Die *inneren Grenzmengen* der klassischen Theorie, d. h. die Durchschnitte von Fundamentalreihen von Bereichen, werden in der intuitionistischen Mengenlehre, weil sie nicht notwendig Mengencharakter besitzen, als *innere Grenzspezies* eingeführt. Dabei bleibt das Theorem der klassischen Mengenlehre, dass der Durchschnitt zweier innerer Grenzspezies wiederum eine innere Grenzspezies ist, bestehen; der analoge Satz für die Vereinigung fällt aber fort, und von der Haupteigenschaft der inneren Grenzmengen der klassischen Theorie, dass zu einer willkürlichen Punktmenge Q eine innere Grenzspezies existiert, welche ausser Q ausschliesslich Grenzpunkte der finalen Kohärenz von Q enthält, bleibt nur der folgende Bestandteil erhalten:

Zu jeder vollständig abbrechbaren Punktmenge π existiert eine innere Grenzspezies, welche mit der Vereinigung von π und einer Teilspezies der Abschliessung der finalen Kohärenz von π örtlich kongruent ist und eine mit π örtlich kongruente Punktmenge als Teilspezies enthält.

Die klassische Definition der *Messbarkeit* erleidet in der intuitionistischen Mengenlehre nur eine geringe Aenderung; die Sicherkeit der Messbarkeit verschwindet aber sowohl für die Bereiche wie für die abgeschlossenen Punktspezies und inneren Grenzspezies, und die Haupteigenschaft des klassischen Messbarkeitsbegriffes, dass die Vereinigung einer abzählbaren Menge messbarer Mengen ohne gemeinsame Punkte messbar und ihr Mass gleich der Summe der Masse ihrer Komponenten ist, wird in der intuitionistischen Mengenlehre folgendermassen formuliert:

Wenn F eine solche Fundamentalreihe von messbaren Punktspezies ist, dass die Inhalte der Vereinigungen ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge i bilden, so ist auch die Vereinigung von F messbar und ihr Inhalt gleich i.

Selbstverständlich erleidet der Begriff des *Punktes der Ebene* eine beträchtliche Verengerung, wenn in der betreffenden Definition statt "unbegrenzt fortgesetzte Folge", "Fundamentalreihe" gelesen wird. Bemerkenswert ist aber, dass das lineare Analogon dieses *engern* Punktbegriffes seinerseits noch erheblich mehr umfasst, als der klassische lineare Punktbegriff, der auf dem *Schnitte* beruht, wie in meiner gleichzeitig vorzulegenden Mitteilung über die Dezimalbruchentwickelung der reellen Zahlen näher erörtert wird.

„durch einen endlichen Dualbruch darstellbar" zu lesen ist, und dass man in der Spezies der endlich definierbaren Punkte der Ebene ein viel einfacheres Beispiel einer nicht-wohlkonstruierten Punktmenge besitzt.

Mathematics. — *"Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwickelung?"* [1]) By Prof. L. E. J. Brouwer.

(Communicated at the meeting of December 18, 1920).

§ 1.

Existenzbereich der unendlichen Dezimalbruchentwickelung auf dem Kontinuum.

Verstehen wir in der Menge der endlichen Dualbrüche ≥ 0 und ≤ 1 unter einem Intervalle λ_ν ein zwei Dualbrüche $\frac{a}{2^\nu}$ und $\frac{a+2}{2^\nu}$ als Endelemente besitzendes geschlossenes Intervall, unter einem *Punkte des Kontinuums* eine in unbegrenzter Fortsetzung begriffene Folge von Intervallen λ, deren jedes im Innern des nächstvorangehenden enthalten ist [2]), unter x einen variablen Punkt des Kontinuums, unter $F_n(x)$ einen n-stelligen Dezimalbruch mit der Eigenschaft, dass jeder links von ihm liegende Punkt des Kontinuums links von einem Intervalle von x liegt, während $F_n(x)+10^{-n}$ rechts von einem Intervalle von x liegt, unter $F(x)$ die eindeutige unendliche Dezimalbruchentwickelung von x, so besitzt $F_n(x)$ die (übrigens allen unstetigen Funktionen gemeinsame) Eigenschaft, dass ihr Existenzbereich G_n *nicht* mit dem Kontinuum zusammenfallen [3]) kann. Der Existenzbereich $G = \mathfrak{D}(G_1, G_2, \ldots)$ von $F(x)$ kann also erst recht nicht mit dem Kontinuum zusammenfallen, obgleich er sich (ebenso wie der Existenzbereich der regelmässigen Kettenbruchentwickelung von x) dem Kontinuum so eng anschmiegt, dass er mit

