Wemmeliën, Ludien)	
Talara				Lédien		
Restin		Claiborne		Lutétien		
Parinas				Yprésien		
Pale Greda		WILCOX		PALAEOCENE	Landénien	
Salina						
Negritos					Midway	Montien

In Peru, where the molluscan fauna of the whole palaeocene and eocene series has been investigated, *Venericardia parinensis* does not occur in older strata than the Salina, nor in younger beds than the Parinas formation. Therefore it is probable that this species really did not live longer than from middle palaeocene to lower eocene. Consequently the old tertiary deposit of Seroe Mainchi must be younger than lower palaeocene and older than middle eocene. A lower eocene age is the most likely, as the specimen of *Venericardia parinensis* agrees with WOODS' form C, which is characteristic of the Parinas formation.

*Raetomya arbolensis falconensis* has been described from some localities in the provinces of Falcón and Lara in Venezuela, and RUTSCH (in SEITZ & RUTSCH 1930, pp. 600—601) thinks it probable that it derives from eocene beds, as the typical *R. arbolensis arbolensis* (WOODS) occurs in Peru from the Parinas up to the Saman formation, that is in those beds which have been paralleled with the European eocene.

*Clementia parinensis* has only been recorded from the Parinas and Restin formations of Peru, consequently from lower and middle eocene beds.

We saw that the specimen of *Venericardia parinensis* has probably a lower eocene age, and there is no reason not to assume a lower eocene age for the other Mollusca also, but the material is too scanty for us to be absolutely sure about the age of the Seroe Mainchi deposit.

Up to the present rocks of palaeogene age had been found in Curaçao in one place only. They were described as the Seroe di Cueba series by MOLENGRAAFF (1929, p. 25).

The Seroe di Cueba <sup>1)</sup> is situated at a distance of some 40 km NW of the Seroe Mainchi (textfig. 1). MOLENGRAAFF (l.c.) and RUTTEN & VERMUNT (1932) consider the Seroe di Cueba series to be of upper eocene age because of the Foraminifera and Echinoidea it contains and because of the occurrence of *Tubulostium leptostoma clymenoides* (GUPPY) (cf. RUTSCH 1939, p. 240). Casts of Mollusca were collected by MOLENGRAAFF in the basal limestone of this series, but they were too bad for identification. I sought in vain for these casts in the MOLENGRAAFF collection, which is kept in the Geological Institution at Delft. The curator, Dr. P. KRUIZINGA, kindly informed me that they have probably been thrown away, because of their bad state of preservation. It is, however, improbable that any relation exists between these two palaeogene molluscan faunas of Curaçao, as the Seroe di Cueba series must be much younger than the Seroe Mainchi beds.

The following remarks on some of the examined specimens may be added here.

***Venericardia parinensis* OLSSON**

Plate, figures 1a—d

- 1928 *Venericardia planicosta* var. *parinensis*, n. var. — OLSSON, Bull. Amer. Paleont., 14, n. 52, p. 26, pl. 5 fig. 3.  
 1939 *Venericardia* (*Venericor*) *parinensis* OLSSON. — GARDNER & BOWLES, U.S. Geol. Survey Prof. Paper 189F, p. 183, pl. 40 fig. 3 (with full synonymy).

There is one damaged specimen of this species. Its dimensions are (after careful reconstruction): height 86 mm, length 91 mm, diameter 60 mm. In the middle of the shell the ribs fade always at a distance of about  $\frac{1}{3}$  of the height of the shell from the umbo; in the anterior and posterior parts they can be followed up farther in the direction of the ventral margin. They number 17 in front of the umbonal slope and probably 24 in total. The right and left valves could not be separated from each other, therefore I sawed the fossil into two halves, exactly in the medial plane, in order to be able to examine the features of the hinge. This appeared to be very heavy. The medial cardinal of the right valve agrees rather well with the diagram given for this species by GARDNER & BOWLES (1939, p. 132), although this must have been taken from a larger specimen. The specimen agrees with WOODS' form C (WOODS 1922, pl. 3 fig. 3) from the Parinas formation, in which the umbos are prominent and much curved, and the sculpture is rapidly fading away, and not with his form B (Ibidem, fig. 2) occurring in older beds.

***Clementia* cf. *parinensis* OLSSON**

Plate, figures 2a—7b

- 1928 *Clementia* (*Clementia*) *parinensis* n. sp. — OLSSON, Bull. Amer. Paleont., 14, n. 52, p. 35, pl. 7 figs. 3, 4.

There are 20 specimens of what is evidently one and the same species of *Clementia*; they are casts sometimes partly covered by fragments of the thin shell. As to the dimensions and habitus they much resemble *Cl. parinensis* from the Parinas and Restin formations of Peru, but the concentric sculpture does not fade away so conspicuously towards the ventral margin as in that species, and the posterior extremity is slightly less truncate. These characters are, however, variable in my material; there are specimens which differ but slightly from *Cl. parinensis* as figured by OLSSON. The dimensions of

<sup>1)</sup> Mr. HUMMELINCK pointed out to me that this hill should properly speaking bear the name of Seroe Bartool, as the real Seroe di Cueba is a hill situated more to the N at the coast. It is to be regretted that this mistake is made as well on topographical maps as in the geological literature (cf. West-Indische Gids, 21, p. 89, 1939).

some of my specimens can be compared with those given by OLSSON with the aid of the following table.

	Length	Height	Diameter
<i>Clementia</i> cf. <i>parinensis</i> , Curaçao	28 mm	24 mm	13 mm
	27 mm	21 mm	13.5 mm
	26 mm	21 mm	13 mm
	23 mm	21 mm	13.5 mm
<i>Clementia parinensis</i> , Peru	27.5 mm	22.75 mm	14.5 mm

***Raetomya arbolensis falconensis* (RUTSCH)**

1930 *Mya* (*Raetomya*) *schweinfurthi falconensis* nov. var. — RUTSCH, Ecl. Geol. Helv., 23, p. 597, pl. 16 figs. 2—5.

As the two specimens found by Mr. HUMMELINCK are damaged, their dimensions had to be ascertained after careful reconstruction. The Geological Institution of the University of Amsterdam possesses two more specimens labelled "Curaçao"; it is possible that these shells derive from the same locality. They are nearly entire, and their dimensions could consequently be ascertained without doubt.

Though I have not been able to examine specimens of *Raetomya* from other localities, I got the impression from the study of the literature, that the African forms designed to this genus differ more from the South American subspecies described by WOODS and RUTSCH than the latter differ from each other (cf. SEITZ & RUTSCH 1930 and the literature cited there). Therefore it seems rational to consider the two South American forms specifically distinct from the African ones.

The dimensions of my specimens and those of the subspecies known from Peru and Venezuela respectively have been compiled in the following table. It appears that my specimens agree very well with the Venezuelan subspecies, especially as to the relation between diameter and length.

