Mathematics. — "*Ein topologischer Zerlegungssatz*". By H. KNESER. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of September 27, 1924).

Die BROUWERsche Übertragung des JORDANschen Kurvensatzes auf Räume beliebiger Dimensionenzahl besagt, dass der n-dimensionale Raum von jeder in ihm liegenden $(n-1)$-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit in zwei Teile zerlegt wird [1]). Fragt man, welche geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten diese Eigenschaft haben, so lautet die Antwort:

Satz 1. *Eine geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit M^n $(n > 1)$ wird dann und nur dann von jeder in ihr liegenden geschlossenen $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit zerlegt, und zwar in zwei Teile, wenn ihre* BETTI*sche Zahl erster Dimension den Wert eins hat und die Torsionszahlen erster Dimension — wenn solche vorhanden sind — sämtlich ungerade sind.*

Ich beweise diesen Satz im kombinatorischen Sinne, d. h. unter der Voraussetzung, dass M^n durch ein endliches Zellengebäude gegeben ist und M^{n-1} sich aus Zellen dieses Gebäudes zusammensetzt. In § 1 leite ich die Grundeigenschaften der "Umgebungskomplexe" ab, was bisher anscheinend noch nicht geschehen ist [2]); die folgenden Paragraphen erbringen schrittweise den Beweis für Satz 1.

Der Gedankengang des Beweises lässt sich etwa folgendermassen andeuten, wenn auch die Ausführung in Einzelheiten anders ausfällt. Ist eine M^n nicht zerlegende M^{n-1} gegeben, so verbinden wir zwei „nahe" bei einem Punkte von M^{n-1} und „auf verschiedenen Seiten von M^{n-1}" gelegene Punkte durch eine M^{n-1} nicht treffende Kurve und vervollständigen diese zu einer M^{n-1} in einem Punkte „durchschneidenden" geschlossenen Kurve. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist diese, eine geeignete ungerade Anzahl Male genommen, Rand einer in M^n gelegenen Fläche. Diese Fläche können

---

[1]) Beweis des JORDANschen Satzes für den n-dimensionalen Raum, Math. Ann. 71 (1911), S. 314—319.

[2]) Vgl. E. BILZ, Beiträge zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis situs (Math. Zschr. 18 (1923), S. 1—41).

wir so legen, dass sie M^{n-1} nur in geschlossenen und auf dem Rand der Fläche endenden ungeschlossenen Kurven trifft. Auf dem Rande liegt aber als einziger Treffpunkt der eine ungerade Anzahl Male zu zählende Durchstosspunkt, und jedes Mal geht von ihm eine ungerade Zahl Schnittkurven aus. Das geht nicht an, weil jede ungeschlossene Kurve zwei Endpunkte hat.

Sind die Voraussetzungen von Satz 1 nicht erfüllt, so hat die ABELsche Gruppe der Homologieklassen erster Dimension einen Charakter, der die Werte ± 1 und keine anderen annimmt. Es gelingt, einen M^n nicht zerlegenden Komplex $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension C^{n-1} zu konstruieren, derart dass ein geschlossener Weg, der C^{n-1} in k Punkten durchschneidet, als Element der Homologiengruppe der Charakter $(-1)^k$ hat. Vermöge dieser Eigenschaften gelingt es weiter, die Singularitäten des Komplexes C^{n-1} aufzulösen, ohne dass er dabei seine vorher genannten Eigenschaften verliert, d.h. aus ihm eine M^n nicht zerlegende M^{n-1} abzuleiten.

§ 1. *Umgebungskomplexe.*

Wir benutzen die Begriffe des n-dimensionalen Komplexes C^n, der n-dimensionalen Sphäre S^n, des n-dimensionalen Elementarraumes E^n und der internen Transformation (abgekürzt i. T.), die durch gleichzeitige vollständige Induktion nach n zu definieren sind [1]).

Der Umgebungskomplex (abgekürzt UC) einer Zelle k-ter Dimension Z^k in einem Komplex C^n $(k < n)$ entsteht, wenn wir jeder von Z^k berandeten [2]) Zelle Z^l $(k < l \leqq n)$ von C^n eine Zelle Z^{l-k-1} entsprechen lassen und die Berandungsbeziehungen in dem Sinne aufrecht erhalten, dass, wenn Z^l dem Rande von Z^m $(l < m)$ angehört, auch die Z^l entsprechende Zelle Z^{l-k-1} dem Rande der Z^m entsprechenden Zelle Z^{m-k-1} angehören soll. Der UC von Z^k in C^n werde mit $UC_{Z^k}(C^n)$ bezeichnet. Um die Bezeichnung Umgebungs*komplex* zu rechtfertigen, müssen wir beweisen:

---

[1]) Man findet die Definitionen bei BILZ a.a.O., § 5. Wir weichen nur darin von den BILZ'schen Definitionen ab, dass wir die Forderungen 64*b* und *c* weglassen, die eine, weil sie in dem nötigen Umfange als Satz 2 bewiesen werden wird, die andere, weil auch ohne sie die wesentlichen Sätze bestehen bleiben.

[2]) Der Kürze halber sagen wir, Z^k berandet Z^l, wenn Z^k der Rand-S^{l-1} von Z^l angehört, also nicht notwendig den vollen Rand von Z_l bildet.

Satz 2. *$UC_{Z^k}(C^n)$ ist ein Komplex, d.h. der Rand jeder seiner Zellen Z^r ist eine S^{r-1}.*

Fassen wir den UC unabhängig von seiner geometrischen Bedeutung nur als Zusammenstellung von Zellen auf, die durch Berandungsbeziehungen verknüpft sind, so gilt die Formel

$$UC_{Z^l}(C^n) = UC_{Z^{l-k-1}}(UC_{Z^k}(C^n)), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

wenn Z^k eine Randzelle von Z^l, also $k < l < n$, und Z^{l-k-1} die der Zelle Z^l auf $UC_{Z^k}(C^n)$ entsprechende Zelle ist. Um nämlich $UC_{Z^k}(C^n)$ zu bilden, behalten wir von C^n nur die von Z^k berandeten Zellen bei, vermindern die Dimension um $k+1$ und lassen die Berandungsbeziehungen ungeändert. Da Z^k als Randzelle von Z^l auch jede von Z^l berandete Zelle berandet, sind jedenfalls die von Z^l berandeten Zellen beibehalten worden, und zwar werden sie jetzt von Z^{l-k-1} berandet. Die rechte Seite der Gleichung (I) entsteht, wenn wir nur diese Zellen mit ihren Berandungsbeziehungen beibehalten und die Dimension je um $l-k-1+1$ vermindern. Im ganzen haben wir also genau die von Z^l berandeten Zellen beibehalten und ihre Dimension um $k+1+l-k-1+1 = l+1$ vermindert. Das gibt aber genau $UC_{Z^l}(C^n)$.