[1]) Ueber den Inhalt dieser Abhandlung wurde am 22. September 1920 auf der Naturforscherversammlung in Bad Nauheim ein referierender Vortrag gehalten.

[2]) Vgl. meine in Bd. XII der Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Eerste Sectie) erschienene Abhandlung: *„Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten"*, 2. Teil, S. 3, 4. Wie daselbst S. 4 Fussnote [1]) hervorgehoben und durch die vorliegende Arbeit klar ins Licht gestellt wird, sind die beiden S. 9 des 1. Teiles benutzten Begriffe der „reellen Zahl" bedeutend enger als der hier definierte Begriff des Punktes des Kontinuums. In einem ganz andern, aus dem Zusammenhang ersichtlichen Sinne wird der Ausdruck „reelle Zahl" der Expressivität wegen in der Ueberschrift und im Schlussparagraphen der vorliegenden Arbeit gebraucht.

[3]) a. a. O., 2. Teil, S. 5.

demselben einerseits örtlich übereinstimmt [1]), andrerseits inhaltsgleich [2]) ist [3]).

Die Definition des Punktes des Kontinuums erleidet indessen eine erhebliche Einschränkung, wenn wir in derselben statt „in unbegrenzter Fortsetzung begriffene Folge", „Fundamentalreihe" [4]) lesen. Zweck der folgenden Paragraphen ist, klarzustellen, inwiefern für diese *Punkte des Kontinuums im engern Sinne,* die unendliche Dezimalbruchentwickelung existiert.

§ 2.

Die Ergänzungselemente der abzählbar unendlichen, überall dicht geordneten Mengen.

Es sei eine abzählbar unendliche, im engern Sinne überall dicht geordnete [5]) Menge H gegeben. Es seien $g_1, g_2, g_3, \ldots$ die nach irgend einem, H als abzählbar unendliche Menge charakterisierenden, Abzählungsgesetze γ numerierten Elemente von H und es sei $\mathfrak{S}(g_1, g_2, \ldots g_\nu) = s_\nu$ gesetzt. Unter einem i_ν bzw. j_ν verstehen wir ein (eventuell aus einem einzigen Elemente bestehendes) geschlossenes Intervall [6]) von H, deren Endelemente zu s_ν gehören, deren Inneres aber höchstens ein bzw. kein einziges Element von s_ν enthält.

Unter einem *Ausfüllungselemente* r von H verstehen wir *erstens* eine jedenfalls ein Element besitzende Spezies von in unbegrenzter Fortsetzung begriffenen Folgen $F_\alpha, F_{\alpha+1}, F_{\alpha+2}, \ldots$ (α eine für r bestimmte positive ganze Zahl), wo jedes F_ν ein i_ν und jedes $F_{\alpha+\nu+1}$ in $F_{\alpha+\nu}$ enthalten ist, während F_ν für jedes ν zu einer für r bestimmten Spezies S_ν gehört, von der je zwei Elemente ein Element von s_ν gemeinsam haben; *zweitens* eine jedenfalls ein Element besitzende Spezies von in unbegrenzter Fortsetzung begriffenen Folgen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ von je ein bestimmbares Element besitzenden abtrennbaren Teil-

[1]) a. a. O., 2. Teil, S. 6.

