**Mathematics.** — *"Ueber stetige Kurven."* By JULIA RÓŻAŃSKA. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of May 29, 1926).

Das Ziel dieser Arbeit ist, ausgehend von einigen Eigenschaften einer stetigen Kurve „im kleinen", d.h. in der Umgebung irgend eines ihrer Punkte, auf den Verlauf der Kurve „im grossen" zu schliessen.

Anknüpfend an die Arbeiten von PAUL URYSOHN über die Cantorschen Kurven, deren im Folgenden verwendeten Resultate sich auch bei K. MENGER befinden, [1]) gebe ich die Definition vom Integralindex für die Punkte einer beliebigen Cantorschen Kurve. [2]) Die Vergleichung des URYSOHN-MENGER'schen Verzweigungsindex mit dem Integralindex gestattet mir eine neue lokal-integrale Charakteristik der sogenannten „Baumkurven", sowie die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu geben, dass eine stetige Kurve eine und nur eine einfache geschlossene Linie enthält.

Herrn PAUL ALEXANDROFF, der mich auf die Unabhängigkeit dieser Resultate von der Topologie der Ebene aufmerksam gemacht und viele wertvolle Ratschläge bezüglich der Redaktion dieser Arbeit gegeben hat, spreche ich an dieser Stelle meinen Dank aus.

*Definition des Integralindex.*

Es sei $C$ eine Cantorsche Kurve, $x$ ein Punkt von $C$.

1. $x$ ist vom Integralindex $m$ (wobei $m$ eine natürliche Zahl, $\aleph_0$ oder $\mathfrak{c}$ ist) falls $m$ die kleinste so beschaffene Kardinalzahl ist, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine $\varepsilon$-Aussonderung $C = A + B + D$ [3]) gibt, von der Art, dass die abgeschlossene Menge $D$ aus $m$ Komponenten besteht.

---

[1]) URYSOHN, Comptes Rendus t. 175 (1922), p. 440, 481; *„Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes"*, II. Teil (erscheint demnächst in den Verhandelingen der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam; diese Arbeit wird in folgendem einfach als URYSOHN, II zitiert); K. MENGER, *„Grundzüge einer Theorie der Kurven"*, Proceed. Ak. Amsterdam, XXVIII, SS. 67-71 und Math. Annalen, 95, SS. 277-306.

[2]) Ein Hinweis in dieser Richtung findet sich bei MENGER, Math. Ann. 95, S. 281, Fussnote [8]).

[3]) Die Zerlegung $C = A + B + D$ in zueinander fremde Mengen heisst nach URYSOHN eine $\varepsilon$-Aussonderung von $x$ auf $C$ wenn

$$x \subset A \subset A + B \subset S(x, \varepsilon) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$A . \overline{D} + \overline{A} . D = O. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Menge $B$ wird im Folgenden stets eine abgeschlossene nulldimensionale (also in $C$ nirgends dichte) Menge sein. Vgl. wegen der Terminologie URYSOHN, Mémoire mult. cant., I, Introduction (§§ 15—21, Fund. Math., VII, SS. 49—64).

2. $x$ ist vom Integralindex $\bar{\omega}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine $\varepsilon$-Aussonderung $C = A + B + D$ vorhanden ist von der Art, dass $\bar{D}$ aus endlich vielen Komponenten besteht, wobei die Anzahl dieser Komponenten mit $\frac{1}{\varepsilon}$ notwendig gegen $\infty$ strebt.

Es wird (wie in der Verzweigungstheorie) die Verabredung getroffen

$$n < \omega < \aleph_0 < \mathfrak{c}.$$

Bemerkung 1. Die Aussonderungsmengen $B$, die zum gegebenen $\varepsilon$ die Minimaleigenschaft in bezug auf die Komponentenanzahl der Menge $\bar{D}$ besitzen, brauchen nicht notwendig eine, der Indexdefinition entsprechende Mächtigkeit zu haben. Doch werden wir später sehen, dass wir stets im Falle der stetigen Kurven die betreffenden Aussonderungsmengen gebrauchen können.

Es gilt aber ohne weiteres der:

Satz I. *Für jeden Punkt $x$ der Kurve $C$ ist $Ind_x\, C \leqq ind_x\, C$.*

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass jede Komponente $K$ der Menge $\bar{D}$ (wo $C = A + B + D$ eine beliebige $\varepsilon$-Aussonderung des Punktes $x$ ist) mit $B$ wenigstens einen Punkt gemeinsam hat. Falls nun letztere Behauptung falsch wäre, würden die beiden Mengen $B\,.\,\bar{D}$ und $K$ zueinander fremd sein; da aber $K$ eine *Komponente* von $\bar{D}$ ist, so folgt daraus die Existenz einer Zerlegung

$$\bar{D} = F_1 + F_2 \tag{1}$$

in zwei zueinander fremde, den Bedingungen $F_1 \supset B\,.\,\bar{D}$, $F_2 \supset K$ genügende abgeschlossene Mengen. Die Zerlegung (1) hat aber die widerspruchsvolle Zerlegung $C = (A + B + F_1) + F_2$ des Kontinuums $C$ in zwei zueinander fremde abgeschlossene Mengen $A + B + F_1$ und $F_2$ zur Folge. Der Satz I ist hiermit bewiesen.