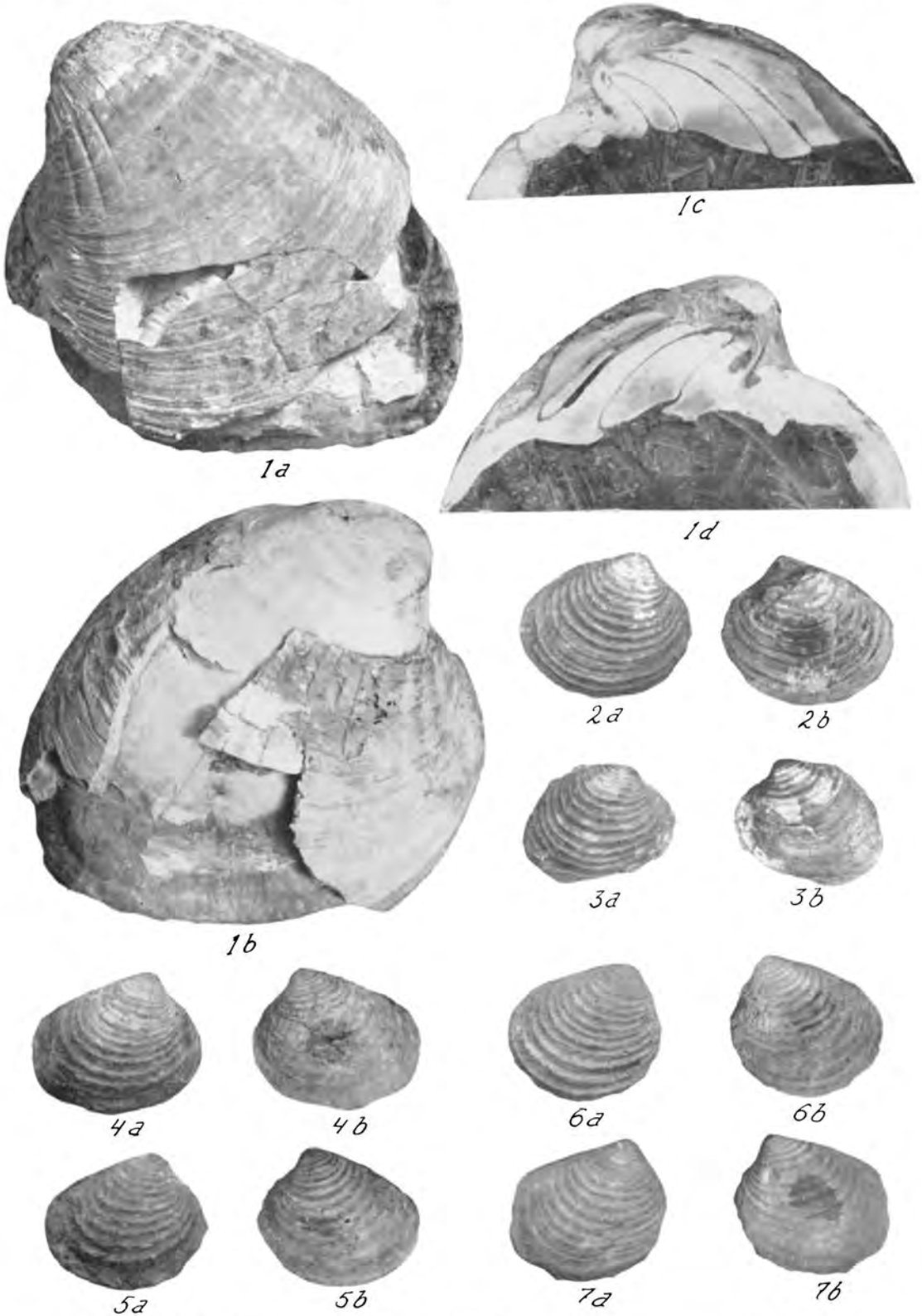
	Length	Height	Diameter	$\frac{100 H}{L}$	$\frac{100 D}{L}$
<i>R. arbolensis falconensis</i>					
1) Seroe Mainchi, Curaçao	} 51 mm	} 34 mm	} 27 mm	} 61	} 53
(Geol. Inst. Utrecht)					
2) Curaçao	} 41 mm	} 29 mm	} 25 mm	} 71	} 61
(Geol. Inst., Amsterdam)					
3) Venezuela (SEITZ & RUTSCH	} 49 mm	} 36 mm	} 26 mm	} 73	} 53
1930, p. 597)					
	} 57 mm	} 42 mm	} 29 mm	} 74	} 51
<i>R. arbolensis arbolensis</i>					
4) Peru (SEITZ & RUTSCH	} 62 mm	} 36 mm	} 19 mm	} 58	} 31
1930, p. 597)					
	} 59 mm	} 36 mm	} 22 mm	} 51	} 37

LITERATURE.

- GARDNER, J. & E. BOWLES, 1939, The *Venericardia planicosta* group in the Gulf province. U.S. Geol. Survey Prof. Paper 189F, pp. 143—215, textfig. 27, pls. 29—46, chart 1—3.
- HUMMELINCK, P. W., 1940, General information. Stud. Fauna Curaçao, etc., 1 (= Thesis Utrecht), pp. 1—42, 19 figs., 5 tables, pls. 1—8.



- MOLENGRAAFF, G. J. H., 1929, Geologie en geohydrologie van het eiland Curaçao. Thesis Delft, 126 pp., maps, pls.
- OLSSON, A. A., 1928, Contributions to the tertiary paleontology of Northern Peru. Part 1. Eocene Mollusca and Brachiopoda. Bull. Amer. Paleont., **14**, n. 52, 154 pp., 26 pls.
- RUTSCH, R., 1936, Beiträge zur Kenntnis tropisch-amerikanischer Tertiärmollusken. IV. Die stratigraphische Bedeutung der *Venericardia planicosta* und ihrer Verwandten. Ecl. Geol. Helv., **29**, pp. 151—186, 1 textfig., pl. 16.
- RUTSCH, R., 1939, Die Gattung *Tubulostium* im Eocaen der Antillen. Ecl. Geol. Helv., **32**, pp. 231—244, 1 textfig., pl. 12.
- RUTTEN, M. G. & L. W. J. VERMUNT, 1932, The Seroe di Cueba limestone from Curaçao. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, **35**, 227—240, pls. 1—3.
- SEITZ, O. & R. RUTSCH, 1930, Die Gattung *Amotapus* OLSSON, eine echte alttertiäre *Mya* (*Raetomya*) LINNÉ. Ecl. Geol. Helv., **23**, pp. 594—604, 2 textfigs., pl. 16.
- WOODS, H., 1922, Mollusca from the eocene and miocene deposits of Peru, in: T. O. BOSWORTH, Geology of the tertiary and quaternary periods in the North-West part of Peru. MACMILLAN & Co., London, pp. 51—113, pls. 1—17.
-



Figures 1a—d. *Vencricardia parinensis* OLSSON, Seroe Mainchi, Curaçao. a left valve, b right valve, c and d medial section through the hinge (diminished, dimensions see text).  
 Figures 2a—7b. *Clementia cf. parinensis* OLSSON, Seroe Mainchi, Curaçao. a right valves, b left valves (natural size).

**Comparative Physiology.** — *Ueber den Tonus des Schneckenfusses (Helix pomatia L.).*  
II. *Die Tonuslösung.* (Vorläufige Mitteilung).<sup>1)</sup> Von N. POSTMA. (Aus dem  
Institut für vergleichende Physiologie der Universität zu Utrecht.) (Communicated  
by Prof. H. J. JORDAN.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

#### A. Einleitung.

In der ersten Mitteilung (15) haben wir die, den Tonus erhöhende Funktion der Pedalganglien eingehender kennen gelernt: sie äussert sich in bestimmten Gesetzmässigkeiten bezüglich des **Niveau der Pedalkonstanz**. Neu war das Studium des Einflusses von *Belastungsgrösse* und von *Hydratation* und *Dehydratation* hierauf. Letztere hat eine Steigerung des Niveau zur Folge; reichliche Wasseraufnahme ändert das Niveau dahingegen nicht. Niedrigere Belastung fördert die Konstanzzeugung; höhere Belastung erniedrigt das Konstanzniveau der Wiederholungskurven.

Wärme, und zwar erst oberhalb 22° C erniedrigt das Niveau; Kälte ändert es nicht. Durch schwache Kokainisierung der Pedalganglien wird das Konstanzniveau herabgedrückt; Kochsalzlösung auf die Ganglien aufgetragen, steigert das Niveau. Diese Versuchsbedingungen wurden nunmehr, im Gegensatz zu früheren Versuchen, vor Applikation der ersten Belastung verwirklicht. Die so erhaltenen Resultate bestätigen im Grossen und Ganzen die Befunde von JORDAN und Mitarbeitern (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) über den Einfluss von Mehrbelastung, Wärme, schwache Kokainisierung und Aktivierung der Ganglien durch Kochsalz.

Die Pedalganglien greifen aber nicht nur durch Steigerung des Tonus ein, die Regulierung erfordert auch eine Abänderung des peripheren Tonus in entgegengesetztem Sinne: also **Verminderung des Tonus**. Diese ist schon ohne Belastung des Fusses zu beobachten (vgl. 1 Abb. 2.a). Von zwei Vergleichspräparaten liegt das noch mit Pedalganglien versehene flach und breit der Wachplatte auf: d.h. der pedalonische Fuss breitet sich durch das eigene Gewicht etwas auf der Unterlage aus. Er zeigt geringeren Dehnungswiderstand, hat einen niedrigeren *Tonusspiegel*, bei ähnlicher Länge, d.h. gleichem *Tonusniveau* (vgl. 15 S. 1154) als das ganglienlose Objekt, das hoch und schmal geworden ist. DE MAREES VAN SWINDEREN (16) hat gefunden, dass diese Tonuszunahme nach Exstirpation der Pedalganglien sich in etwa 15 min vollzieht. Diese Ganglien erniedrigen mithin normalerweise, und zwar ohne irgendwelchen Reiz den Tonusspiegel, welchen die Peripherie an sich zeigen würde: *die primäre Funktion dieser Ganglien ist Tonuslösung*, wie JORDAN auch auf Grund seiner Erfahrungen an *Aplysia* (3) dies stets betont hat (4, S. 223).

Werden solche Fusspaare durch gleich grosse Last gedehnt, so zeigt auch das Mechanogramm des pedalonischen Objektes, auf jeden Fall im Anfang, eine grössere Dehnungsgeschwindigkeit als das Myogramm des anderen Fusses. Bei Anwendung der auxotonischen Dehnungsmethodik behauptet sich der Vorsprung, vorausgesetzt dass man von geringer Belastung ausgeht. War die Anfangslast relativ hoch, so folgt nach einer steilen Dehnungsstrecke der s.g. Umschlag: der Dehnungswiderstand wächst schnell an und die Dehnungskurven beider Präparate schneiden einander, weil der pedalonische Fuss auf höherem Niveau als der Fuss ohne Ganglien die Konstanz erreicht (JORDAN, 4, S. 226).

