

Mathématiques. — „*Remarques sur certaines congruences linéaires de cubiques gauches.*” Par L. GODEAUX, Professeur à l'École Militaire (Bruxelles).

(Présenté par M. le Prof. JAN DE VRIES dans la séance du 3 Mai 1924).

M. J. DE VRIES a montré autrefois que la congruence linéaire formée des cubiques gauches passant par cinq points fixes, peut se ramener à une gerbe de rayons, au moyen de la transformation birationnelle définie en rapportant projectivement les surfaces cubiques passant par les arêtes d'un tétraèdre aux plans de l'espace¹⁾. Vers la même époque, nous avons considéré les congruences linéaires de cubiques gauches s'appuyant en 8 points sur une sextique gauche de genre trois²⁾. Pour obtenir ces diverses congruences, il suffit de rapporter projectivement les surfaces cubiques passant par cette sextique gauche aux plans de l'espace; une congruence linéaire de cubiques gauches du type envisagé est alors transformée birationnellement en une congruence linéaire de droites. En particulier, si cette congruence est une gerbe de rayons et si la sextique dégénère en six droites qui sont les arêtes d'un tétraèdre, on retrouve les considérations de M. J. DE VRIES.

Récemment, M. J. DE VRIES s'est occupé d'une congruence de cubiques gauches, linéaire; dont les courbes passent par deux points fixes et ont trois bisécantes singulières³⁾. Il a précisément montré que cette congruence, étudiée auparavant par M. STUYVAERT⁴⁾, se ramène, par une transformation birationnelle, à une congruence bilinéaire de droites. Cette transformation birationnelle est également un cas particulier de celle que nous avons considérée; ce cas particulier correspond au cas où la sextique se décompose en trois droites et une cubique gauche.

Dans cette note, nous nous proposons de signaler quelques cas particuliers intéressants des congruences linéaires rencontrées dans

¹⁾ *Congruences of twisted curves in connection with a cubic transformation*, Kon. Akademie v. Wetensch. Amsterdam, *Proced.*, 1908, t. XI, p. 84.

²⁾ *Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches*. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1909.

³⁾ *Représentation of a bilinear congruence of twisted cubics ...* Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, *Proced.* 1922, t. XXV, p. 22.

⁴⁾ *Etude de quelques surfaces ...* Gand, Hoste, 1902.

notre travail cité. Ces congruences présentent des points principaux (communs à toutes les courbes de la congruence); elles s'obtiennent par un procédé analogue à celui qui a été utilisé par M. J. DE VRIES dans sa dernière note citée.

1. Soit C_6 une sextique gauche de genre trois¹⁾. Elle appartient, comme on sait, à ∞^3 surfaces cubiques F_3 formant un système linéaire. Deux surfaces cubiques F_3 ont encore en commun une cubique gauche γ_3 s'appuyant en 8 points sur C_6 . Trois surfaces cubiques F_3 , n'appartenant pas à un même faisceau, ont en commun un et un seul point en dehors de la courbe C_6 .

Désignons par Σ l'espace ordinaire contenant C_6 et rapportons projectivement les surfaces cubiques F_3 passant par C_6 aux plans d'un second espace ordinaire Σ' . Nous obtenons ainsi une correspondance birationnelle entre les espaces Σ et Σ' , bien connue, étudiée par CREMONA, CAYLEY, NOETHER, STURM, ... Aux plans de Σ correspondent, dans Σ' , des surfaces cubiques F'_3 passant par une courbe C'_6 , d'ordre six et de genre trois. Les points fondamentaux de la correspondance sont, dans Σ , les points de C_6 , dans Σ' , les points de C'_6 .

A un point de C'_6 (ou de C_6) correspond, dans Σ (ou Σ'), l'ensemble des points d'une trisécante de C_6 (ou de C'_6). Les trisécantes de C_6 (ou C'_6) forment une surface d'ordre huit, passant trois fois par la courbe C_6 (ou C'_6).

