Mathematics. — *Ueber Syzygien bei sechs binären Linearformen.* By R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 29, 1927).

Wir zeigen in § 1 dass jede irreduzible p-Relation der G_d-Koordinaten $p_{ikl....}$ in einem G_n (= lineares Gebiet n-ter Stufe oder linearer, projektiever, (n-1)-dimensionaler Raum) einem invarianten Gleichungssystem angehört, das durch Nullsetzen einer Komitante K des alternierenden Tensors $p_{ikl...}$ entsteht. In § 2 wird dies für die quadratischen p-Relationen näher ausgeführt.

Die p-Relationen der G_d-Koordinaten in einem G_n sind Syzygien $S = 0$ zwischen den Invarianten J von n Punkten eines G_d. Umgekehrt ist auch jedes $S = 0$ eine p-Relation und die Struktur dieser Gleichungen wird aufgedeckt durch die Ermittlung aller *irreduziblen* Syzygien S und die dazu gehörige *Syzygienkette*.

Dies ist bisher bekannt für $d = 2$, n $= 5$ (§ 3). Wir behandeln hier den Fall $d = 2$, $n = 6$, wo die Verhältnisse schon bedeutend komplizierter sind. Die zugehörige Syzygienkette bricht hier nach der vierten Art ab, d.h. es gibt noch (einundzwanzig) irreduzible Syzygien vierter Art aber keine von fünfter Art mehr (§§ 4 bis 9).

§ 1. *Irreduzible p-Relationen.*

Es seien $x, y, ..., z$ d linear-unabhängige Punkte eines G_d im G_n (G_m = linearen, projektiever, (m — 1)-dimensionaler Raum), deren homogene Koordinaten die Elemente der Matrix

$$\mathfrak{M} = \begin{Vmatrix} x_1\, x_2 & \ldots\ldots\ldots & x_n \\ y_1\, y_2 & \ldots\ldots\ldots & y_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ z_1\, z_2 & \ldots\ldots\ldots & z_n \end{Vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

bilden. Die d-reihigen Determinanten.

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_d} = (xy \ldots z)_{i_1 i_2 \ldots i_d} = (i_1\, i_2 \ldots i_d) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

aus $\mathfrak{M}$ sind die $\binom{n}{d}$ homogenen „Punktkoordinaten des G_d". Sie sind verknüpft durch eine Reihe von Gleichungen, die wir p-Relationen $R = 0$ nennen, wenn R ein Polynom der $p_{ikl...}$ ist, das die beiden Bedingungen erfüllt: α) $R \equiv\!\!/\!\!\equiv 0$ $\{p_{ikl...}\}$, d. h. R ist nicht Null, wenn die $p_{ikl...}$ als unabhängige Veränderliche betrachtet werden: β) $R \equiv 0$ $\{x. y, \ldots, z\}$, d.h. R verschwindet identisch, wenn die $p_{ikl\ldots}$ durch die x_i, $y_k, \ldots$ ausgedrückt werden.

Wir wollen weiters von einer *irreduziblen* p-Relation $R=0$ sprechen, wenn erstens R nicht als Summe $R_1+R_2+\ldots$ geschrieben werden kann, wo schon jedes $R_i=0$ eine p-Relation darstellt und wenn zweitens R nicht (im Körper der rationalen Zahlen) in Faktoren zerlegbar ist: $R=R_1 R_2$, wo schon $R_1=0$ oder $R_2=0$ eine p-Relation ist.

Die einfachsten irreduziblen p-Relationen sind die *quadratischen* p-Relationen $\Pi=0$. Hierbei ist der allgemeine Typus von Π gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned}\Pi=(i_1\, i_2 \ldots i_d)(k_1\, k_2 \ldots k_d)-(k_1\, i_2 \ldots i_d)(i_1\, k_2 \ldots k_d)+\\ +(k_1\, i_1\, i_3 \ldots i_d)(i_2 k_2 \ldots k_d)-\ldots+(-1)^d(k_1\, i_1\, i_2 \ldots i_{d-1})(i_d k_2 \ldots k_d)=0\end{aligned}\right\}. \quad (3)$$

und es besteht der Satz [1]), dass jede p-Relation $R=0$ sich auf die Gestalt

$$R=\Sigma\, A_\nu\, \Pi_\nu = A_1\, \Pi_1 + A_2\, \Pi_2+\ldots=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

bringen lässt, wo die A_ν Polynome der $p_{ikl\ldots}$ sind.

