Analyse mathématique. — *"Sur une propriété de séries trigonométriques."* By Prof. ARNAUD DENJOY.

(Communicated at the meeting of June 26, 1920).

Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie dans sa dernière séance, j'ai démontré une propriété dont je vais rappeler l'énoncé, et qui appartient à une certaine classe de fonctions $F(\theta)$ *admettant une dérivée seconde généralisée* $f(\theta)$.

Posons

$$Q(\theta, u) = \frac{F(\theta + u) - F(\theta)}{u}$$

$$R(\theta, u) = \frac{F(\theta + u) + F(\theta - u) - 2F(\theta)}{u^2}.$$

On a $Q(\theta,u) = Q(\theta + u, - u)$ et $uR(\theta,u) = Q(\theta,u) - Q(\theta,- u)$. Par hypothèse $R(\theta,u)$ tend vers $f(\theta)$ quand u tend vers 0, θ restant invariable (condition A).

Nous désignons par $\psi(\theta)$ le maximum de $|R(\theta,u)|$ pour toutes les valeurs de u,θ gardant une valeur indépendante de u. η étant un nombre positif quelconque, $\psi(\theta,\eta)$ désignera le maximum de $|R(\theta,u)|$ pour $|u| < \eta$.

Les fonctions $F(\theta)$ auxquelles s'applique le théorème démontré dans ma précédente note, satisfont non seulement à la condition de posséder une dérivée seconde généralisée, mais encore à la suivante:

La différence $Q(\theta, \lambda u) - Q(\theta, u)$ *tend vers* 0 *avec* u, *uniformément dans tout champ*: θ *quelconque*, $|\lambda| + \left|\frac{1}{\lambda}\right| < r$, *$r$ étant indépendant de θ, de u et de λ* (condition B).

Ces propriétés de $F(\theta)$ sont en particulier vérifiées si $f(\theta)$ est la somme d'une série trigonométrique partout convergente. Si l'on pose

$$f(\theta) = a_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots, \quad \ldots \quad (1)$$

avec $A_n = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$ (a_0, a_n, b_n indépendants de θ), on a

$$F(\theta) = \frac{a_0}{2}\theta^2 + C\theta + C' - A_1 - \ldots - \frac{A_n}{n^2} - \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(C, C' indépendants de θ).

Et si $\varphi(\theta)$ désigne, quand elle existe, la dérivée de $F(\theta)$,

$$\varphi(\theta) = a_0\,\theta + C + B_1 + \ldots + \frac{B_n}{n} + \ldots$$

avec

$$B_n = - b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta.$$

Les points θ de convergence de la série et d'existence de la dérivée sont les mêmes, avec égalité de la dérivée et de la série en ces points. Cela posé, nous avons démontré la proposition suivante:

Si $|h_n|$ *tend vers* 0 *en décroissant, si la série* $\left|\frac{h_n^2}{h_{n+1}}\right|$ *est absolument convergente, si* $\psi(\theta + h_n)$ *et* $\psi(\theta)$ *sont inférieurs à A indépendant de n, la fonction $F(t)$ possède pour $t = \theta$ une dérivée $\varphi(\theta)$.*

Si en outre le rapport $\left|\frac{h_n}{h_{n+1}}\right|$ *est inférieur à* α *indépendant de n, et si* $|h| < 2\alpha|h_1|$, *on a*

$$Q(\theta, h) = \varphi(\theta) + 20\delta\alpha Ah \qquad (\delta^2 < 1) \quad \ldots \quad (9)$$

Enfin, si $|h| < \eta$, *A peut être remplacé par la borne supérieure des nombres* $\psi(\theta, \eta)$, $\psi(\theta + h_n, \eta)$ *pour* $|h_n| < \eta$.

L'hypothèse faite sur ψ n'implique pas l'existence de la dérivée seconde généraliste de $f(\theta)$. La démonstration exige la condition (B).

De la formule (9) nous déduirons certaines propriétés différentielles de $F(\theta)$ en nous aidant du théorème de BAIRE sur les fonctions limites de fonctions continues.