Bemerkung 2. Wir können stets annehmen, dass jeder Punkt $y$ von $B$ gleichzeitig Häufungspunkt der beiden Mengen $A$ und $D$ ist. In der Tat ist jeder Punkt $y$ von $B$ ein Häufungspunkt mindestens einer der beiden Mengen $A$ und $D$; denn andernfalls wäre $C$ kein Kontinuum [1]). Alle Punkte $y$, die nur einer der Mengen $\bar{A}$ bzw. $\bar{D}$ angehören, fügen wir zu den entsprechenden Mengen $A$ bzw. $D$ hinzu, ohne dass $B^\star = B - \{y\}$ ihre Eigenschaften als Aussonderungsmenge verliert. Ausserdem ist $B^\star$ wieder abgeschlossen; denn jeder Häufungspunkt von $B^\star$ gehört gleichzeitig zu den abgeschlossenen Mengen $B$, $\bar{A}$ und $\bar{D}$.

Nur solche Aussonderungsmengen werden wir von hier an betrachten. Also haben wir immer:

$$\bar{D} = D + B \qquad \bar{A} = A + B\ ^{2)}.$$

[1]) Die Menge $B$ war ja als nulldimensionale abgeschlossene Menge vorausgesetzt.

[2]) Diese Bedingung hat wie leicht ersichtlich keinen Einfluss auf die Bestimmung von $ind_x\, C$ und $Ind_x\, C$.

Wir wenden uns jetzt zu den stetigen, d. h. im kleinen zusammenhängenden [1]) Kurven $C$.

Satz II. *Fur jeden Punkt $x$ einer stetigen Kurve $C$ ist $\mathrm{Ind}_x\, C \leqq \omega$.*

Der Beweis des Satzes stützt sich auf den folgenden

Hilfssatz: *Es sei $C = A + B + D$ eine $\varepsilon$-Aussonderung des Punktes $x$ der stetigen Kurve $C$. Dann enthält $\overline{D}$ nur eine endliche Anzahl von Komponenten, deren Durchmesser eine vorgegebene positive Grösse $\alpha$ übertrifft.*

Beweis. Nehmen wir im Gegenteil an, es existiere eine Zahl $\alpha > 0$, so dass $\overline{D}$ unendlich viele Komponenten $K$ mit $\delta(K) > \alpha$ enthält.

Infolge eines bekannten Satzes [2]) ist es möglich eine (im Sinne von HAUSDORFF) konvergente Folge aus $\{K\}$ zu wählen. Es sei $K_1, K_2, \ldots K_n, \ldots$ eine solche Folge und $lt\,(K_i) = K^*$ ihr topologischer Limes. $K^*$ ist ein Kontinuum. Dann ist:

$1^0$. $\delta\,(K^*) \geqq \alpha$; $2^0$. $K^* \subset \overline{D}$; $3^0$. $K_i \,.\, K^* = 0$ (mit Ausnahme vielleicht einer einzigen Komponente, die dann $K^*$ enthält und die wir in Folgendem vernachlässigen können).

Da $B$ eine nulldimensionale abgeschlossene Menge ist, ist die abgeschlossene Menge $B\,.\,K^*$ auf dem *Kontinuum* $K^*$ nirgends dicht. Es gibt also einen Punkt $y \subset K^*$ mit $\varrho\,(y, B) \geqq \eta > 0$. Es sei $\delta > 0$ beliebig gegeben. Infolge der Definition des topologischen Limes ist es möglich einen Punkt $z \subset K_r$ (bei genügend grossem $r$) zu finden von der Art, dass $\varrho\,(y, z) < \delta$ ist.

Es sei nun $Q$ irgendein, die beiden Punkte $y$ und $z$ verbindendes Teilkontinuum von $C$. Wir wollen zeigen, dass $Q\,.\,B \neq 0$ ist. In der Tat, falls $Q\,.\,B = 0$ wäre, so würde $Q$ (da es $y + z$ enthält) in $C - A = \overline{D}$ enthalten sein. Da aber $z \subset K_r$ ist, so wäre auch $Q \subset K_r$, und also $K_r\,.\,K^* \supset Q\,.\,K^* \supset z \neq 0$, was der Bedingung $2^0$. widerspricht. Aus der soeben bewiesenen Relation $Q\,.\,B \neq 0$ folgt, dass $\delta\,(Q) \geqq \eta$ ist; da aber $\delta$ und $Q$ beliebig gewählt waren, so heisst dies, dass

$$\varrho_c\,(y, z) \geqq \varrho\,(y, B) \geqq \eta \quad \text{ist.}$$

Also ist der Punkt $y$ kein Stetigkeitspunkt der Kurve. Der Hilfssatz ist bewiesen.

Aus diesem Hilfssatz folgt unsre Annahme, dass die Menge der Komponenten von $\overline{D}$ bei jeder $\varepsilon$-Aussonderung der stetigen Kurve $C$ höchstens abzählbar ist.

