Mathematics. — *"Ueber die Wahrscheinlichkeit dass zwei natürliche Zahlen relativ prim sind."* Von Prof. R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of November 29, 1924).

Es seien M, $A \leqq M$ und $B \leqq M$ natürliche Zahlen > 1. A und B sind dann und nur dann nicht relativ prim: $(A, B) \neq 1$, wenn A und B durch wenigstens eine Primzahl $p \leqq M$ teilbar sind. Wir nennen $\sigma(M)$ die Anzahl der Paare A, B mit $(A, B) \neq 1$.

Diese Anzahl berechnen wir folgendermassen. Sei B fest und seien $p_1, p_2, \ldots$ die unter einander verschiedenen Primfactoren von B. Dann ist die Anzahl der Zahlen A, $1 < A \leqq M$, die durch p_i teilbar sind, gegeben durch $\left[\frac{M}{p_i}\right]$; also ist die Anzahl der Zahlen A, wofür $(A, B) =$ einem $p_i^{h_i}$ $(h_i \geqq 1)$, ist: $\sum\limits_{p_i} \left[\frac{M}{p_i}\right]$. Daher die Anzahl der Zahlen A, wofür $(A, B) =$ einem $p_i^{h_i}$ oder $=$ einem $p_i^{h_i} \cdot p_k^{h_k}$ $(i \neq k)$ ist, gegeben durch

$$\sum_{p_i \leqq M} \left[\frac{M}{p_i}\right] - \sum_{\substack{p_i < p_k \\ p_i p_k \leqq M}} \left[\frac{M}{p_i\, p_k}\right].$$

Durch Induktion findet man auf diese Weise die Anzahl $\nu(B)$ der Zahlen $A \leqq M$ mit $(A, B) \neq 1$ ausgedrückt durch [1]):

$$\nu(B) = \sum \left[\frac{M}{p_i}\right] - \sum_{p_i < p_k} \left[\frac{M}{p_i\, p_k}\right] + \sum_{p_i < p_k < p_l} \left[\frac{M}{p_i\, p_k\, p_l}\right] - \cdots \quad (1)$$

Da nun

$$\sigma(M) = \sum_{B=2}^{B=M} \nu(B) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

ist, finden wir

$$\sigma(M) = \sum_{B=2}^{B=M} \Bigl(\sum_{p_i} \left[\frac{M}{p_i}\right] \Bigr) - \sum_{B=2}^{B=M} \Bigl(\sum_{p_i < p_k} \left[\frac{M}{p_i\, p_k}\right] \Bigr) + \cdots \quad . \quad (3)$$

---

[1]) Verg. E. LANDAU, Handbuch .... Primzahlen, I, S. 67. Leipzig (1909).

Ordnen wir hier in jeder Doppelsumme die Glieder nach den verschiedenen Primzahlen $p, q, \ldots$, die $\leqq M$ sind und nennen B, A nicht verschieden von A, B (denn $(A, B) = 1$ und $(B, A) = 1$ drücken dasselbe aus), so bekommen wir:

$$2\sigma(M) = \sum_{p \leq M} \left[\frac{M}{p}\right]\left(\left[\frac{M}{p}\right] + 1\right) - \sum_{p < q \leq M} \left[\frac{M}{pq}\right]\left(\left[\frac{M}{pq}\right] + 1\right) + \ldots \quad (4)$$

Hieraus finden wir die Anzahl $\tau(M)$ von Zahlenparen $A, B, A \leqq M$, $B \leqq M$, wofür $(A, B) = 1$ ist:

$$\tau(M) = \frac{1}{2} M(M+1) - \sigma(M) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen Bedingungen $(A, B) = 1$ wird:

$$w(M) = 1 - \frac{1}{M(M+1)} \left\{ \sum_{p} \left[\frac{M}{p}\right]\left(\left[\frac{M}{p}\right] + 1\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{p<q} \left[\frac{M}{pq}\right]\left(\left[\frac{M}{pq}\right] + 1\right) + \ldots \right\} \quad . \quad (6)$$

Nun nehmen wir $M \to \infty$ und zeigen, dass $w(\infty)$ existiert und $= 0{,}607\ldots$ ist.