Ces points étant rappelés, soit G' une congruence linéaire de droites dans Σ' . En général, à une droite de G' correspond une cubique gauche γ_3 de Σ . Aux différentes droites de G' correspondent, dans Σ , les cubiques gauches d'une congruence G évidemment linéaire. Nous allons examiner les diverses congruences linéaires G que l'on peut obtenir par ce procédé. Dans ce but, nous utiliserons la propriété suivante: Une courbe d'ordre n de Σ' , s'appuyant en a points sur C'_6 , a pour transformée dans Σ , une courbe d'ordre $3n - a$, s'appuyant en $8n - 3a$ points sur C_6 .

2. *Congruences du premier type.* Supposons tout d'abord que G' soit une gerbe de rayons de sommet P' . Observons que P' ne peut se trouver sur C'_6 , car aux rayons de G' correspondraient, dans Σ , des cubiques gauches dégénérées en une trisécante fixe de C_6 et en des coniques variables (formant une congruence linéaire).

¹⁾ Pour une étude systématique de la courbe gauche d'ordre six et de genre trois, on peut consulter l'ouvrage de M. STUYVAERT, *Cinq Etudes de Géométrie Analytique*. Gand, Van Goethem, 1908.

Nous aurons donc à examiner deux hypothèses :

- a. P' ne se trouve pas sur la surface des trisécantes de C'_0 ;
- b. P' se trouve sur une trisécante de C'_0 .

Dans la première hypothèse, il correspond à P' , dans Σ , un point P bien déterminé, et la congruence G , transformée de G' , est formée par les cubiques gauches γ , passant par P . Cette congruence G a été étudiée par M.M. VENERONI et STUYVAERT. On en trouvera la bibliographie, ainsi que l'étude de plusieurs cas particuliers, dans la dissertation de M. J. DE VRIES junior¹⁾.

Plaçons-nous dans la seconde hypothèse et soit a' la trisécante de C'_0 , passant par P' , A le point de C_0 qui correspond à cette droite a' . A une droite d' passant par P' correspond dans Σ une cubique gauche γ' , passant par A ; en général, γ' , ne sera pas tangente à la courbe C_0 en A . Soit π le plan tangent commun à C_0 et à γ' , en A . Aux ∞^1 surfaces cubiques F , passant par γ' , et par suite tangentes à π en A , correspondent dans Σ' , ∞^1 plans formant un faisceau d'axe d' . Toute droite de la congruence G' est située sur un plan de ce faisceau, par suite, les cubiques gauches de la congruence G correspondante sont tangentes en A au plan π .

Ces cubiques gauches s'appuient en sept points variables sur C_0 , donc :

Les cubiques gauches s'appuyant en huit points sur une sextique gauche de genre trois et touchant en un de ces points, supposé fixe, un plan tangent à la sextique, forment une congruence linéaire.

3. *Congruences du second type.* Supposons maintenant que G' soit formée par les cordes d'une cubique gauche Γ' , s'appuyant en α points sur la courbe C'_0 . La congruence correspondante est formée par les cubiques gauches γ , s'appuyant en 8 points sur C_0 et en deux points sur la transformée de Γ' . Celle-ci est une courbe $\Gamma_{9-\alpha}$ d'ordre $9-\alpha$ s'appuyant en $24-3\alpha$ points sur C_0 . On a donc $\alpha \leq 8$, et la courbe $\Gamma_{9-\alpha}$ est au moins d'ordre un.

En particulier, pour $\alpha = 8$, on obtient une congruence linéaire de cubiques gauches ayant une bisécante fixe.

4. *Congruences du troisième type.* Supposons enfin que G' soit formée par les droites s'appuyant en un point sur une droite Γ' , et en un second point sur une courbe Γ'_n , d'ordre n , s'appuyant elle-même en $n-1$ points sur Γ'_1 . Soient de plus α_1 le nombre de points communs à Γ'_1 et C'_0 , α , le nombre de points communs à

¹⁾ *Bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen.* Utrecht, 1917.