Es sei jetzt $\varepsilon_1$ eine beliebige positive Zahl und $C = A_1 + B_1 + D_1$

---

[1]) Der Begriff des "Zusammenhanges im kleinen" (Stetigheit) wurde zuerst von HAHN eingeführt, unabhängig auch von MASURKIEWICZ behandelt und lautet folgendermassen: die Kurve $C$ heisst "zusammenhängend im kleinen" (stetig) im Punkte $x$, wenn es für jedes $\varepsilon$ eine Zahl $\delta$ gibt von der Art, dass für zwei Punkte $x$ und $y$, deren Abstand $\rho\,(x, y) < \delta$ ist, der relative Abstand $\rho_c\,(x, y) < \varepsilon$ ist, wobei $\rho_c\,(x, y)$ die untere Grenze der Durchmesser aller Teilkontinua von $C$, die $x$ und $y$ gleichzeitig enthalten, bedeutet.

[2]) URYSOHN, II, Ch. II. VIETORIS, Stetige Mengen (Monatsh. f. Math. u. Phys., 1921).

irgendeine $\varepsilon_1$-Aussonderung des Punktes $x$. Wir bezeichnen dann durch $\delta$ die positive Zahl $\varrho(x, B_1 + D_1)$ (es ist stets $0 < \delta < \varepsilon_1$).

Wir setzen nun $\varepsilon_2 = \frac{\delta}{2}$ und betrachten irgend eine $\varepsilon_0$-Aussonderung des Punktes $x$

$$C = A_2 + B_2 + D_2, \qquad x \subset A_2 \subset A_2 + B_2 \subset S(x, \varepsilon_2) = S\left(x, \frac{\delta}{2}\right).$$

Es seien jetzt $\{K\}$ bzw. $\{K^*\}$ die Komponenten von $\overline{D}_1$ bzw. $\overline{D}_2$. Die Menge $\overline{D}_1 = D_1 + B_1$ (und folglich jede Komponente $K$) ist dann zu $S(x, \delta)$ fremd. Jede Komponente $K^*$ hat notwendig Punkte mit $S\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$ gemeinsam, nämlich die Punkte von $B_2 . K^* \neq 0$.

Es ist ausserdem $A_2 \subset A_1$ und folglich $\overline{D}_2 \supset \overline{D}_1$. Jede Komponente $K$ ist in einer Komponente $K^*$ enthalten. Es gibt aber nur eine endliche Anzahl von Komponenten $K^*$, die mindestens ein $K$ enthalten, weil Komponenten $K^*$, da sie gleichzeitig Punkte ausserhalb $S(x, \delta)$ und innerhalb $S\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$ enthalten müssen, sämtlich einen Durchmesser grösser als $\frac{\delta}{2}$ haben. Also kann ihre Anzahl dem Hilfssatz gemäss unmöglich unendlich sein.

Es seien nun $K_1^*, K_2^* \ldots K_m^*$ diese Komponenten. Es ist

$$D_2 = \Sigma K^* = \sum_1^m K_i^* + \sum_{K^* \subset A_1} K^* \text{ [1]},$$

und

$$B_2 = B_2 . \overline{D}_2 = B_2 . \sum_1^m K_i^* + B_2 . \sum_{K^* \subset A_1} K^* = B_1^* + B_2 . \sum_{K^* \subset A_1} K^* .$$

Die Identität $C = A_1^* + B_1^* + D_1^*$, wobei

$$B_1^* = B_2 . \sum_1^m K_i^*$$

$$A_1^* = A_2 + \sum_{K^* \subset A_1} K^*$$

$$D_1^* = \sum_1^m K_i^* - (B_1^* + A_1^*)$$

gesetzt ist [2], gibt uns eine $\varepsilon_1$-Aussonderung des Punktes $x$.

---

[1]) Letztere Summe bezieht sich auf alle diejenigen $K^*$ die zu $\overline{D}_1$ fremd, und also in $A$ enthalten sind.

[2]) Man bemerkt sofort, dass $D_1^* = \sum_1^m K_1^* - B_1^*$ ist.

In der Tat haben wir:

1) $A_1^* \supset A_2 \supset x$; 2) $A_1^* + B_1^* \subset A_2 + B_2 + \sum_{K^* \subset A_1} K^* \subset S(x, \varepsilon_1)$;

$$3)\quad A_1^* . \overline{D_1^*} + \overline{A_1^*} . D_1^* \subset (A_2 + \sum_{K^* \subset A_1} K^*) . \sum_1^m K_i^* + \overline{A_2} . (\sum_1^m K_i^* - B_1^*) +$$

$$+ \overline{\sum_{K^* \subset A_1} K^*} . (\sum_1^m K_i^* - B_1^*).$$

Aus unsern Definitionen folgt leicht, dass der erste und zweite Summand von (3) leer ist. Es bleibt also zu beweisen, dass $\overline{\sum_{K^* \subset A_1} K^*} . (\sum_1^m K_i^* - B_1^*) = 0$ ist. Der zweite Faktor enthält weder Punkte von $B_2$, noch von $\sum_{K^* \subset A_1} K^*$; die gemeinsamen Punkte der beiden Faktoren könnten also nur diejenigen Häufungspunkte von $\sum_{K^* \subset A_1} K^*$ sein, die weder zu $\sum_{K^* \subset A_1} K^*$, noch zu $B_2$ gehören. Solche existieren aber überhaupt nicht. In der Tat streben die Durchmesser der in $A$ enthaltenen $K^*$ dem Hilfssatz gemäss gegen Null, d.h. dass jede konvergente unendliche Folge von Komponenten $K^* \subset A_1$ gegen einen Punkt konvergiert. Da aber jede Komponente notwendig einen Punkt auf der abgeschlossenen Menge $B_2$ besitzt, gehört dieser Limespunkt auch zu $B_2$.