THÉORÈME. *Si P est un ensemble parfait (continu ou discontinu), l'ensemble K des points de P au voisinage desquels $\psi(\theta)$, supposé fini, est non borné sur P, cet ensemble est non dense sur P.* [1])

Voici le sens de cet énoncé. Nous disons qu'une fonction $g(\theta)$ n'est pas bornée sur P, au voisinage d'un point θ_0, s'il est possible de déterminer une suite θ_n de points *situés* sur P, tendant vers θ_0 quand n croît, et tels que $|g(\theta_n)|$ croisse indéfiniment. θ_0 appartient à P puisque P, étant parfait, contient ses points limites.

[1]) Je rappelle qu'un ensemble est dit *fermé* s'il contient tous ses points limites, *dense en lui-même* s'il admet chacun de ses points pour point limite, *parfait* s'il est à la fois fermé et dense en lui-même.

On appelle *portion* de P tout ensemble parfait ϖ contenu dans P et renfermant tous les points de P compris entre les extrémités de ϖ.

On dit que l'ensemble E est *partout dense* sur l'ensemble parfait P, si toute portion de P contient des points de E. E est dit *dense* sur P, s'il est partout dense sur une portion au moins de P. E est dit *non dense* sur P, si dans toute portion de P il en existe une autre où E n'a pas de points. Si (E, P) désigne l'ensemble commun à E et à P, E est partout dense, est dense, ou est non dense sur P, selon que le dérivé de (E, P), — c'est-à-dire l'ensemble des points limites de (E, P) — ou bien coïncide avec P, ou bien contient une portion de P, ou bien n'en contient aucune.

On peut encore dire que, quelque soit N, dans toute portion de P contenant θ_0, existe un point θ_N où $|g(\theta_N)| > N$.

Si au voisinage d'un point θ_0 de P, $\psi(\theta)$ n'est pas bornée sur P, l'oscillation [1]) de $\psi(\theta)$ sur P au point θ_0 est infinie. Et réciproquement d'ailleurs.

Or, M. BAIRE a montré que si une fonction $\psi(\theta)$ est limite de fonctions continues, l'ensemble $K(\alpha)$ des points de P où l'oscillation de $\psi(\theta)$ sur P surpasse un nombre positif α donné est non dense sur P. *A fortiori,* l'ensemble K des points où l'oscillation de $\psi(\theta)$ est infinie, est-il non dense sur P.

Voici la démonstration de BAIRE dans ce cas particulier.

Soit K l'ensemble des points de P au voisinage desquels $\psi(\theta)$ n'est pas borné. K est évidemment fermé. Si K n'était pas non dense sur P, il existerait une portion P_1 de P qui serait contenue dans K. Nous définissons simultanément: une suite de points $\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots,$ situés sur P_1, une suite de segments [2]) $s_0, s_1, \ldots,$ le segment s_n étant intérieur à s_{n-1} et contenant lui-même θ_n à son intérieur, et une suite de nombres u_n, par cette règle récurrente: s_0 est un segment quelconque contenant des points de P_1. s_{n-1} étant supposé obtenu, nous définissons comme il suit θ_n, s_n, u_n. $\psi(\theta)$ étant non borné sur P_1, au voisinage de tout point de P_1, il existe sur P_1, intérieurement à s_{n-1}, un point θ_n où $\psi(\theta_n) > 2n$. D'après $\psi(\theta_n) = \max\limits_{-\pi < u < \pi} |R(\theta_n, u)|$, il existe un nombre u_n non nul tel que $|R(\theta_n, u_n)| > n$. $R(\theta,u)$ étant continue par rapport à θ si $u \neq 0$, on peut entourer θ_n d'un segment s_n intérieur à s_{n-1}, inférieur en longueur à $^1/_2 s_{n-1}$ et en tout point θ duquel $|R(\theta,u_n)| > n$.

Il existe un point θ' (et un seul, puisque s_n tend vers 0 en longueur) intérieur à tous les segments s_n. θ' est la limite unique des points θ_n. Donc, θ' est sur P_1. Or, θ' appartenant à s_n quelque soit n, la suite $|R(\theta',u_n)|$ croit indéfiniment avec n, ce qui est contraire à l'existence de $\psi(\theta')$.

