Mathematics. — *Sur l'approximation de fonctions abstraites.* By A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of March 30, 1946.)

1. Chaque fonction réelle bornée (c.à.d. une fonction bornée dont les valeurs sont des nombres réels), définie sur un ensemble arbitraire V, peut s'écrire comme limite d'une suite uniformement convergente de fonctions, dites simples, dont chacune ne prend sur V qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

Dans ce qui suit nous étudions ce que devient de cette propriété si on remplace la fonction réelle par une transformation univoque arbitraire de V en un espace métrique arbitrairement donné E.

La distance de deux points a et b de E sera désignée par $d(a, b)$.

Définition. *Une transformation univoque de V en un ensemble fini de E s'appelle une fonction simple.*

Soit $f(x)\,(x \in V)$ une transformation univoque arbitraire de V en E.

Problème. *On demande des conditions nécessaires et suffisantes pourque $f(x)$ soit approximable uniformement par des fonctions simples. Donc, sous quelles conditions existe, $\varepsilon > 0$ étant donné, une fonction simple $\varphi(x)$* telle que

$$d(f(x), \varphi(x)) < \varepsilon$$

pour tout $x \in V$.

Disons qu'une fonction qui possède cette propriété est de première classe. En désignant par A l'ensemble des valeurs de $f(x)$ pour $x \in V$ (donc $A \subset E$), on a:

Théorème 1. *Une condition nécessaire et suffisante pourque $f(x)$ soit de 1-re classe est que A est totalement borné.*

Démonstration. 1. A soit totalement borné. Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ donné A est la somme d'un nombre fini d'ensembles A_i disjoints avec diamêtre $< \varepsilon$:

$$A = A_1 + \ldots + A_n, \quad A_i A_j = 0 \; (i \neq j).$$

Soit V_i le sous-ensemble de V qui par $f(x)$ est transformé en A_i; on a $V_1 + \ldots + V_n = V$, $V_i V_j = 0 \; (i \neq j)$. Soit $a_i \in A_i$. Alors la fonction

$$\varphi(x) = a_i \quad \text{pour } x \in V_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

est l'approximation désirée.

2. Supposons que $f(x)$ est approximable uniformement au sens indiqué. Pour $\varepsilon > 0$ donné il existe une fonction simple $\varphi(x)$ telle que pour tout $x \in V$

$$d(f(x), \varphi(x)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Supposons que $\varphi(x)$ prend les valeurs distinctes $a_1, \ldots, a_n$ resp. sur $V_1, \ldots, V_n$; $V_1 + \ldots + V_n = V$. Par $f(x)$, $V_1, \ldots, V_n$ sont transformés en $A_1, \ldots, A_n$; $A = A_1 + \ldots + A_n$. En désignant par $a_i, \beta_i, \ldots$ des points de A_i, on a donc

$$d(\alpha_i, a_i) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Il s'ensuit

$$d(\alpha_i, \beta_i) < d(\alpha_i, a_i) + d(a_i, \beta_i) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

donc la diamêtre de A_i est $< \varepsilon$. La décomposition désirée est donc $A = A_1 + \ldots + A_n$ de sorte que A est totalement borné.

Conséquence. Si A est totalement borné, A est séparable; en vertu du théorème d'URYSOHN le théorème précédent peut donc s'exprimer comme il suit:

Pourque $f(x)$ soit de 1-re classe il faut et il suffit que A est homéomorphe à un sous-ensemble du cube fondamental $I^{\aleph_0}$ de HILBERT.

En effet, chaque pareil ensemble est totalement borné, puisque $I^{\aleph_0}$ luimême est totalement borné. Inversement, chaque espace métrique séparable, à fortiori chaque espace métrique totalement borné, est topologiquement contenu dans $I^{\aleph_0}$. Si E est de dimension finie, on a même: A est homéomorphe à un ensemble borné d'un espace euclidien à n dimensions.

Quant aux fonctions qui ne sont pas de 1-re classe, on a le théorème suivant.

