Mathematics. — *"Ueber projectieve Differentialinvarianten"* III. Von Prof. R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 31, 1925).

In dieser Mitteilung zeige ich, wie man aus den, in der ersten Mitteilung abgeleiteten "Klammerausdrücken" invariante Differential*formen* gewinnt. Ferners beweise ich einen Satz über das identische Verschwinden von Klammerausdrücken.

§ 1.

Wenn wir in

$$J = \{K_1, K_2, \ldots, K_{m+2}\} = \\ = \begin{vmatrix} q_1 K_1 \ldots q_{m-1} K_{m-1} & q_m K_m & q_{m+1} K_{m+1} & q_{m+2} K_{m+2} \\ p_1 K_1 \ldots p_{m-1} K_{m-1} & p_m K_m & p_{m+1} K_{m+1} & p_{m+2} K_{m+2} \\ \frac{\partial K_1}{\partial t_1} \ldots \frac{\partial K_{m-1}}{\partial t_1} & \frac{\partial K_m}{\partial t_1} & \frac{\partial K_{m+1}}{\partial t_1} & \frac{\partial K_{m+2}}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial K_1}{\partial t_m} \ldots \frac{\partial K_{m-1}}{\partial t_m} & \frac{\partial K_m}{\partial t_m} & \frac{\partial K_{m+1}}{\partial t_m} & \frac{\partial K_{m+2}}{\partial t_m} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (1)$$

voraussetzen, dass $K_1, K_2, \ldots, K_{m-1}$ absolute Invarianten sind, dann is

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_{m-1} = 0 \quad \text{en} \quad p_1 = p_2 = \ldots = p_{m-1} = 0.$$

Fassen wir dann in (1) die drei letzten Kolonnen zusammen, so gibt die Entwicklung nach LAPLACE:

$$J = \sum_i \begin{vmatrix} q_m K_m & q_{m+1} K_{m+1} & q_{m+2} K_{m+2} \\ p_m K_m & p_{m+1} K_{m+1} & p_{m+2} K_{m+2} \\ \frac{\partial K_m}{\partial t_i} & \frac{\partial K_{m+1}}{\partial t_i} & \frac{\partial K_{m+2}}{\partial t_i} \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial (K_1, K_2, \ldots, K_{m-1})}{\partial (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_m)} \cdot \quad (2)$$

Hier ist der zweite Faktor D^i gleich der Funktionaldeterminante von $K_1, K_2, \ldots, K_{m-1}$ bezgl. der Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_m$. Gegenüber den Parametertransformationen

$$t_i = t_i\,(\overline{t}_1, \overline{t}_2, \ldots, \overline{t}_m) \quad , \quad dt^i = \frac{\partial t_i}{\partial \overline{t}_\mu} d\overline{t}^\mu \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

sind diese Funktionaldeterminanten kogredient mit dt^i. Denn: ist L_m eine m-te absolute Invariante, so haben wir:

$$\overline{D} = \frac{\partial (\overline{K}_1, \overline{K}_2, \ldots, \overline{K}_{m-1}, \overline{L}_m)}{\partial (\overline{t}_1, \overline{t}_2, \ldots, \overline{t}_m)} = \triangle \,.\, \frac{\partial (K_1, K_2, \ldots, K_{m-1}, L_m)}{\partial (t_1, t_2, \ldots, t_m)} = \triangle \,.\, D$$

und wegen

$$D = \sum_i \frac{\partial (K_1, K_2, \ldots, K_{m-1})}{\partial (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_m)} \cdot \frac{\partial L_m}{\partial t_i} = \Sigma\, D^i \cdot \frac{\partial L_m}{\partial t_i}$$

ist also:

$$\overline{D} = \sum_\nu \overline{D}^\nu \frac{\partial \overline{L}_m}{\partial \overline{t}_\nu} = \sum_\nu \overline{D}^\nu \cdot \frac{\partial L}{\partial t_i} \frac{\partial t_i}{\partial \overline{t}_\nu}$$

$$D^i = \frac{1}{\triangle} \cdot \overline{D}^\nu \frac{\partial t_i}{\partial \overline{t}_\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wir können also in (2) D^i statt dt^i schreiben. Ersetzen wir dann noch K_m, K_{m+1} und K_{m+2} durch K_1, K_2 und K_3, so ergibt sich der *Satz:*