Donc K est non dense sur P. Dans toute portion de P il en existe une autre où K n'a pas de points et sur laquelle, par suite, $(\psi\theta)$ est bornée. Cette conclusion exige seulement que, pour chaque valeur de θ, les limites d'indétermination de $R(\theta,u)$ pour $u = 0$

[1]) L'*oscillation* de f *sur un ensemble* Q en un point limite θ_0 de Q, est l'écart des valeurs limites extrêmes de f (θ) quand θ tend vers θ_0 sans quitter Q. (θ peut coïncider une infinité de fois avec θ_0, si θ_0 appartientà Q). Si f supposée finie en tout point et en particulier au point θ_0, est non bornée sur Q au voisinage de θ_0, l'oscillation de f sur Q en θ_0 est évidemment infinie.

[2]) Je distingue le *segment* $\alpha\beta$ (ensemble $\alpha \leq x \leq \beta$) de l'*intervalle* $\alpha\beta$ (ensemble $\alpha < x < \beta$).

soient finies et non pas (condition A) toujours égales et finies.

Si F vérifie la condition (A), on montre par un raisonnement analogue au précédent, que *si en tout point de* P, $|f(\theta)|$ *est inférieur à un nombre fixe* C, *on peut trouver un nombre positif* η *tel que, si* $\psi(\theta,\eta)$ *est le maximum de* $|R(\theta,u)|$ *pour* $|u| < \eta$, *il existe une portion* P_1 *de* P *en tout point de laquelle* $\psi(\theta,\eta) < C$. L'hypothèse opposée, que toute portion de P contient, quelque soit η, des points θ où $\psi(\theta,\eta) \geq C$, entraîne $|f(\theta)| \geq C$ en certains points de P. Toute portion de P donne lieu au même énoncé que P lui-même.

Nous allons appliquer les propositions précédentes à diverses catégories d'ensembles parfaits P, *en supposont que* F *vérifie les conditions* (A) *et* (B).

Prenons d'abord pour P un segment continu $\alpha\beta$. L'ensemble K relatif à P est non dense sur P. Donc, dans tout segment S situé sur $\alpha\beta$, existe un segment s', ou $\alpha'\beta'$, où K ne possède aucun point. Alors, pour tous les points de s', $\psi(\theta)$ est inférieur à un même nombre A. θ et $\theta + h$ étant deux nombres quelconques intérieurs à s', posons $h_n = \frac{h}{2^n}$. D'après $\psi(\theta)$ et $\psi(\theta + h_n) < A$, F a une dérivée au point θ. De plus, d'après la formule (9) où $\alpha = 2$ (et dont la démonstration se simplifierait extrémement avec les valeurs considérees de h_n),

$$Q(\theta, h) = \frac{F(\theta + h) - F(\theta)}{h} = \varphi(\theta) + 40\delta Ah.$$

En échangeant les rôles de θ et de $\theta + h$, on trouve

$$Q(\varphi + h, -h) = \frac{F(\theta) - F(\theta + h)}{-h} = \varphi(\theta + h) + 40\delta' Ah. \quad (\delta^{2\prime}, \delta'^{2} < 1).$$

Par conséquent $\dfrac{\varphi(\theta + h) - \varphi(\theta)}{h}$ est borné sur l'intervalle $\alpha'\beta'$.

Donc la fonction $\varphi(\theta)$ est continue sur s' et a ses nombres dérivés bornés. Elle possède, sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle de valeurs de θ comprises entre α' et β', une dérivée qui, constituant pour F une dérivée seconde, ne saurait être autre que $f(\theta)$.

Nous obtenons donc ce premier résultat important:

1°. *L'ensemble des points de non existence ou de discontinuité de la dérivée de* $F(\theta)$, *est non dense sur le continu.*

2°. *L'ensemble des points autour desquels* $\varphi(\theta)$, *dérivée de* $F(\theta)$, *existe et est continue, et en lesquels* $\varphi(\theta)$ *a pour dérivée* $f(\theta)$, *cet ensemble est partout dense sur le continu.*

Je dis que l'ensemble des points où $F(\theta)$ ne possède pas de dérivée est de mesure nulle.