Γ'_n et C'_6 . Supposons tout d'abord $\alpha_1 < 3$, $\alpha_2 < 3n$. Alors, la congruence G transformée de G' est formée des cubiques gauches γ , s'appuyant en huit points variables sur C_6 , en un point sur la courbe Γ_1 , d'ordre $3-\alpha_1$, transformée de Γ'_1 , et en un point sur la courbe Γ_2 , d'ordre $3n-\alpha_2$, transformée de Γ'_2 . La courbe Γ_1 s'appuie en $8-3\alpha_1$ points sur C_6 et la courbe Γ_2 en $8n-3\alpha_2$ points. Les courbes Γ_1 , Γ_2 ont au plus $n-1$ points communs; ce nombre est diminué d'une unité chaque fois qu'un des points communs à Γ'_1 , Γ'_2 appartient à C'_6 . En supposant que le nombre de ces points, soit α , la configuration des lignes singulières de G peut être résumée par le tableau suivant:

	γ_3	C_6	Γ_1	Γ_2	
γ_3		8	1	1	
C_6	8		$8-3\alpha_1$	$8n-3\alpha_2$	$\alpha_1 < 3,$
Γ_1	1	$8-3\alpha_1$		$n-\alpha-1$	$\alpha \leq \alpha_2 < 3n.$
Γ_2	1	$8n-3\alpha_2$	$n-\alpha-1$		
Ordres	3	6	$3-\alpha_1$	$3n-\alpha_2$	

Supposons $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 < 3n$. Alors, à la courbe Γ' , correspond un seul point A de C_6 et toutes les courbes de la congruence G passent par ce point A ; elles rencontrent encore C_6 en sept points variables. Elles s'appuient en un point sur la courbe Γ_2 qui correspond à Γ'_2 . Cette courbe Γ_2 est d'ordre $3n-\alpha_2$ et passe en général $n-1$ fois par le point A . Ce nombre est abaissé d'une unité pour chaque point commun à Γ'_1 , Γ'_2 , appartenant à C'_6 .

Les cubiques gauches passant par un point fixe d'une courbe gauche d'ordre six et de genre trois, s'appuyant encore en sept points variables sur cette courbe et s'appuyant en un point sur une courbe rationnelle d'ordre $3n-\alpha_2$, passant $n-\alpha-1$ fois par le point fixe ($\alpha \leq \alpha_2$), forment une congruence linéaire.

On remarquera que les $n-1$ points d'appui de Γ'_1 sur Γ' , peuvent se composer de quelques points multiples pour la courbe Γ'_2 . En particulier, si Γ'_2 est une courbe plane, il y aura un point $(n-1)$ -uple.

Supposons $n = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$. La congruence G' est formée des droites s'appuyant sur deux triséchantes de C'_0 . Les cubiques de la congruence G correspondante passent par deux points fixes de C_0 .

Les cubiques gauches s'appuyant sur une sextique de genre trois en deux points fixes et six points variables, forment une congruence linéaire.

5. On peut envisager le cas où, dans la congruence G' considérée plus haut (n°. 4), la courbe Γ' , est formée de n droites infiniment voisines de Γ'_1 . On obtient sans difficulté les congruences G correspondantes¹⁾. Bornons-nous à singulariser la congruence suivante: Si la congruence G' est formée des droites s'appuyant sur deux triséchantes infiniment voisines de C'_0 , les courbes γ , correspondant à ses droites seront tangentes à la courbe C_0 en un point fixe, donc:

Les cubiques gauches tangentes à une sextique gauche de genre trois en un point fixe et s'appuyant en six points variables sur cette courbe, forment une congruence linéaire.

6. La plupart des propriétés des congruences de cubiques gauches rencontrées dans ce travail s'obtiennent aisément au moyen des propriétés de la transformation birationnelle utilisée. Ainsi, toute surface engendrée par ∞^1 cubiques gauches de G sera transformée en une surface appartenant à la congruence de droites G' . Nous ne nous arrêterons pas à ces développements, nous nous limiterons à l'étude du problème suivant: Etant donné une congruence linéaire G formée des cubiques gauches s'appuyant en 8 points sur la courbe C_0 , en un point sur une cubique gauche Γ_1 (s'appuyant elle-même en 8 points sur C_0) et en un point sur une courbe Γ_2 ; d'ordre $3n$ (s'appuyant en $8n$ points sur C_0 et en $n-1$ points sur Γ_1), déterminer l'ordre de la surface lieu des points d'appui sur les cubiques de G des biséchantes passant par un point fixe Q .