Sind K_1, K_2 und K_3 drei Invarianten mit den $\triangle$-Gewichten q_i und den λ-Gewichten p_i, dann ist

$$[K_1, K_2, K_3] = \begin{vmatrix} q_1 K_1 & q_2 K_2 & q_3 K_3 \\ p_1 K_1 & p_2 K_2 & p_3 K_3 \\ dK_1 & dK_2 & dK_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

eine projektiev-invariante Differentialform met $\triangle$-Gewicht $q_1+q_2+q_3$ und mit λ-Gewicht $p_1+p_2+p_3$.

Wir haben auch:

$$[K_1, K_2, K_3] = \Sigma\, dK_1\,(q_2p_3 - q_3p_2)\,.\,K_2K_3 = K_1K_2K_3\,.\,\Sigma(q_2p_3 - q_3p_2)\,.\,d(\log K_1)$$

$$\frac{[K_1, K_2, K_3]}{K_1\,K_2\,K_3} = d\log\left(K_1^{q_2p_3-q_3p_2}\,K_2^{q_3p_1-q_1p_3}\,K_3^{q_1p_2-q_2p_1}\right) \quad \ldots \quad (6)$$

Hieraus folgt z.B., dass $[K_1, K_2, K_3] = 0$ die Abhängigkeit

$$K_1^{\alpha_1}\,K_2^{\alpha_2}\,K_3^{\alpha_3} = const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

gibt.

Weiters folgt aus (5) — analog mit den Gleichungen (29), (30) und (31) der ersten Mitteilung — dass die Klammerausdrücke $[K_1, K_2, K_3]$ die folgenden Relationen erfüllen:

$$[K_1, K_2, K_3 + K_4] = [K_1, K_2, K_3] + [K_1, K_2, K_4] \quad \ldots \quad (8)$$

$$[K_1, K_2, K_3\,K_4] = [K_1, K_2, K_3]\,.\,K_4 + [K_1, K_2, K_4]\,.\,K_3 \quad \ldots \quad (9)$$

$$\left[K_1, K_2, \frac{K_3}{K_4}\right] = [K_1, K_2, K_3.]\,K_4^{-1} - [K_1, K_2, K_4]\,.\,K_3\,K_4^{-2} \quad . \quad (10)$$

§ 2.

Nehmen wir jetzt für K_1, K_2 und K_3 die Invarianten

$$U = (u'y) \quad , \quad X = (v'x) = (yy_1 \ldots y_m\, x)$$

dann ergibt (5) die beiden Invarianten:

$$[U_1, U_2, X] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & (v'x) \\ (u_1'y) & (u_2'y) & (m+1)(v'x) \\ (u_1'dy) & (u_2'dy) & (dv'x) \end{vmatrix} = (v'x) \,.\, (\pi'y)\,(\pi'dy)\ , \quad (\pi'_{ik} = (u_1' u_2')_{ik})$$

und

$$[U, X_1, X_2] = \begin{vmatrix} 0 & (x_1 v') & (x_2 v') \\ (u'y) & (m+1)(x_1 v') & (m+1)(x_2 v') \\ (u'dy) & (x_1 dv') & (x_2 dv') \end{vmatrix} = -(u'y)\,.\,(\pi v')\,(\pi\, dv')\ , \quad (\pi_{ik} = (x_1 x_2)_{ik}).$$

Wir erhalten so die beiden mit einander dualen Invarianten:

$$Y = (\pi^m\, y\, dy) = m!\, (\pi' y)\,(\pi' dy) = m!\, \Sigma\, \pi'_{ik}\,(y\, dy)_{ik} \quad . \quad . \quad (11)$$

und

$$V = (\pi'^m\, v' dv') = m!\, (\pi v')\,(\pi\, dv') = m!\, \Sigma\, \pi_{ik}\,(v' dv')_{ik} \quad . \quad (12)$$

$Y = 0$ gibt die Tangente $\overline{y\,dy}$; $V = 0$ ist die Gleichung des mit der Tangente bezgl. des Asymptotenkegels konjugierten linearen R_{m-1}.

