Mathematics. — *"Allgemeine Räume und Cartesische Räume"*. Zweite Mitteilung: *„Ueber umfassendste n-dimensionale Mengen"*. By KARL MENGER. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of June 26, 1926).

Wenn die n-dimensionale Menge N zu jedem n-dimensionalen kompakten metrischen Raum eine homöomorphe Menge als Teil enthält, dann wollen wir N eine *umfassendste n-dimensionale Menge* nennen. Wir weisen zunächst nach:

Es existieren umfassendste eindimensionale Mengen, darunter sogar beschränkte, stetig durchlaufbare Kurven des R_3. Wir können eine solche Menge in folgender Weise konstruieren: Der Einheitswürfel des R_3 wird in 27 homothetische, einander kongruente Teilwürfel von der Seitenlänge $\frac{1}{3}$ zerlegt. Sodann tilgen wir (nebst ihren Oberflächen) den innersten dieser Würfel (d.h. jenen, dessen Oberfläche zu der des Einheitswürfels fremd ist) und die sechs Würfel, welche mit dem innersten eine Fläche gemein haben. Zu jedem der zwanzig nicht getilgten Würfel nehmen wir seine Begrenzung, soweit sie getilgt wurde, wieder hinzu und wiederholen in ihm denselben Vorgang der Zerlegung in 27 Teilwürfel und der Tilgung der sieben mittleren. Indem man so fortfährt, erhält man beim n-ten Schritt 20^n Würfel von einer Seitenlänge $\frac{1}{3^n}$, welche welche wir „Würfel des n-ten Schrittes von I" nennen und deren Summe wir mit I_n bezeichnen. Die (offenbar eindimensionale stetig durchlaufbare) Menge $\prod\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ ist unsere umfassendste eindimensionale Menge I.

Man kann I auch in folgender Weise darstellen: Die Summe der Kanten aller Würfel des n-ten Schrittes von I bezeichnen wir als G_n und nennen sie das n-te Gerüst von I. Der Raum I ist dann die abgeschlossene Hülle seines Gerüstes $G = \sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

Der Nachweis der Einbettbarkeit jedes eindimensionalen kompakten metrischen Raumes A in den R_3 wurde in der ersten Mitteilung [1]) durch

[1]) Vgl. diese Proceedings, Bd. **29**, 1926, S. 496. Es wurde daselbst das einfache, aber zahlreicher Anwendungen fähige Lemma bewiesen: Die Kerne homologer finiter Umgebungssysteme sind homöomorph. Die Umkehrung, dass nämlich in homöomorphen kompakten Räumen homologe finite Umgebungssysteme existieren, ist trivial. *Notwendig und hinreichend für die Homöomorphie zweier kompakter Räume ist also die Existenz homologer finiter Umgebungssysteme in ihnen.* Sind zwei Räume als Kerne von finiten Umgebungssystemen gegeben, so ist die Frage nach der Homöomorphie der beiden Räume zurückgeführt auf die Frage, ob aus den beiden definierenden Umgebungssystemen zwei homologe Umgebungssysteme hergeleitet werden können, und das ist eine Frage nach der Möglichkeit einer abzählbaren Folge von finiten Operationen.

die Angabe eines finiten Umgebungssystems in A und eines dazu homologen Systems von Polyedern des R_3 geführt. Bezeichnen wir alle Würfel irgend eines n-ten Schrittes von I kurz als *Würfel von I* und ein Polyeder, welches Summe endlich vieler Würfel von I ist, als *Intervallsystem von I*, so haben wir, um die Einbettbarkeit von A in die Menge I nachzuweisen, *ein finites Umgebungssystem in A und ein homologes System von Intervallsystemen von I anzugeben.*