Was ist nun der Rand von Z^{l-k-1} auf $UC_{Z^k}(C^n)$? Wir erhalten ihn, indem wir von den Zellen von $UC_{Z^k}(C^n)$ nur die Randzellen von Z^{l-k-1}, d.h. die aus den Randzellen von Z^l hervorgegangegen Zellen herausgreifen. Damit haben wir aber den UC von Z^k in der Z^l berandenden Sphäre S^{l-1}. Satz 2 ist also zurückgeführt auf

Satz 3(m).

$$UC_{Z^k}(S^m) = S^{m-k-1}.$$

Zugleich mit Satz 3(m) beweisen wir

Satz 4(m). *Ist Z^k eine innere Zelle des Elementarraumes E^m, so gilt*

$$UC_{Z^k}(E^m) = S^{m-k-1}.$$

Satz 5(m). *Ist Z^k Randzelle von E^m, so gilt*

$$UC_{Z^k}(E^m) = E^{m-k-1},$$

und zwar entspricht einer von Z^k berandeten inneren bezw. Randzelle von E^m eine innere bezw. Randzelle von E^{m-k-1}.

Man bestätigt die Sätze $3(m)$ bis $5(m)$ unmittelbar, wenn S^m bezw. E^m in der Normalgestalt vorliegt. Diese besteht bekanntlich [1]) aus zwei Zellen jeder Dimension von der nullten bis zur m-ten, nur beim Elementarraum E^m nur einer Z^m, wobei jede Zelle jede von höherer Dimension berandet; und im Falle des Elementarraumes ist jede Zelle von niedrigerer als der m-ten Dimension Randzelle. Bildet man einen UC, so erhält man genau, wie es Satz $3(m)$ bezw. $5(m)$ behauptet, eine S^{m-k-1} bezw. einen E^{m-k-1} (Satz $4(m)$ kommt nicht zur Anwendung, da keine inneren Zellen vorhanden sind).

Es seien nun die Sätze $3(n)$, $4(n)$, $5(n)$ gültig für $n < m$ und für $n = m$ bei einer bestimmten Darstellung vom S^m bezw. E^m; wir beweisen sie für jede S^m oder E^m, die aus der vorliegenden durch eine i.T. hervorgeht. Haben wir dies für $k = 0$ geleistet, so folgen die Sätze für grösseres k. Ist nämlich Z^0 ein Punkt auf dem Rande von Z^k so folgt aus (I), wenn Z^{k-1} die Z^k auf $UC_{Z^0}(S^m)$ bezw. $UC_{Z^0}(E^m)$ entsprechende Zelle ist,

$$UC_{Z^k}(S^m) = UC_{Z^{k-1}}(UC_{Z^0}(S^m))$$

bezw.

$$UC_{Z^k}(E^m) = UC_{Z^{k-1}}(UC_{Z^0}(E^m)).$$

Sind die Sätze für Z^0 bewiesen, so steht rechts in der Klammer eine S^{m-1} oder ein E^{m-1}, je nachdem ob Z^0 innere oder Randzelle ist. Nach Satz $5(m)$, angewandt auf Z^0, ist Z^{k-1} zugleich mit Z^k innere oder Randzelle. Nach Satz $3(m-1)$, $4(m-1)$ oder $5(m-1)$ steht nun rechts eine S^{m-k-1} oder, wenn Z^k Randzelle von E^m ist, ein E^{m-k-1}, was zu beweisen war.

Der UC eines Punktes Z^0 ändert sich bei i.T. nur dann, wenn eine von Z^0 berandete Zelle Z^k transformiert wird. Es werde etwa Z^k in Z_1^k und Z_2^k geteilt durch eine Zelle Z^{k-1}, deren Rand eine auf der Randsphäre S^{k-1} von Z^k gelegene S^{k-2} ist, die S^{k-1} in E_1^{k-1} und E_2^{k-1} zerlegt, sodass Z_i^k $(i=1,2)$ von Z^{k-1} und E_i^{k-1} begrenzt wird. UC_{Z_0} ändert sich nur, wenn Z^0 auf S^{k-2} liegt. Nach den Sätzen $3(k-1)$, $3(k-2)$, $5(k-1)$ sind dann die Bilder von S^{k-1}, S^{k-2}, E_i^{k-1} auf UC_{Z^0} bezüglich Sphären bezw. Elementarräume $\overline{S}^{k-2}$, S^{k-3}, E_i^{k-2}. Auf UC_{Z^0} wird bei der i. T. eine von $\overline{S}^{k-2}$ begrenzte Z^{k-1} ersetzt durch Z^{k-2}, begrenzt von S^{k-3}, und die Zellen Z_i^{k-1} $(i = 1, 2)$, begrenzt von

[1]) Siehe BILZ, a. a. O., Nr. 79, 80.

Z^{k-2} und E_i^{k-2}, d. h. UC_{Z^0} erleidet eine i. T.: die Sätze 3 (m), 4 (m), 5 (m) bleiben gültig. Genau entsprechend beweist man, dass UC_{Z^0} eine i. T. erfährt, wenn bei der i. T. zwei Zellen vereinigt werden.

Wird bei der i. T. eine Strecke Z^1 in zwei Strecken Z_1^1 und Z_2^1 geteilt und ein Punkt Z^0 neu eingeführt, so erhalten wir UC_{Z^0}, indem wir in UC_{Z^1} die Dimension jeder Zelle um eins erhöhen und zwei Punkte, die Bilder von Z_1^1 und Z_2^1, hinzufügen, die alle Zellen höherer Dimension beranden. Es ist also noch zu beweisen.