[2]) a. a. O., 2. Teil, S. 29, 30.

[3]) Natürlich kann auch der Existenzbereich einer mittels einer Funktion der unendlichen Dezimalbruchentwickelung von x erklärten Funktion von x nicht über G hinausgehen. Z. B. hat die im Jahresber. d. D. M.-V. 23, S. 80 von mir definierte Funktion $f(x)$ genau G zum Existenzbereich. Während aber die Funktion $F(x)$ des Textes in der auf dem Kontinuum überall dichten Punktmenge G *gleichmässig stetig* ist und sich *auf Grund dieser Eigenschaft* zu einer *auf dem vollen Kontinuum existierenden* Funktion $\varphi(x) = x$ erweitern lässt, ist für $f(x)$ jede Erweiterung auf das volle Kontinuum ausgeschlossen.

[4]) Vgl. „*Begründung der Mengenlehre usw.*", 1. Teil, S. 14.

[5]) a. a. O., 1. Teil, S. 16.

[6]) a. a. O., 1. Teil, S. 13.

mengen [1]) von H, wenn in jeder Folge jedes $\zeta_{\nu+1}$ in ζ_ν enthalten ist und eine Fundamentalreihe $n_1, n_2, n_3, \ldots (n_{\nu+1} \geq n_\nu)$ von ganzen positiven Zahlen und ein Ausfüllungselement erster Art r_0 von H bestimmt sind mit der Eigenschaft, dass zu jedem Elemente $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ von r ein Element $F_\alpha, F_{\alpha+1}, F_{\alpha+2}, \ldots$ von r_0 existiert, so dass ζ_{n_ν} zu $F_{\alpha+\nu}$ gehört.

Unter einem *Ergänzungselemente nullter Ordnung* oder kurz einem *Ergänzungselemente* r von H verstehen wir *erstens* eine Fundamentalreihe $F_\alpha, F_{\alpha+1}, F_{\alpha+2}, \ldots$ (α eine für r bestimmte positive ganze Zahl), wo jedes F_ν ein i_ν und jedes $F_{\alpha+\nu+1}$ in $F_{\alpha+\nu}$ enthalten ist; *zweitens* eine jedenfalls ein Element besitzende Spezies von in unbegrenzter Fortsetzung begriffenen Folgen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ von je ein bestimmbares Element besitzenden abtrennbaren Teilmengen von H, wenn in jeder Folge jedes $\zeta_{\nu+1}$ in ζ_ν enthalten ist und eine Fundamentalreihe $n_1, n_2, n_3, \ldots (n_{\nu+1} \geq n_\nu)$ von ganzen positiven Zahlen und ein Ergänzungselement erster Art $F_\alpha, F_{\alpha+1}, F_{\alpha+2}, \ldots$ von H bestimmt sind, so dass jedes ζ_{n_ν} von r zu $F_{\alpha+\nu}$ gehört. [2])

Wenn $_1r$ und $_2r$ Ausfüllungselemente von H sind und jedes $_1F_\mu$ mit jedem $_2F_\nu$ ein gemeinsames Element besitzt, so sagen wir, dass $_1r$ und $_2r$ *in H zusammenfallen.* Ein mit einem Ergänzungselemente von H in H zusammenfallendes Ausfüllungselement von H *wird gleichfalls als Ergänzungselement von H bezeichnet.*

Wenn das Element g von H zu jedem F_ν des Ausfüllungselementes r von H gehört, so sagen wir, dass r und g *in H zusammenfallen.*

Wenn $_1r$ und $_2r$ Ausfüllungselemente von H sind und man ein $_1F_\mu$ und ein $_2F_\nu$ ohne gemeinsame Elemente angeben kann, so sagen wir, dass $_1r$ und $_2r$ *in H örtlich verschieden sind.*