En effet, supposons que cet ensemble ait une mesure positive (qu'il soit *épais*)[1]. Il contient donc un ensemble parfait épais en lui-même P. Il existe une portion de P, soit P_1, où $\psi(\theta)$ est borné. Or P_1 étant épais, contient des points où son épaisseur est égale à 1. Soit θ_0 un de ces points. Il existe un nombre positif η, tel que, dans tout intervalle contenant θ_0 et de longueur inférieure à η, l'ensemble P_1 possède une épaisseur moyenne supérieure à $^1/_2$. Donc, dans l'intervalle $\theta_0 + \frac{\eta}{2^{n+1}}$ à $\theta_0 + \frac{\eta}{2^n}$, la mesure de P_1 est positive. Donc P_1 possède des points dans cet intervalle. Soit $\theta + h_n$ l'un d'eux. La suite h_n vérifie la condition $1 < \frac{h_n}{h_{n+1}} < 4$ et $\psi(\theta + h_n)$ est inférieur, quel que soit n, au maximum fini de $\psi(\theta)$ sur P.

Le théorème général s'applique. Donc, contrairement à notre hypothèse, $F(\theta)$ possède une dérivée en θ_0.

Donc, *l'ensemble E des points où $F'(\theta)$ n'existe pas, ensemble coïncidant avec celui où la série* (2) *diverge, cet ensemble est de mesure nulle,* résultat déjà connu et démontré en particulier par M. Fatou, mais que nous établissons sans recours à l'intégration.

Considérons l'ensemble E_1 où $\varphi(\theta)$ existe. Je dis que *$\varphi(\theta)$ possède une dérivée approximative*[2] *égale à $f(\theta)$ en tout point de E_1 sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle*[3]).

On montre d'abord par un type de raisonnement que j'ai indiqué

[1]) Je dis qu'un ensemble E est *épais* si sa mesure est positive; qu'il est *épais dans un intervalle ab*, si les points de E intérieurs à ab forment un ensemble de mesure positive; *épais en un point*, s'il est épais dans tout intervalle contenant ce point; *épais en lui-même*, s'il est épais en chacun de ses points. Si les points de E compris entre a et b $(a < b)$ forment un ensemble de mesure $m(b)-m(a)$, le rapport $\frac{m(b)-m(a)}{b-a}$ s'appelle l'*épaisseur moyenne* de E sur l'intervalle ab. L'*épaisseur* de E *en un point* x_0 est la limite, si elle existe, de l'épaisseur moyenne de E sur un intervalle contenant x_0 et tendant indifféremment vers 0 en longueur (voir ma note de la précédente séance pour les cas où l'épaisseur n'existe pas).

[2]) On dit que $\varphi(\theta)$ possède une *dérivée approximative* λ en un point θ_0 (où φ est définie) si le quotient $\frac{\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)}{\theta-\theta_0}$ tend vers λ, quand θ tend vers θ_0 en se déplaçant indifféremment sur un ensemble (où φ est supposé défini) dont l'épaisseur en θ_0 est égale à 1. (M. Kintchine emploie dans le même sens l'expression de dérivée asymptotique).

[3]) „Sur un ensemble contenu dans E_1 et de même mesure que lui" s'exprime par la locution „presque partout sur E_1" de M. Lebesque ou par celle.ci „sur une pleine épaisseur de E_1" que j'ai proposée.

ailleurs (Bull. de la Soc. Math. de Fr., 1915) que, si $\varphi(\theta)$ n'admet pas en θ_0 la dérivée approximative $f(\theta_0)$, il existe un nombre positif $d(\theta_0)$ ou d_0 tel que l'ensemble $e(d_0)$ des points θ vérifiant

$$\left| \frac{\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)}{\theta-\theta_0} - f(\theta_0) \right| > d(\theta_0)$$

possède en θ_0 une épaisseur supérieure positive, pour un côté au moins.

Si le théorème énoncé était inexact, l'ensemble H des points θ_0 précédents aurait une mesure positive.

Nous pouvons évidemment supposer que la fonction $d(\theta_0)$ de θ_0 est mesurable [il suffit pour cela que $d(\theta_0)$ soit par exemple la moitié de la borne supérieure stricte des nombres d tels que l'épaisseur supérieure en θ_0 de l'ensemble $e(d)$ soit positive]. Soit H_n l'ensemble des θ_0 tels que $nd(\theta_0) > 1$.

H est la réunion des H_n. Donc l'un au moins des H_n a une mesure positive. Il existe donc un nombre positif d, tel que l'ensemble H' des θ_0 vérifiant $d(\theta_0) > d$ a une mesure positive.

H' contient un ensemble parfait Q épais en lui-même.