Théorème 2. *Une condition nécessaire et suffisante pourque $f(x)$ soit approximable uniformement par des fonctions, qui sont chacune limite d'ordre fini ou transfini — pourvu que dans ce dernier cas l'ordre de la limite est dénombrable — de fonctions de 1-re classe, est que A est séparable.*

Remarques. On peut considérer le système de fonctions

$$f^{(n)}(x) = \lim_{i_1} \lim_{i_2} \ldots \lim_{i_n} f_{i_1 \ldots i_n}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

oP $f_{i_1 \ldots i_n}(x)$ est une fonction de 1-re classe. Ensuite on construit les fonctions

$$f^{(\omega)}(x) = \lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x),$$

$$f^{(\omega+1)}(x) = \lim_{i \to \infty} f_i^{(\omega)}(x).$$

On continuera ce procédé transfiniment sous la condition de se restreindre à des nombres ordinaux dénombrables. Alors le théorème exprime que la séparabilité de A est nécessaire et suffisante pourque $f(x)$ soit approximable uniformement par des fonctions appartenant au système ainsi construit. D'ailleurs, on verra immédiatement que chaque fonction qui est approximable d'une telle façon, l'est déjà par des fonctions qui ne prennent sur V qu'une infinité dénombrable de valeurs distinctes dans E, donc qui transforment V en un sous-ensemble dénombrable de E.

Démonstration. 1. A soit séparable. $\varepsilon > 0$ étant donné, construisons pour chaque point a de A le voisinage $d(\alpha, a) < \varepsilon$ $(a \in A)$. En remarquant que, à cause de la séparabilité de A, chaque recouvrement de A contient un recouvrement dénombrable, on voit comme dans la démonstration du théorème 1 que $f(x)$ est approximable uniformement par des fonctions qui ne prennent qu'une infinité dénombrable de valeurs distinctes de E.

2. Inversement, soit d'abord

$$f(x) = \lim_{i \to \infty} f_i(x),$$

où $f_i(x)$ est de 1-re classe. A cause du théorème 1, A_i — l'ensemble des valeurs de f_i — est totalement borné, donc séparable. Pour chaque i soit $a_n^{(i)}$ $(n = 1, 2, \dots)$ un ensemble dénombrable partout dense dans A_i. On voit alors que chaque point de A est point d'accumulation de l'ensemble dénombrable des points $a_n^{(i)}$ $(i, n = 1, 2, \dots)$. Il s'ensuit que A est séparable. Puisque un ensemble dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, on voit que la séparabilité est conservée après chaque passage à la limite, pourvu que l'ordre de la limite soit dénombrable. A est donc séparable pour chaque limite dénombrable transfinie. Il suit alors de la partie 1 de la démonstration que $f(x)$ est déjà approximable uniformement par des fonctions qui ne prennent qu'une infinité dénombrable de valeurs distinctes de E.

Selon le théorème de métrisation de URYSOHN la condition du théorème 2 peut être remplacée aussi par la suivante: A est homéomorphe à un sous-ensemble du cube fondamental de HILBERT.

Nous dirons que les fonctions, dont il s'agit dans le théorème 2, sont de la deuxième classe.

Il y a une relation entre les deux classes.

Soit $f^{(2)}(x)$ une fonction de la 2-me classe; l'ensemble correspondant des valeurs $A^{(2)}$ est donc séparable. Chaque espace métrique séparable est homéomorphe à un espace métrique totalement borné; il existe donc une fonction biunivoque, bicontinue F qui transforme $A^{(2)}$ en un espace totalement borné $A^{(1)}$. Il s'ensuit que la fonction, définie sur V,

$$F(f^{(2)}(x)) = f^{(1)}(x)$$

est de la 1-re classe.

On peut continuer la classification aux fonctions dont l'ensemble des valeurs A est non-séparable. On voit qu'il faut classificer selon le plus petit nombre cardinal, possédant la propriété qu'il existe un ensemble dense dans A ayant ce nombre comme puissance, en ce sens que des fonctions qui ont ce même cardinal appartiennent à la même classe.

3. Supposons qu'il existe dans E un point O tel qu'on a pour chaque couple a et b de points de E

$$d(a, O) \leqq \max(d(b, O), d(a, b)) \quad \dots\dots \quad (1)$$

La métrique est donc en quelques égards non-archimédienne. Posons pour abrévier

$$d(a, O) = \| a \|,$$

et appelons $\| a \|$ la norme de a. Dans un pareil espace on a le théorème suivant.

