Mathematik. — "*Ueber die zu einem Punkte und einer Geraden gehörigen Polarkurven inbezug auf eine gegebene algebraische Kurve.*" Von F. KÖLMEL in Baden-Baden.

(Mitgeteilt von Prof. JAN DE VRIES in der Sitzung vom 24 November 1923).

1. *Die Aufgabe.* Wird eine algebraische Kurve n-ter Ordnung durch eine Gerade in den n Punkten $R_1, R_2, \ldots R_n$ geschnitten, so ist nach JONQUIÈRES [1]) der harmonische Mittelpunkt r-ter Ordnung R zu diesen n Punkten und einem Zentrum O definiert durch die Gleichung

$$\binom{n}{r}\cdot\left(\frac{1}{OR}\right)^r-\binom{n-1}{r-1}\cdot\left(\frac{1}{OR}\right)^{r-1}\cdot\sum_1^n{}_i\left(\frac{1}{OR_i}\right)_1+\binom{n-2}{r-2}\cdot\left(\frac{1}{OR}\right)^{r-2}\cdot$$

$$\cdot\sum_1^n{}_i\left(\frac{1}{OR_i}\right)_2-\ldots+(-1)^n\cdot\binom{n-r}{0}\cdot\left(\frac{1}{OR}\right)^0\cdot\sum_1^n{}_i\left(\frac{1}{OR_i}\right)_n=0$$

wo $\binom{n}{k}$ Binomialkoeffizienten und $\sum_1^n\left(\frac{1}{OR_i}\right)_k$ die Summe der Produkte der reziproken Abschnitte OR_i zu je k bedeutet, $i=1, 2, \ldots r$.

Beschreibt die schneidende Gerade ein Strahlbüschel mit dem Zentrum Q, wahrend O eine Gerade p durchläuft, so beschreibt der harmonische Mittelpunkt r-ter Ordnung eine algebraische Kurve, die ich die zu dem Zentrum Q und der Geraden p gehörige Polarkurve r-ter Stufe inbezug auf die gegebene Grundkurve n-ter Ordnung nenne.

Allgemein lassen sich die Polarkurven auch auffassen als Erzeugnis des Strahlbüschels Q und des ihm projektiven Büschels der gewöhnlichen Polaren der Punkte der Geraden p.

2. Die vorliegende Mitteilung behandelt zunächst den Fall:

Die feste Grundkurve sei ein Kegelschnitt.

Hier kommt nur die Polarkurve erster Stufe in Betracht, da die zweiter Stufe identisch mit der gegebenen Kurve ist.

---

[1]) Vgl. JONQUIÈRES. Mémoire sur la théorie des polaires etc. Journal de Liouville. 1857 oder
CREMONA. Geometrische Theorie der ebenen Kurven. Deutsche Ausgabe von Curtze, Greifswald 1865.

I. *Geometrisches.* Es sei f der gegebene Kegelschnitt, P der Pol von p inbezug auf f, q die Polare von Q und y die Polare des Schnittpunktes Y von p und q.

Um auf einem Strahle α von Q den gesuchten vierten harmonischen Punkt zu finden, schneiden wir α mit p (der Schnittpunkt sei $\mathfrak{A}$) und konstruieren zu $\mathfrak{A}$ die Polare a inbezug auf f, die durch P geht. Der Schnittpunkt A von $\alpha \times a$ ist dann der gesuchte vierte harmonische Punkt. Daraus ergibt sich sofort: Jedem Strahl α des Strahlbüschels Q ist die konjugierte Polare a inbezug auf f durch den Punkt P zugeordnet, daher sind diese beiden Büschel projektiv und *der gesuchte Ort des vierten harmonischen Punktes ist ein Kegelschnitt. Diesen nenne ich den Polarkegelschnitt des Punktes Q und der Geraden p inbezug auf den gegebenen Kegelschnitt f und bezeichne ihn mit Φ.*

Aus dem obigen folgt, dass Q und p mit P bezw. q vertauschbar sind.

3. Die Φ geht jedenfalls durch die Schnittpunkte C, D von p mit f, ferner durch die Schnittpunkte U, V von q mit f, durch die Punkte Q und P und berührt die Geraden YQ und YP in Q bezw. P. XYZ ist das gemeinsame Polardreieck für f und Φ. Es ist auch leicht zu entscheiden, welcher Art der Kegelschnitt Φ ist. Soll nämlich Φ einen unendlich fernen Punkt B_∞ haben, so müssen die 2 entsprechenden Strahlen β und b der projektiven Büschel Q und P parallel sein, somit liegt der vierte harmonische Punkt in der Mitte der Schnittpunkte von β mit f.