Hiezu beweisen wir erstens, dass die Reihe

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdot \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

der positiven Zahlen

$$\sigma_n = \sum_{2 \leq p_1 < \ldots < p_n}^{\infty} \frac{1}{(p_1 p_2 \ldots p_n)^2} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

konvergiert. Dabei sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n verschiedene Primzahlen.

Wenn wir in der absolut und deshalb auch unbedingt konvergenten Reihe (8) nacheinander die Faktoren $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$ absondern, erhalten wir:

$$\sigma_n = \frac{1}{4} \cdot \sum_{3 \leq p_1 < \ldots < p_{n-1}} \frac{1}{(p_1 p_2 \ldots p_{n-1})^2} + \frac{1}{9} \cdot \sum_{5 \leq p_1 < \ldots < p_{n-1}} \frac{1}{(p_1 p_2 \ldots p_{n-1})^2} + \ldots$$

$$< \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) \cdot \sum_{3 \leq p_1 < \ldots < p_{n-1}} \frac{1}{(p_1 p_2 \ldots p_{n-1})^2}$$

$$< \left(\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^2}\right) \cdot \sigma_{n-1} < \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \cdot \sigma_{n-1} = (\zeta(2) - 1) \cdot \sigma_{n-1},$$

also

$$\sigma_n < k\sigma_{n-1} \quad , \quad k = \zeta(2) - 1 = 0{,}6449\ldots < 1 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Daher ist die Reihe (7) konvergent.

Nun betrachten wir die für jedes $x \geqq 2$ und $n = 1, 2, \ldots$ definierte Funktion

$$f_n(x) = \frac{1}{x(x+1)} \cdot \sum_{\substack{2 \leqq p_1 < \ldots < p_n \\ p_1 p_2 \ldots p_n \leqq x}} \left[\frac{x}{p_1 p_2 \ldots p_n}\right]\left[\frac{x}{p_1 p_2 \ldots p_n} + 1\right] \quad (10)$$

$f_n(x)$ ist für alle x beschränkt, denn wir haben:

$$f_n(x) \leqq \frac{1}{x(x+1)} \cdot \sum_{\substack{2 \leqq p_1 < \ldots < p_n \\ p_1 p_2 \ldots p_n \leqq x}} \frac{x}{p_1 p_2 \ldots p_n} \cdot \frac{x + p_1 p_2 \ldots p_n}{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

$$< \frac{1}{x(x+1)} \cdot \sum_{\substack{2 \leqq p_1 < \ldots < p_n \\ p_1 p_2 \ldots p_n \leqq x}} \frac{x}{p_1 p_2 \ldots p_n} \cdot \frac{x + x}{p_1 p_2 \ldots p_n},$$

$$f_n(x) < 2\sigma_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Nach dem sogenannten Kriterium von WEIERSTRASS[1]) ist daher $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ und daher umsomehr auch $f_1(x) - f_2(x) + \ldots$ für alle $x \geqq 2$ gleichmässig konvergent und wir können in (6) gliedweise zur Grenze $M \to \infty$ übergehen. Wegen

$$\lim_{M \to \infty} \frac{1}{M(M+1)} \cdot \left[\frac{M}{a}\right]\left[\frac{M}{a} + 1\right] = \frac{1}{a^2}$$

erhalten wir:

$$w = \lim w(M) = 1 - \sum \frac{1}{p^2} + \sum \frac{1}{p^2 q^2} - \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots = \frac{1}{\zeta(2)},$$

somit

$$w \doteq 0{,}607\ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

---

[1]) Vgl. z.B. K. KNOPP, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer (1922), S. 332.