Wenn man ein F_ν des Ausfüllungselementes r von H angeben kann, zu dem das Element g von H nicht gehört, so sagen wir, dass r und g *in H örtlich verschieden sind.*

Das Ergänzungselement bzw. Ausfüllungselement r von H heisst ein *Ergänzungselement erster Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von H entweder die Relation $g \geq r$ (d. h. jedes rechts von g gelegene Element von H liegt rechts von einem bestimmbaren F_ν von r), oder die Relation $g \leq r$ (d. h. jedes links von g gelegene Element von H liegt links von einem bestimmbaren F_ν von r) hergeleitet werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn r mit einem Ergänzungselemente r' von H, von dem jedes F'_ν ein j_ν ist, zusammenfällt.

[1]) a. a. O., 1. Teil, S. 4.

[2]) Ob der Begriff des Ausfüllungselementes sich auf den des Ergänzungselementes zurückführen lässt, bleibe hier dahingestellt.

Die Ergänzungselemente erster Ordnung von H *entsprechen den Dedekindschen Schnitten* von H.

Das Ergänzungselement erster Ordnung r von H heisst ein *Ergänzungselement zweiter Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von H die Relation $g \leq r$ entweder hergeleitet, oder ad absurdum geführt werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn r' sich so wählen lässt, dass kein μ mit der Eigenschaft, dass die rechten Endelemente von F'_ν und F'_μ für jedes $\nu > \mu$ identisch sind, existieren kann.

Das Ergänzungselement zweiter Ordnung r von H heisst ein *Ergänzungselement dritter Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von H entweder die Relation $g > r$ (d. h. man kann ein links von g gelegenes F_ν von r bestimmen), oder die Relation $g \leq r$ hergeleitet werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn r' sich so wählen lässt, dass zu jedem F'_μ ein solches F'_ν bestimmt werden kann, dessen rechtes Endelement links vom rechten Endelemente von F'_μ gelegen ist.

Ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H heisst ein *Ergänzungselement vierter Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von H entweder die Relation $g > r$, oder die Relation $g = r$ (d. h. g und r fallen in H zusammen), oder schliesslich $g < r$ (d. h. man kann ein rechts von g gelegenes F_ν von r bestimmen) hergeleitet werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn r' sich so wählen lässt, dass zu jedem F'_μ ein solches $\nu > \mu$ bestimmt werden kann, dass die beiden Endelemente von F'_ν von den beiden Endelementen von F'_μ verschieden sind.

Die vorstehenden Definitionen der Ausfüllungselemente sowie der Ergänzungselemente nullter, erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung von H sind für gegebene ordnende Relationen in H offenbar unabhängig vom Abzählungsgesetze γ.

Sei M eine endliche Menge oder eine Fundamentalreihe von Ergänzungselementen vierter Ordnung von H_ν, deren je zwei in H_ν örtlich verschieden sind und deren jedes von jedem Elemente von H_ν in H_ν örtlich verschieden ist. Die Vereinigung von M und H_ν bildet eine abzählbar unendliche, im engern Sinne überall dicht geordnete Menge $H_{\nu+1}$. Jedes Ergänzungselement von H_ν ist gleichzeitig Ergänzungselement von $H_{\nu+1}$ und jedes Ergänzungselement h-ter Ordnung von $H_{\nu+1}$ fällt in $H_{\nu+1}$ zusammen mit einem Ergänzungselemente h-ter Ordnung von H_ν.

Die vorstehende Beziehung besteht sowohl zwischen der geordneten Menge der endlichen Dualbrüche H_0 und der geordneten Menge der endlichen Dezimalbrüche H_1, wie zwischen H_1 und der geordneten Menge der rationalen Zahlen H_2.

§ 3.

Ergänzungselemente, Dezimalbruchentwickelungen und Kettenbruchentwickelungen.