Bei Anwendung der isotonischen Dehnungsmethode tritt der „Umschlag“ immer ein

<sup>1)</sup> Mit Unterstützung der Niederl. Regierung aus den Einkünften der „Zomerpostzegels“.

und man erhält in 60 % der Versuche eine Ueberkreuzung der Kurven (15 Abb. 1). Der von JORDAN bei der auxotonischen Dehnung gefundene Einfluss der Belastungsgrösse (Niveaux der Muskel- und Pedalkonstanz gegenüber dem Konstanzniveau beim Fuss ohne Ganglien) ist wichtiger als sich damals erwarten liess. Das hat sich nicht nur bei den Versuchen über das Niveau der Pedalkonstanz gezeigt, sondern auch in ausgesprochener Weise bei der Untersuchung der tonuslösenden Funktion.

JORDAN führte bei seinen Versuchen die Abänderung der Versuchsbedingungen erst nach Eintritt der Pedalkonstanz aus, wenn also die erste steile Dehnungsstrecke vor dem Umschlag vorüber war; eine Beeinflussung dieser Strecke wurde daher nicht untersucht. Durch höhere Last, Wärme und Kokain wurde während Konstanz aufs neue Dehnung ausgelöst; Kochsalz hatte Verkürzung zur Folge. *Ich habe nun den Einfluss der betreffenden Eingriffe auf die erste Dehnungsstrecke verfolgt, indem ich die Versuchsbedingungen schon vor Applikation der ersten Belastung einwirken liess.*

Man kann derart feststellen, ob die Tonuslösung sich bei der Belastung des Fusses zu Beginn in einer längeren und sehr steilen Dehnungsstrecke äussert, welche mit einem scharfen Umschlag in Konstanz übergeht, oder ob der Dehnungswiderstand sofort ziemlich hoch ist und die Konstanz relativ allmählich eintritt (Abb. 3 Kurve III). Die so erhaltenen Ergebnisse muss man statistisch bearbeiten: Die Reaktionstypen bis zum Umschlag werden in drei Klassen eingeteilt, je nachdem die sehr steile Strecke deutlich oder fraglich ist, oder aber gänzlich fehlt. Ohne besondere Behandlung der Tiere einer Versuchsreihe von 33 Objekten wurde die Zugehörigkeit zu den drei Klassen zu etwa 61, 18 und 21 % festgestellt. Das entsprach offenbar für dieses Material der normalen Wahrscheinlichkeit. Ich habe daraufhin verfolgt, wie diese Prozentage sich modifiziert wenn die Versuchsbedingungen abgeändert werden, sei es während der Dehnung (Temperatur, Aktivitätszustand der Ganglien) oder nach entsprechender Vorbehandlung der Versuchstiere (z.B. ob sie trocken aufbewahrt worden waren oder ob sie reichlich Wasser hatten aufnehmen können).

Zweitens habe ich den Tonus durch Reizung zerstört. Es war nämlich möglich, durch mechanische Reizung von Nerven oder durch mechanische, oder vielleicht auch chemische Reizung der Pedalganglien die Konstanz zu durchbrechen. Oefters wurde der Durchbruch durch eine kleinere oder grössere Verkürzung eingeleitet.

## B. Ergebnisse.

### 1. Ueber reflektorische Lösung der Pedalkonstanz.

#### 1. Einfluss der Belastung.

Der beim Fuss mit Pedalganglien schon im Moment der Belastung bestehende niedrigere Tonusspiegel hat eine typisch steile Dehnungsstrecke zur Folge. Dieser Einfluss der primären tonuslösenden Funktion der Ganglien wird nun weiterhin durch relativ hohe Lasten verstärkt:

Versuchsserien PK-R-L · A, ; B, · C und -L/G: Vor Auftritt der Muskelkonstanz (= Pedalkonstanz bei niederer Last, hier 5 g) fand ich nur in etwa 8 % ( $1/13$ ) der Fälle Tonuslösung, während bei Zentralkonstanz (höhere Belastung, hier 20 g) eine Häufigkeit der sehr steilen Strecke von 77 % ( $23/34$ ) gefunden wurde; eine Belastung mit 10 g nahm eine Zwischenstellung ein: 7 von 12 Objekten zeigten sehr ausgesprochene Tonuslösung. Dass es sich nicht um einen Unterschied im Verhältnis zwischen äusserer Reibung und Last handelt, beweist die zunehmende Abänderung des Niveau der Muskel- und der Zentralkonstanz bei, nach tonischer Verkürzung, wiederholter Dehnung (vgl. 14 u. 15). Niedere Belastung steigert das Niveau in den aufeinanderfolgenden Dehnungsversuchen, bei grösserer Last wird es erniedrigt. Die Reibung in der Dehnungs- und Registrierapparatur bleibt jedoch während der aufeinander folgenden Wiederholungskurven konstant, während bei niederer Last die Niveauerhöhung, bei höherer Last die Niveauperminderung von Kurve zu Kurve zunimmt, sodass diese progressiven Aenderungen des

*Niveau als Verschiedenheit der Reaktion des pedaltischen Präparates auf diese Lasten zu deuten sind.*

In 8 von 13 Versuchen über Muskelkonstanz zeigten die Myogramme, verglichen mit Dehnungskurven von ganglienlosen Füßen (Netzkonstanz) in der anfänglichen steilen Strecke nur einen, durch den niederen Ruhetonus verursachten Vorsprung; der pedaltische Fuss lässt sich *passiv* schneller dehnen als der ganglienlose, weil er vor der Belastung einen niederen Tonuspiegel hatte. Bei relativ hohen Lasten kommt dazu noch eine, durch die Dehnung ausgelöste Tonusverminderung, welche die typische sehr steile und längere Anfangsstrecke zur Folge hat. Diese Aufhebung von Tonus durch die Ganglien bekommt man gleichfalls sehr deutlich zu sehen, wenn während Muskel- oder „Mittelkonstanz“ die Last hoch gemacht wird (Abb. 1, Kurve 2). Eine ähnliche Reaktion zeigte der Helixfuss im JORDANSchen „Halbtierversuch“ (2, 3; 5, S. 591; 15).

In Bezug auf die *Tonuslösung* während der ersten Dehnungsstrecke beträgt sich der Fuss also auch bei der ersten Dehnungskurve verschieden, je nachdem seine Dehnung mit Zentral- oder Muskelkonstanz endet.

## 2. Einfluss von Kälte und Wärme, von Hydratation und vom Aktivitätszustand der Pedalganglien auf die erste Strecke der Dehnungskurve.

In der Einleitung haben wir beschrieben, wie die, in der Ueberschrift dieses Abschnittes genannten Faktoren das Niveau der Pedalkonstanz beeinflussen. Das Resultat einer statistische Bearbeitung der Ergebnisse in Bezug auf die steile Strecke der entsprechenden Versuchsserien sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	Steile Strecke		
	Deutlich	Fraglich	Fehlend
Normal (15°)	61 0/0	18 0/0	21 0/0
Temperatur 2° C.	20	20	60
7	40	20	40
12	60	20	20
bis 27	60	20	20
32	100	0	0
Dehydratation	29	29	42
Sättigung mit Wasser	56	33	11
Kokain	0	43	57
Kochsalzlösung	50	50	0
Kochsalzkristall	87	13	0

Es zeigt sich also, dass, im Gegensatz zur einseitigen Wirkung durch Wärme auf das Niveau der Pedalkonstanz, die Tonuslösung auch durch Kälte beeinflusst wird, unterhalb 12° C wird mit zunehmender Kühlung die steile Strecke stets mehr unterdrückt; durch Wärme wird sie gefördert, wenn auch erst oberhalb 27° C.

Ebenso wie in Bezug auf das Niveau der Pedalkonstanz, hat nur Dehydratation Einfluss auf die Tonuslösung: die steile Strecke tritt weniger häufig auf; Sättigung mit Wasser ändert dahingegen die normale relative Häufigkeit des Auftretens steiler Anfangsstrecken nicht überzeugend.

Schwache Kokainisierung dämpft die tonuslösende Funktion der Pedalganglien: eine deutliche steile Strecke fehlt, sie wird von einer Häufigkeit von 61 % auf 0 % herabgedrückt. Kochsalz, als Kristall appliziert, fördert die Tonuslösung stärker als Kochsalzlösung (15 %). Diesen Unterschied werden wir bei der zusammenfassenden Diskussion eingehender besprechen.

## II. Ueber Lösung der Pedalkonstanz durch Reizung.

Bei den nunmehr zu beschreibenden Versuchen machten wir Gebrauch von der durch uns (POSTMA, 14; MAAS, 9) angegebenen Technik der Wiederholungskurven. Es gelingt dann jeweils nach ganz widerstandsloser Wiederverkürzung recht gut reproduzierbare Kurven zu erhalten, d.h. die Wiederholungskurve zeigt dieselbe Gestalt und Gesetzmässigkeiten, wie die ursprüngliche, erste Dehnungskurve.