$f(\theta)$ étant limite de fonctions continues est ponctuellement discontinue sur Q (Baire). Si petit que soit d', l'ensemble des points de Q où l'oscillation de $f(\theta)$ sur Q est au moins égale à d', cet ensemble est non dense sur Q. Prenons $d' = \frac{d}{121}$. Il existe une portion Q_1 de Q en tout point de laquelle l'oscillation de f sur Q (donc aussi sur Q_1) est inférieure à d'. Donc, si θ_1 est un point particulier de Q_1, il existe un intervalle i contenant θ_1 et tel qu'en chaque point θ de Q situé sur le segment i,

$$| f(\theta) - f(\theta_1) | < \frac{d}{121}.$$

Soit Q_2 la portion de Q_1 déterminée par l'intervalle i. (Q_2 est l'ensemble parfait situé sur le *segment i* et coïncidant avec Q_1 dans *l'intervalle i*).

Chacun, sauf le dernier, des ensembles E_1, H, H', Q, Q_1, Q_2 contient le suivant. Donc, en tout point de Q_2, $\varphi(\theta)$ existe (puisque Q_2 est dans E_1), $f(\theta)$ est compris entre $f(\theta_1) - \frac{d}{121}$ et $f(\theta_1) + \frac{d}{121}$ (dernière condition de Q_2), et $\varphi(\theta)$ possède, en tout point θ_2 de Q_2, et sur tout ensemble $\omega(\theta_2)$ d'épaisseur 1 en θ_2, un nombre dérivé spécial à $\omega(\theta_2)$ et différant de $f(\theta)$ de plus de d en valeur absolue (puisque Q_2 est dans H').

Considérons $F_1(\theta) = F(\theta) - \frac{\theta^2}{2} f(\theta_1)$. Cette fonction continue possède en tout point de Q_2 la dérivée $\varphi_1(\theta) = \varphi(\theta) - \theta f(\theta_1)$. $F_1(\theta)$ possède en tout point la dérivée seconde généralisée $f_1(\theta) = f(\theta) - f(\theta_1)$.

$f_1(\theta)$ est compris, sur Q_2, entre $-\frac{d}{121}$ et $\frac{d}{121}$. D'autre part, les nombres dérivés de $\varphi_1(\theta)$ sont ceux de $\varphi(\theta)$ diminués de $f(\theta_1)$. Donc, $\varphi_1(\theta)$ dérivée de $F_1(\theta)$ existe en tout point de Q_2 et possède, quels que soient le point θ_2 de Q_2 et l'ensemble $\omega(\theta_2)$ ayant l'épaisseur 1 en θ_2, au moins un nombre dérivé spécial à $\omega(\theta_2)$ et différant de $f_1(\theta_2)$ d'au moins d en valeur absolue. Ce nombre dérivé vaut donc au moins $\frac{120}{121}\, d$ en valeur absolue.

D'après $|f_1(\theta)| < \frac{d}{121}$ quel que soit θ sur Q_2, il est possible de trouver un nombre $s' > 0$, tel que l'ensemble $\psi_1(\theta, s') < \frac{d}{121}$ contienne une portion K de Q_2. $\psi_1(\theta, s')$ est par définition le maximum de

$$R_1(\theta, u) = \frac{F_1(\theta + u) + F_1(\theta - u) - 2F_1(\theta)}{u^2} \quad \text{pour } 0 < |u| < s'.$$

L'ensemble parfait K jouit en résumé des propriétés suivantes:

1° K a une mesure positive (K étant portion de Q_2, épais en lui-même).

2° Il existe une fonction $F_1(\theta)$ et un nombre positif s' tel que la fonction $\psi_1(\theta, s')$ relative à F_1 est, en tout point de K, inférieure à $\frac{d}{121}$.

3° $F_1(\theta)$ possède en tout point de K une dérivée générale (ordinaire) $\varphi_1(\theta)$.

4° Quel que soit θ_0 sur K, et l'ensemble $\omega(\theta_0)$ d'épaisseur 1 en θ_0, $\varphi_1(\theta_0)$ possède en θ_0 un nombre dérivé spécial à $\omega(\theta_0)$ et dont la valeur absolue surpasse $\frac{120}{121}\, d$.

Nous allons montrer l'incompatibilité de ces conditions simultanées.