Ein Ergänzungselement erster Ordnung von H lässt in H die *Ortsbestimmung erster Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der endlichen Dezimalbrüche gelesen wird, als die *mehrdeutige unendliche Dezimalbruchentwickelung* herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung erster Ordnung zulässt, ein Ergänzungselement erster Ordnung von H.

Die Ortsbestimmung erster Ordnung in H kann für in H zusammenfallende Ergänzungselemente von H verschieden ausfallen.

Ein Ergänzungselement zweiter Ordnung von H lässt in H die *Ortsbestimmung zweiter Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der endlichen Dezimalbrüche gelesen wird, als die *eindeutige unendliche Dezimalbruchentwickelung* (für welche die Existenz einer letzten von 9 verschiedenen Ziffer ausgeschlossen ist) herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung zweiter Ordnung zulässt, ein Ergänzungselement zweiter Ordnung von H.

Zwei Ergänzungselemente von H, für welche die Ortsbestimmung zweiter Ordnung in H verschieden ausfällt, können in H nicht zusammenfallen.

Ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H lässt in H die *Ortsbestimmung dritter Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der rationalen Zahlen gelesen wird, als die *unendliche reduziert-regelmässige Kettenbruchentwickelung* herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung dritter Ordnung zulässt, ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H.

Zwei Ergänzungselemente von H, für welche die Ortsbestimmung dritter Ordnung in H verschieden ausfällt, sind in H örtlich verschieden.

Ein Ergänzungselement vierter Ordnung von H lässt in H die *Ortsbestimmung vierter Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der rationalen Zahlen gelesen wird, als die *eindeutige regelmässige Kettenbruchentwickelung* (welche eventuell endlich ausfallen kann) herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung vierter Ordnung zulässt, ein Ergänzungselement vierter Ordnung von H.

Zwei Ergänzungselemente von H, für welche die Ortsbestimmung vierter Ordnung in H verschieden ausfällt, sind in H örtlich verschieden.

§ 4.

Existenz der Dezimalbruchentwickelung reeller algebraischer Zahlen.

Seien r_1 und r_2 beliebige reelle algebraische Zahlen, d. h. je einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten genügende Ausfüllungselemente der von den rationalen Zahlen gebildeten geordneten Menge H_2. Alsdann kann man eine algebraische Gleichung $F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ mit ganzen rationalen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante D bestimmen, der sowohl r_1 wie r_2 genügt. Seien $w_1, w_2, \ldots w_n$ die (mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit approximierbaren) Wurzeln von $F(x) = 0$, so können w_r und w_s für $r \neq s$ nicht in H_2 zusammenfallen. Sei ϱ eine rationale Zahl, welche die Moduln aller Wurzeln von $F(x) = 0$ übersteigt, und $b = 2\varrho$, so ist

$$|w_r - w_s| < b \qquad (r \neq s).$$

Weil aber

$$\prod_{\mu \neq \nu} (w_\mu - w_\nu)^2 = \frac{D}{a_0^{2n-2}},$$

so ist andrerseits

$$|w_r - w_s|^2 > \frac{D}{a_0^{2n-2}\, b^{n^2-n-2}},$$

so dass wir mittels hinreichend genauer Approximierung von r_1 und r_2 entweder Sicherheit erlangen, dass r_1 und r_2 mit derselben Wurzel w_α zusammenfallen, oder ein r_1 und r_2 trennendes rationales Intervall bestimmen können. Indem wir dieses Resultat zunächst spezialisieren für den Fall, dass r_2 eine rationale Zahl ist, ersehen wir mühelos, dass r_1 in H_3 entweder mit einem Elemente von H_2 zusammenfällt oder von jedem Elemente von H_2 örtlich verschieden ist, so dass r_1 *sich als Ergänzungselement vierter Ordnung von H_2* erweist, mithin *sowohl in einen eindeutigen unendlichen Dezimalbruch, wie in einen eindeutigen regelmässigen Kettenbruch entwickelt werden kann.*

Setzen wir nun weiter voraus, dass weder r_1 noch r_2 mit einem Elemente von H_2 zusammenfällt, so *fallen sie entweder in H_3 zusammen, oder sind in H_3 örtlich verschieden.*

Hieraus folgern wir, dass die Spezies der reellen algebraischen Zahlen eine abzählbar unendliche, im engern Sinne überall dicht geordnete Menge H_3 bildet, welche zu H_2 die am Schluss von § 2 erklärte Beziehung eines $H_{\nu+1}$ zu einem entsprechenden H_ν besitzt.