### 1. Indirekte Reizung der Pedalganglien durch den *N. pallialis*.

Bei den Versuchen über die Pedalkonstanz waren bisweilen nach Abschneidung des Eingeweidetasches nicht nur die Ganglien und die *Nn. pedales* geschont worden, sondern gleichfalls die *Nn. palliales*. Wurde nun während Pedalkonstanz einer der *Nn. palliales* mit kurzem Schlag einer scharfen Schere durchgeschnitten, so gelang es öfters aufs Neue eine schnelle Dehnung auszulösen (Abb. 1, Wiederholungskurve 3, bei R.). In diesen

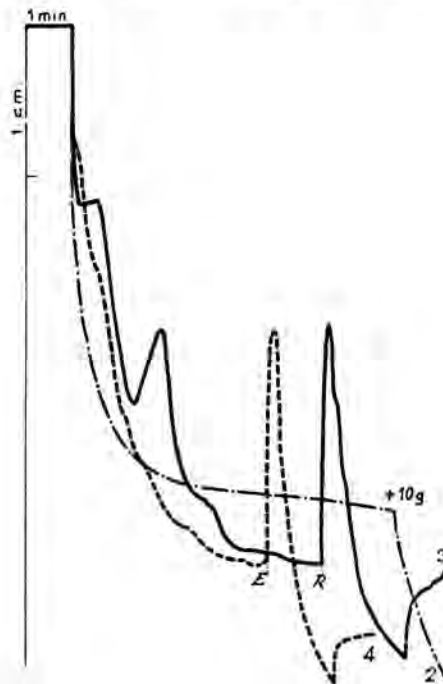


Abb. 1. Wiederholungskurven von einem Schneckenfusse mit intakten Pedalganglien. Objekt *PK-W-MR. FVI, 21-II-'34*. Gewicht des Tieres 18 g, Last 20 g. Ordinaten: effektive Längenänderung des Fusses (Ordinatenschreiber nach N. POSTMA, 1933); Abszissen: die Zeit. Kurve 2: Steile Strecke und Pedalkonstanz nach kurzem „Umschlag“; Erhöhung der Belastung auf 30 g hat Tonusfall zur Folge; 3: Während der Pedalkonstanz wird (bei R) einer der *Nn. palliales* mit kurzem Scherenschlag mechanisch gereizt; es folgt Tonusfall nach schneller Kontraktion. 4: Im Zustand der Pedalkonstanz werden (bei E) die Ganglien extirpiert; die Reaktion entspricht vollkommen der in Kurve 3 wiedergegebenen.

Fällen wurde die Pedalkonstanz durch einen solchen mechanischen Reiz auf genau die gleiche Weise gelöst, wie durch Exstirpation der Ganglien (Wiederholungskurve 4, bei E.). Die erstgenannte Art der Reizung (via *N. pallialis*) zerstörte die Konstanz nicht unwiederrufflich, denn in Kurve 4 erzeugt das Präparat aufs neue Konstanz und zwar



gleichfalls bei Spannungslänge. Dem Durchbruch der Konstanz geht eine Kontraktion voran. Diese Kontraktion nach Pallialisreizung entspricht durchaus derjenigen nach Gangliexstirpation. Solche Verkürzungen können aber in beiden Fällen viel geringer sein als in den abgebildeten Kurven.

## 2. Direkte Erregung der Pedalganglien durch Auflegen eines Kochsalzkristalls.

Auf eine derartige Tonuslösung durch Reiz deuteten einige Resultate bei den in Gemeinschaft mit Fr. C. E. SLUITER unternommenen Versuchen über die Pedalkonstanz der Wiederholungskurven nach Massgabe des Aktivitätszustandes der Ganglien (7, 8). Verglichen wurden Normalkurven (ursprüngliche Kurve und eine oder mehrere der Wiederholungskurven) mit Wiederholungskurven, wenn vor Applikation der Belastung ein Kochsalzkristall mit einer Pinzette vorsichtig auf die Pedalganglien gebracht worden war. Abb. 2A gibt als Normalkurve Wiederholungskurve 2 wieder; nach widerstandsloser tonischer Verkürzung wird ein Kristall appliziert und 5 min später die Bremse des Dehnungsapparates geöffnet. Die Restlast des Registrierhebels, welche zur Streckung des Fadens dient, dehnt den Fuss sofort um etwa 1 cm ( $a'-b'$ ); dann wird die Dehnungslast angehängt und es folgt die Strecke  $a''-b''$ . Die ganze steile Strecke bis  $b''$  ist länger als in den Vorversuchen ohne Kochsalz; auf sie folgt ein „Umschlag“, welcher nicht zur Konstanz, sondern zu einem Minimum und sodann zu einer tonischen Verkürzung ( $c-d$ ) führt; diese macht neuerlicher Dehnung Platz. Statt Konstanz zeigt sich in dieser Wiederholungskurve dynamischer Tonus. Die ihm entsprechende Kurve sinkt unterhalb des Niveau der Pedalkonstanz um dann über das Niveau des peripheren Tonus (Wiederholungskurve 5) hinaus zu steigen.

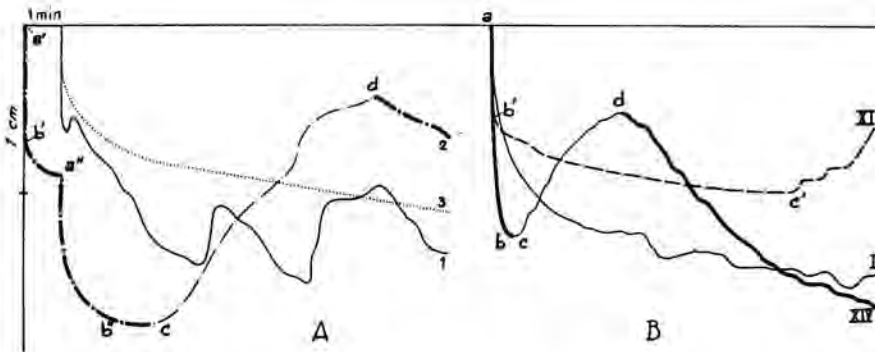


Abb. 2. Dehnungskurven von Füßen, im Zusammenhang mit den Pedalganglien. Versuche mit Applikation von Kochsalz auf die Ganglien.

A. Wiederholungskurven. Objekt PK-W-KD. A V, 9-II-'38. Gewicht des Tieres 18 g, Last 10 g. 1. Vorversuch: Normalkurve ohne Kochsalz. 2. Nach Applikation eines Kochsalzkristalles: auffallende Erniedrigung des Tonuspiegels und Dynamik (tonische Kontraktion). 3. Nach Exstirpation der Pedalganglien. B. Ursprüngliche Kurven. Gewicht der Tiere 17 g, Last 20 g. I. Normalkurve. XI. Fliesspapierblättchen mit 15% Kochsalz in Schneckenblut auf die Pedalganglien: Konstanzniveau erhöht. XIV. Kochsalzkristall auf die Ganglien: Tonusabfall und Dynamik (Versuchsserie PK-R-ZD. B, 1-V-'41).

Eine ähnliche Dynamik zeigt die ursprüngliche Kurve (= U.K.) nach Auflegung eines Kochsalzkristalls auf die Pedalganglien (Abb. 2B): I, Normale U.K. zur Vergleichung. Die U.K. XIV zeigt nach Applikation von Kochsalz eine sehr steile Senkung der ersten Strecke und einen sehr scharfen Umschlag auf Spannungslänge ( $b-c$ ), woraufhin tonische Verkürzung  $c-d$  auftritt, auf welche ständige Dehnung folgt. Diese sekundäre

Dehnung überschreitet die Spannungslänge, ohne Tendenz zur Konstanz. Die U.K. XI wurde nach Applikation einer 15% Kochsalzlösung mittels eines damit befeuchteten Fliesspapierblättchens aufgenommen; die sehr steile Senkung ist kürzer, der Umschlag oberhalb der Spannungslänge führt zu einer Konstanz ( $b'-c'$ ), welche in Verkürzung übergeht, aber viel später als die in Kurve XIV nach Applikation eines Kristalls.

Im Gegensatz zur, durch das Kochsalzkristall ausgelösten dynamischen Reaktion, zeigen die U.K. und W.K. nach Applikation eines Fliesspapierblättchens mit Kochsalzlösung auf die Pedalganglien eine Konstanz und zwar auf höherem Niveau als die Spannungslänge. Dasselbe Resultat bekommt man nach Auflegung eines Blättchens aus kristallinischem Kochsalz.

### C. Diskussion der Ergebnisse und Zusammenfassung.

Meine erste zusammenfassende Arbeit auf dem hier behandelten Gebiete war der Wiederherstellung des Tonus (Tonusniveau und Tonusspiegel) nach vorhergegangener Dehnung gewidmet. Die Regulierung des Tonus durch das Zentralnervensystem wurde absichtlich ausser Acht gelassen (vergl. 14, S. 27). Jetzt ist die Funktion der Pedalganglien unser Hauptproblem.