Verbindet man diese Mitte mit M, so erhält man einen Strahl, der zu β konjugierte Polare ist. Konstruiert man also zu allen Strahlen β von Q die konjugierten Polaren durch M, so erhält man wieder ein zu dem Büschel Q projektives Büschel M und das Erzeugnis dieser zwei projektiven Büschel ist wieder ein $C_2 \equiv \lambda_1$, *der alle Sehnen in f, die durch Q gehen, halbiert.* Schneidet man λ_1 mit p, so geben die Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte mit Q die Richtungen der Asymptoten von Φ an. *Je nachdem also λ_1 die Gerade p in 2 Punkten schneidet, oder berührt oder gar nicht trifft, ist Φ eine Hyperbel, oder Parabel oder Ellipse.* λ_1 geht durch M, Q, U, V. Es gibt noch einen zweiten solchen entscheidenden Kegelschnitt λ_2, der durch M, P, C und D geht und analog wie λ_1 konstruiert wird. Dessen Schnitt mit q gibt dann die Entscheidung. λ_1 und λ_2 bleiben dieselben, wenn Q bezw. P erhalten bleibt, während p bezw. q sich ändert. Für alle möglichen Lagen von p bilden die λ_1 ein Netz von C_2 durch die Punkte Q, V, U; entsprechendes gilt für λ_2.

Auch der vierte Schnittpunt O von λ_1 mit Φ ist leicht anzugeben:

Man verbinde M mit P und schneide MP mit λ_1, der Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt O. Denn PM und p sind konjugierte Richtungen inbezug auf f. Zieht man also $QO//p$ so sind QO und PO ($= MO$) entsprechende Strahlen in den projektiven Büscheln Q und P bezw. Q und M; somit ist der Schnittpunkt von PM und QO sowohl ein Punkt von λ_1 als von Φ. Zieht man ferner QM und $PG//q$, so ist der Schnittpunkt dieser 2 Geraden sowohl ein Punkt von Φ als von λ_1. Entsprechendes gilt für λ_2.

Endlich kann man noch den Mittelpunkt M_3 von Φ bestimmen. Die Verbindungsgerade von Y mit der Mitte von QP geht durch M_3; ebenso die Verbindungsgerade der Mitten der Sehnen CD und QO und die Verbindungsgerade der Mitten von UV und PC. Auf den Durchmessern QM_3 und PM_3 lassen sich auch die Endpunkte E bezw. H bestimmen, die Tangenten in H und E sind dann parallel bezw. zu den Tangenten YQ und YP, so dass $YSTR$ ein dem Φ umschriebenes Parallelogramm ist.

4. Von besonderen Fällen je nach der Lage von Q und p seien kurz folgende erwähnt;

a. Ist p die unendlich ferne Gerade, so wird $P \equiv M$, $\Phi \equiv \lambda_1$.

b. Wenn p den f berührt, so berührt Φ den f in P und oskuliert λ_2 in diesem Punkte.

c. Wenn p durch M geht, hat Φ mindestens einen (reellen) unendlich fernen Punkt.

d. Wenn $p \equiv q$, so ist auch $P \equiv Q$ und Φ degeneriert in das von Q an f gehende Tangentenpaar. (Vgl. Analytisches.)

e. Wenn p durch Q geht, so liegt P auf q und Φ zerfällt in p bzw. q. (Gewöhnliche Polare.)

II. *Analytisches.*

Bezeichnungen.

5. Es seien:

$$f(x,y,z) \equiv a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, xz + 2\, a_{23}\, yz + a_{33}\, z^2 = 0 \quad (1)$$

die Gleichung des festen Kegelschnittes f, ebenso

$$g(x,y,z) \equiv b_{11}\, x^2 + 2\, b_{12}\, xy + b_{22}\, y^2 + 2\, b_{13}\, xz + 2\, b_{23}\, yz + b_{33}\, z^2 = 0 \quad (2)$$

die Gleichung eines zweiten Kegelschnittes g; $F(u, v, w)$ und $G(u, v, w)$ die adjungierten Formen zu f, bezw. g;