§ 5.

Existenz der Dezimalbruchentwickelung von π.

Seien a und b ganze positive Zahlen und $a < b$. Wir verstehen unter K_0 den unbedingt konvergenten [1] unendlichen Kettenbruch

$$\left[\frac{a}{b}, -\frac{a^2}{(2\nu+1)b}\right]_1^\infty$$

und unter K_m den unbedingt konvergenten unendlichen Kettenbruch

$$\left[\frac{a^2}{(2m+1)b}, -\frac{a^2}{(2\nu+1)b}\right]_{m+1}^\infty.$$

Alsdann gelten die Beziehungen

$$tg\,\frac{a}{b} = K_0 = \frac{a}{b - K_1}$$

$$K_m = \frac{a^2}{(2m+1)b - K_{m+1}} \qquad (m \geq 1)$$

Seien $x_0, x_1, x_2, \ldots$ reelle Variablen, welche durch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{a}{b - x_1} \\ x_m &= \frac{a^2}{(2m+1)b - x_{m+1}} \qquad (m \geq 1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\dagger)$$

verbunden sind, und x'_a eine rationale Zahl zwischen 0 und 1, also $< \frac{1}{2}b$. Mittels (†) leiten wir aus x'_a weitere rationale Zahlen $x'_{a-1}, x'_{a-2}, \ldots x'_1, x'_0$ und $x'_{a+1}, x'_{a+2}, \ldots$ her. Von diesen fallen $x'_{a-1}, x'_{a-2}, \ldots x'_1, x'_0$ alle positiv aus, während $x'_{a-1}, x'_{a-2}, \ldots x'_1$ alle $< \frac{1}{2}b$ und $x'_0 < \frac{2a}{b}$ wird. Weiter kann man ein kleinstes $r > a$ bestimmen mit der Eigenschaft, dass $x_r' \leq 0$ oder ≥ 1 wird [2].

Sei α eine (für das weitere hinreichend klein gewählte) positive rationale Zahl und η_a ein solches geschlossenes rationales Wertintervall von x_a, dass sowohl η_a, wie die auf Grund von (†) entsprechenden Wertintervalle $\eta_{a+1}, \eta_{a+2}, \ldots \eta_r$ von $x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots x_r$ rechts vom Werte 0 und links vom Werte 1 liegen, während, wenn wir noch die auf Grund von (†) entsprechenden Wertintervalle von $x_{a-1}, x_{a-2}, \ldots x_0$ mit $\eta_{a-1}, \eta_{a-2}, \ldots \eta_0$ bezeichnen, jedes K_ν für $0 \leq \nu \leq r$ in η_ν enthalten ist und eine Entfernung $> 2\alpha$ von den Endwerten von η_ν besitzt. Alsdann können wir eine solche ganze nichtnegative Zahl $s \leq r$ bestimmen, dass $x'_0, x'_1, \ldots x'_{s-1}$ der Reihe nach in $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{s-1}$ enthalten sind, während x'_s eine Entfernung $> \alpha$ von K_s besitzt.

1) Vgl. Pringsheim, Münchener Berichte 28 (1898), S. 299 fgg.

2) a. a. O., S. 318.

Sei β' eine solche positive rationale Zahl, dass für jedes zu η_0 gehörige x_s die Ungleichung

$$\frac{dx_0}{dx_s} > \beta'$$

gilt, so besitzt x'_s eine Entfernung $> \alpha\beta'$ von K_0.