Satz 6 (m). *Erhöht man in einer S^{m-1} bezw. einem E^{m-1} die Dimension jeder Zelle um eins, und fügt man zwei alle anderen Zellen berandende Punkte Z_1^0 und Z_2^0 hinzu, so ergibt sich eine S^m bezw. ein E^m.*

Der Satz 6 (n) gilt offenbar für $n = 1$ und wenn S^{n-1} bezw. E^{n-1} in der Normalgestalt vorliegt. Er sei bewiesen für $n < m$; dann zeigen wir, dass bei i. T. von S^{m-1} bezw. E^{m-1} auch S^m bezw. E^m eine i. T. erfährt. In der Tat, haben bei der Teilung einer Zelle Z^k ($k \leqq m-1$), S^{k-1}, S^{k-2}, E_i^{k-1} dieselbe Bedeutung wie vorher, so bilden die den Zellen von S^{k-1}, S^{k-2}, E_i^{k-1} entsprechenden Zellen von S^m bezw. E^m zusammen mit Z_1^0 und Z_2^0 nach Satz 6 ($k-1$) und 6 ($k-2$) je eine S^k, S^{k-1}, E_i^k; daher bewirkt die i. T. von S^{m-1} bezw. E^{m-1} eine i. T. von S^m bezw. E^m, wodurch diese wieder in eine S^m bezw. E^m übergeht. Dasselbe gilt bei Vereinigung zweier Zellen.

Damit sind endlich die Sätze 2 bis 6 bewiesen.

Wir brauchen noch den folgenden

Satz 7. *Jede i.T. eines $UC_{Z^k}(C^n)$ lässt sich durch eine i.T. von C^n bewirken. Ist $k = 0$, und besteht die i.T. von UC_{Z^k} nur in Teilungen, so lässt sie sich bewirken durch Teilungen in C^n, bei denen keine von Z^0 berandete Strecke betroffen wird, wenn nur anfangs keine zwei Strecken beide Endpunkte gemeinsam haben.*

Wir teilen jede von Z^k berandete Zelle in folgender Weise. Jede Z^{k+1} wird geteilt durch eine Zelle $\overline{Z}^k$, die von derselben S^{k-1} berandet wird wie Z^k. (Diesen Schritt unterlassen wir nur, wenn es sich im Falle $k = 0$ darum handelt, die zweite Behauptung zu beweisen). Haben wir alle von Z^k berandeten Zellen bis herauf zur l-ten Dimension geteilt, so teilen wir jede von Z^k berandete Z^{l+1}

durch eine Zelle $\overline{Z}^l$, deren Rand besteht aus S^{k-1} und allen den Zellen $\overline{Z}^r$, deren entsprechende Z^{r+1} Randzellen von Z^{l+1} sind. Bei diesen Teilungen hat sich UC_{Z^k} nicht geändert. Wollen wir nun in UC_{Z^k} eine i.T. ausführen, etwa Z^{l-k-1}, das Bild von Z^l, teilen durch eine Z^{l-k-2}, deren Rand eine auf der Rand-S^{l-k-2} von Z^{l-k-1} gelegene und diese in zwei E^{l-k-2} zerlegende S^{l-k-3} ist, so teilen wir $\overline{Z}^{l-1}$ durch eine $\overline{Z}^{l-2}$, deren Rand besteht aus S^k und denjenigen $\overline{Z}^r$, deren zugehörigen Z^{r+1} auf UC_{Z^k} die Zellen von S^{l-k-3} entsprechen, darauf teilen wir Z^l durch eine Z^{l-1}, deren Rand besteht aus den Zellen: $\overline{Z}^{l-2}$ mit ihren Randzellen $(\overline{S}^{l-3})$, Z^k mit ihren Randzellen (S^{k-1}) und zu jeder $\overline{Z}^r$ von S^{l-3} die zugehörige $\overline{Z}^r$. Auf UC_{Z^k} wird damit Z^{l-k-1} geteilt durch Z^{l-k-2}, das Bild von Z^{l-1}, und der Rand von Z^{l-k-2} is die vorgegebene S^{l-k-3}. Sollen zwei Zellen Z_1^{l-k-1} und Z_2^{l-k-1} von UC_{Z^k} durch Beseitigung der gemeinsamen Randzelle Z^{l-k-2} vereinigt werden, so vereinigen wir die entsprechenden Zellen Z_1^l und Z_2^l von C^n durch Beseitigung der gemeinsamen Randzelle Z^{l-1}. Soll eine weitere i.T. auf UC_{Z^k} bewirkt werden, so wiederholen wir das ganze Verfahren. Die Rechtmässigkeit der vorgenommenen i.T. folgt aus den Sätzen:

(A) Lassen wir von einer S^n einen E^n weg, so bleibt ein E^n übrig.

(B) Erhöhen wir in einer S^n (einem E^n) die Dimension jeder Zelle um k und fügen wir eine S^{k-1} hinzu, deren Zellen alle anderen Zellen beranden sollen, so erhalten wir eine S^{n+k} (einen E^{n+k}).

Der Beweis von (A) ist nicht ganz einfach, aber von den folgenden Betrachtungen unabhängig. Ich denke ihn in anderem Zusammenhange zu geben.

Um (B) zu beweisen, transformieren wir S^{k-1} in die Normalgestalt. Das ist durch eine Transformation des ganzen Komplexes möglich, da alle Zellen von S^{k-1} dieselben Zellen, nämlich sämtliche, die nicht zu S^{k-1} gehören, beranden. Hat aber S^{k-1} die Normalgestalt, so folgt (B) durch $(k+1)$-malige Anwendung des Sonderfalles $k=0$, und dieser wurde schon als Satz 6 bewiesen.

Mit Hilfe des Begriffes UC können wir jetzt definieren:

Eine geschlossene n-dimensionale $(n > \sigma)$ Mannigfaltigkeit M^n ist ein zusammenhängender C^n, in dem jeder UC_{Z^0} eine S^{n-1} ist. Nach (I) und Satz 3(n—1) ist dann auch jeder UC_{Z^k} eine S^{n-k-1}. Genau wie beim Beweis der Sätze 3 bis 5 zeigt sich, dass eine M^n bei

i.T. wieder in eine M^n übergeht, dass der Begriff Mannigfaltigkeit gegenüber Homöomorphie invariant ist.