Wir sehen jetzt, dass die Zerlegung $C = A_1^* + B_1^* + D_1^*$ wirklich eine $\varepsilon_1$-Aussonderung des Punktes $x$ ist. Die Menge $\overline{D_1^*}$ besteht dabei aus einer endlichen Anzahl von Komponenten. Da $\varepsilon_1$ aber eine beliebige positive Zahl war, so heisst das, dass $Ind_x\ C \leqq \omega$ ist, w. z. b. w.[1])

Wir wollen nun den Integralindex mit dem Verzweigungsindex etwas näher vergleichen.

S a t z  III. *Bei der Bestimmung des Integralindex der stetigen Kurve C können wir uns auf die Aussonderungsmengen B von minimaler d.h. der, dem Indexe des betreffenden Punktes entsprechenden, Mächtigkeit beschränken.* [2])

B e w e i s. Es seien $\varepsilon > 0$ und eine $\varepsilon$-Aussonderung $C = A + B + D$ des Punktes $x$ gegeben, wobei die Mächtigkeit der Komponentenmenge von $\overline{D} = \sum_1^m K_i$ den kleinstmöglichen Wert annimmt. Wir wollen zeigen, dass es stets eine $\varepsilon$-aussondernde abgeschlossene Menge $B_1$ von minimaler Mächtigkeit gibt, die in bezug auf die Komponentenanzahl von $\overline{D_1}$ die Eigenschaften von $B$ besitzt. In der Tat gibt es nach der Definition des Verzweigungsindex eine den Punkt $x$ $\varepsilon$-aussondernde, in $A$ enthaltene

[1]) Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass *falls für wenigstens einen Punkt* $x \subset C$ $ind_x\ C \geqq \aleph_0$ *ist, C unendlich viele geschlossene Jordankurven enthält* (da in diesem Falle wenigstens ein $K_j^* \subset \overline{D_1^*}$ mit $\overline{A_1^*}$ unendlich viele Punkte gemeinsam hat).

[2]) Falls dabei $ind_x\ C = \omega$ ist, so betrachten wir *jede* endliche Menge $B$ als eine die erwähnten Minimaleigenschaft besitzende.

Menge $\tilde{B}$ von der, dem Werte $ind_x\, C$ entsprechenden Mächtigkeit. Wir betrachten nun die entsprechende $\varepsilon$-Aussonderung $C = \tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{D}$. Wir haben erstens die Inklusionen $\overline{\tilde{A}} \subset A$, $\overline{\tilde{D}} \supset \overline{D}$; ferner ist jede Komponente $K$ (von $\overline{D}$) in einer Komponente $\tilde{K}$ (von $\overline{\tilde{D}}$) enthalten. Wir bezeichnen jetzt diejenigen Komponenten $\tilde{K}$, die mindestens ein $K$ enthalten, mit $K^{\star}$ und setzen $Q_{*}$ gleich der Vereinigungsmenge sämtlicher $K^{\star}$; wir bezeichnen weiter durch $K^{\odot}$ die von $K^{\star}$ verschiedenen Komponenten der Menge $\overline{\tilde{D}}$; ihre Vereinigungsmenge soll $Q_{\odot}$ heissen.

Dann ist:

$$\tilde{D} = Q_{*} + Q_{\odot} \quad ; \quad \tilde{B} = \tilde{B} \,.\, Q_{*} + \tilde{B} \,.\, Q_{\odot}.$$

Die Zerlegung

$$C = A_1 + B_1 + D_1$$

mit

$$A_1 = A + Q_{\odot},$$

$$B_1 = \tilde{B} \,.\, Q_{*},$$

$$D_1 = Q_{*} - B_1,$$

ist eine $\varepsilon$-Aussonderung des Punktes $x$, was man in derselben Weise, wie beim Beweise des Satzes II, zeigt.

Diese $\varepsilon$-Aussonderung genügt aber den beiden Voraussetzungen in bezug auf die Komponentenzahl der Mengen $\overline{D_1}$ und $B_1$, w.z.b.w.

Es sei hierzu noch bemerkt, dass man stets verlangen kann, die Menge $A_1$ sei zusammenhängend: im entgegengesetzten Falle hätte man nur $A_1$ durch $\dot{A} = Komp_x\, A_1$ zu ersetzen [1]) und der Reihe nach $\dot{B} = \overline{\dot{A}} - \dot{A}$, $\dot{D} = C - (\dot{A} + \dot{B})$, und schliesslich

$$A_2 = \dot{A} + (B - \overline{\dot{D}})$$

$$B_2 = \dot{B} \,.\, \overline{\dot{A}} \,.\, \overline{\dot{D}}$$

$$D_2 = \dot{D} + (\dot{B} - \overline{\dot{A}})$$

zu definieren [2]). Man kann dies wie folgt zusammenfassen:

S a t z IV. *Für jeden Punkt $x$ einer stetigen Kurve $C$ und für jedes $\varepsilon > 0$, gibt es $\varepsilon$-Aussonderungen, welche gleichzeitig Minimaleigenschaften in Bezug auf die Komponentenzahl der Mengen $\overline{A}$, $B$ und $\overline{D}$ besitzen* [3]).