Sei x_0'' eine solche rationale Zahl, dass die auf Grund von (†) entsprechende Zahl $x_a'' \leq 0$ oder ≥ 1 ausfällt. Alsdann können wir eine solche ganze nichtnegative Zahl $t \leq a$ bestimmen, dass $x''_0, \ldots x''_{t-1}$ der Reihe nach in $\eta_0, \ldots \eta_{t-1}$ enthalten sind, während x_t'' eine Entfernung $> \alpha$ von K_t besitzt.

Sei β'' eine solche positive rationale Zahl, dass für jedes zu η_0 gehörige x_s die Ungleichung

$$\frac{dx_0}{dx_t} > \beta''$$

gilt, so besitzt x_0'' eine Entfernung $> \alpha\beta''$ von K_0.

Zu einer beliebigen positiven rationalen Zahl $i_1 < 1$ und einer beliebigen positiven rationalen Zahl i kann man mithin eine solche positive rationale Zahl $i_2 < 1$ bestimmen, dass

$$| i - tg\, i_1 | > i_2.$$

Insbesondere kann man zu einer beliebigen positiven rationalen Zahl $i_1 < 1$ eine solche positive rationale Zahl $i_2 < 1$ bestimmen, dass

$$| 1 - tg\, i_1 | > i_2,$$

mithin auch (weil im zwischen den Werten 0 und 2 enthaltenen Wertegebiet von y die Ungleichung

$$\frac{d\, arctg\, y}{dy} \geq \frac{1}{5}$$

besteht)

$$\left| \frac{\pi}{4} - i_1 \right| > \frac{i_2}{5},$$

so dass *die Zahl π sich als Ergänzungselement vierter Ordnung von H_2 erweist*[1], *mithin sich sowohl in einen eindeutigen unendlichen Dezimalbruch wie in einen eindeutigen regelmässigen Kettenbruch entwickeln lässt.*

Die Entwickelungen dieses und des vorangehenden Paragraphen bieten Beispiele der Charakterisierung von Ergänzungselementen bzw. Ausfüllungselementen r von H als Ergänzungselemente vierter

[1]) Die gleiche Eigenschaft der Zahl e ist eine unmittelbare Folge der regelmässigen Kettenbruchentwickelung

$$\frac{e-1}{2} = \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2+4\nu}\right]_1^\infty.$$

Ordnung von H mittels *positiver Rationalitätsbeweise in H* (die ein Element von H bestimmen, mit dem r zusammenfällt) oder *positiver Irrationalitätsbeweise in H* (die r als von jedem Elemente von H örtlich verschieden erkennen lassen). Hierzu ist zu bemerken, dass sich aus einem *negativen Rationalitäts- bzw. Irrationalitätsbeweise in H* (der die Annahme, dass r von jedem Elemente von H örtlich verschieden wäre bzw. mit einem Elemente von H zusammenfiele, ad absurdum führt) nicht einmal folgern lässt, dass r Ergänzungselement erster Ordnung von H ist. Eben deshalb haben wir in diesem § den Lambertschen negativen Irrationalitätsbeweis von π einer passenden Umarbeitung unterzogen und in die obige positive Form gebracht. Die weiteren klassischen Beweise desselben Satzes lassen sich übrigens in analoger Weise ergänzen.

§ 6.

Reelle Zahlen, welche keine Dezimalbruchentwickelung besitzen.

Sei c_n die n-te Ziffer der unendlichen Dezimalbruchentwickelung von π. Wir werden sagen, dass n sich im *ersten Falle* befindet, wenn $c_n, c_{n+1}, \ldots c_{n+4}$ alle gleich sind, im *zweiten Falle*, wenn $c_n, c_{n+1}, \ldots c_{n+9}$ alle verschieden sind, und im *dritten Falle*, wenn weder der erste, noch der zweite Fall vorliegt.