Setzen wir nun voraus: Es sei A eine kompakte Menge und es seien $B_1, B_2, \ldots B_m$ m paarweise fremde Teilmengen von A. Es sei ferner P ein Intervallsystem von I und es seien $Q_1, Q_2, \ldots Q_m$ m paarweise fremde Quadratflächen auf der Oberfläche von P. Es sei endlich A Summe von n abgeschlossenen Umgebungen $A_1, A_2 \ldots A_n$, die zu je zweien keine inneren Punkte gemein haben und so dass jeder Punkt von A höchstens zwei Mengen A_i, jeder Punkt einer Menge B_k genau einer Menge A_i angehört. Auf Grund der Tatsache, dass für jedes n^{te} Gerüst G_n von I die Menge $G_n - G_{n-1}$ zusammenhängend ist, zeigt man durch elementargeometrische Ueberlegungen, dass unter den angegebenen Voraussetzungen folgendes möglich ist: Wählt man im Innern von P irgend n verschiedene Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ von P, dann kann man so kleine paarweise fremde Würfel von I $W_1, W_2, \ldots W_n$ angeben, dass p_i im Innern von W_i liegt und dass sich aus dem Gerüst von I paarweise fremde Streckenzüge angeben lassen, welche die Oberfläche jedes W_i mit den Oberflächen aller übrigen W_k und mit allen Q_k verbinden. Daraus folgt aber sofort die Existenz von Intervallsystemen von I $P_1, P_2, \ldots P_n$, sodass alle $P_i < P$ sind und dass (für jedes i und k) P_i mit P_k, bzw. mit Q_k dann und nur dann Punkte u. zw. genau eine Quadratfläche gemein hat, wenn A_i mit A_k, bzw. mit B_k Punkte gemein hat. Damit sind in Hilfssatz 1 der ersten Mitteilung der Polyeder speziell durch Intervallsysteme von I ersetzt.

Hilfssatz 2 der ersten Mitteilung bedarf keiner Verschärfung. Die Verschärfung von Hilfssatz 3 besagt, dass man zu einem vorgelegten kompakten eindimensionalen Raum A eine bestimmt geartete Zerlegung in beliebig kleine Umgebungen und gleichzeitig in einem vorgelegten Intervallsystem P von I ein entsprechendes System von beliebig kleinen Intervallsystemen von I unter Erfüllung beiderseitiger Randbedingungen angeben kann. Um dies einzusehen, hat man ganz wie beim Beweis von Hilfssatz 3 zunächst *irgend* eine Zerlegung von A mit den gewünschten Eigenschaften in Teile von gewünschter Kleinheit anzugeben und kann zu dieser Zerlegung nach dem verschärften Hilfssatz 1 entsprechende Intervallsysteme von I in P angeben, welche auch die entsprechenden Randbedingungen erfüllen. Haben diese Intervallsysteme auch bereits die gewünschte *Kleinheit*, dann ist man am Ziel. Andernfalls ersetzt man jedes der zu grossen Intervallsysteme durch eine Kette von Intervallsystemen von I mit den Eigenschaften, die in Hilfssatz 2 vorausgesetzt werden, und bestimmt zu diesen Polyedern nach Hilfssatz 2

Teilumgebungen der Umgebung in A in entsprechender Lage. Damit ist die Verschärfung von Hilfssatz 3 bewiesen, auf Grund derer ein finites Umgebungssystem im vorgelegten eindimensionalen Raum und ein homologes System von Intervallsystemen von I konstruiert werden kann.

Aus diesen Überlegungen gehen zugleich die beiden folgenden Nebenresultate hervor: *Jeder eindimensionale kompakte metrische Raum ist homöomorph mit einer Menge des R_3, zu deren sämtlichen Punkten beliebig kleine Intervalle existieren, mit deren Begrenzungen die Menge diskontinuierliche Durchschnitte hat.* Und: *Jeder kompakte eindimensionale Raum ist homöomorph mit einem Teil einer Fläche des R_3.* Wir können nämlich, so wie bei der Konstruktion der Menge I, den Würfel in 27 Teile teilen, aber bloss den innersten dieser Würfel ohne seine Begrenzung tilgen und sodann dieses Verfahren in den 26 nicht getilgten Würfeln wiederholen und so ad infinitum fortfahren. Nennen wir II_n die Summe aller 26^n nicht getilgten Würfel von der Seitenlänge $\frac{1}{3^n}$, und bezeichnen wir mit II den Durchschnitt aller Würfelsummen II_n, dann ist die so entstehende Menge offenbar eine (im kleinen zusammenhängende) Fläche, welche die Menge I als Teil enthält[1]).