Désignons par Φ la surface considérée, par m son ordre, par μ la multiplicité de C_0 pour Φ , par μ_1, μ_2 les multiplicités respectives de Γ_1, Γ_2 pour Φ , par ν la multiplicité du point Q pour cette surface Φ .

Soient Q', Γ'_1, Γ' , le point, la droite et la courbe d'ordre n (s'appuyant en $n-1$ points sur la droite Γ'_1) qui correspondent respectivement dans Σ' , au point Q et aux courbes Γ_1, Γ_2 . La

¹⁾ Pour une congruence linéaire de cubiques gauches obtenue par ce procédé, voir notre note *Sur la sixième congruence de cubiques gauches de M. STUYVAERT*, Bull. Acad. R. de Belgique, 1909.

transformée de la congruence donnée G sera la congruence G' formée par les droites s'appuyant sur Γ'_1 et Γ'_2 .

A la surface Φ correspond dans Σ' la surface Φ' lieu des points d'appui des bisécantes des cubiques gauches s'appuyant en 8 points sur C'_s et passant par Q' , faisant partie de G' . L'ordre de la surface Φ' est $3m-8\mu$. Cette surface passe $m-3\mu$ fois par la courbe C'_s , μ_1 fois par Γ'_1 , μ_2 fois par Γ'_2 , ν fois par le point Q' .

Il y a $1+3n$ droites de G' bisécantes d'une cubique gauche, donc une cubique passant par Q' et s'appuyant en 8 points sur C'_s rencontre Φ' en $2(1+3n)$ points en dehors de C'_s et de Q' . On a donc

$$3(3m-8\mu) = 8(m-3\mu) + \nu + 2(1+3n),$$

c'est-à-dire

$$m = \nu + 2(1+3n) \dots \dots \dots (1)$$

Il y a une seule cubique passant par Q' et s'appuyant 8 fois sur C'_s , qui soit bisécante d'une droite de G' , donc on a

$$\mu_1 + \mu_2 + 2 = 3m - 8\mu \dots \dots \dots (2)$$

Soient maintenant H la gerbe de rayons de sommet Q , K le système des cubiques gauches passant par un point P et s'appuyant en 8 points sur C_s , H' et K' les systèmes de cubiques gauches et de droites correspondant respectivement à H, K dans Σ' , P' le point correspondant à P . Désignons par Ψ la surface lieu des points d'appui des cordes des cubiques de K passant par Q , par Ψ' la transformée de Ψ dans Σ' . Ψ est le lieu des points d'appui des cordes des cubiques de H' passant P . Donc Ψ et Ψ' possèdent les mêmes ordre et multiplicités le long de C_s, C'_s , en P, Q' et en Q, P' . Si m' est l'ordre de Ψ, μ' la multiplicité de C_s pour Ψ, ν'_1 la multiplicité de P, ν'_2 celle de Q pour Ψ , on a donc

$$3m' - 8\mu' = m', \quad m' - 3\mu' = \mu', \quad \nu'_1 = \nu'_2,$$

d'où $m' = 4\mu', \nu'_1 = \nu'_2 = \nu'$.

La cubique de H passant par Q est une courbe simple de Ψ d'après la définition de cette surface; par suite la droite $P'Q'$ est simple pour Ψ' , ce qui exige

$$2(\nu'-1) \leq m'-1.$$

Observons de plus qu'une droite passant par Q est la corde d'une seule cubique de K , donc $m' = \nu' + 2$. On a donc $\nu' \leq 3, m' \leq 5$. Comme d'autre part on a $m' = 4\mu'$, il vient nécessairement $m' = 4, \mu' = 1, \nu' = 2$. Ainsi la surface Ψ est d'ordre 4, passe simplement par C_s et P, Q sont des points doubles pour Ψ (ce résultat était d'ailleurs connu). Si en particulier nous considérons la section de Ψ

par un plan passant par Q , nous voyons que le lieu des points d'appui des cubiques gauches s'appuyant en 8 points sur C_6 et passant par un point, sur les cordes qui font partie d'un faisceau-plan, est une courbe d'ordre 4 passant doublement par le sommet du faisceau.