L'ensemble des points de K où K a l'épaisseur 1, a même mesure que K, donc une mesure positive. L'ensemble $j(s)$ des points θ_1 de K tels que, dans tout intervalle contenant θ_1 et de longueur inférieure à $s\,(> 0)$, l'épaisseur de K soit supérieure à $\frac{5}{6}$, cet ensemble a une mesure positive dès que s est assez petit, et cette mesure tend vers celle de K quand s tend vers 0. Supposons $s < s'$ et $j(s)$ épais.

Soit θ_2 un point où $j(s)$ a lui-même l'épaisseur 1. Je dis que, si θ tend vers θ_2 sans quitter $j(s)$, $\frac{\varphi(\theta) \quad \varphi(\theta_2)}{\theta - \theta_2}$ a ses limites d'indétermination comprises entre $-\frac{120}{121}\, d$ et $\frac{120}{121}\, d$, ce qui est incompatible avec la 4e condition ci-dessus; car l'épaisseur de $j(s)$ en θ_2 est 1.

Supposons $|\theta - \theta_2| < s$, θ et θ_2 étant sur $j(s)$. Puisque K a une épaisseur supérieure à $\frac{5}{6}$ dans tout intervalle contenant θ ou θ_2 et de longueur inférieure à s, nous pouvons trouver sur K deux suites de nombres $\theta + h_n$, $\theta_2 + k_n$ de manière que

$$1°.\ h_1 = -k_1 = \theta_2 - \theta, \quad 2°.\ 2 \leq \left|\frac{h_n}{h_{n+1}}\right| \leq 3 \text{ et } 2 \leq \left|\frac{k_n}{k_{n+1}}\right| \leq 3.$$

D'après $\psi(\theta', s) < \frac{d}{121}$ quel que soit θ' sur K, on a donc ($\alpha = 3$):

$$Q_1(\theta, \theta_2 - \theta) = \varphi_1(\theta) + 60\delta \frac{d}{121}(\theta_2 - \theta)$$

et de même

$$Q_1(\theta_2, \theta - \theta_2) = \varphi_1(\theta_2) + 60\,\delta' \frac{d}{121}(\theta - \theta_2).$$

D'après l'égalité des premiers membres de ces deux relations

$$\frac{\varphi_1(\theta) - \varphi_1(\theta_2)}{\theta - \theta_2} = 120\,\delta'' \frac{d}{121} \qquad (\delta^2, \delta'^2, \delta''^2 < 1).$$

Cette relation est exacte quels que soient θ et θ_2 sur $j(s)$, si $|\theta - \theta_2| < s$. Donc les nombres dérivés de $\varphi_1(\theta)$ au point θ_2, spécialement à $j(s)$, sont inférieurs à $\frac{120}{121}\, d$ en valeur absolue, ce qui est opposé à l'hypothèse 4.

En résumé, *l'ensemble des points où $F(\theta)$ ne possède pas une dérivée ordinaire $\varphi(\theta)$ est de mesure nulle. Soit E cet ensemble, et E_1 son complémentaire. La fonction $\varphi(\theta)$, définie seulement sur E_1, possède une dérivée approximative égale à $f(\theta)$, sauf éventuellement en des points formant un ensemble de mesure nulle.*

Soit maintenant P un ensemble parfait discontinu quelconque, situé sur l'axe des θ. Soit M un point de P. Ajoutons à P son symétrique par rapport à M. Nous obtenons un ensemble parfait discontinu $P(M)$, symétrique par rapport à M. M est donc un point de seconde espèce (ou limite des deux côtés) de $P(M)$. Pour chacun des intervalles contigus i de $P(M)$ formons le rapport $l(i)$ des distances respectives à M de l'extrémité de i la plus éloignée et de l'extrémité de i la plus rapprochée de M.

$l(i)$ est borné indépendamment de i et de M, si la distance de i

à M surpasse un nombre donné. Quand i tend vers M, $l(i)$ possède une plus grande limite $\lambda(M)$ que nous appellerons *indice* de P en M. L'indice est un nombre au moins égal à 1 et peut être infini, même en tout point de P.

θ étant l'abscisse de M, l'indice $\lambda(M)$ peut encore être ainsi caractérisé (s'il est fini). Si petit que soit ε positif, il existe une suite de points $\theta + h_n$ situés sur P_1 tendant vers M et tels que, pour toute valeur de n, $1 < \left|\frac{h_n}{h_{n+1}}\right| < \lambda(M) + \varepsilon$. Il n'existe pas de suite analogue telle que $1 < \left|\frac{h_n}{h_{n+1}}\right| < \lambda(M) - \varepsilon$.