A und B die Determinanten von f, bezw. g; A_{ik}, B_{ik} die Unterdeterminanten von A und B,

$$3\,\theta = \sum_{i,k=1,2} a_{ik} B_{ik},\ 3\,H = \sum_{i,k=1,2} b_{ik}\, A_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die beiden simultanen Invarianten von f und g,

$$\left.\begin{aligned} H = \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial a_{ik}} \cdot b_{ik}\right) = \Sigma\left(\frac{\partial G}{\partial b_{ik}} \cdot a_{ik}\right) = H(u,v,w) = H_{11}u^2 + 2H_{12}uv + \\ + H_{22}v^2 + 2H_{13}uv + 2H_{23}vw + H_{33}w^2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

die simultane Contravariante zu f und g, ferner x_0, y_0, z_0 die Koordinaten von Q, $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ die von P, u_0, v_0, w_0 die L. K. von q und $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$, $\bar{w}_0$ die L. K. von p, sodass

$$u_0 = f_1(x_0),\ v_0 = f_2(y_0),\ w_0 = f_3(z_0);\ \bar{u}_0 = f_1(\bar{x}_0),\ \bar{v}_0 = f_2(\bar{y}_0), \bar{w}_0 = f_3(\bar{z}_0)$$

und umgekehrt:

$$x_0 = F_1(u_0),\ y_0 = F_2(v_0) \text{ u.s.w.}$$

Dabei ist

$$f_1(x) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x},\ f_2(y) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y},\ f_3(z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z};$$

$$f_1(x_0) = \left.\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, y=y_0,\, z=z_0}; \quad f_2(y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=x_0,\, y=y_0,\, z=z_0}$$

$$F_1(u) = \frac{\partial F(u, v, w)}{\partial u}; \quad F_1(u_0) = \left.\frac{\partial F(u, v, w)}{\partial u}\right|_{u=u_0,\, v=v_0,\, w=w_0},$$

woraus die übrigen Bezeichnungen sich von selbst ergeben. Dann ist auch

$$\Sigma H_{ik} a_{ik} = 6\theta,\ \Sigma H_{ik} b_{ik} = 6H, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

und

$$\left.\begin{aligned} B_{11}a_{11} + B_{12}a_{12} + B_{13}a_{13} + H_{11}b_{11} + H_{12}b_{12} + H_{13}b_{13} = 3\theta \\ A_{11}b_{11} + A_{12}b_{12} + A_{13}b_{13} + H_{11}a_{11} + H_{12}a_{12} + H_{13}a_{13} = 3H \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

6. Für einen Punkt R der Polarkurve erster Stufe zu O und p gilt dann

$$\frac{2}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wo O der Schnittpunkt eines Strahles des Büschels Q mit p, R_1, R_2 die Schnittpunkte mit f sind. Sind ξ, η, ζ die Koordinaten von O, so folgt aus Obigem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{(x-\xi) + \lambda_1(x_0-\xi)} + \frac{\lambda_2}{(x-\xi) + \lambda_2(x_0-\xi)} = 0, \\ \frac{\lambda_1}{(y-\eta) + \lambda_1(y_0-\eta)} + \frac{\lambda_2}{(y-\eta) + \lambda_2(y_0-\eta)} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

wobei λ_1, λ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$f(x_0,y_0,z_0) + \lambda \cdot \{f_1(x_0) \cdot x + f_2(y_0) \cdot y + f_3(z_0) \cdot z\} + \lambda^2 \cdot f(x,y,z) = 0 \quad (9)$$

sind, und für ξ,η,ζ die Gleichung besteht:

$$\overline{u_0}\,\xi + \overline{v_0}\,\eta + \overline{w_0}\,\xi = 0.$$

Durch Elimination von λ,ξ,η,ζ erhält man als Gleichung für die Polarkurve erster Stufe:

$$\left.\begin{aligned} &2f(x,y,z) \cdot (\overline{u_0}\,x_0 + \overline{v_0}\,y_0 + \overline{w_0}\,z_0) - \\ &- \{f_1(x_0) \cdot x + f_2(y_0) \cdot y + f_3(z_0) \cdot z\} \cdot \{\overline{u_0}\,x + \overline{v_0}\,y + \overline{w_0}\,z\} = 0 \equiv \Phi(x,y,z) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Unter Anwendung der oben angegebenen Beziehungen zwischen den u_0,v_0,w_0 und x_0,y_0,z_0 kann man der Gleichung noch verschiedene andere Formen geben, von denen wir gelegentlich am passenden Ort Gebrauch machen werden. Erwähnt sei nur folgende Form:

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,z) \equiv &\{f_1(x) \cdot x + f_2(y) \cdot y + f_3(z) \cdot z\} \cdot \{f_1(\overline{x_0})\,x_0 + f_2(\overline{y_0})\,y_0 + f_3(\overline{z_0}) \cdot z_0\} \\ &- \{f_1(x_0)\,x + f_2(y_0) \cdot y + f_3(z_0) \cdot z\} \cdot \{f_1(\overline{x_0})\,x + f_2(\overline{y_0})\,y + f_3(\overline{z_0}) \cdot z\} = 0. \end{aligned}$$

aus der die Vertauschbarkeit von Q und P besonders evident ist.

