Mathematics. — *„Zur Entstehung meiner Arbeiten über Dimensions- und Kurventheorie."* By KARL MENGER. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of May 29, 1926).

Im Folgenden werden (einem von mehreren Seiten geäusserten Wunsch zur Klärung von Prioritätsfragen entsprechend) einige Akten betreffend die Entstehung meiner dimensions- und kurventheoretischen Untersuchungen abgedruckt.

Bloss erwähnt werde ein im Juni 1921 Herrn Professor HAHN im Zusammenhang mit seinem damaligen punktmengentheoretischen Seminar übergebener Aufsatz, betitelt *„Der Begriff der Kurve"* [1]), in welchem im wesentlichen jene Gebilde eingeführt wurden, die ich später als reguläre Kurven bezeichnet habe (d.s. jene Kontinua, zu deren sämtlichen Punkten beliebig kleine Umgebungen mit endlichen Begrenzungen existieren), und in dem ferner End- und Knotenpunkte solcher Kurven definiert wurden.

Im Herbst 1921 hinterlegte ich bei der Wiener Akademie der Wissenschaften [2]) ein kurzes Manuskript *„Zur Theorie der Punktmengen"* [3]), welches hierunter nach einer notariell beglaubigten Abschrift abgedruckt wird:

Auf die Dimensionalität wird in der Theorie der Punktmengen im allgemeinen nur durch Zugrundelegung eines Raumes von bestimmter Dimensionszahl Rücksicht genommen. Es ist indes klar, dass, ganz unabhängig von dieser Zahl, von einer Dimensionalität gewisser Kontinua an sich gesprochen werden kann. Im folgenden Entwurf zu einer Abhandlung suche ich diesen Begriff zu präzisieren. Wir werden zu einer rekursiven Definition der Dimensionen gelangen und beginnen mit den eindimensionalen Kontinuen.

§ 1. Der Kurvenbegriff.

Der populäre Kurvenbegr. (nichtwissenschaftlichen Zwecken entsprungen) ist vage und nicht einheitlich. Wir suchen einen Begriff, der möglichst

[1]) Das noch vorhandene Manuskript trägt den Vermerk: *„Eingegangen Juni 1921. H. HAHN".* — Sämtliche in dieser Note als noch vorhanden bezeichnete Manuskripte befinden sich gegenwärtig bei Herrn L. E. J. BROUWER.

[2]) Vgl. Anzeiger d. Wiener Akad. d. Wissensch. **58**, 1921, S. 224.

[3]) Das noch vorhandene Manuskript wurde nach Eröffnung des Schreibens mit der Aufschrift versehen: *„Dieses Blatt bildete den Inhalt des zur Wahrung der Priorität der Akademie der Wissenschaften übergebenen versiegelten Schreibens No. 778, 1921. — 9. April 1926.* F. BECKE, *Generalsekretär der Akademie d. Wissenschaften in Wien".*

viele Gebilde in sich fasst, die gemeinhin als Kurven bezeichnet zu werden pflegen und (von notwendigen Verallgemeinerungen abgesehn) möglichst wenige Gebilde, die gemeinhin nicht als Kurven gelten würden. Dass der Jordansche Kurvenbegriff diesen Forderungen nicht genügt, ist ohne weiteres klar, da er auch Flächen, ja n-dimensionale Räume umfasst (Peano-„Kurven"). Lennes anderseits beschränkt sich von vorneherein auf die Definition „einfacher" Kurvenbögen.

Wir definieren : Ein Kontinuum $\mathfrak{K}$ heisst Kurve, wenn in jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ jedes der Punkte P von $\mathfrak{K}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_1$ enthalten ist, so dass der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{K}$ mit der Begrenzung von $\mathfrak{U}_1$ keinen zusammenhängenden Teil enthält.

§ 2. Sätze über Kurven.

1. $\mathfrak{D}$ kann nicht für alle Punkte von $\mathfrak{K}$ aus einem einzigen Punkt bestehn.

2. Wenn $\mathfrak{D}$ für jeden P aus höchstens zwei Punkten bestehen soll, so gibt es höchstens zwei Punkte („End"-punkte von $\mathfrak{R}$) in denen $\mathfrak{D}$ nur aus einem einzigen Punkt besteht.