En tout point (sauf peut-être aux points extrêmes) d'une portion P_1 de P, l'indice de P_1 et celui de P coïncident.

Si P est épais, $\lambda(M) = 1$ en tous les points M où l'épaisseur de P est 1. Mais, même si P est épais en lui-même, l'indice $\lambda(M)$ peut être infini en certains points, et même en un ensemble dense de points de P.

On montre, selon un type de raisonnement maintes fois rencontré (voir par exemple, le Premier Théorème des nombres dérivés, Journal de Jordan, 1916) les propositions suivantes:

1. Si l'ensemble des points M où $\lambda(M) = \infty$ est partout dense sur P, cet ensemble est un résiduel de P. De même pour l'ensemble $\lambda(M) \geq \alpha > 1$.

2. Si P possède en chacun de ses points un indice fini, l'ensemble K des points de P au voisinage desquels cet indice est non borné, K est non dense sur P.

3. Si l'indice de P est en tout point inférieur à un nombre fixe $\alpha > 1$, il existe un nombre η positif et une portion P_1 de P, tels que, 1° si θ est quelconque sur P_1, 2° si θ' est quelconque à la fois sur P et dans l'intervalle $\theta - \eta$, $\theta + \eta$, il existe un nombre θ'' situé sur P et vérifiant les inégalités $1 < \left|\frac{\theta' - \theta}{\theta'' - \theta}\right| < \alpha$.

Car l'inexactitude de cette conclusion entraînerait sur un résiduel de P, l'inégalité $\lambda(M) \geq \alpha$.

La proposition précedente peut être appliquée à toute portion ϖ de P. Les portions P_1 pour lesquelles existe un nombre η sont donc partout denses sur P.

L'application de ces remarques à l'étude de $F(\theta)$ est immédiate. Il est évident qu'en tout point de P où l'indice est fini et autour duquel, sur P, $\psi(\theta)$ est borné, $\varphi(\theta)$ existe. Donc:

Si l'ensemble des points de P où l'indice de P est fini, est partout dense sur P, l'ensemble E_1 des points d'existence de $\varphi(\theta)$ est partout dense sur P.

Nous retrouvons comme cas particulier le théorème que l'ensemble E_1 des points d'existence de $\varphi(\theta)$ est partout dense sur tout ensemble épais, et en conséquence, que E, complémentaire de E_1, est de mesure nulle.

Si un ensemble parfait P possède en chacun de ses points un indice fini, l'ensemble des points où $\varphi(\theta)$ n'existe pas, ou est discontinue sur P, ou possède spécialement à P au moins un nombre dérivé infini, cet ensemble est non dense sur P.

De plus, l'ensemble des points où $\varphi(\theta)$ est dérivable spécialement à P et où sa dérivée spéciale à P est égale à $f(\theta)$, cet ensemble est partout dense sur P.

Comme exemple particulièrement simple d'ensemble dont l'indice est partout fini, nous citerons l'ensemble parfait classique de Cantor, obtenu en retranchant d'un segment continu l'intervalle occupant le tiers médian de ce segment, puis en recommençant l'opération sur chacun des deux segments conservés et en la répétant indéfiniment. $\lambda(M)$ est pour cet ensemble P_0 au plus égal à $\frac{5}{2}$ en tout point. Dans le cas le plus général, *il existe sur P_0 un ensemble fermé non dense K_0, tel que sur toute portion de P_0 sans points communs avec K, $F'(\theta) = \varphi(\theta)$ existe, est continue et douée spécialement à P_0 de nombres dérivés finis; de plus, en tous les points d'un ensemble partout dense sur P_0, $\varphi(\theta)$ admet $f(\theta)$ pour dérivée spéciale à P_0.*

Soit P un ensemble parfait quelconque, M un de ses points, θ l'abscisse de M, $P(M)$ l'ensemble parfait obtenu comme il a été dit plus haut.

Pour chaque intervalle i ou rs $(\theta < r < s)$ contigu à $P(M)$ et pour lequel $l(i) > 2$ (on pourrait remplacer 2 par tout autre nombre indépendant supérieur à 1), formons le rapport $\frac{(s-\theta)^2}{r-\theta} = \mu(i)$ du carré de la distance à M de l'extrémité s de i la plus éloignée de M, à la distance à M de l'extrémité r de i la plus proche de M.