7. Zunächst ersieht man, dass die Φ-Kurve durch den Schnitt von f mit p geht, und dass sie, wenn Q auf p liegt, in p und q zerfällt; auch die Vertauschbarkeit von Q und p mit P und q ergiebt sich mit Rücksicht auf die in (5) gegebenen Beziehungen.

Ist

$$(x\,z_0 - x_0 z) + \lambda\,(y z_0 - y_0 z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

das Strahlbüschel Q, so ist das Strahlbüschel der Polaren zu den Schnittpunkten mit p gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} &\{f_1(x) \cdot \overline{v_0}\,x_0 + f_2(y) \cdot (-\overline{u_0}\,x_0 + \overline{w_0}\,z_0) + f_3(z) \cdot \overline{v_0}\,z_0\} \\ &+ \lambda \cdot \{f_1(x) \cdot (\overline{v_0}\,y_0 + \overline{w_0}\,z_0) - f_2(y) \cdot \overline{u_0}\,y_0 - f_3(z) \cdot \overline{u_0}\,z_0\} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Durch Elimination von λ erhält man wieder $\Phi(x,y,z) = 0$. Aus der Gleichung für Φ lassen sich die Gleichungen für die Kurven λ_1 und λ_2 in (2) ableiten. Diese sind nämlich spezielle Φ-Kurven, wenn p, bzw. q zur unendlich fernen Geraden wird. Nehmen wir Cartesische Koordinaten, sodass $z = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden ist, so haben wir:

$$\lambda_1(x,y,z) \equiv 2f(x,y,z) \cdot z_0 - \{f_1(x) \cdot x_0 + f_2(y) \cdot y_0 + f_3(z) \cdot z_0\} \cdot z = 0 \quad (13)$$

$$\lambda_2(x,y,z) \equiv 2f(x,y,z) \cdot z_0 - (\overline{u_0}\,x + \overline{v_0}\,y + \overline{w_0}\,z) \cdot z = 0.$$

Für den Schnittpunkt O von λ_1 mit Φ haben wir:

$$f_1(x_0) \cdot x + f_2(y_0) \cdot y + f_3(z_0)\, z = 0,$$

und

$$\overline{u}_0\, x + \overline{v}_0\, y + \overline{w}_0\, z \cdot (\overline{u}_0\, x_0 + \overline{v}_0\, y_0) = 0;$$

letzteres ist die durch Q gehende Parallele zu p. Für die Schnittpunkte der beiden Kurven λ_1 und λ_2 findet man:

a) $z = 0$,

b) $\overline{z}_0 (u_0\, x + v_0\, y + w_0\, z) - z_0 \cdot (\overline{u}_0\, x + \overline{v}_0\, y + \overline{w}_0\, z) = 0$,

d.h. b) geht durch den Mittelpunkt M und den Schnittpunkt Y von p und q.

8. Die Φ-Kurve lässt sich auch auf folgende andere Arten erzeugen: Die Gleichung

$$f(x,y,z) + \lambda^2 \cdot (u_0\, x + v_0\, y + w_0\, z)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

stellt ein Büschel von C_2 dar, die f in den Punkten C und D berühren. Das Büschel der Polaren des Punktes Q in Bezug auf dieses C_2-Büschel ist dann gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} & f_1(x_0) \cdot x + f_2(y_0) \cdot y + f_3(z_0)\, z + \\ & + 2\lambda^2 \cdot (\overline{u}_0\, x + \overline{v}_0\, y + \overline{w}_0\, z)(\overline{u}_0\, x_0 + \overline{v}_0\, y_0 + \overline{w}_0\, z_0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\} (14a)$$

Durch Elimination von λ^2 ergiebt sich wieder Φ; ebenso aus dem Büschel

$$f(x,y,z) + \mu^2 \cdot (u_0\, x + v_0\, y + w_0\, y)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

und dem zugehörigen Polarenbüschel für P in Bezug auf dieses Büschel.

Wenn man endlich die beiden Büschel in den Gleichungen (14) und (15) in Beziehung setzt durch die Relation:

$$2\lambda\mu (\overline{u}_0\, x_0 + \overline{v}_0\, y_0 + \overline{w}_0\, z_0) = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

so erhält man durch Elimination von λ, μ wiederum $\Phi(x, y, z) = 0$, neben einer zweiten, ebenso gebauten Gleichung.