Revenons à la surface Φ' . La section de cette surface par un plan π passant par Γ'_1 sera, d'après le résultat précédent, une courbe du quatrième ordre passant doublement par le point de rencontre du plan π et de Γ'_2 . Cette courbe passera simplement par les points communs à π et à C'_6 . On en conclut que $m - 3\mu = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_1 = 3m - 8\mu - 1$, c'est-à-dire, en utilisant (1) et (2),

$$m = 3\mu + 1, \mu_1 = \mu - 1, \mu_2 = 2, \nu = 3\mu - 6n - 1.$$

Si nous considérons en particulier la section de Φ' par le plan π passant par Γ'_1 et Q' , nous obtenons une courbe du quatrième ordre passant deux fois par Q' . Donc $\nu \leq 2$. D'autre part, d'après la dernière égalité écrite ci-dessus, $\nu + 1$ doit être multiple de 3, donc $\nu = 2$. On en déduit

$$\mu = 2n + 1, m = 6n + 4, \mu_1 = 2n, \mu_2 = 2.$$

Par suite: *La surface Φ est d'ordre $6n + 4$, passe $2n + 1$ fois par C_6 , $2n$ fois par Γ_1 , 2 fois par Γ_2 et 2 fois par le point Q .*

7. La transformation birationnelle utilisée dans ce travail peut fournir d'autres congruences linéaires de cubiques gauches. En voici un exemple.

Considérons, dans Σ' , une droite Γ'_1 ne rencontrant pas C'_6 et une courbe Γ'_2 d'ordre n , s'appuyant en $n - 1$ points sur Γ'_1 , en α points sur C'_6 .

Soit π' un plan passant Γ'_1 . Considérons les quintiques du plan π' ayant un point double ordinaire en chacun des points de rencontre de π' et C'_6 et un point simple au point de rencontre de π' et de Γ'_2 . Ces courbes ne sont pas dégénérées, car il n'existe aucune conique s'appuyant en six points sur C'_6 . Ces courbes forment un faisceau et lorsque π' tourne autour de Γ'_1 , on obtient une congruence linéaire de quintiques planes.

A une de ces quintiques correspond, dans Σ , une courbe d'ordre $3 \times 5 - 2 \times 6 = 3$, qui est rationnelle. Cette courbe est une cubique gauche, car la quintique envisagée ne se trouve pas sur une surface cubique circonscrite à C'_6 . Si l'on désigne par Γ_1 la cubique gauche correspondant à Γ'_1 , par Γ_2 la courbe qui correspond à Γ'_2 , on obtient le résultat suivant:

Les cubiques gauches s'appuyant en quatre points sur une sextique gauche de genre trois, en cinq points sur une cubique gauche

s'appuyant elle-même huit fois sur la sextique, et en un point sur une courbe d'ordre $3n-a$, s'appuyant en $8n-3a$ points sur la sextique et en $n-1$ points sur la cubique, forment un congruence linéaire.

C'est une congruence que nous avons obtenue antérieurement par deux autres voies ¹⁾.

Si l'on considère les quintiques ayant six points doubles sur C' , situées dans les plans passant par Γ_1 et passant de plus par un point fixe de cette droite, on obtient le résultat suivant:

Les cubiques gauches s'appuyant en quatre points sur une sextique gauche de genre trois et en quatre points variables et un point fixe sur une cubique s'appuyant elle-même en 8 points sur la sextique, forment une congruence linéaire.

Bruxelles, 23 avril 1924.

¹⁾ *Sur la quatrième congruence de cubiques gauches de M. STUYVAERT (Nouvelles Annales de Math., 1911). Détermination des congruences linéaires de cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche fixe (Rend. Circ. Matem. di Palermo, 1911, XXXII).*