Il est aisé de voir que si la série $\mu(i)$ est convergente, il est possible de déterminer une suite $\theta + h_n$ située sur P et telle que la série $\frac{h^2_n}{h_{n+1}}$ soit convergente. La réciproque est évidente. Nous dirons que P est *normal* ou *anormal* en M selon que la série $\mu(i)$ relative à M est convergente ou divergente.

Toute portion de P contenant M entre ses extrémités est, en même temps que P, normale ou anormale en M.

On montre sans peine que, si un ensemble P est normal en chacun de ses points, il existe, si petit que soit le nombre positif donné s, un nombre positif η et une portion P_1 de P, tels que, pour toute valeur de θ située sur P_1 et quelque soit θ' sur P entre $\theta-\eta$ et $\theta+\eta$, il est possible de trouver une suite $\theta+h=\theta', \theta+h_1, \ldots, \theta+h_n, \ldots$, de points situés sur P et tels que la série $\frac{h^2}{|h_1|}+\frac{h_1^2}{|h_2|}+ + \ldots + \frac{h_n^2}{|h_{n+1}|}+\ldots$ ait une somme inférieure à s.

De là résulte que, *si un ensemble parfait P est normal en chacun de ses points, l'ensemble des points de P où $\varphi(\theta)$ est non existante ou discontinue sur P, cet ensemble est non dense sur P.*

Considérons un ensemble parfait P dont la construction satisfait aux conditions suivantes. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ une suite de nombres positifs inférieurs à $^1/_2$, et σ_0 un segment quelconque. A la première opération, nous retranchons de σ_0 un intervalle, de manière qu'il subsiste sur σ_0 deux segments σ_1 ayant chacun une longueur supérieure à $\beta_1\sigma_0$. A la seconde opération, nous extrayons de chaque segment σ_1 un intervalle, de façon que chacun des deux segments restants surpasse ce même segment σ_1 multiplié par $\beta_2 \ldots$ A la n^e fois, nous opérons sur 2^n segments σ_n conservés à la suite de l'opération précédente. De chacun de ces segments, extrayons un intervalle de manière que chacun des deux segments σ_{n+1} restants surpasse le segment σ_n d'où il est extrait, multiplié par β_n. Et ainsi indéfiniment.

1°. Si la plus petite limite de β_n pour n infini est positive, et égale à μ, P possède en chacun de ses points un indice au plus égal à $\alpha=\frac{1-\mu-\mu^2}{\mu-\mu^2}$.

2°. Si $\sigma_{n+1}=\sigma_n\beta_n$, P est normal ou anormal en chacun de ses points, selon que la série $\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}{\beta_{n+1}}$ est convergente ou divergente.

Si donc $\beta_n=2^{-k^n}$, P est normal ou anormal selon que $k<2$ ou que $k\leq 2$.

L'ensemble E des points de non existence de $\varphi(\theta)$ est, nous l'avons vu, non dense sur le continu. Il se décompose en un ensemble non dense sur tout ensemble parfait (ou *clairsemé*) G_1 et un ensemble dense en lui-même G. Soit Π le dérivé de G. Π est parfait et G est partout dense sur Π. Π est anormal en tous les poins de G, sauf éventuellement en certains points formant un ensemble g non dense sur Π.

On peut montrer par des méthodes analogues aux précédentes, le résultat suivant.

Toute fonction $F(\theta)$ douée d'une dérivée seconde généralisée $f(\theta)$ (condition A) possède (indépendamment de la condition B) les propriétés ci-après:

L'ensemble E de non existence de la dérivée $F'(\theta)=\varphi(\theta)$ est non dense sur le continu. E est de mesure nulle. Les points où $\varphi(\theta)$ existe, sans posséder $f(\theta)$ pour dérivée exacte ou approximative, forment un ensemble de mesure nulle.

Sur tout ensemble dont P l'indice est en chaque point inférieur à 2, 1° *il existe une portion P_1 où $\varphi(\theta)$ existe, est continue, douée de nombres dérivés spéciaux à P finis,* 2° *$\varphi(\theta)$ admet en un ensemble de valeurs de θ partout dense sur P, la fonction $f(\theta)$ pour dérivée spéciale à P.*