9. Eine wichtige metrische Beziehung für die Punkte der Φ-Kurve ergiebt sich durch folgende Überlegung:

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes A, dann ist die Polare desselben in Bezug auf $f = 0$:

$$f_1(x) \cdot X + f_2(y) \cdot Y + f_3(z) \cdot Z = 0,$$

wenn X, Y, Z die laufenden Koordinaten sind. Somit ist der Abstand d_1 des Punktes A von seiner Polaren:

$$d_1 = \frac{f_1(x) \cdot x + f_2(y) \cdot y + f_3(z) \cdot z}{\sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(y)}} = \frac{2 f(x, y, z)}{\sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(y)}}.$$

Der Abstand des Punktes A von p ist

$$d_2 = \frac{\bar{u}_0 x + \bar{v}_0 y + \bar{w}_0 z}{\sqrt{\bar{u}_0^2 + \bar{v}_0^2}}.$$

Der Abstand des Punktes Q von der obigen Polaren des Punktes A ist

$$n_1 = \frac{f_1(x) \cdot x_0 + f_2(y) \cdot y_0 + f_3(z) \cdot z_0}{\sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(y)}}$$

und der Abstand des Punktes Q von p ist

$$n_2 = \frac{\bar{u}_0 x_0 + \bar{v}_0 y_0 + \bar{w}_0 z_0}{\sqrt{\bar{u}_0^2 + \bar{v}_0^2}}.$$

Setzt man nun $\frac{d_1}{d_2} = \frac{n_1}{n_2}$ und bringt nach Weghebung gemeinsamer Faktoren alles auf eine Seite, so erhält man wieder die Gleichung $\Phi(x, y, z) = 0$.

Somit ist $\Phi = 0$ der geometrische Ort des Punktes x, y, z, für den das Verhältnis der Abstände von seiner Polaren und von einer gegebenen Geraden p gleich ist dem Verhältnis der Abstände eines gegebenen Punktes Q von denselben zwei Geraden, absolut genommen.

10. Das dualistische Gegenbild der Φ-Kurve erhält man auf folgende Art: Die Strahlen des Büschels Q schneiden auf p eine Punktreihe aus, ebenso die des projektiven Büschels der konjugierten Polaren durch P auf q. Die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte dieser zwei projektiven Punktreihen erzeugen einen Kegelschnitt Ψ; die gemeinsamen Tangenten von f und Ψ sind die Tangenten von f in C, D, U, V; Ψ hat mit f und Φ dasselbe Polardreieck gemeinsam.

11. *Büschel von Grundkurven und zugehörigen Polarkurven.*

Die 4 Punkte C, D, U, V bestimmen ein Büschel von C_2 : $kg - f = 0$. Nimmt man für die Φ-Kurve eines jeden C_2 jeweils die in ein Geradenpaar zerfallenden C_2 des Büschels als p- und q-Gerade an, so gehören zu jedem C_2 des Büschels 3 Φ-Kurven, und umgekehrt.

Da diese ebenfalls durch C, D, U, V gehen, so muss $\Phi(x, y, z)$ von der Form $\mu g - f$ sein und es muss sich μ aus k und dem zu den zerfallenden Kurven gehörigen Parameter λ der Gleichung

$$C(\lambda) \equiv B\lambda^3 - 3\theta\lambda^2 + 3H\lambda - A = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

bestimmen lassen. Die Beziehung zwischen k, λ, μ erhält man auf folgende Weise. Es ist

$$\Phi(kg - f) = 2(kg - f) \cdot (\bar{u}_0 x_0 + \bar{v}_0 y_0 + \bar{w}_0 z_0) -$$
$$- (u_0 x + v_0 y + w_0 x) \cdot (\bar{u}_0 x + \bar{v}_0 y + \bar{w}_0 z) = 0$$

oder $= 2(kg - f) \cdot (\bar{u}_0 x_0 + \bar{v}_0 y_0 + \bar{w}_0 z_0) -$
$$- \{(kg_1 - f_1) \cdot x_0 + (kg_2 - f_2) \cdot y_0 + (kg_3 - f_3) \cdot z_0\} \cdot$$
$$\cdot (\bar{u}_0 x + \bar{v}_0 y + \bar{w}_0 z) = 0.$$

Zur Berechnung von $\bar{u}_0 x_0 + \bar{v}_0 y_0 + \bar{w}_0 z_0$ haben wir:

$$x_0 = k^2 \cdot G_1(u_0) - k \cdot H_1(u_0) - F_1(u_0)$$
$$= 2k^2 \cdot (B_{11} u_0 + B_{12} v_0 + B_{13} w_0) - 2k \cdot (H_{11} u_0 + H_{12} v_0 + H_{13} w_0)$$
$$+ 2(A_{11} u_0 + A_{12} v_0 + A_{13} w_0)$$

und zwei entsprechende Gleichungen für y_0 und z_0.