---

[1]) Es ist zu bemerken, dass letztere Menge auf Grund eines bekannten Satzes von HAHN in bezug auf $C$ offen ist.

[2]) Man beweist in der Tat leicht, dass erstens $B_2 \subset B_1$ ist, zweitens jede Komponente von $D_2$ mit $B_2$, also mit $B_1$ gemeinsame Punkte hat, und folglich eine Komponente von $\overline{D_1}$ enthält. Daraus folgen aber beide Minimaleigenschaften für $C = A_2 + B_2 + D_2$.

[3]) Nur 0-dimensionale Mengen $B$ werden dabei zur Konkurrenz zugelassen (vgl. auch die Fussnote [1]), Seite 1252).

Diese $\varepsilon$-Aussonderungen werden wir als *„normal"* bezeichnen.

Wir sind jetzt im Stande, die beiden Indices zu vergleichen, und führen dazu die neue Zahl

$$\triangle_x C = ind_x C - Ind_x C$$

ein.

Wenn $ind_x C$ endlich ist, ist die Bedeutung von $\triangle_x C$ klar.

Falls $ind_x C = \omega$ ist, setzen wir $\triangle_x C$ definitionsgemäss gleich der kleinsten Zahl $\alpha \leqslant \infty$ von der Beschaffenheit, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine normale $\varepsilon$-Aussonderung $C = A + B + D$ gibt, für die $\beta - \delta \leqslant \alpha$ ist (wobei $\beta$ bzw. $\delta$ die Anzahl der Komponenten von $B$ bzw. $\overline{D}$ bedeutet).

Falls endlich $ind_x C \geqslant \aleph_0$ ausfällt, so ist das einzig-vernünftige $\triangle_x C$ (dem Satze II entsprechend) gleich $ind_x C$ zu setzen.

Satz V. *Wenn $C$ und $C^*$ zwei stetige Kurven sind und $C \supset C^* \supset x$, so ist $\triangle_x C \geqslant \triangle_x C^*$.*

Beweis. Offenbar ist $ind_x C \geqslant ind_x C^*$. Die Ungleichung $\triangle_x C \geqslant \triangle_x C^*$ folgt alsdann für $ind_x C \geqslant \aleph_0$ aus der Definition selbst. Bleibt übrig den Satz für den Fall $ind_x C \leqslant \omega$ zu beweisen.[*]

Es sei $C = A + B + D$ eine normale, dem Werte von $\triangle_x C$ entsprechende $\varepsilon$-Aussonderung des Punktes $x$. Die Zerlegung $C^* = A^{**} + B^{**} + D^{**}$, wobei $A^{**} = A \,.\, C^*$, $B^{**} = B \,.\, C^*$, $D^{**} = D \,.\, C^*$ gesetzt ist, ist dann wieder eine $\varepsilon$-Aussonderung von $x$ in bezug auf $C^*$. Es ist ausserdem $A^{**} \subset A$, $B^{**} \subset B$; $D^{**} \subset D$.

Falls $B^{**}$ Punkte ausserhalb $\overline{A^{**}} \,.\, \overline{D^{**}}$ enthält, so fügen wir diese Punkte zu $D^{**}$ bzw. $A^{**}$ hinzu. Die so erhaltenen Mengen bezeichnen wir wieder mit $A^{**}$, $B^{**}$, $D^{**}$. Es seien $\beta, \delta$ bzw. $\beta^{**}$, $\delta^{**}$ die diesen Aussonderungen entsprechenden Anzahlen von Komponenten (wobei nicht zu vergessen ist, dass die Menge $B$ (also auch $B^{**}$) aus endlichvielen Punkten besteht).

Wir haben immer $\beta \geqslant \beta^{**}$. Wenn dabei $\delta \leqslant \delta^{**}$, so ist $\beta - \delta \geqslant \beta^{**} - \delta^{**}$. Wir werden aber gleich sehen, dass letztere Ungleichung auch für den Fall $\delta > \delta^{**}$ gilt. Es seien in der Tat $K_1^{**}, K_2^{**}, \ldots K_{\delta^{**}}^{**}$ die Komponenten von $\overline{D^{**}}$, und $K_1$, $K_2, \ldots K_{\delta^{**}}$ die, durch die Inklusionen $K_i \supset K_i^{**}$ $(i = 1, 2, \ldots \delta^{**})$ eindeutig bestimmten Komponenten von $\overline{D}$. (Zwei mit verschiedenen Indizes versehene $K_i$ können dabei selbstverständlich identisch sein). Unserer Voraussetzung gemäss gibt es jedenfalls $\delta - \delta^{**}$ von allen $K_1, \ldots K_{\delta^{**}}$ verschiedene Komponenten $K_{\delta^{**}+1}, \ldots K_\delta$ der Menge $\overline{D}$. Jede dieser Komponenten hat mit $B$ wenigstens einen Punkt gemein. Daraus folgt, dass

$$\beta - \beta^{**} \geqslant \delta - \delta^{**} > 0,$$

und also

$$\beta - \delta = [\beta^{**} + (\beta - \beta^{**})] - [\delta^{**} + (\delta - \delta^{**})] \geqslant \beta^{**} - \delta^{**}$$

ist.