§ 2. *Zerlegung in höchstens zwei Teile.*

Satz 8(n). *Liegt in einer M^n ($n \geqq 1$) eine M^{n-1}, so lassen sich ein beliebiger Punkt Q von M^{n-1} und ein beliebiger nicht auf M^{n-1} liegender Punkt P nach einer geeigneten Unterteilung von M^n durch einem M^{n-1} nur in Q treffenden Streckenzug verbinden.*

Satz 9(n). *Eine M^n wird durch eine in ihr liegende M^{n-1} in höchstens zwei Teile zerlegt, d.h. von drei beliebigen nicht auf M^{n-1} liegenden Punkten von M^n lassen sich nach einer geeigneten Unterteilung von M^n mindestens zwei durch einen M^{n-1} nicht treffenden Streckenzug verbinden.*

Offenbar gelten die Sätze 8(1) und 9(1), wenn wir, wie es hier zweckmässig ist, unter M^0 nur die S^0, d.h. zwei Punkte verstehen. Es seien die Sätze 8(n—1) und 9(n—1) bewiesen; wir beweisen zuerst 8(n), dann 9(n).

Da M^n ein zusammenhängender C^n ist, können wir P und Q durch einen Streckenzug verbinden. Ist Q_1 der erste auf M^{n-1} liegende Punkt des Streckenzuges, und fällt Q_1 mit Q zusammen, so ist Satz 8 bestätigt. Anderenfalls können wir, da M^{n-1} zusammenhängt, Q_1 und Q durch einen auf M^{n-1} verlaufenden Streckenzug $Q_1 Q_2 \ldots Q_r Q$ verbinden. Von diesem dürfen wir annehmen, dass er keinen Doppelpunkt hat; denn sonst könnten wir ihn durch Weglassen geschlossener Streckenzüge verkürzen. Wir ersetzen den Streckenzug $PQ_1 Q_2 \ldots Q_r Q$ durch einen Zug $PQ_2 \ldots Q_r Q$, dessen Teil PQ_2 die Mannigfaltigkeit M^{n-1} nur in Q_2 trifft. Das geschieht folgendermassen. Auf $UC_{Q_1}(M^n) = S^{n-1}$ ist das Bild von M^{n-1} eine S^{n-2}, also eine besondere M^{n-2}, das der Strecke $Q_1 Q_2$ ein Punkt von S^{n-2}, das der letzten Strecke RQ_1 des Zuges PQ_1 ein nicht auf S^{n-2} liegender Punkt. Nach Satz 8(n—1), angewandt auf S^{n-1}, können wir diese beiden Punkte nach einer geeigneten Unterteilung von S^{n-1} durch einen S^{n-2} nicht treffenden Streckenzug auf S^{n-1} verbinden. Diese Unterteilung von S^{n-1} lässt sich nach Satz 7 bewirken durch eine Unterteilung von M^n, bei der die Strecke $Q_1 Q_2$ nicht geteilt wird. Das bedeutet aber für M^n, dass nach dieser Unterteilung eine Folge von Flächenzellen $Z_1^2, Z_2^2, \ldots Z_s^2$

vorliegt, die sämtlich in Q_1 zusammenstossen, von denen die erste von RQ_1 und die letzte von $Q_1 Q_2$ berandet wird, und von denen jede $Z_i^2 (i = 1, \ldots, s-1)$ mit der folgenden, Z_{i+1}^2 eine von Q_1 ausgehende, nicht auf M^{n-1} liegende Strecke Z_i^1 gemeinsam hat. Jede dieser gemeinsamen Randstrecken Z_i^1 teilen wir durch einen neu eingeführten Punkt T_i und verbinden R mit T_1 durch eine Strecke auf Z_1^2, T_i mit T_{i+1} $(i = 1, \ldots, s-1)$ durch eine Strecke auf Z_{i+1}^2, T_{s-1} mit Q_2 durch eine Strecke auf Z_s^2. Schliesslich ersetzen wir die Strecken RQ_1 Q_2 des Zuges PQ durch die Strecken RT_1 $T_2 \ldots T_{s-1}$ Q_2; damit haben wir die Anzahl der auf M^{n-1} liegenden Strecken des Zuges um eins vermindert. Wiederholung dieses Verfahrens liefert zuletzt einen Streckenzug PQ, der M^{n-1} nur in Q trifft, wie es Satz 8 behauptet.

Sind nun P_1, P_2, P_3 drei nicht auf M^{n-1} liegende Punkte von M^n, so verbinden wir jeden von ihnen mit einem Punkt Q von M^{n-1} durch einen M^{n-1} nur in Q treffenden Streckenzug, was nach Satz 8 (n) nach einer Unterteilung von M^n möglich ist. Sind $R_1 Q$, $R_2 Q$, $R_3 Q$ die letzten Strecken dieser Züge, so sind deren Bilder auf $UC_Q = S^{n-1}$ drei Punkte, die nicht auf dem Bilde S^{n-2} von M^{n-1} liegen. Nach Satz 9 $(n-1)$, angewandt auf S^{n-2} und die Bilder von $R_1 Q$, $R_2 Q$ und $R_3 Q$ auf S^{n-1}, lassen sich nach einer Unterteilung von S^{n-1} zwei von den drei Punkten, durch einen S^{n-2} nicht treffenden Streckenzug verbinden. Nach Satz 7 lässt sich diese Unterteilung von S^{n-1} durch eine Unterteilung von M^n bewirken. Nach dieser Unterteilung haben wir eine Folge in Q zusammenstossender Flächenzellen $Z_1^2, Z_2^2, \ldots, Z_s^2$, die nicht auf M^{n-1} liegen von denen etwa die erste von $R_1 Q$, die letzte von $R_2 Q$ berandet wird, und von denen jede, Z_i^2 mit der folgenden Z_{i+1}^2 in einer nicht auf M^{n-1} liegenden Strecke Z_i^1 zusammenstösst. Auf Z_i^1 führen wir je einen neuen Punkt T_i ein und verbinden R_1 mit T_1, T_i mit T_{i+1}, T_{s-1} mit R_2, durch je eine Strecke innerhalb der Zellen $Z_1^2, \ldots, Z_s^2$. Damit sind R_1 und R_2, also P_1 und P_2 durch einen M^{n-1} nicht treffenden Streckenzug verbunden, wie es Satz 9(n) behauptet.