3. Wenn $\mathfrak{D}$ für alle P aus genau zwei Punkten bestehn soll, so ist $\mathfrak{K}$ entweder eine geschlossene oder eine nicht kompakte offene Kurve.

4. Der Lennesbogen ist eine Kurve. — Zu einfachen Kurven geht man durch ein Studium der Zahl und Natur der „Knoten"- und „End"-punkte von $\mathfrak{K}$ über (jener Punkte, für die $\mathfrak{D}$ aus mehr bezw. weniger als zwei Punkten besteht).

5. In $\mathfrak{K}$ gibt es keinen Teil, der umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild einer Kreisfläche wäre. Insbes. enthält also $\mathfrak{K}$ im $\mathfrak{R}_2$ keinen inneren Punkt.

§ 3. Der Flächenbegriff.

Ein Kontinuum $\mathfrak{F}$ heisst Fläche, wenn in jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ jedes Punktes P von $\mathfrak{F}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_1$ enthalten ist, so dass der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{F}$ mit der Begrenzung von $\mathfrak{U}_1$ eindimensional ist, d.h. aus diskreten Kurven besteht.

(Dieses „diskret" lässt sich präzisieren. — Dann Sätze über Flächen u.s.w.)

§ 4. n-dimensional heisst ein Kontinuum, wenn $\mathfrak{D}$ $(n-1)$-dimensional ist.

Die Definitionen von § 1, 3, 4 habe ich (angeregt durch Herrn Prof. Hahn's Seminar über den Kurvenbegriff) bereits im April 1921 gefunden, wie Herr Prof. Hahn und Herr Otto Schreier bestätigen können. Die Sätze, 1, 2, 3 von § 2 habe ich auf Anregung Herrn Prof. Hahn bewiesen. Er war es auch der im § 1 die Worte „keinen zusammenhängenden Teil" an Stelle meiner ursprünglichen „höchstens abzählbar viele Punkte" gesetzt hat.

Ende des Jahres 1921 übergab ich Herrn HAHN als Herausgeber der „Monatshefte für Mathematik und Physik" den in der vorangehenden Note erwähnten Aufsatz zur Dimensions- und Kurventheorie. Ein unwesentliches Versehen in demselben veranlasste mich im Februar 1922 zur Einsendung einer Ergänzung folgenden Wortlautes [1]):

Eine nicht leere Menge M des R_m heisst n-dimensional, wenn

1. *zu jedem ihrer Punkte P und jeder offenen Umgebung U_1 (P) eine offene Umgebung U_2 $(P) < U_1$ (P) existiert, mit deren Begrenzung M eine höchstens (n-1)-dimensionale Menge gemein hat; und wenn M*
2. *mindestens einen Punkt Q enthält, für den eine offene Umgebung U existiert derart, dass M mit der Begrenzung jeder offenen Umgebung U_1 $(Q) < U$ eine Menge gemein hat, die einen (n-1)-dimensionalen Teil enthält. (—1)-dimensional ist die leere Menge.*

Genau (ev. „homogen") n-dimensional heisse eine Menge, die nur Punkte Q mit der Eigenschaft 2.) enthält. (Jede nulldimensionale Menge ist genau nulldimensional). Jeder Teil einer n-dimensionalen Menge ist höchstens n-dimensional. n-dimensionaler Kern einer n-dimensionalen Menge M heisse die Vereinigung aller genau n-dimensionalen Teile von M.

Diese Definition des allgemeinen Dimensionsbegriffes ist äquivalent und auch dem Wortlaute nach fast völlig übereinstimmend mit der in den Monatsheften für Mathematik und Physik Bd. 33 (S. 157 f.) enthaltenen Fassung.

Auf ein ausführliches im November 1922 Herrn HAHN eingesandtes Manuskript über Dimensions- und Kurventheorie werde ich gelegentlich näher eingehen.

---

[1]) Das noch vorhandene Manuskript trägt den Vermerk „*Eingegangen unmittelbar nach Absendung (12. II. 1922); seither stets in meiner Verwahrung; an Herrn Dr. Menger ausgefolgt am 10. 4. 1926.* H. HAHN".