Die Aussonderung $C^* = A^{**} + B^{**} + D^{**}$ ist im allgemeinen keine normale. Man kann sie aber normalisieren, so wie es beim Beweise der Sätze III und IV gezeigt wurde. Es sei $C^* = A^* + B^* + D^*$ die so entstandene normale $\varepsilon$-Aussonderung und $\beta^*$, $\delta^*$ ihr entsprechende Anzahlen von Komponenten. Dabei nimmt, für genügend kleine $\varepsilon$, die Zahl $\beta^{**}—\delta^{**}$ während des ganzen Prozesses der Normalisierung niemals zu, [1]) so dass $\beta^{**} - \delta^{**} \geqq \beta^* - \delta^*$ ist.

Also haben wir $\triangle_x C \geqq \beta - \delta \geqq \beta^{**} - \delta^{**} \geqq \beta^* - \delta^*$, wobei $\beta^* - \delta^*$ einer normalen $\varepsilon$-Aussonderung auf $C^*$ entspricht. Die Zahl $\triangle_x C$ genügt der für $\triangle_x C^*$ charakteristischen Ungleichung. Da $\triangle_x C^*$ die kleinste Zahl von dieser Beschaffenheit ist, so ist $\triangle_x C \geqq \triangle_x C^*$, w.z.b.w.

Aus dem Satze V folgt

Satz VI. *Damit eine stetige Kurve $C$ eine Baumkurve*[2]) *sei, ist notwendig und hinreichend, dass für sämtliche Punkte $x \subset C$ die Gleichung* $\triangle_x C = 0$ *gilt.*

Die Bedingung ist hinreichend. In der Tat, falls $C$ eine einfache geschlossene Linie $C^*$ enthält, so gilt für jeden Punkt $x \subset C^*$ die Gleichung

$$\triangle_x C^* = 1\,;$$

also ist nach dem Satze V $\triangle_x C \geqq 1$.

Die Bedinging ist notwendig. Wir setzen voraus, dass $C$ eine Baumkurve ist, für die in irgend einem Punkte $x \subset C$, $\triangle_x C \geqq 1$ ausfällt.

Es sei nun $C = A + B + D$ eine normale $\varepsilon$-Aussonderung (wobei $\varepsilon$ klein genug ist damit $\beta—\delta > 0$ sei). Mindestens eine Komponente $K$ von $\bar{D}$ enthält zwei Punkte von $B$, z.B. $b_1$ und $b_2$. Da $K$ ein im kleinen zusammenhängendes Kontinuum ist[1]), kann man $b_1$ mit $b_2$ durch einen in $K$ enthaltenen einfachen Bogen $S_1$ verbinden. Da aber $A + B$ auch ein im kleinen zusammenhängendes Kontinuum ist, so kann man auch einen in $A + B$ enthaltenen, $b_1$ mit $b_2$ verbindenen einfachen Bogen $S_2$ finden. $Q = S_1 + S_2$ ergibt dann eine in $C$ enthaltene einfache geschlossene Linie, was unsrer Voraussetzung widerspricht.

Wir wollen jetzt folgenden Satz beweisen:

Satz VII. *Damit eine stetige Kurve $C$ eine und nur eine einfache geschlossene Linie $Q$ enthält, ist notwendig und hinreichend, dass die beiden folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:*

$1^0$. *Für jeden Punkt $x \subset C$ ist $\triangle_x C \leqq 1$.*

$2^0$. *Die Menge $M$ aller Punkte $x \subset C$, in denen $\triangle_x C > 0$ ist, ist zusammenhängend.*

Bevor wir die Notwendigkeit unserer beiden Bedingungen beweisen, bemerken wir, dass falls $C$ *nur* eine einfache geschlossene Linie enthält, sicher für alle Punkte $x \subset C$ die Ungleichung $ind_x\, C \leqq \omega$ gilt[3]). *Beim*

---

[1]) Für den Fall $ind_x\, C^* = \omega$ besteht der erwähnte Prozess aus einem einzigen Schritte, man setzt nämlich $A^* = Kompx_x\, A^{**}$ (vgl. auch Fussnote [1]) auf Seite 1255).

[2]) Man versteht unter einer *Baumkurve* eine, keine einfache geschlossene Linie (= geschlossene JORDANkurve) enthaltende stetige Kurve. Diese Kurvenart wurde zuerst von MAZURKIEWICZ und sodann von MENGER (l.c.), von dem auch die Bezeichnung "Baumkurve" herrührt, untersucht. (Vgl. Fund. Math. 2, S. 119).

[3]) Siehe Fussnote [1]) auf S. 1255.

*Beweise der Notwendigkeit unsrer Bedingungen dürfen wir also annehmen, dass* $C$ *eine endlich verzweigte*[1]) *Kurve ist.*

Die Bedingung $1^0$ ist notwendig. Es sei in der Tat $C$ eine endlich verzweigte stetige Kurve, die eine einzige einfache geschlossene Kurve $Q$ enhält und die in wenigstens einem Punkte $x$ der Bedingung $\triangle_x C \geqq 2$ genügt. Wir wollen zeigen, dass dies unmöglich ist.