§ 3. *Zerlegung in genau zwei Teile.*

Satz 10(n). *Ist bei der Mannigfaltigkeit M^n $(n > 1)$ die erste*

Bettische *Zahl* $P_1 = 1$, *und sind alle Torsionszahlen erster Dimension ungerade, so wird* M^n *durch jede* M^{n-1} *zerlegt, d.h. wir können durch eine Unterteilung von* M^n *zwei Punkte einführen, die sich durch keinen* M^{n-1} *nicht treffenden Streckenzug verbinden lassen.*

Satz 10(m) sei bewiesen für $m < n$. Die Sphäre S^m erfüllt die Voraussetzungen, wenn $m > 1$ ist: es ist $P_1 = 1$ und keine Torsionszahl vorhanden. Im Falle $m = 1$ gilt die Behauptung von Satz 10; denn eine M^1, d.h. eine geschlossene Kurve wird durch jede M^0, d.h. durch irgend zwei Punkte zerlegt (obwohl hier $P_1 = 2$ ist).

Wir wählen einen beliebigen Punkt Q auf M^{n-1}. UC_Q ist eine S^{n-1}, das Bild von M^{n-1} auf UC_Q eine S^{n-2}. Nach Satz 10($n-1$) können wir S^{n-1} so unterteilen, dass zwei nicht auf S^{n-2} liegende Punkte O_1 und O_2 durch S^{n-2} getrennt werden. Nach Satz 7 können wir die Unterteilung von S^{n-1} durch eine Unterteilung von M^n bewirken. Dann teilen wir die beiden von Q ausgehenden Strecken, deren Bilder O_1 und O_2 sind, durch die Punkte P_1 und P_2 und behaupten: P_1 und P_2 lassen sich durch keinen M^{n-1} nicht treffenden Streckenzug verbinden. Liessen sie sich nämlich verbinden, so würde der verbindende Streckenzug mit den Strecken P_1QP_2 eine geschlossene Kurve bilden, deren Lage in ihrem einzigen Schnittpunkt Q mit M^{n-1} durch die Konstruktion so eingerichtet ist, dass wir in sinngemässer Übertragung der üblichen Ausdrucksweise sagen können, sie durchschneidet M^{n-1} in Q. Unter den Voraussetzungen von Satz 10 ist jede geschlossene Kurve G^1, eine geeignete ungerade Anzahl von Malen genommen, homolog Null, d.h. der vollständige Rand eines Aggregats G^2 orientierter Flächenzellen. Von der Orientierung können wir für unseren Zweck absehen und merken nur an, dass in den Strecken von G^1 eine ungerade, in allen anderen Strecken eine gerade Zahl Zellen von G^2 angrenzen. Liegen nun (wenn $n > 2$ ist) Flächenzellen von G^2 auf M^{n-1}, so ersetzen wir sie durch andere. Ist nämlich Z^2 eine solche, so können wir durch eine Unterteilung von M^n bewirken, dass an Z^2 eine nicht zu M^{n-1} gehörende Z^2 anstösst. Dann teilen wir Z^2 durch eine Flächenzelle Z_1^2, die wir in die Randkurve von Z^2 einspannen, und ersetzen Z^2 als Zelle von G^2 durch Z_1^2.

Ist Z^1 eine auf M^{n-1} liegende Strecke von G^2 und $n > 2$, so ist $UC_{Z^1}(M^n)$ eine S^{n-2}, das Bild von M^{n-1} auf $UC_{Z^1}(M^n)$ eine S^{n-3}, das von G^2 eine gerade Anzahl nicht auf S^{n-3} liegender

Punkte. Nach Satz 9($n-2$) und 10($n-2$) wird S^{n-2} durch S^{n-3} in zwei Teile zerlegt. Z^1 heisse Schnittstrecke, wenn in jedem der beiden Teile von S^{n-2} eine ungerade Anzahl dieser Punkte liegt. Ist $n=2$ so besteht UC_{Z^1} aus zwei Punkten und das Bild von G^2 aus einer geraden Anzahl von Punkten. Z^1 heisse Schnittstrecke, wenn je eine ungerade Anzahl mit jedem der beiden Punkte von UC_{Z^1} zusammenfällt.

Ist P ein auf M^{n-1} liegender Punkt von G^2, so ist UC_P (M^n) eine S^{n-1}, das Bild von M^{n-1} auf UC_P eine S_1^{n-2}, das von G^2 ein Streckenkomplex C^1, in dessen Punkten immer eine gerade Zahl von Strecken zusammenstösst. Den auf M^{n-1} liegenden Strecken von G^2 entsprechen auf S_1^{n-2} liegende Punkte von C^1. Von einem solchen Punkt R führen in jeden der beiden Teile, in die S^{n-1} nach Satz 8($n-1$) durch S_1^{n-2} zerlegt wird, eine Anzahl Strecken. Die dem Punkt R entsprechende Strecke von G^2 ist dann und nur dann Schnittstrecke, wenn diese Anzahlen beide ungerade sind. Den Punkten von UC_{Z^1} (M^n), die in demselben von S^{n-3} bestimmten Teil liegen, entsprechen auf UC_P (M^n) Strecken, die sich nach einer Unterteilung durch eine Folge nicht auf S^{n-2} liegender Strecken und Flächenzellen verbinden lassen, also zu demselben durch S^{n-1} bestimmten Teil von UC_P (M^n) gehören. Wir behaupten nun: in Q endigt eine ungerade, in jedem anderen auf M^n liegenden Punkt P von G^2 eine gerade Zahl Schnittstrecken. Auf UC_P ($P \neq Q$) haben wir nämlich einen Streckenkomplex, in dessen Punkten je eine gerade Anzahl Strecken endigt. Dieser lässt sich in eine Anzahl geschlossener Kurven zerlegen, und von diesen muss jede den einen durch S_1^{n-1} auf UC_P bestimmten Teil gleich oft betreten und verlassen, also S_1^{n-2} im ganzen eine gerade Anzahl Male schneiden. Auf UC_Q dagegen haben wir einen Streckenkomplex, in dessen Punkten je eine gerade Zahl Strecken endigt, mit Ausnahme der Punkte O_1 und O_2, die in verschiedenen durch S_1^{n-2} bestimmten Teilen von UC_Q liegen, und in denen je eine ungerade Zahl Strecken endigt. Der Streckenkomplex lässt sich zerlegen in geschlossene Kurven und eine O_1 mit O_2 verbindende Kurve. Die ersteren schneiden S_1^{n-2} eine gerade, die letzte eine ungerade Anzahl Male.