Théorème 3. *La limite d'une suite convergente de fonctions, dont chacune a un ensemble des normes des valeurs de la fonction au plus dénombrable, a elle-même un ensemble de normes au plus dénombrable.*

Démonstration. Soit $f(x) \doteq \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ et soit $\varepsilon > 0$ donné. Considérons l'ensemble e_ε des points $x \in V$ où l'on a $\| f(x) \| \geqq \varepsilon$. En chaque point de e_ε on a pour $n \geqq N_x$

$$\| f_n(x) \| = \max (\| f(x) \|, d(f(x), f_n(x)) = \| f(x) \|,$$

puisque $\|f(x)\| \geqq \varepsilon$ et $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ pour $n \geqq N_x$. Soit $e_\varepsilon^{(k)}$ le sous-ensemble de e_ε où

$$\| f(x) \| = \| f_n(x) \|$$

pour $n \geqq k$, cependant non pour $n \geqq k - 1$. Alors

$$e_\varepsilon = e_\varepsilon^{(1)} + e_\varepsilon^{(2)} + \dots .$$

Sur chaque $e_\varepsilon^{(k)}$ $f(x)$ a un ensemble de normes au plus dénombrable; donc $f(x)$ admet au plus une infinité dénombrable de normes $\geqq \varepsilon$. En faisant parcourir ε une suite $\varepsilon_i \to 0$, il suit que $f(x)$ admet au plus une infinité dénombrable de normes distinctes, puisque chaque $x \in V$, sauf les points où $\| f(x) \| = 0$, est contenu dans un e_{ε_i}.

Soit de nouveau E un espace métrique, dont la métrique ne satisfait pas nécessairement à la condition non-archimédienne (1).

Soit $\triangle(a, b)$ la borne inférieure des nombres ϱ, pour lesquels les points a et b de E puissent être liés par une ϱ- chaîne (ϱ-Kette). Si a, b, c sont trois points de E, on a

$$\triangle(a, b) \leqq \max (\triangle(a, c), \triangle(b, c)),$$
$$\triangle(a, b) = \triangle(b, a).$$

Cependant on peut avoir $\triangle(a, b) = 0$ sans que $a = b$. On a $\triangle(a, b) = 0$ pour tous les points a et b qui appartiennent à une même composante connexe de E. $\triangle(a, b)$ détermine une métrique dans l'espace des composantes connexes $Q(E)$ de E, c'est l'espace dont les points sont les composantes connexes de E. On obtient une transformation de E en $Q(E)$, en faisant correspondre à chaque point a de E le point A de $Q(E)$ qui représente la composante connexe de E où appartient le point a considéré. Cette transformation est continue. En effet, soit a_n une suite de points de E avec limite a, donc

$$d(a_n, a) \to 0.$$

Soit A l'image de a, A_n l'image de a_n (il est bien possible que $A_n = A$, en effet si a_n et a appartiennent à une même composante connexe). Il suit de la définition de la distance $\triangle$ en $Q(E)$

$$\triangle(A_n, A) \leqq d(a_n, a) \to 0.$$

Comme il est connu, on en tire la continuité de la transformation.

L'application des théorèmes 2 et 3 à l'espace $Q(E)$ donne les propriétés suivantes.

S'il existe en $Q(E)$ un point O tel que l'ensemble des normes en $Q(\hat{E})$ — ce sont les $\triangle$-distances des point de $Q(E)$ à O — est non-dénombrable, alors $Q(E)$ est non-séparable par rapport à la métrique $\triangle$.

En effet, il existent alors des transformations en $Q(E)$, qu'on ne peut pas obtenir comme limite au sens du théorème 2; selon ce théorème $Q(E)$ contient alors un ensemble non-séparable et l'espace lui-même est alors non-séparable.

Revenons alors à l'espace E et remarquons que l'image continue d'un espace séparable est séparable; on obtient la propriété suivante:

Théorème 4. *Si E contient un point O tel que l'ensemble des nombres $\triangle(a, O)$ avec $a \in E$ est non-dénombrable, alors E est non-séparable.*

L'inversion de ce théorème n'est pas vraie: si l'espace E ne contient qu'une infinité dénombrable de valeurs $\triangle(a, O)$ quelque soit O dans E, l'espace E peut bien être non-séparable. Il suffit de considérer l'union d'une infinité dénombrable d'espaces connexes non-séparables.

On tire du théorème 4:

Si E est un espace métrique séparable, l'ensemble des nombres $\triangle(a, O)$ avec $a \in E$ est dénombrable, quelque soit $O \in E$.

Si la métrique donnée de E est non-archimédienne, c.à.d. si l'on a pour tout a, b, c dans E

$$d(a, b) \leqq \max\,(d(a, c), d(b, c)),$$

on voit que

$$d(a, b) = \triangle(a, b).$$

Cependant il n'est pas permis de conclure que dans un pareil espace séparable l'ensemble des distances mutuelles des points est dénombrable. On peut conclure cela si de plus l'espace est linéaire (par rapport à un certain corps des coefficients) et si de plus

$$d(a, b) = d(a - b, \theta) = \| a - b \|.$$

J'ai étudié de tels espaces dans un article précédent.