Auf Grund seiner Erfahrung an *Aplysia* (3), bei welchem Objekt sich bislang lediglich Tonusverminderung durch die Pedalganglien hatte nachweisen lassen, hatte JORDAN die genannten Ganglien als einheitliche Zentren der Tonusfunktion aufgefasst. Ihr Einfluss sollte auf der Koordination des Aktivitätszustandes beruhen. Wie sich der tonische Zustand zwischen allen Muskelteilen des normalen Tieres koordiniert, so sollte auch eine Angleichung der Aktivität zwischen Zentren und Peripherie bestehen, wobei die Pedalganglien, da sie als Urfunktion die Tonusverminderung haben, dauernd oder doch vorwiegend im Zustande niederen Aktivitätszustandes verkehren sollten.

JORDAN hat diese Form, die Zentrenwirkung zu beschreiben, auch auf *Helix* angewandt (4, 5), obwohl er bei diesem Objekt und analog bei *Ciona intestinalis*, aber im Gegensatz zu *Aplysia*, auch eine tonussteigernde Wirkung der Pedalganglien fand, nämlich den Zentraltonus (Pedalkonstanz). Um zu zeigen, dass die Richtung des Ausgleiches dem Aktivitätszustand in den Ganglien, verglichen mit demjenigen der Muskeln, entspricht, hat JORDAN eine Reihe von Versuchen gemacht, bei denen er diesen Aktivitätszustand der Ganglien erhöhte (Kochsalz) oder erniedrigte (Kokain). Der Aktivitätszustand in den Muskeln wurde gleichfalls durch Aufbringen von Kochsalz erhöht (7); Erniedrigung des Muskeltonus war möglich durch Kokain oder durch passive Dehnung, welche das Tonusniveau verminderte und parallel damit den tonischen Aktivitätszustand der Muskulatur herabsetzen sollte (4, S. 203; 5, S. 542). So stellte JORDAN der „eingreifenden“ Regulierung durch Impulse, die „koordinative“ Regulierung nach dem Prinzip der Isostasie gegenüber (8): *einheitliche Reaktion des Muskels oder des Nervensystems*. Sie ist unverträglich mit antagonistischer Muskelinnervation. *Tonuslösung und Tonuserzeugung sind zwei Phasen einer Funktion, die einander bei ein und derselben Erscheinung ausschliessen, also nur nach einander auftreten können.*

Der allgemeine Gesichtspunkt, der mich bei meinen Untersuchungen leitete, war, um am Auffinden einer andern Theorie der zentralen Tonuserzeugung und Tonuslösung bei unserm Objekt mitzuarbeiten. Gewisse Erfahrungen hatten bei uns Zweifel an der Richtigkeit der alten Theorie geweckt. Ich habe nun die direkte Reaktion des Tonusspiegels auf die verschiedenen experimentellen Eingriffe feststellen können und mit den Abänderungen des Niveau der Pedalkonstanz, unter dem Einflusse der gleichen Eingriffe, verglichen. Die Resultate haben unseren Zweifel verstärkt:

1. *Die Reaktion des pedaltionischen Präparates auf Belastungsgrösse*: a. Es zeigte sich, dass *hohe Last* die Tonusarmut des Muskels, der in Verbindung mit den Ganglien steht, steigert: Aktivierung der Tonuslösung (steile Strecke der ursprünglichen Kurve; Erniedrigung der Niveaux der Wiederholungskurven). b. *Niedere Last* aktiviert die

Konstanzerzeugung, als spezifisch erregende Funktion der Pedalganglien; in aufeinanderfolgenden Wiederholungskurven steigt das Niveau. Zum Auftreten einer wirklich steilen und langen Anfangsstrecke der Dehnungskurve kommt es bei niederer Belastung nicht. Zwar verläuft dieser Kurventeil etwas steiler als beim ganglienlosen Fuss, wegen des niedrigeren Tonuspiegels des normal innervierten Muskels, aber *es fehlt hierbei der, die Tonuslösung reaktiv verstärkende Reiz der höheren Last.*

2. *Kokain* wird in geringer Konzentration auf die Pedalganglien gebracht. Stets fehlt eine deutliche steile Strecke, dahingegen schwindet die Konstanz nicht, das Niveau wird nur erniedrigt. Das Gift dämpft die Tonuslösung mehr als die Konstanzerzeugung. Man muss hierbei an die *Dämpfung der Wirkung einer spezifisch tonushemmenden Funktion* denken. Diese Auffassung gewinnt an Wahrscheinlichkeit durch unsere Versuche mit Aktivitätserhöhung in den Pedalganglien durch Auflegen von Kochsalz.

3. *Kochsalz* wird als Kristall, oder als Lösung von 15 % angewandt. Nach Auflegen eines *Kochsalzkristalles* tritt *keineswegs lediglich Muskeltonuserhöhung* auf, sondern zuerst namen wir (7) eine ausgesprochene Tonuslösung wahr, die sich in langer und steiler erster Strecke der Dehnungskurve zu erkennen gibt, die niedriger sinkt als das normale Konstanzniveau. *Ein Kristall fördert also auch die Tonuslösung*, erhöht dann durch eine Strecke tonischer Verkürzung das Konstanzniveau. *Kochsalzlösung* zu 15 % oder ein Blättchen aus kristallinischem Kochsalz verursacht keine Tonuslösung (erstre Strecke), sie erhöht lediglich das Konstanzniveau. Vermutlich lokaler Verhältnisse wegen, wird nur die erregende Funktion der Pedalganglien aktiviert durch Applikation von Kochsalz auf eine grössere Oberfläche (Blättchen gegenüber Kristall). Die Wirkung eines kleinen Kristalles lässt die Erklärung zu, dass das Salz erst auf ein hemmendes Zentrum reizend wirkt (weil dieses vermutlich eine niedrigere Reizschwelle hat und die Lokalisation der Einwirkung für dieses Zentrum günstiger ist), um sodann die Konstanzerzeugung zu aktivieren.

Wenn dies alles wahr ist, muss man Tonuslösung auch durch passende Reizung der Pedalganglien und der Nn. pedales erzielen können. Auch das war mir gelungen und zwar durch mechanische Reizung (vgl. auch Mitt. III u. IV).

4. *Mechanische Reizung des Nervus pallialis* (Durchschneidung) im Zustande der Pedalkonstanz verursacht, ähnlich wie Exstirpation der Pedalganglien während dieses Zustandes des Muskels, schnelle Dehnung (Tonuslösung während der Konstanz). Nach dieser Tonuslösung durch Reflexreizung war in unserm Institut lange vergeblich gesucht worden.

5. *Allgemeine Schlüsse aus diesen Ergebnissen:* Die beschriebenen Resultate sind nicht in Einklang mit der Ausgleichhypothese zu bringen. Sie lassen sich dahingegen als die Beeinflussung von *zwei gleichzeitig wirksamen antagonistischen Funktionen* erklären:

a. *Kokain* wirkt in der Tat auf die Konstanz derart, dass die Wirkung mit dem Ausgleichschema beschrieben werden kann. Allein die erste steile Strecke, die nach diesem Schema steiler und länger werden müsste, wird durch diese Erniedrigung des Aktivitätszustandes unterdrückt. Kochsalz müsste nicht nur das Konstanzniveau erhöhen, sondern auch die Häufigkeit der steilen Strecke vermindern; die Lösung wird aber gefördert. *Kokain* und *Kochsalz* wirken also gleichsinnig fördernd auf zwei *einander entgegengesetzte Funktionen*.

b. Auch die Reaktionen auf Belastungsgrösse, wie Aktivierung der Spiegel- oder Konstanzerzeugung durch niedere Last und Aktivierung der Tonuslösung durch hohe Last widersprechen der früher benutzten Beschreibungsweise der Tonusregulierung (vergl. auch 17, S. 108). Beide Reaktionen können nunmehr als ein Reflex beschrieben werden. Das erlaubt mir auch den „Halbtierversuch“ (vgl. Mitt. I, S. 1152) anders zu erklären als JORDAN dies tat, da ihm zentrale Tonuslösung durch hohe Last unbekannt war.

Wenn der Einfluss der Last, wie wir ihn durch die Wiederholungskurven kennen (Niveauniedrigung durch hohe Last, Niveausteigerung durch geringe Last), sich auch im „Halbtierversuch“ geltend machen sollte, so ist folgende Erklärung dieses Versuches möglich: die hoch belastete Fushälfte verursacht reflektorisch zentrale Aufhebung des Tonus in der Gesamtmuskulatur, also auch in der „registrierenden“, nicht extra belasteten Hälfte. Die ursprüngliche, erste Dehnungskurve des intakten Fusses zeigt bei hoher Belastung aber nur Spiegelerniedrigung bei gleichem Niveau und wir werden noch kontrollieren müssen, ob diese Spiegelerniedrigung eine Niveauperminderung zurfolge hat, die dem Niveauperlust im „Halbtierversuch“ entspricht.