Zählen wir nun die Endpunkte aller Schnittstrecken, so liefert Q einen ungeraden, jeder andere Punkt einen geraden Beitrag. Die Gesamtzahl ist aber gerade, da jede Strecke zwei Endpunkte hat.

Also ist die Annahme, M^n würde durch M^{n-1} nicht zerlegt, zu verwerfen, Satz 10(n) ist bewiesen.

§ 4. *Nicht zerlegende Mannigfaltigkeiten.*

Satz 11. *Ist die erste* BETTI*sche Zahl der Mannigfaltigkeit* M^n $(n > 1)$ *grösser als eins, oder ist eine gerade Torsionszahl erster Dimension vorhanden, so gibt es eine* M^{n-1} *auf* M^n, *die* M^n *nicht zerlegt.*

Um die Voraussetzung auszunutzen, erinnern wir uns an die Bedeutung der BETTIschen und Torsionszahlen. Ist P_1 die erste Bettische Zahl, und sind $\tau_1, \ldots, \tau_r$ die Torsionszahlen erster Dimension, so gibt es eine Basis für die gerichteten geschlossenen Wege auf M^n, bestehend aus den Wegen $X_1, \ldots, X_{P_1-1}$, $Y_1, \ldots, Y_r$ derart, dass sich jeder geschlossene gerichtete Weg X bis auf Homologie aus ihnen kombinieren lässt:

$$X \sim \sum_{\nu=1}^{P_1-1} c_\nu X_\nu + \sum_{\nu=1}^{r} d_\nu Y_\nu , \tag{1}$$

und dann und nur dann $X \sim 0$ ist, wenn

$$c_\nu = 0 \; (\nu = 1, \ldots, P_1-1), \; d_\nu \equiv 0 \; mod \; \tau_\nu \; (\nu = 1, \ldots, r)$$

ist.

Statt der Wege, d.h. der geschlossenen gerichteten Ketten von Zellen abwechselnd nullter und erster Dimension, von denen je zwei aufeinander folgende in der Berandungsbeziehung stehen, betrachten wir jetzt ebensolche Ketten von Zellen abwechselnd n-ter und $(n-1)$-ter Dimension. Jeder solchen Kette

$$Z_1^n \, Z_1^{n-1} \, Z_2^n \ldots Z_r^{n-1} \, Z_1^n \tag{2}$$

ordnen wir einen Weg zu, indem wir auf dem Rande jeder Zelle Z_i^{n-1} einen Punkt P_i bestimmen und jeweils P_i mit P_{i+1} $(i=1,\ldots, r-1)$ durch einen Weg auf dem Rande von Z_{i+1}^n, P_r mit P_1 durch einen Weg auf dem Rande von Z_1^n verbinden. Zwei verschiedene, derselben Kette zugeordnete Wege sind einander homolog. Denn ist $P'_1 \, P'_2 \ldots P'_r \, P'_1$ ein anderer der Kette (2) zugeordneter Weg, so verbinden wir jeweils P_i und P'_i durch einen Weg auf dem Rande von Z_i^{n-1}. Da der Rand von Z_i^n eine S^{n-1} ist, so ist der auf ihm gelegene geschlossene Weg $P_{i-1} \, P_i \, P'_i \, P'_{i-1} \, P_{i-1}$ bezw. für $i=1$ der Weg $P_r \, P_1 \, P'_1 \, P'_r \, P_r$ homolog Null. Die Addition dieser Homologien ergibt

$$P_1 \, P_2 \ldots P_r \, P_1 \sim P'_1 P'_2 \ldots P'_r \, P'_1 .$$

Wir können also auf die Ketten (2) die Basisdarstellung (1) anwenden. Umgekehrt gehört auch zu jedem Weg $Z_1^0 Z_1^1 Z_2^0 \ldots Z_s^1 Z_1^0$ eine Kette (2). Wir brauchen nur jeder Strecke Z_i^1 des Weges eine von ihr berandete Zelle Z_i^n zuzuordnen und Z_i^n mit Z_{i+1}^n $(i=1, \ldots, s-1)$ durch eine Kette von Z_{i+1}^0 berandeter, Z_s^n mit Z_1^n durch eine Kette von Z_1^0 berandeter Zellen n-ter und $(n-1)$-ter Dimension zu verbinden. Dies ist stets möglich, da die von Z_i^0 berandeten Zellen die Bilder der Zellen von $UC_{Z_i^0}$, einer S^{n-1} sind, und man auf dieser je zwei Zellen $(n-1)$-ter Dimension durch eine Kette von Zellen $(n-1)$-ter und $(n-2)$-ter Dimension verbinden kann. Der so gefundenen Kette kann offenbar nach der oben angegebenen Regel der ursprüngliche Weg, vermehrt um hin und zurück durchlaufene Strecken, also ein dem ursprünglichen homologer Weg, zugeordnet werden.

Der UC einer Z^{n-2} ist eine S^1. Umlaufen wir sie, so erhalten wir eine Kette, der ein verschwindender Weg zugeordnet werden kann: wir brauchen nur für alle Punkte P_i denselben Randpunkt von Z^{n-2} zu nehmen.

Mit Hilfe der Basisdarstellung (1) für die Ketten (2) konstruieren wir einen Komplex $(n-1)$-ter Dimension C^{n-1}, aus dem wir dann eine M^n nicht zerlegende M^{n-1} ableiten werden.