Zwei Fälle sind a priori möglich.

$1^0$. Der Punkt $x$ ist nicht in $Q$ enthalten.

$2^0$. Der Punkt $x$ gehört zu $Q$.

Wir untersuchen zuerst den Fall $1^0$. Es sei $U(x)$ eine der Bedingung $\overline{U}(x) \,.\, Q = 0$ genügende *zusammenhängende* Umgebung des Punktes $x$ (rel. $C$). Dann ist $C_0 = \overline{U}(x)$ eine Baumkurve und es gibt (infolge des Satzes VI) eine normale $\varepsilon$-Aussonderung ($\varepsilon < \varrho\,(x, C - U\,(x))$ des Punktes $x$ (in Bezug auf $C_0$)

$$C_0 = A_0 + B_0 + D_0,$$

wobei die Komponentenzahl $\delta_0$ von $\overline{D}_0$ gleich der (endlichen) Anzahl $\beta_0$ von Punkten der Menge $B_0$ ist. Wir setzen nun $A = A_0$, $B = B_0$, $D = C - (A + B)$ und überzeugen uns ohne Schwierigkeit davon, dass

$$C = A + B + D$$

eine $\varepsilon$-Aussonderung der Punktes $x$ in bezug auf $C$ ist.

Ich behaupte nun, dass die Komponentenzahl $\delta$ von $\overline{D}$ gleich $\delta_0$ ist. In der Tat, da jede Komponente von $\overline{D}$ mit $B = B_0$, also mit $\overline{D_0}$ gemeinsame Punkte hat, so ist sicher $\delta \leqq \delta_0$. Falls aber $\delta < \delta_0$ wäre, so würden gewiss zwei Komponenten $K_1$ und $K_2$ von $\overline{D}_0$ zu einer Komponente $K$ von $\overline{D}$ gehören; da aber (wegen $\beta_0 = \delta_0$) $K_1$ und $K_2$ in verschiedenen Punkten $b_1$ und $b_2$ von $B$ münden, so hat $K$ mit $B$ wenigstens diese beiden Punkte gemein. Indem wir nun $b_1$ und $b_2$ zuerst in $K$ und dann in $C_0$ mittels zweier einfacher Bogen verbinden[2]), erhalten wir sofort eine einfache geschlossene Linie $Q_1$, die mit $C_0$ gemeinsame Punkte hat und also sicher von $Q$ verschieden ist. Im Falle $1^0$ würde also $C$ im Widerspruch zu unsrer Voraussetzung mindestens zwei verschiedene einfache geschlossene Linien $Q$ und $Q_1$ enthalten.

Wir wenden uns jetzt zum Falle $2^0$: $x \subset Q$ und betrachten eine bestimmte $\varepsilon$-Aussonderung $C = A + B + D$ des Punktes $x$, wobei

$$B = \sum_1^\beta b_i\,, \qquad \overline{D} = \sum_1^\delta K_i\,, \qquad \beta - \delta \geqq 2$$

ist.

Ohne die Allgemeinheit einzuschränken dürfen wir in unsrem Falle

[1]) Eine Kurve $C$ heiszt *endlich-verzweigt* (URYSOHN) falls für jeden ihrer Punkte $ind_x\, C \leqq \omega$ ist. Bei MENGER (l.c.) wird eine derartige Kurve „regulär" genannt.

[2]) Dies ist stets möglich, da jedes Teilkontinuum einer endlich verzweigten Kurve selbst endlich verzweigt, also im kleinen zusammenhängend ist (Siehe URYSOHN, II, ch. III; MENGER, Math. Ann. 95, S. 300.

annehmen, dass die Menge $B \, . \, Q$ nur aus zwei Punkten, z.B. aus $b_1$ und $b_2$ besteht. Dann folgt aus $\beta - \delta \geqq 2$ leicht, dass

I. entweder die Komponente von $Q - A$ in $\overline{D}$, d.h. die grösste zusammenhängende, $Q - A$ enthaltende Teilmenge $K$ von $\overline{D}$, mindestens einen, von beiden Punkten $b_1$ und $b_2$ verschiedenen Punkt $b_i \subset B$ enthält

II. oder eine von $K$ verschiedene Komponente $K^*$ der Menge $\overline{D}$ zwei (von den Punkten $b_1$, $b_2$ nicht notwendig verschiedene) Punkte $b_p + b_q \subset B$ enthält.

In beiden Fällen gibt es, wie leicht beweisbar, eine von $Q$ verschiedene einfache geschlossene Linie $Q^* \subset C$, was der Annahme widerspricht.

Die Bedingung $2^0$ ist notwendig. In der Tat, falls $C$ nur eine geschlossene JORDANkurve $Q$ enthält, so folgt aus VI leicht, dass für $x \subset C - Q$ stets $\triangle_x C = 0$ ist. Da andererseits für jeden Punkt $x \subset Q$ $\triangle_x C \geqq \triangle_x Q = 1$ ist, so ist $M$ mit Q identisch, also zusammenhängend.