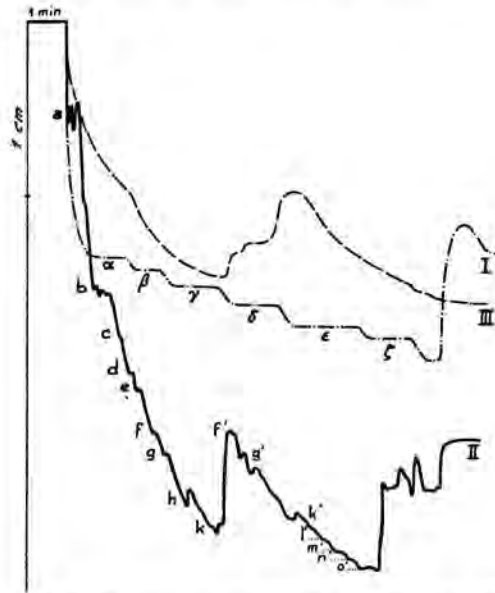


Abb. 3. Ursprüngliche Kurven von pedaltonischen Objekten (Last bei I und II, 20 g). Kurve II zeigt bei a, b, u.s.w. einen Kampf zwischen Tonuserzeugung und Tonuslösung. I. Jedesmal nach kurzdauernder Konstanz ( $\alpha$ ,  $\beta$ , u.s.w.) plötzlicher Abfall, welcher auf das Eingreifen eines hemmenden Impulses hinweist. III. Kurve ohne steile Strecke, weil die Last niedrig ist (10 g).

Ich habe früher (14, S. 71) beschrieben, und immer wieder wahrgenommen, dass in vielen Fällen während der pedaltonischen Dehnungskurve sozusagen ein „Kampf“ zwischen der Tendenz zur Konstanzbildung und derjenigen der Tonuslösung auftritt. Die Dehnung wird plötzlich unterbrochen, scheinbar tritt Pedalkonstanz auf, plötzlich aber wird die steile Dehnung fortgesetzt. Dieser Wechsel kann sich im Falle sehr ausgesprochenen Kampfes öfters wiederholen (Abb. 3, Kurve II). Ich habe damals an die Möglichkeit gedacht, dass die Tendenz zur Tonuslösung in den Pedalganglien, die Tendenz zur Konstanzbildung dahingegen in der Fussmuskulatur selbst lokalisiert sei. Da es aber offenbar ein tonuserzeugendes Zentrum in den Pedalganglien gibt, dürfte kaum daran zu zweifeln sein, dass es neben Netzkonstanz auch eine Pedalkonstanz gibt. Der plötzliche Abfall der Kurve I, nach kurzdauernder Konstanz, weist auf alle Fälle auf das Eingreifen eines hemmenden Impulses hin.

Alle diese Resultate und diejenigen gemeinsamer Versuche (7) wurden Anlass zu weiteren Untersuchungen, deren Aufgabe es war, die vermutlich vorhandenen zwei Zentren in den Pedalganglien zu finden, über die in der nächsten Mitteilung III berichtet werden wird.

Die übrigen Resultate lassen das Prinzip des Ausgleiches ausser Diskussion. Sie ergaben dass die Muskelviskosität nur einen Teil der Tonuserscheinungen zu erklären imstande ist, was in unserem Institut auch immer ausgesprochen worden ist (6, 10, 11, 12, 13, 14). Obwohl Tonus und selbst die Konstanz (nach Maas, 9) keinen Anspruch an den Stoffwechsel stellen, muss beiden eine reflektorische Grundlage zuerkannt werden. In meinen Versuche spielte Viskosität als solche eine überwiegende Rolle nur in folgenden Ergebnissen: Kälte unter 12° erhöht den tonischen Widerstand der ersten Dehnungsstrecke, während Wärme (oberhalb 27°) ihn erniedrigt. Auch Wassermangel erhöht den Widerstand, während Sättigung des Muskels mit Wasser merkwürdigerweise nicht den umgekehrten Effekt hat.

#### LITERATUR.

- 1, HERTER, K., Zs. vergl. Physiol. **13**, 709, 1931; 2. HERTER, K., Ibid. **15**, 261, 1931;
3. JORDAN, H. J., Zs. f. Biol. **41**, 196, 1901; 4. JORDAN, H. J., Pflüg. Arch. **106**, 189, 1905; 5. JORDAN, H. J., Ibid. **110**, 533, 1905; 6. JORDAN, H. J., Ergebn. d. Physiol. **40**, 439, 1938; 7. JORDAN, H. J., Frl. C. E. SLUITER u. N. POSTMA, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **41**, 1032 (1938); 8. JORDAN, H. J., Schweiz. Mediz. Wchschr. **71**, Nr. 12, 1941; 9. MAAS, J. A., Arch. Néerl. Physiol. **13**, 1, 1938; 10. POSTMA, N., Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, **36**, 360 (1933); 11. POSTMA, N., Acta Brev. Neerl. **3**, 41, 1933; 12. POSTMA, N., Ned. Tschr. v. Geneesk. **77**, 2138, 1933; 13. POSTMA, N., Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, **37**, 348 (1934); 14. POSTMA, N., Onderzoekingen betreffende het herstel van de tonus bij de slakkevoet (*Helix pomatia* L.) u.s.w. Diss. Math. Naturw. Fac. Univ. Utrecht, 1935; 15. POSTMA, N., Proc. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, **44**, 1151 (1941); 16. SWINDEREN, J. W. DE MAREES VAN, De regeling van den tonus in de spieren van *Helix pomatia*. Diss. Math. Naturw. Fac. Univ. Utrecht, 1927. 17. JORDAN, H. J., Ergebn. d. Physiol. **16**, 87, 1918.



**Medicine.** — *Classification of the disorders of language, speaking and voice.* By F. GREWEL. (Communicated by Prof. A. DE KLEYN.)

(Communicated at the meeting of November 29, 1941.)

The doctrine of the disturbances mentioned in the title, which used to be termed disorders of speech, has developed slowly; and only gradually has a classification into different large groups come into existence; the development in this respect has not yet come to an end. The deepening of our knowledge in this field was difficult, however, the more so because the material for this greater knowledge had to be drawn from various other domains of science, most of which have just begun to develop. Thus our knowledge of the neurological diseases attended with disorders of language and speaking has gradually increased, while also the pathological-anatomical basis of the diseases which affect voice and speech has been studied more thoroughly. One gets a more and more profound insight into the physiology of voice and speaking, so that experimental phonetics have become a separate subject of study. In many respects we have only just begun to apply their results to the pathological physiology of voice and speaking, a field which, it is true, does not lie fallow, but can still be exploited more extensively; here there are perhaps also hidden possibilities to give to linguists a better insight into certain changes of language. The development of speaking in childhood has become a subject of study and the knowledge of the development of the child's language has also become greater. Besides the knowledge of the disorders of language among patients has also deepened; the theory of aphasic disorders especially has developed to an enormous extent. Medical investigators have realised that one cannot be satisfied with a naive opinion about language defects among such patients; ever since PICK'S investigations and again just lately the insight that the disturbances of aphasic patients should also be studied from the linguistic point of view has been roused. It goes without saying that the psychological study of these patients, who are hampered or disturbed in fundamentally human functions, such as language and speaking, yields also important results.

So we are provided with an abundance of data the arranging of which is very difficult; it follows indeed clearly from the above that no expert can any longer be master of the whole field.

The diseases in the domain of human acts of language and speech have up to now been classified as disorders of speech and disorders of voice. A new arrangement based on newer insights is necessary, however, and, as we think, possible too. In making it, one should start from the insight that man has the power of *speech*. He can use this power by making himself understood in a system of conventional symbols, his *language*. It is only in a language that the human power of speech gets its great biological realisation and its great social significance<sup>1</sup>). So the power of speech is a disposition for which symbols of language are necessary; the disposition is every time realised in the *act of speaking*, the *speaking*. So one must make a clear distinction between diseases which make the language of the patient disappear or hamper it and those where the act of speaking is made impossible or difficult. It is true that for a long time these two groups of disorders have been set over against each other, but again and again such disorders which concern the incapacity for the act of speaking threaten to be introduced within the group of aphasic disorders. One can even say that the prototype of aphasic conditions, the group of patients-described by BROCA who had lost "le souvenir du procédé qu'il faut suivre pour

<sup>1</sup>) J. VENDRYES. *Le langage*. Paris 1921.

G. RÉVÉSZ. *Die Sprache*. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, XLIII, 1940.



articuler les mots" (BROCA) do not belong to the aphasias in a narrower sense, but at the most form an intermediary group between aphasia and dysarthria.