Wir wählen eine Zelle n-ter Dimension Z_1^n. An sie grenze in der Zelle Z_1^{n-1} eine andere, Z_2^n, Diese nehmen wir zu Z_1^n hinzu und setzen fest, dass Z_1^{n-1} nicht zu C^{n-1} gehören soll. Haben wir so die Zellen $Z_1^n, \ldots, Z_r^n$ bekommen, und gibt es noch weitere Zellen n-ter Dimension, so sei unter diesen Z_{r+1}^n eine, die in der Zelle Z_r^{n-1} an eine der Zellen $Z_1^n, \ldots, Z_r^n$ angrenzt. Wir nehmen Z_{r+1}^n hinzu und setzen fest, dass Z_r^{n-1} nicht zu C^{n-1} gehört. Haben wir so alle Z^n erschöpft, so gilt es noch, für die bisher nicht aufgetretenen Z^{n-1} festzusetzen, ob sie zu C^{n-1} gehören oder nicht. Z^{n-1} berande die beiden Zellen Z_k^n und Z_l^n. Jede von diesen ist mit Z_1^n durch eine Kette von Zellen n-ter und $(n-1)$-ter Dimension verbunden, deren Zellen $(n-1)$-ter Dimension nicht zu C^{n-1} gehören. Ist $P_1 > 1$ und c_1 der Wert aus der Basisdarstellung (1) der Kette $Z_1^n \ldots Z_k^n Z^{n-1} Z_l^n \ldots Z_1^n$, so gehöre Z^{n-1} zu C^{n-1} wenn c_1 ungerade ist, sonst nicht. Ist aber $P_1 = 1$ und eine der Torsionszahlen, etwa τ_1 gerade, und d_1 wieder der

Wert aus der Basisdarstellung (1) der Kette $Z_1^n \ldots Z_k^n Z^{n-1} Z_l^n \ldots Z_1^n$ so gehöre Z^{n-1} zu C^{n-1} wenn d_1 ungerade ist, sonst nicht. Da d_1 bis auf ein Vielfaches der geraden Zahl τ_1 bestimmt ist, ist damit die Zugehörigkeit eindeutig festgelegt.

Der Komplex C^{n-1} hat die folgenden Eigenschaften:

1. C^{n-1} ist nicht leer. Wählen wir nämlich eine dem Weg X_1 bezw. Y_1 zugeordnete Kette $Z_{i_1}^n Z_{k_1}^{n-1} Z_{i_2}^n \ldots Z_{k_r}^{n-1} Z_{i_1}^n$, und ergänzen wir sie zu der Kette $Z_1^n \ldots Z_{i_1}^n Z_{k_1}^{n-1} Z_{i_2}^n \ldots Z_1^n \ldots Z_{k_r}^{n-1} Z_{i_1}^n \ldots Z_1^n$, in der bei jeder Zelle $Z_{i_l}^n$ die keine Zelle von C^{n-1} enthaltende Kette $Z_{i_l}^n \ldots Z_1^n \ldots Z_{i_l}^n$ eingeschaltet ist, so enthält die ergänzte Kette dieselben Zellen von C^{n-1} wie die ursprüngliche. Wäre dies keine, so wären in der Darstellung (1) der Ketten $Z_1^n \ldots Z_{i_l}^n Z_{k_l}^{n-1} Z_{i_{l+1}}^u \ldots Z_1^n$ immer c_1 bezw. d_1 gerade. In der Darstellung (1) der gesamten Kette hat aber c_1 bezw. d_1 den Wert 1, und dieser ist $(mod.\ \tau_1)$ die Summe jener.

2. C^{n-1} zerlegt M^n nicht; denn wir haben ja jede Z^n mit Z_1^n durch eine keine Zelle von C^{n-1} enthaltende Kette verbunden.

3. In jeder Z^{n-2} von M^n stösst eine gerade Anzahl Zellen von C^{n-1} zusammen. Denn umkreisen wir Z^{n-2} durch eine Kette, so ist jeder zugehörige Weg homolog Null, insbesondere in der Basisdarstellung $c_1 = 0$ bezw. $d_1 \equiv 0$; genau wie unter 1. folgt daraus die Behauptung.

Vermöge dieser Eigenschaften gelingt es, die Singularitäten von C^{n-1} aufzulösen, d.h. C^{n-1} so abzuändern, dass sich schliesslich eine M^n nicht zerlegende M^{n-1} ergibt. Eine Zelle Z^k von C^{n-1}, d.h. eine Randzelle einer Z^{n-1} von C^{n-1}, heisse regulär, wenn $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ eine S^{n-k-2} ist, die $UC_{Z^k}(M^n)$, eine S^{n-k-1}, in zwei E^{n-k-1} zerlegt. Eine Z^{n-2} ist also regulär, wenn in ihr genau zwei Z^{n-1} von C^{n-1} zusammenstossen. Ist dies nicht der Fall, ist die Anzahl der an Z^{n-2} anstossenden Z^{n-1} von C^{n-1} (gerade und) grösser als zwei, so üben wir zunächst auf die an Z^{n-2} anstossenden Zellen von M^n die beim Beweis von Satz 7 vorgenommenen Teilungen aus. Danach entspricht jeder von Z^{n-2} berandeten $Z^l (l = n-1, n)$ eine sie berandende $\overline{Z}^{l-1}$. Zwei benachbarte Z^{n-1} von C^{n-1}, d.h.

solche, zwischen denen im Sinne der zyklischen Ordnung auf $UC_{Z^{n-2}}$ keine weitere Z^{n-1} von C^{n-1} liegt, nehmen wir von C^{n-1} weg und ersetzen sie durch diejenigen $\overline{Z}^{n-1}$, die den ihre Bildpunkte auf $UC_{Z^{n-2}}$ verbindenden Strecken entsprechen. Die hierbei neu auftretenden Z^{n-2} von C^{n-1} sind regulär, und die Anzahl der in Z^{n-2} anstossenden Z^{n-1} von C^{n-1} ist um zwei vermindert worden. Daher können durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens schliesslich alle singulären Z^{n-2} aus C^{n-1} beseitigt werden. Auch der abgeänderte C^{n-1} zerlegt M^n nicht; denn betrachten wir die Teilung so, als hätten wir von den an Z^{n-2} anstossenden Zellen kleine Stücke abgetrennt, so wird der Rest sicher nicht von C^{n-1} zerlegt; von den abgetrennten Zellen lässt sich aber jede mit einer Restzelle durch eine C^{n-1} nicht treffende Kette verbinden.