Zur Elimination von u_0, v_0, w_0 und $\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0$ vergleicht man das Produkt $(u_0 x + v_0 y + w_0 z) \cdot (\bar{u}_0 x + \bar{v}_0 y + \bar{w}_0 z)$ mit $\lambda g - f$.

Dadurch findet man:

$$\left.\begin{aligned} &(u_0 x + v_0 y + w_0 z) \cdot (\bar{u}_0 x + \bar{v}_0 y + \bar{w}_0 z) = \\ &\quad = 4 \cdot (Bk^3 - 3\theta k^2 + 3Hk - A) \cdot (\lambda g - f) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

und

$$\bar{u}_0 x + \bar{v}_0 y_0 + \bar{w}_0 z_0 = 6H\lambda - 2A - 12\theta k\lambda + 12Hk + 2Bk^2\lambda - 6\theta k^2 \quad (19)$$

und endlich daraus dann:

$$\mu = \frac{A(-k+\lambda) - 3\theta k^2 \cdot (k+\lambda) + 6Hk^2}{Bk^2(-k+\lambda) + 3H(k+\lambda) - 6\theta k\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

oder

$$\lambda = k \cdot \frac{(Bk^2\mu - A) - 3(\theta k^2 + H\mu) + 6Hk}{(Bk^2\mu - A) + 3(\theta k^2 + H\mu) - 6\theta k\mu}, \quad . \quad . \quad . \quad (20a)$$

neben $C(\lambda) = 0$.

Setzt man hierin $k = \lambda$, so erhält man $\mu = \lambda$. D. h. nur dann ist $\Phi(\Phi) \equiv f$, wenn f und folglich auch Φ eine zerfallende C_3 des Büschels sind. Geometrisch erhellt dies, wenn man beachtet, dass die Pole P und Q sich auf den Seiten des dem Büschel gemein-

samen Polardreiecks XYZ bewegen. Die Schnittpunkte der Tangenten in U und V z. B. an f und Φ bestimmen auf der Seite XZ des Polardreiecks zwei coincidente projektive Punktreihen, deren Doppelpunkte eben die Schnittpunkte der zerfallenden Kurven des Büschels sind. Setzt man den für λ in (20a) gegebenen Wert in die Gleichung $C(\lambda) = 3$ ein, so hat man eine Relation zwischen k und λ.

12. *Netz und Büschel von Polarkurven bei fester Grundkurve f.*

Hält man f und p fest, so bildet die Gesamtheit der Φ-Kurven ein Netz mit den Stützpunkten P, C, D. Jede solche C_2 ist aber nur Polarkurve für *einen* Punkt auf ihr, nämlich den Pol für die gemeinsame zweite Sehne von f und Φ. Macht man die Tangenten von f in C und D bezw. zur X- und Y-Achse und die Berührungssehne CD zur Z-Achse, so wird

$$f(x, y, z) \equiv xy + z^2 = 0$$

und

$$\Phi(x, y, z) = 2\, z_0\, xy - y_0\, xz - x_0\, yz = 0.$$

Die Gleichung einer C_2 durch P, C, D hat dann die Form $\alpha xy + \beta xz + \gamma yz = O$; daraus folgt für den Pol $x_0 : y_0 : z_0 = \alpha : -2\beta : -2\gamma$. Beschreibt nun der Pol eine Gerade

$$Q(x_0, y_0, z_0) \equiv ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0,$$

wo x_0, y_0, z_0 die laufenden Koordinaten sind, so kann man das Büschel der zugehörigen Φ-Kurven in der Form schreiben:

$$x_0\,(u\,x\,z - v\,y\,z) + z_0\,.\,(2\,v\,x\,y + w\,x\,z) = 0.$$

Für den vierten Grundpunkt dieses Büschels hat man also:

$$u\,x - v\,y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und

$$2\,v\,y + w\,z = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21a)$$

woraus folgt

$$u\,x + v\,y + w\,z = 0.$$

(21) ist die lineare Polare des Schnittpunktes von p mit der Geraden $Q(x, y, z) = 0$. Somit liegt der vierte Schnittpunkt auf der Geraden $Q(x, y, z) = 0$ und eben dieser Polaren.