Wir definieren ein Ergänzungselement r der geordneten Menge der endlichen Dezimalbrüche H_1 mittels der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n-1},$$

wo $a_n = 0$, wenn n sich im ersten Falle befindet, $a_n = 10$, wenn n sich im zweiten Falle befindet, sonst $a_n = 9$.

Dieses Ergänzungselement würde erst dann ein Ergänzungselement erster Ordnung von H_1 darstellen, m. a. W. eine unendliche Dezimalbruchentwickelung zulassen, wenn man eine Methode besässe, für jedes beliebige im dritten Falle befindliche n, *entweder* die Existenz eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ mit der Eigenschaft, dass jede zwischen n und m liegende ganze Zahl sich im dritten Falle befände, ad absurdum zu führen, *oder* die Existenz eines im ersten Falle befindlichen $m > n$ mit der Eigenschaft, dass jede zwischen n und m liegende ganze Zahl sich im dritten Falle befände, ad absurdum zu führen.

Wir definieren weiter ein Ergänzungselement erster Ordnung r von H_1 mittels der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n-1},$$

wo jedes a_n entweder gleich 0 oder gleich 9 ist, während $a_1 = 9$ und a_{n+1} dann und nur dann von a_n verschieden ist, wenn n sich im zweiten Falle befindet.

Dieses Ergänzungselement erster Ordnung würde erst dann ein Ergänzungselement zweiter Ordnung von H_1 darstellen, m. a. W. die im § 3 definierte eindeutige unendliche Dezimalbruchentwickelung zulassen, wenn man eine Methode besässe, für jedes ganze positive n mit der Eigenschaft, dass entweder keine oder eine gerade Anzahl von ganzen positiven Zahlen $\leq n$ sich im zweiten Falle befindet, *entweder* die Existenz *oder* die Abwesenheit eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ ad absurdum zu führen.

Ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H_1 würde dasselbe Ergänzungselement erst dann darstellen, wenn man eine Methode besässe, für jedes ganze positive n mit der Eigenschaft, dass entweder keine oder eine gerade Anzahl von ganzen positiven Zahlen $\leq n$ sich im zweiten Falle befindet, *entweder* die Existenz eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ ad absurdum zu führen, *oder* ein im zweiten Falle befindliches $m > n$ anzugeben.

Wir definieren schliesslich ein Ergänzungselement dritter Ordnung r von H_1 mittels der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n-1},$$

wo $a_n = 9$, wenn n sich im zweiten Falle befindet, sonst $a_n = 0$.

Dieses Ergänzungselement dritter Ordnung würde erst dann ein Ergänzungselement vierter Ordnung von H_1 darstellen, wenn man eine Methode besässe, für jedes ganze positive n, *entweder* die Existenz eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ ad absurdum zu führen, *oder* ein im zweiten Falle befindliches $m > n$ anzugeben.

Sämtliche Beispiele dieses § fallen übrigens in H_1 zusammen mit Ergänzungselementen vierter Ordnung der geordneten Menge der endlichen Dualbrüche H_0.

Für Beispiele reeller Zahlen ohne Dezimalbruchentwickelung besteht bei der Weiterentwickelung der Mathematik stets die Möglichkeit, dass sie einmal hinfällig werden; dann aber können sie immer durch solche, welche ihre Gültigkeit behalten haben, ersetzt werden.

ERRATUM.

Proceedings, Vol. XX (2), p. 1156, l. 13 from the bottom: *read* in the formula: „$-0.00003219\ T^4$" *for* „$-0.00005102\ T^4$".

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

PROCEEDINGS

VOLUME XXIII

N°. 7.

President: Prof. H. A. LORENTZ.

Secretary: Prof. L. BOLK.

(Translated from: "Verslag van de gewone vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afdeeling," Vols. XXVIII and XXIX).

CONTENTS.