Es seien nun alle Zellen von höherer als k-ter Dimension von C^{n-1} regulär. Gehört die Zelle Z^k zu C^{n-1}, so ist $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ ein Komplex C^{n-k-2} auf $UC_{Z^k}(M^n) = S^{n-k-1}$, und wir behaupten, dass dieser aus einer Anzahl M^{n-k-2} besteht. Wir brauchen nur zu beweisen, dass der UC jedes Punktes eine S^{n-k-3} ist. Der Punkt Z^0 sei das Bild der Zelle Z^{k+1} von C^{n-1}. Dann ist nach (I)

$$UC_{Z^0}(UC_{Z^k}(C^{n-1})) = UC_{Z^{k+1}}(C^{n-1}) = S^{n-k-3}.$$

Jeder grösste zusammenhängende Teilkomplex von $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ ist also eine M^{n-k-2}, d. h. $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ zerfällt in eine Anzahl M^{n-k-2}. Unter diesen suchen wir eine „innerste", d. h. eine von der Art, dass in dem einen der beiden Teile, in die sie (nach Satz 10) $UC_{Z^k}(M^n)$ zerlegt, keine andere Teilmannigfaltigkeit von $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ enthalten ist. Ist nämlich Q eine nicht zu $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ gehörige Zelle von $UC_{Z^k}(M^n)$, und bezeichnen wir als Inneres einer Teilmannigfaltigkeit M denjenigen durch M bestimmten Teil von $UC_{Z^k}(M^n)$, der Q nicht enhält, so brauchen wir nur von einer Teilmannigfaltigkeit zu einer in ihrem Inneren enthaltenen überzugehen, bis keine solche mehr vorhanden ist, bis wir eine innerste M^{n-k-2} gefunden haben. Jetzt führen wir mit den von Z^k berandeten Zellen die Teilungen aus dem Beweis von Satz 7 aus und ersetzen die den

Zellen von M^{n-k-2} entsprechenen Zellen Z^i von C^{n-1} durch diejenigen Zellen $\overline{Z}^{l-1}$, die die den Zellen des Inneren von M^{n-k-2} entsprechenden Zellen beranden. Auch nach dieser Abänderung wird M^n nicht durch C^{n-1} zerlegt; denn die dem Inneren von M^{n-k-2} entsprechenden von Z^k berandeten Zellen lassen sich nunmehr mit anderen von Z^k berandeten Zellen durch Ketten verbinden, die C^{n-1} nicht überschreiten.

Wir haben noch zu zeigen, dass jede der neu eingeführten Zellen k-ter Dimension $\overline{Z}^k$ von C^{n-1} regulär ist. Durch eine solche Zelle wurde eine nach Voraussetzung reguläre Zelle Z^{k+1} von C^{n-1} geteilt. Ihr UC entsteht also, indem wir in $UC_{Z^{k+1}}$ die Dimension jeder Zelle um eins erhöhen und zwei Punkte hinzufügen. Nach Satz 6 entsteht so aus $UC_{Z^{k+1}}(C^{n-1}) = S^{n-k-3}$ eine S^{n-k-2} und aus jedem der E^{n-k-3}, in die $UC_{Z^{k+1}}(M^n)$ durch $UC_{Z^{k+1}}(C^{n-1})$ zerlegt wird, ein E^{n-k-2}. Durch die folgenden Teilungen wird noch jede Zelle von $UC_{\overline{Z}^k}(M^n)$ geteilt, sodass schiesslich eine in der Art der Oberfläche einer Doppelpyramide geteilte S^{n-k+1} vorliegt: sie besteht aus einer S^{n-k-2} (das ist $UC_{Z^{k+1}}(M^n)$), zwei Punkten P_1 und P_2, den „Spitzen", und zu jeder Zelle von S^{n-k-2} zwei Zellen der nächst höheren Dimension. Nach der Abänderung bildet $UC_{\overline{Z}^k}(C^{n-1})$ auf dieser S^{n-k-1} einen Komplex der folgenden Art: es gehören dazu die Zellen eines auf S^{n-k-2} gelegenen E^{n-k-1} (nämlich eines der beiden E^{n-k-1}, in die $UC_{Z^{k+1}}(M^n)$ durch $UC_{Z^{k+1}}(C^{n-1})$ zerlegt wird) und diejenigen Zellen, die diese mit einer der beiden Spitzen der Doppelpyramide, etwa mit P_1, verbinden. Dass der eine (und daher auch der andere) hierdurch bestimmte Teil von $UC_{\overline{Z}^k}(M^n)$, nämlich die Gesamtheit der E^{n-k-2} mit P_1 verbindenden Zellen ein E^{n-k-1} ist, ist nicht schwer zu beweisen und soll an anderer Stelle gezeigt werden. Damit ist bewiesen, dass $\overline{Z}^k$ eine reguläre Zelle ist. Jetzt besteht aber $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ aus einer M^{n-k-2} weniger als vorher, und wir können das Verfahren wiederholen, bis Z^k überhaupt nicht mehr zu C^{n-1} gehört, ohne dabei singuläre Z^k hinzuzubekommen. Dies Verfahren wenden wir nacheinander auf alle Zellen $(n-2)$-ter bis nullter Dimension an und erhalten zum Schluss C^{n-1} in einer

Gestalt mit lauter regulären Zellen, sodass insbesondere jeder UC eines Punktes eine S^{n-2} ist. Es zerfällt also C^{n-1} in eine Anzahl M^{n-1}. Da diese alle zusammen M^n nicht zerlegen, tut es eine von ihnen allein erst recht nicht: wir haben eine M^n nicht zerlegende M^{n-1}, wie es Satz 11 behauptet.

Die Sätze 9, 10 und 11 ergeben zusammen Satz 1.