For gradually it has become clear that, at least for the expressive aphasias, the incapacity for language is the most important phenomenon<sup>2)</sup>. It is true that this is made more complicated by a whole series of psychological phenomena and by radical disorders in the whole power of expression<sup>3)</sup>, so of a fundamental field of the praxis; but for the classification it is not the psychical and psychomotoric attendant phenomena that are important, but the essential fact that not the act of speaking, but the language has suffered.

Considering what GUTZMANN<sup>4)</sup> in his monography ranges under dysarthria one can only conclude that his classification is entirely obsolete. Stammering- and stuttering-defects and the disabilities of speaking caused by mechanical defects in the articulation-apparatus are all styled as forms of dysarthria. The instrumental investigation of these defects and disorders has made it possible to establish such fundamental differences that already ZWAARDEMAKER, QUIX, TEN CATE, later SCRIPTURE, DE SANCTIS could distinguish nervous disorders of speech, such as stuttering, from organic ones. It appears to be necessary to indicate clearly that by dysarthrias one understands disorders in the act of speaking caused by lesions of the nervous system, except for the cerebral cortex, in other words as a consequence of subcortical or peripheral neurological injuries. By this the field of the dysarthrias is greatly narrowed down, but on the other hand this definition of dysarthria does include the enlargement that appeared necessary in the long run. Thus for instance that which was clearly indicated by LEYSER<sup>5)</sup> when he considered the disorders of speech caused by affections of the basal nuclei, such as post-encephalitic parkinsonism and athetosis, as dysarthrias. For by this it has not only been confirmed that besides the disorders of articulation and of tempo phenomena of phonation and respiration can also occur in dysarthria, but it has, moreover, become clear that the disturbances of melody, the iterations, the changes of tonus, etc. in speaking are deserving of our attention.

Both the nervous disorders of the act of speaking and the mechanical ones form groups separate from the dysarthrias.

Considerations that are essentially the same as for the abnormalities of language and of the nervous, mechanical and neurological disorders of the act of speaking among adults also have their value for the child; on the understanding, however, that here individuals, so also language and speaking are affected in their *development*. So the problem changes in so far that besides the abnormalities found among adults, hindrances in the development of language and speaking are found as well. In these disturbances of growth one must again distinguish two groups: the disorders of tempo, where the unfolding of a power only takes place more slowly and the qualitative disabilities.

In the same way as among adults a defect in the articulation-apparatus can lead to articulation-defects; this is possible with the child, moreover, on account of an incomplete mastering, i.e. of a function of this apparatus as yet incomplete. As is known the disorders of the tempo of development play a great part especially in the domain of speaking.

When one separates the voice-defects from the speech-defects one must point to the fact that this obtains only when it is the voice alone that makes us hear abnormalities, while for the rest speaking is intact. Disorders of the voice namely repeatedly occur in cases of disability in speaking, especially in dysarthrias; in such cases one considers them as belonging to the dysarthric syndrome.

<sup>2)</sup> H. HEAD. *Aphasia and Kindred Disorders of Speech*, Cambridge 1926.

M. A. V. MELLE. *Over Aphasia*. Acad. Proefschrift, Amsterdam 1900.

<sup>3)</sup> F. GREWEL. *Taalpsychologische problemen bij aphasia*, Alg. Nederl. Tijdschr. v. Wijsbegeerte en Psychologie, XXXIV, 1941.

<sup>4)</sup> H. GUTZMANN. *Die dysarthrischen Sprachstörungen*. Wien u. Leipzig 1911.

<sup>5)</sup> E. LEYSER. *Ueber einige Formen von dysarthrischen Sprachstörungen* u.s.w. Zeitschr. f. d. ges. Neur. u. Psych., LXXXVIII, 1924.

What has been explained above leads us to make the following classification:

## A. THE GENERAL ABNORMALITIES.

### I. Disorders of language-functions.

a. *Aphasia*. There is incapacity of using language, while speaking is essentially undisturbed. In aphasias very definite parts of the cerebral cortex are injured and dependent on the place of the lesion one can distinguish certain types of aphasia, namely expressive, receptive, amnesic and perhaps central aphasia. As the aphasias are disorders in the use of the instruments of language, it will appear useful to give a linguistic basis to the analysis of the aphasic disturbances; one will have to look for the abnormalities in the structural laws of the language, not only phonematical (TRUBETZKOY), but also syntactical ones, etc.<sup>6)</sup>.

b. PICK's disease certainly fits in with the aphasias, also anatomically<sup>7)</sup>. It is characterised by a gradually progressive incapacity for language and by its complication with other disorders, particularly presenile dementia, loss of initiative, reduction of mental productivity and deterioration of the practognosis (GRÜNBAUM).

c. Several diseases that are attended with language-disorders show anatomically conspicuous lesions of the cerebral cortex. These alterations of the cortex must be considered as more or less important in ALZHEIMER's disease, with some forms of palilalia and with language-disorders in senile dementia. Anatomical lesions of the basal nuclei, however, which are also present in PICK's disease, are found especially in the two former clinical pictures.

### II. Disorders of the function of speaking.

a. *Dysarthria*. This term serves to summarize the disorders in the mechanism of speaking, as a consequence of subcortical or peripheral lesions of the nervous system. Here one finds, dependent on the localisation in the nervous system, a great number of different neurological syndromes, in each of which the acts of speaking are impaired, while the language is intact. The disability of speaking expresses itself in disorders of articulation, phonation and respiration, in tempo and modulation; either in all these domains or in some of them. The hindrance of the mechanism of speaking can be explained neurologically; again and again different disorders occur in accordance with the parts of the nervous system affected; so a classification of the dysarthrias based on the localisation is possible and gradually this is being made. The bulbar and pseudo-bulbar, the cerebellar, choreatic, athetotic and post-encephalitic forms of dysarthria can be mentioned in this connection<sup>8)</sup>.

b. *Dyslalia*. The dyslalias too are the consequence of technical disorders, but only of the articulation-mechanism. They are due to anatomical defects in the peripheral apparatus itself; cleft palate, abnormalities of the tongue, etc. One also calls them peripheral-mechanical disorders. Disability in speaking caused by peripheral nerve-lesions such as neuritis (paralysis of the palate after diphtheria; hypoglossusneuritis, etc.) is classed among the dysarthrias. The hampered speaking found with myasthenia gravis can be looked upon as intermediary; it is best to group it with the dyslalias.

c. *Aphemia and dysphemia*. By these one understands the large group of disorders of speaking on a neurotic basis, also among the constitutionally nervous and inferior, such

<sup>6)</sup> R. JAKOBSON. Kindersprache, Aphasie und allgemeine Lautgesetze. Sprachvetenskapliga Sällskapet i Uppsala Förhandlingar. 1940—1942.

F. GREWEL. L.c.; and Problemen bij de aphasiestudie. Psychiatr. en Neurol. Bladen, XXXV, 1941.

<sup>7)</sup> C. VAN DER HEIDE. Klinisch-anatomische studie over Picksche ziekte. A'dam, 1934.

<sup>8)</sup> M. NADOLECZNY. Kurzes Lehrbuch der Sprach- und Stimmheilkunde. Leipzig, 1926.  
J. EUZIÈRE, J. TERRACOL et R. LAFFON. Les troubles de la parole dans les affections du système nerveux central. Revue franç. de Phoniatrie, 1939.

as the feeble-minded. They are the defects of stuttering, clottering and stammering. Further subdivisions are necessary within this group: there are also transitions, as between stuttering and clottering. Further there are differences in stuttering as e.g. between the stutter-neurosis and the hysterical stutter.

### III. *Disorders in the function of the voice.*

Here there is the same classification as in the preceding group.

- a. *Neurological disorders* of the voice, as with tabes dorsalis, posticus-paralysis, etc.
- b. *Organic disorders* of the voice through local affections, as hoarseness as a consequence of a tumour of the larynx or inflammation of the vocal chords, etc.
- c. *Neurotic (nervous) disorders* of the voice, as phonasthenia (as a rule), hysterical hoarseness or aphonia, etc.

IV. *The peripheral-impressive disorders* of speaking form a separate group. The changed speaking attending deafness is due to the fact that deaf people lack an acoustic control of their own speaking-production, articulation, phonation, melody and accent deviating so much that the speaking changes in character.

## B. THE ABNORMALITIES IN THE DEVELOPMENT.

As has been explained above, there are among the young, besides the disorders which the adult knows, the disorders in the development, as a separate group of affections. These disorders in the development of human speech-utterances must be studied separately. Here again it appears to be useful to distinguish the language-function and the function of speaking; then in the one case one meets with difficulties which the child has to overcome when it learns how to master the language, i.e. the whole of the symbol-conventions, in the other case in acquiring sufficient readiness of speaking. This does not mean that both develop entirely independent of each other; it seems to us namely that readiness of speaking also has some influence on the acquiring of language; but this is beyond the scope of this article.