13. Beschreibt der Pol Q einen Kegelschnitt:

$$Q(x_0, y_0, z_0) \equiv c_{11}\,x^2 + 2c_{12}\,xy + c_{22}\,y^2 + 2\,c_{13}\,xz + 2\,c_{23}\,yz + c_{33}\,z^2 = 0, \quad (22)$$

während f, P und p festbleiben, so erhält man für die Enveloppe des Büschels der Φ-Kurven die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} E(\xi,\eta,\zeta) \equiv 4\, C_{33}\, \xi^2 \eta^2 - 4\, C_{23}\, \xi^2 \eta \zeta - 4\, C_{13}\, \xi \eta^2 \zeta + C_{22}\, \xi^2 \zeta^2 + \\ + 2\, C_{12}\, \xi \eta \zeta^2 + C_{11}\, \eta^2 \zeta^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

wo die C_{ik} die Unterdeterminanten zu den c_{ik} sind. Die E ist also eine rationale Kurve vierter Ordnung mit den 3 Doppelpunkten [1]) in den Punkten P, C, D.

Die Q und E berühren sich in den 4 Punkten, die gegeben sind durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} c_{11}\, x + c_{12}\, y + c_{13}\, z &= \varrho \,.\, yz \\ c_{12}\, x + c_{22}\, y + c_{23}\, z &= \varrho \,.\, xz \\ c_{13}\, x + c_{23}\, y + c_{33}\, z &= -\varrho \,.\, 2xy \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Durch $\Phi \equiv 2\, \xi \eta z_0 - \xi \zeta y_0 - \eta \zeta x_0 = 0$ ist jedem Punkte x_0, y_0, z_0 auf Q ein Punkt ξ, η, ζ auf E zugeordnet und umgekehrt. Der Übergang von x_0, y_0, z_0 auf Q geschieht, indem man, wie oben angegeben, zu E übergeht und den Berührungspunkt von Φ und E bestimmt. Der Übergang von einem Punkte ξ, η, ζ auf E geschieht, indem man diesen als Pol betrachtet und durch das entsprechende Verfahren die Enveloppe der zugehörigen Φ-Kurven bestimmt, wenn ξ, η, ζ auf E wandert. Diese ist dann eben wieder die Q-Kurve und die doppeltgezählten Seiten des Dreiecks PCD (abgesehen von dem auftretenden Faktor Δ der Determinante der c_{ik}).

Zu einer anderen Darstellung dieser Berührungstransformation, die deren Bedeutung erst kennzeichnet, gelangt man durch folgende Überlegung: Es sei $E(\xi, \eta, \zeta) = 0$ gegeben, dann ist die Gleichung der Tangente in einem Punkte ξ, η, ζ:

$$E_1(\xi) \,.\, x + E_2(\eta)\; y + E_3(\zeta) \,.\, z = 0.$$

Soll nun eine C_2 transformiert werden, die E in diesem Punkte berührt und durch die Punkte C, D, P geht, so ist diese C_2 von der Form:

$$\mathfrak{A}_{12}\, xy + \mathfrak{A}_{13}\, xz + \mathfrak{A}_{23}\, yz = 0,$$

---

[1]) Die Schnittpunkte der Tangenten in dem Doppelpunkt $x = y = 0$ liegen auf der C_2:

$$L(x, y, z) = (c_{13}\, x + c_{23}\, y + c_{33}\, z)^2 + 4\, c_{33}\, x\, y = 0.$$

Diese berührt die Tangenten von f in C und D in deren Schnittpunkten mit der gewöhnlichen Polaren des Punktes $x = 0$. $y = 0$ in Bezug auf Q.

daher muss sein:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{11} &= \varrho \,.\, \frac{E_3 \,.\, \zeta^2 - E_1 \,.\, \xi\zeta - E_2\, \eta\zeta}{2\,\xi\,\eta\,\zeta} \\
{}_{12} &= \varrho \,.\, \frac{E_2 \,.\, \eta^2 - E_3\, \eta\zeta - E_1 \,.\, \xi\,\eta}{2\,\xi\,\eta\,\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\mathfrak{A}_{13} &= \varrho \,.\, \frac{E_1 \,.\, \zeta^2 - E_2\, \xi\,\eta - E_3 \,.\, \xi\,\zeta}{2\,\xi\,\eta\,\zeta}
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Indem man für E_1, E_2, E_3 die Werte einsetzt, erhält man als Abbildungskurve:

$$\left.\begin{aligned}
&2 \,.\, (-2\, C_{33}\, \xi\,\eta + C_{23}\, \xi\,\zeta + C_{13}\, \eta\,\zeta) \,.\, xy \\
&-(-2\, C_{23}\, \xi\,\eta + C_{22}\, \xi\,\zeta + C_{12}\, \eta\,\zeta) \,.\, xz \,. \quad . \quad . \quad . \\
&-(-2\, C_{13}\, \xi\,\eta + C_{12}\, \xi\,\zeta + C_{11}\, \eta\,\zeta) \,.\, yz = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

oder abgekürzt:

$$2\, U_3\, xy - U_2\, xz - U_1\, yz = 0.$$

Durch Vergleich mit der früheren Form der Φ-Kurve ergiebt sich die Beziehung:

$$x_0 : y_0 : z_0 = U_1 : U_2 \,;\, U_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

woraus durch Auflösung nach ξ, η, ζ folgt:

$$\xi : \eta : \zeta = V_2\, V_3 : V_3\, V_1 : V_1\, V_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27a)$$

wobei

$$V_1 = 2\, Q_1\,(x_0), \quad V_2 = 2\, Q_2\,(y_0), \quad V_3 = Q_3\,(z_0).$$

Somit vermittelt unsere Φ-Kurve eine birationale quadratische Transformation. Daraus erhellt jetzt auch, dass E rational sein muss. Die Gleichung $\Phi\,(x_0, y_0, z_0, \xi, \eta, \zeta) = 0$ und die Gleichungen (27) und (27a) zwischen den x_0, y_0, z_0 und den ξ, η, ζ sind also äquivalent.

14. Es soll hier noch gezeigt werden, dass diese Abbildung eine spezielle Berührungstransformation repräsentiert, ohne auf das zuletzt Auseindergesetzte Bezug zu nehmen. Es seien zwei E-Kurven gegeben

$$\left.\begin{aligned}
E^{(1)} \equiv 4\, C_{33}\, x^2 y^2 - 4\, C_{23}\, x^2\, yz - 4\, C_{13}\, x\, y^2 z + C_{22}\, x^2 z^2 + \\
+ 2\, C_{12}\, x\, y\, z^2 + C_{11}\, y^2 z^2 = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

$$E^{(2)} \equiv 4\, D_{33}\, x^2 y^2 - 4\, D_{23}\, x^2\, y\, z - \ldots + D_{11}\, y^2 z^2 = 0. \quad . \quad (28a)$$

Soll dann einem Punkte ξ, η, ζ, der beiden E-Kurven gemeinsam ist, derselbe Punkt x_0, y_0, z_0 entsprechen, so muss sein:

$$\left.\begin{aligned}
-2\,C_{33}\,\xi\eta + C_{23}\,\xi\zeta + C_{13}\,\eta\zeta &= \varrho\,(-2\,D_{33}\,\zeta\eta + D_{23}\,\xi\zeta + D_{13}\,\eta\zeta)\\
-2\,C_{23}\,\xi\eta + C_{22}\,\xi\zeta + C_{12}\,\eta\zeta &= \varrho\,.\,(-2\,D_{23}\,\xi\eta + D_{22}\,\xi\zeta + D_{12}\,\eta\zeta)\\
-2\,C_{13}\,\xi\eta + C_{12}\,\xi\zeta + C_{11}\,\eta\zeta &= \varrho\,.\,(-D_{13}\,\xi\eta + D_{12}\,\xi\zeta + D_{11}\,\eta\zeta)
\end{aligned}\right\}. \quad (29)$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned}
2\,E^{(1)}(\xi,\eta,\zeta) - E_1^{(1)}(\xi)\,.\,\xi &= -2\,\xi\zeta\,.\,(-2\,C_{13}\,\xi\eta + C_{12}\,\xi\zeta + C_{11}\eta\zeta)\\
2\,E^{(2)}(\xi,\eta,\zeta) - E_1^{(2)}(\xi)\,.\,\xi &= -2\,\xi\zeta\,.\,(-2\,D_{13}\,\xi\eta + D_{12}\,\xi\zeta + D_{11}\eta\zeta)
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

und entsprechende Gleichungen bestehen für die Ableitungen nach η und ζ.

Wegen $E^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) = E^{(2)}(\xi, \eta, \zeta) = 0$, ergiebt sich also: $E_1^{(1)} = E_1^{(2)}$; $E_2^{(1)} = E_2^{(2)}$; $E_3^{(1)} = E_3^{(2)}$. Dies sind aber gerade die Bedingungen für die Berührung von E^{1} und $E^{(2)}$ im Punkte ξ, η, ζ. Ebenso ergiebt sich, wenn man statt der ξ, η, ζ die x_0, y_0, z_0 einführt, dass die den $E^{(1)}$ un $E^{(2)}$ entsprechenden Kurven $Q^{(1)}$ und $Q^{(2)}$ sich in dem Punkte x_0, y_0, z_0 berühren.

Jede C_2, die f in C und D berührt, geht in sich über, indem die entsprechende E-Kurve in diese und die zwei Tangenten an f in den Punkten C und D zerfällt. Wenn die Q-Kurve Q im Punkte x_0, y_0, z_0 berührt, so geht auch die E-Kurve durch diesen Punkt und berührt die Q-Kurve daselbst.