Y hat das $\triangle$-Gewicht 0 und das λ-Gewicht 2; V hat das $\triangle$-Gewicht 2 und das λ-Gewicht $2(m+1)$. Die Ueberschiebung beider gibt Nul wegen

$$(v'dy) = -(y\, dv') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Aus U, X, Y und V leiten wir weiters ab:

$$R = [X, Y, V] = 2Y\,[(xv')\,(\pi'^m\, v' d^2 v') - 2\,(x\, dv')\,(\pi'^m\, v' dv')]$$

$$S = [U, Y, V] = 2V\,(u'y)\,(\pi^m\, y\, d^2 y) - 2\,(u' d\, y)\,(\pi^m\, y\, d\, y)];$$

hieraus durch Ueberschiebung:

$$\sum_{ik} \frac{\partial R}{\partial \pi_{ik}} \cdot \frac{\partial S}{\partial \pi'_{ik}} = -4m!\, UXYV \,.\, F_2^2,$$

wo

$$F_2 = (v'\, d^2 y) = (y\, d^2 v') = -(dy dv') = (y y_1 \ldots y_m\, y_{ik})\, dt\, dt^k \quad . \quad (14)$$

die erste quadratische Differentialform ist. Dadurch ist F_2 und also auch

$$A = |\,(v'\, y_{ik})\,| = |\,(y y_1 \ldots y_m\, y_{ik})\,| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

gewonnen. F_2 hat das $\triangle$-Gewicht 1 und das λ-Gewicht $m+2$.

Wir zeigen nun noch, wie auch die kubische Differentialform auf diese Weise erhalten werden kann. Es ist

$$M = [X, F_2, A] = \begin{vmatrix} (xv') & F_2 & (m+2)\, A \\ (m+1)(xv') & (m+2)\, F_2 & m\,(m+2)\, A \\ (xdv') & dF_2 & dA \end{vmatrix}$$

$$M = (xv')\,[F_2 \,.\, dA + (m+2)\, A \,.\, dF_2] - 2\,(m+2)\,(xdv') \,.\, AF_2 \quad . \quad (16)$$

M hat das $\triangle$-Gewicht $m+4$ und das λ-Gewicht m^2+4m+3. Weiters:

$$N=[U, F_2, A]=\begin{vmatrix} 0 & F_2 & (m+2)\,A \\ (u'y) & (m+2)\,F_2 & m(m+2)\,A \\ (u'dy) & dF_2 & dA \end{vmatrix}$$

$$N=(u'y)\,.\,[(m+2)\,AdF_2 - F_2dA] - 2\,(m+2)\,(u'dy)\,AF_2. \quad . \quad (17)$$

N had das $\triangle$-Gewicht $m+3$, das λ-Gewicht m^2+3m+3.

Wenn wir nun $[M, N, A]$ berechnen, so finden wir:

$$[M, N, A]=12\,(m+2)^2\,.\,A^2\,F_2^{\,2}\,.\,F_3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

wo

$$F_3=(m+2)\,A\,[3\,dF_2 - 2\,(v'd^3y)] - 3F_2\,.\,dA \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

die gesuchte kubische Differentialform. Sie hat das $\triangle$-Gewicht $m+3$ und das λ-Gewicht m^2+3m+2.