The mastering of the language has two sides. In the first place a sufficient intellect is necessary for this; if this is wanting no language or a very limited language develops; the *mutitas idiotica* and the poor language of many feeble-minded, therefore are not among the disorders of language in a narrower sense, though their study contributes much to our understanding of the development of language among normal people. There is, however, a second side to the development of the language in childhood; the power to handle the conventional symbols namely has a development which is more or less independent of the intelligence. Thus one sees intelligent children learning the mastery of a language with difficulty and on the other hand feebleminded among whom the fluent mastering of the language develops quickly (verbal giftedness). Though this may not be profound in such a case and may cause a spurious pseudo-intelligence to arise, essentially it cannot be denied. (And it is curious that a language, i.e. a system of conventional symbols forms yet again such a powerful means to the drawing of conclusions that many a verbally gifted dunce gets along fairly well by means of the fluency of his language.) Besides, however, there are defects in the development that only concern a part of the mastery of the (a) language.

These considerations lead us to make the following classification:

### I. *Disorders in the language-development.*

- a. *Congenital acoustic agnosia.* This concerns not the group of children who suffer from congenital psychic deafness and who cannot be "roused" acoustically, so do not react on a single sound-stimulant, but the group of the congenitally word-deaf. These children do react on sound and are not deaf to the sounds of the human voice; nor are they feebleminded; yet they do not understand or produce language. The clinical picture

of congenital word-deafness, which has always remained inexplicable, suddenly becomes clear when one keeps in mind that it must not be regarded as a congenital receptive disorder, but that it is an arrearage of the power to handle language-symbols.

b. Some forms of hearing-muteness, where it is especially the active use of language that is attended with difficulties, while the language heard is understood relatively well, can perhaps be included within the group of disorders in the language-development.

c. *Congenital agrammatism*, first described by LIEBMANN, also becomes clearer through this classification; here there is, with sufficient intelligence, a partial hampering of the language-development, namely that of the grammatical-syntactical functions (symbols).

d. *Belated recognition of a phonological opposition within a correlation-pair* is a phenomenon that can repeatedly be observed in children. By this one should understand the incapacity to distinguish phonemes that belong together, such as *d* and *t*, *b* and *p*, and possible others, within the language. Such a child does not only say e.g. "toe te teur tan toch ticht", but also writes it. The wrong writing shows that here it is not a disorder of speaking — up to now this phenomenon was taken to be that — but a disorder of the discriminative powers within the language-domain, namely of the phonological oppositions. The description given here of this disorder shows that it is necessary to make use of modern linguistical conceptions to get a better insight in the nature of these disabilities. In this case the conception of the phonological opposition within the meaning of TRUBETZKOY and his school had to be used<sup>9)</sup>.

e. *Congenital aphonemia*. FONTES<sup>10)</sup> has described an isolated congenital (and hereditary) disorder in the use of the *r*; he considers this an isolated congenital aphasia. To me it seems right to regard it as an isolated disorder of the language function, but as it only concerns a single phoneme it seems better to call it congenital aphonemia.

f. *Echolalia* in childhood, of long duration should perhaps be included within this group; it occurs especially among the imbeciles.

## II. Disorders in the development of speaking.

a. *Hearing-muteness* is generally due to the incapacity of learning how to speak or to the fact that this is attended with great difficulties. The little patients can indicate the rhythm of a word, but fail in speaking, often even in pronouncing a combination of consonants. One can distinguish various forms of hearing-muteness, but this same principle obtains for all of them. They are all due to a motoric infantilism.

b. *Belated development of speaking*. Instead of in the second year speaking develops some years later. In such cases a language-factor sometimes plays a part as well; but there are children who understand every thing clearly, try to speak and fail in this. Here too, one can always establish that there are arrears in psychomotorics<sup>11)</sup>.

c. *Stammering-defects in youth: developmental dyslalia*. Many children find it difficult for a longer period than is normal to pronounce one or two phonemes. Every child shows disorders of articulation, especially of many consonants for a certain physiological period; this is the physiological stammer. It is due to a technical incapacity, as a consequence of the insufficient suppleness and promptness of the articulation-apparatuses to produce the desired sounds in the right manner. So with the young child one phoneme represents itself and some others. The other phenomena that attend the undeveloped speaking are irrelevant in this connection. A normal child overcomes this within some years, at any rate before the school-age. This remark implies that abnormal children, e.g. mentally defectives, are less successful in getting over this

<sup>9)</sup> N. S. TRUBETZKOY. Grundzüge der Phonologie, Prague 1939.

<sup>10)</sup> V. FONTES. Sur la signification fonctionnelle de certaines altérations du langage. Zeitschr. f. Kinderpsychiatrie, VII, 1941.

<sup>11)</sup> F. GREWEL. De psychomotoriek bij ontwikkelingsstoornissen van de spraak. Maandschr. v. Kindergeneeskunde, X, 1940.



mechanical incapacity (frequent dyslalia among the feeble-minded) and that the persisting of a stammer-defect in a constitutionally normal child mostly points to a development disorder, particularly to a children's neurosis.

d. *Clottering and stuttering* frequently occur during the development, especially during the period when speaking cannot yet follow thought (clottering) or when the child has not yet enough language-material to satisfy the existing impulse to communicate (stuttering). This physiological clottering and stuttering are overcome and it is only through neurotic (or neurological) causes that the stutter can persist<sup>12</sup>). Only in the puberal period, when the motorics pass through a temporary desintegration before reaching their definite organisation stuttering may perhaps again occur physiologically, or on a physiological basis.

e. So already in youth aphemias and dysphemias can develop from the physiological stammer, clotter and stutter, under the influence of neurotic mechanisms, or, as in the case of stammering insufficient training. Children's neuroses cannot be regarded as identical with those of adults; therefore there is some sense in mentioning these children's aphemias besides the aphemias of adults. Children's neuroses are often overcome spontaneously; this also obtains for the neurotic disorders as regards their speaking. Perhaps one should take together the groups II c and d of the development-disorders of speaking as one group.

### III. *Disorders in the development of the voice.*

a. The *mutation-disorders* of the voice are organic: cracking of the voice, a voice that is too deep or falsetto-voice. Here it is often difficult to say where lies the border between the physiological and the pathological domain. They are certainly pathological with *pubertas praecox* or on the other hand with *hypopituitary infantilism*, or mutation delayed in another way.

b. *Technical disorders* in speaking cause the hoarseness that is so frequent in youth.

c. *Psychogenic disorders*, such as whispering in youth, are sometimes found in smaller children (*timiditas infantum*).

### IV. *Peripheral-impressive disorders.*

These play a great part in certain disorders of the development of language and speaking. The various forms of deafness and hardness of hearing can cause insufficient speaking or can account for the fact that it is wanting. It goes without saying that in serious cases, when no other methods are resorted to, *language* is not acquired either. The anatomical defect can be localised in the internal ear or in the central connexions up to the cerebral cortex (bilaterally).

It is clear that several of the above-mentioned groups of disorders need a further subdivision; this obtains e.g. for the dysarthrias and developmental dyslalias; these subdivisions have already begun to be worked out. We do not mean, however, to enter into these questions of practical diagnostics.

Because several of the disorders dealt with here can occur together, in certain concrete cases the classification may seem to be difficult. Thus a hemiplegic aphasic person can at the same time be dysarthric. Other cases are intermediary, so that one can speak of a mixed case or a transitional form. Thus modern investigations teach us that the subcortical motoric aphasia of DÉJERINE, wrongly called anarthria by PIERRE MARIE, must be considered as a dysarthria; the phonetical deterioration which one finds with this disorder must be considered as a consequence of the dysarthria. JAKOBSON (l.c.) wrongly uses *these* data to argue that a phonological deterioration occurs in aphasia, though this in itself cannot be denied. Pure aphasia-material, however, should furnish the evidence. In subcortical motoric aphasia, besides the phonetical disorder, one

<sup>12</sup>) F. GREWEL. Stottern. Psychiatrische en Neurologische Bladen, XLI, 1937.

meets with agrammatism and a limited vocabulary as well; and so in this case there certainly is a deterioration of language besides the phonetical defect. So here one must speak of an intermediary affection: there are both dysarthric and aphasic phenomena<sup>13</sup>).

A third question is that a disorder will now have to be considered as belonging to one, then to another group. Thus stuttering should mostly be considered as an aphemia, but there are cases of organic stuttering which must be regarded as a dysarthria. Moreover there exists perhaps an aphasic stutter as well. — A developmental dyslalia may have been fixed later in life and must then be considered as a dysphemia.

From all this it appears that the classification of the disorders in the use of language, speaking and voice given here cannot be applied schematically; but it seems to us that this scheme essentially arranges and summarizes our present knowledge of the field under consideration. This obtains especially for the abnormalities in the language- and speaking-domain of the child. Instead of a heterogenous group of affections one finds here, besides the disorders that also occur among adults, a series of disorders in growth, either of the tempo of development (so-called tempo-disorders: B Ia, b and c, B IIb), or of a qualitative nature.

---

<sup>13</sup>) F. GREWEL, Review of: Alajouanine, Ombrédane et Durand, *La desintégration phonétique*. *Logopaedie en Phoniatrie*, XIV, 1942.