Die Bedingungen $1^0$ und $2^0$ sind hinreichend. Aus $1^0$ folgt wieder $ind_x \, C \leqq \omega$. Nehmen wir an, $C$ enthalte zwei oder mehrere einfache geschlossene Linien, $C \supset Q_1 + Q_2 + \ldots$ Wir beweisen zuerst, dass wenigstens zwei dieser Linien gemeinsame Punkte haben. Im Falle, wo $C$ nur endlichviele einfache geschlossene Kurven enthält, folgt letztere Behauptung unmittelbar aus unsren Voraussetzungen (weil dann, wie leicht ersichtlich, $M$ mit der Vereinigungsmenge aller in $C$ enthaltenen geschlossenen Kurven identisch ist).

Es seien nun in $C$ unendlich (und dann notwendig nur abzählbar) viele geschlossene JORDANkurven

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

enthalten, die paarweise zueinander fremd sind. Offenbar ist (auf Grund von Satz V) $\Sigma Q_n \subset M$. Ich behaupte, dass auch umgekehrt $M \subset \Sigma Q_n$ ist, m. a. W., dass für jeden Punkt $x \subset C - \Sigma Q_n$

$$\triangle_x C = 0$$

ist. Es sei in der Tat $C^*$ diejenige *Baumkurve*, die aus $C$ dadurch entsteht, dass man jede Kurve $Q_n$ durch einen einzigen Punkt $x_n^*$ ersetzt und alle sonstigen Limesbeziehungen in $C$ unverändert in $C^*$ aufnimmt (so dass $C^*$ ein eindeutiges stetiges Bild von $C$, und $C^* - \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^*$ ein eineindeutiges Bild von $C - \Sigma Q_n$ ist).

Dann ist für jeden Punkt $x \subset C - \sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$

$$\triangle_x C = \triangle_{x^*} C^* = 0 \quad (x^* \text{ ist der Bildpunkt von } x \text{ in } C^*),$$

womit unsre Behauptung bewiesen ist.

Es können also in $C$ unmöglich lauter zueinander fremde geschlossene JORDANkurven enthalten sein, so dass es in $C$ mindestens zwei gemeinsame Punkte besitzende einfache geschlossene Linien $Q_1$ und $Q_2$ gibt.

Die Summe $Q_1 + Q_2$ bildet ein Kontinuum (stetige Kurve) $C_0 \subset C$. Nach dem Satze V bleibt nur noch übrig folgenden Hilfssatz zu beweisen:

Hilfssatz. *Wenn der Durchschnitt $Q_1 \, . \, Q_2$ von zwei verschiedenen einfachen geschlossenen Linien nicht leer ist, gibt es in $Q_1 + Q_2 = C_0$ Punkte, für die $\triangle_x C_0 \geqslant 2$ ist.*

Beweis. Da $Q_1$ und $Q_2$ verschieden sind, gibt es z.B. auf $Q_1$ einen offenen Bogen, der von Punkten von $Q_2$ frei ist. Wir bezeichnen jetzt mit $S$ einen grössten diese Eigenschaft besitzenden Bogen. Dann ist für die Endpunkte $a_1$ und $a_2$ (die auch zusammenfallen können): $\triangle_{a_1} C_0 \geqslant 2$, $\triangle_{a_2} C_0 \geqslant 2$. Es genügt offenbar die Ungleichung $\triangle_{a_1} C_0 \geqslant 2$ zu beweisen. Ist $a_1$ ein isolierter Punkt von $Q_1 \, . \, Q_2$, so können wir ihn für genügend kleine $\varepsilon$ durch vier (und nicht weniger) Punkte (zwei auf $Q_1$ und zwei auf $Q_2$) aussondern. Die zu $A$ komplementäre Menge $\overline{D}$ enthält aber höchstens zwei Komponenten $Q_1 - A$ und $Q_2 - A$.

Ist dagegen $a_1$ kein isolierter Punkt von $Q_1 \, . \, Q_2$, so braucht man um ihn für ein hinreichend kleines $\varepsilon$ auszusondern drei Punkte (zwei auf $Q_2$, von denen einer auf $Q_1 \, . \, Q_2$ zu wählen ist, und einen auf $S \subset Q_1$). Die zu $A$ komplementäre Menge $D$ kann aber dabei stets zusammenhängend vorausgesetzt werden. In beiden Fällen haben wir $\triangle_{a_1} C^* \geqslant 2$. Der Hilfssatz und der Satz VIII sind damit vollständig bewiesen.

Ist $C$ eine ebene stetige Kurve, so gibt uns die Anwendung des Jordanschen Kurvensatzes die den Sätzen VI und VII analogen Sätze VI′ und VII′:

Satz VI′. *Damit eine ebene stetige Kurve $C$ die Ebene nicht zerlegt, ist notwendig und hinreichend, dass für sämtliche Punkte $x \subset C$ $\triangle_x C = O$ ist.*

Satz VII′. *Damit eine ebene stetige Kurve $C$ die Ebene in zwei Gebiete zerlegt ist notwendig und hinreichend, dass die beiden folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt seien:*

1°. *Für jeden Punkt $x \subset C$ ist $\triangle_x C \geqslant 1$.*

2°. *Die Menge $M = \{x, \triangle_x C > 0\}$ ist zusammenhängend.*

Diese beiden Sätze können auch direkt (aber ziemlich umständlich) durch systematische Anwendung der Sätze von JANISZEWSKI und STRASZEWICZ bewiesen werden.

*Moskau*, 15. V. 1926.