Die Invariante

$$C=[U, X, A]=\begin{vmatrix} 0 & (xv') & (m+2)\,A \\ (u'y) & (m+1)\,(xv') & m\,(m+2)\,A \\ (u'dy) & (x\,dv') & dA \end{vmatrix}$$

oder

$$C=C\,(x, u')=(m+2)\,A\,[(u'y)\,(xdv') - (u'dy)\,(xv')] - (u'y)\,(v'x)\,.\,dA \quad (20)$$

ist eine lineare Differentialform und $C(x, u')=0$ gibt einen besonderen, mit dem Punkte y invariant verknüpften, linearen Konnex.

§ 3.

Setzen wir in (1) voraus, das

$$J=\{K_1, K_2, \ldots, K_{m+2}\}\equiv 0\{y\} \text{ und } \equiv\!\!|\!\!\equiv \{K\} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

d.h. J verschwindet identisch, wenn wir alle K_i durch die y, y_α, $y_{\alpha\beta}, \ldots$; ausdrücken; J verschwindet dagegen nicht identisch, wenn wir die K_i als unabhängige Veränderliche betrachten.

Zufolge (21) ist $\frac{p_i}{q_i}$ nicht konstant; sei z.B.

$$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} \neq \frac{p_{m+2}}{q_{m+2}}, \quad \text{also} \quad \delta = p_{m+1}\,q_{m+2} - p_{m+2}\,q_{m+1} \neq 0.$$

Daher sind die Gleichungspaare

$$\left.\begin{aligned} p_{m+1}\,r_i + p_{m+2}\,s_i &= p_i \\ q_{m+1}\,r_i + q_{m+2}\,s_i &= q_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

für $i=1, 2, \ldots, m$ auflösbar. Die m Invarianten

$$K_i'=\frac{K_i}{K_{m+1}^{r_i}\,K_{m+2}^{s_i}} \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

sind dan *absolute* Invarianten und aus

$$\{K_1, K_2, \ldots, K_{m+2}\} \equiv 0 \quad \{y\}$$

folgt (vgl. die letzten Gleichungen der ersten Mitteilung) dass auch

$$J' = \{K'_1, K'_2, \ldots, K'_m, K_{m+1}, K_{m+2}\} \equiv 0 \qquad \{y\}$$

ist.

Nun haben wir aber:

$$J' = (-1)^m \cdot \delta \cdot K_{m+1} \cdot K_{m+2} \cdot \frac{\partial (K'_1, K'_2, \ldots, K'_m)}{\partial (t_1, t_2, \ldots, t_m)};$$

also auch:

$$\frac{\partial (K'_1, K'_2, \ldots, K'_m)}{\partial (t_1, t_2, \ldots, t_m)} \equiv 0 \qquad \{y\} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Weiters ist

$$\frac{\partial (K'_1, \ldots, K'_m)}{\partial (t_1, \ldots, t_m)} = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} \frac{\partial (K'_1, \ldots, K'_m)}{\partial (y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_m})} \cdot \frac{\partial (y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_m})}{\partial (t_1, \ldots, t_m)},$$

also wegen (23), für jedes System $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$:

$$\frac{\partial (K'_1, \ldots, K'_m)}{\partial (y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_m})} \equiv 0 \qquad \{y\}.$$

Deshalb existiert wenigstens eine Beziehung

$$\Phi (K'_1, K'_2, \ldots, K'_m) \equiv 0 \qquad \{y\}$$

und daher auch wenigstens eine Identität der Gestalt

$$\Psi (K_1, K_2, \ldots, K_{m+2}) \equiv 0 \qquad \{y\} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

zwischen allen $m + 2$ Invarianten K_i, wobei diese als Funktionen der $y, y_\alpha, y_{\alpha\beta}, \ldots$ betrachtet werden. (Als Funktionen der m Parameter t_i sind bereits $m + 1$ Invarianten stets untereinander abhängig).

Existiert umgekehrt eine Beziehung (24), die sich als Identität zwischen m absoluten Invarianten schreiben lässt, so kann man aus ihr auf

$$\{K_1, K_2, \ldots, K_{m+2}\} \equiv 0 \ \{y\}$$

schliessen.