Von Interesse ist die Untersuchung dieser Verhältnisse in höheren Dimensionen. Der n-dimensionale Einheitswürfel kann in 3^n homothetische, einander kongruente Teilwürfel von der Seitenlänge $\frac{1}{3}$ zerlegt werden. Jeder dieser Würfel lässt sich charakterisieren durch ein n-Tupel gebildet aus den Zahlen 0, 1, 2. indem man jedem Würfel als k-te Koordinate seinen Abstand von der $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene durch den Ursprung, welche auf der k-ten Achse senkrecht steht, zuordnet. Es befinden sich unter den 3^n Würfeln $\binom{n}{n-k} \cdot 2^{n-k}$, unter deren Koordinaten genau k Einsen vorkommen. Wir tilgen nun samt ihren Oberflächen jene Würfel, unter deren Koordinaten mindestens $m+1$ Einsen vorkommen. Wir behalten $\mu(m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{n-k} \cdot 2^{n-k}$ Würfel zurück, nehmen zu jedem die Oberfläche, soweit sie getilgt wurde, wieder hinzu und wiederholen in jedem dieser Würfel dasselbe Verfahren der Unterteilung und Tilgung der $\sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{n-k} \cdot 2^{n-k}$ mittleren Würfel. Beim k-ten Schritt behalten wir $\mu(m$ Würfel von einer Seitenlänge $\frac{1}{3^k}$, deren Summe wir mit ${}_kR_n^m$ bezeichnen.

[1]) Man kann die Mengen, welche umfassendste eindimensionale Mengen sind, in verschiedener Weise charakterisieren: dadurch, dass sie einen mit der Menge I homöomorphen Teil enthalten, — oder dadurch, dass sie einen Teil enthalten, in dessen sämtlichen offenen Teilen (vermöge ihrer Zusammenhangsverhältnisse) die Verkettungen endlich vieler Teilumgebungen durchgeführt werden können, die beim Beweis der Einbettbarkeit aller eindimensionalen Mengen in die Menge I verwendet wurden, — oder als abgeschlossene Hüllen eines hinreichend verzweigten Gerüstes u.s.w.

Die Menge $\prod_{k=1}^{\infty} {}_kR_n^m$, von der man leicht zeigt, dass sie stetig durchlaufbar und m-dimensional ist, nennen wir R_n^m.[1])

In Verallgemeinerung einer Schlussweise von SIERPIŃSKI[2]) zeigt man unschwer, dass für jedes n die Menge R_n^{n-1} zu jeder nirgends dichten abgeschlossenen Teilmenge des R_n, also zu jeder höchstens $(n-1)$-dimensionalen abgeschlossenen Menge des R_n, eine homöomorphe Menge als Teil enthält. Es gilt aber viel mehr: es zeigt sich nämlich, *dass die Menge R_n^{n-1} ein topologisches Bild von jeder (auch nicht-abgeschlossenen) weniger als n-dimensionalen Menge des R_n als Teil enthält.* Nach einem Satz des Dimensionstheorie ist jede weniger als n-dimensionale Menge des R_n enthalten in einer Menge, deren Komplement abzählbar und im R_n dicht ist. Einem bekannten Satz von FRÉCHET zufolge sind alle Mengen des letzteren Art untereinander homöomorph. Es genügt also zu zeigen, dass ein Teil der Menge R_n^{n-1} homöomorph ist mit einer Menge, deren Komplement abzählbar und im R_n dicht ist. Dies trifft aber, wie man nachweisen kann, für die G_σ-Menge zu, welche entsteht, wenn man aus dem offenen Einheitswürfel von seinen 27 Teilwürfeln den innersten *nebst seiner Begrenzung* tilgt und dieses Verfahren in jedem der übrigen 26 Teilwürfel und so ad infinitum fortsetzt.

Ich halte es für sehr wahrscheinlich, dass allgemein die Menge R_n^m eine umfassendste m-dimensionale Menge hinsichtlich des R_n ist, d.h. zu jeder m-dimensionalen Menge des R_n eine homöomorphe Menge als Teil enthält. Der Beweis dieses Satzes dürfte keine prinzipiellen Schwierigkeiten bieten, allerdings für $m < n-1$ recht langwierig sein.

In einer folgenden Mitteilung wird bewiesen werden, dass jeder n-dimensionale kompakte (und vermutlich sogar jeder n-dimensionale separable) metrische Raum homöomorph ist mit einer Teilmenge des R_{2n+1}. Ein stetig durchlaufbares Kontinuum, welches ein topologisches Bild jedes kompakten endlichdimensionalen Raumes als Teil enthält, ist dann z. B. die Menge $\sum_{n=1}^{\infty} I_n$, wobei I_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ein einen festen Punkt p enthaltendes n-dimensionales Intervall mit der Seitenlänge $\frac{1}{n}$ ist.

---

[1]) R_1^0 ist die nirgends dichte perfekte Cantorsche Menge, R_2^1 die umfassendste ebene Kurve von SIERPIŃSKI (Comptes Rendus, **162**, S. 629), R_3^1 die oben konstruierte umfassendste eindimensionale Menge.

[2]) a. a.O.