Die Gleichungen $\Pi=0$ sind notwendig und hinreichend dafür, dass $\binom{n}{d}$ Grössen $p_{ikl\ldots.}$ als Punktkoordinaten eines G_d im G_n betrachtet werden können.

Wir wollen jetzt zeigen, *dass jede irreduzible p-Relation $R=0$ aus einer Komitante K des schiefsymmetrischen Tensors $p_{ikl\ldots.}$ abgeleitet werden kann durch Spezialisierung der in K auftretenden Reihen ξ, $\eta, \ldots, u', v', \ldots$.*

Hiezu haben wir vor allem nachzuweisen, dass jedes irreduzieble R homogen in den $p_{ikl\ldots.}$ und ausserdem homogen in allen auftretenden Indizes $i, k, l, \ldots$ ist. Wäre nämlich R nicht homogen in den $p_{ikl\ldots.}$, dann würde R additiev zerfallen in homogene Bestandteile $R=R_1+R_2+\ldots$ Ersetzen wir hier x_i durch λx_i, dann erscheint jedes $p_{ikl\ldots.}$ mit λ multipliziert und aus $R_1+R_2+\ldots=0$ wird $\lambda^{m_1}R_1+\lambda^{m_2}R_2+\ldots=0$ mit $m_i \neq m_k$. Also wäre $R_i=0$ bereits eine p-Relation.

Die Indizeshomogenität bei einer irrudiziblen p-Relation beweist man genau so, indem man $x_i, y_i, \ldots, z_i$ durch $\lambda x_i, \lambda y_i, \ldots, \lambda z_i$ (*i fest*) ersetzt.

Jetzt leiten wir aus R ein Polynom R' ab, das ebensoviele untereinander äquivalente Reihen $p_{ikl\ldots.}, q_{ikl\ldots.}, r_{ikl\ldots.}, \ldots$ *linear* enthält, als der Grad van R in den $p_{ikl\ldots.}$ beträgt. Wir bilden hiezu die Polaren ($m=$ Grad von R in den $p_{ikl\ldots.}$):

$$R_1=\frac{1}{m}\Sigma\frac{\partial R}{\partial p_{ikl\ldots}}q_{ikl\ldots}\quad , \quad R_2=\frac{1}{m-1}\Sigma\frac{\partial R_1}{\partial p_{ikl\ldots}}r_{ikl\ldots}, \ldots, R_{m-1}=R'.$$

Wir haben dann

$$(R')_{p_{ikl\ldots}=q_{ikl\ldots}=\ldots}=R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

[1]) Vgl. einen demnächst in den Mathem. Annalen (1927) erscheinenden Beweis.

Da R' linear in jeder Reihe $p_{ikl\ldots}, q_{ikl\ldots}, \ldots$ ist, können wir jetzt diese Reihen symbolisch zerlegen: $p_{ikl\ldots} = p_i\, p_k\, p_l \ldots$ Nun wählen wir, den n Indizes $1, 2, \ldots, n$ entsprechend, n Reihen von Raumkoordinaten $u', v', \ldots, w'$ und ersetzen in R' jedes p_1 durch (pu'), jedes q_1 durch (qu'), ... jedes p_n durch (pw') u.s.w. Aus R' entsteht auf diese Weise eine Komitante

$$K = R'\left((pu')\,,\ (pv')\,, \ldots, (qu')\,,\ (qv')\,, \ldots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und von K kommen wir auf R', d.h. auf R zurück, wenn wir die Matrix $((u'\ v' \ldots w'))$ als Einheitsmatrix wählen.

Durch $K \equiv 0\,\{u', v', \ldots, w'\}$ wird also ein invariantes Gleichungssystem gegeben, wovon eine Gleichung die ursprüngliche p-Relation $R = 0$ darstellt. Es ist dies ein besonderer Fall des Satzes von GRAM [1]), denn alle irreduziblen p-Relationen desselben Grades bilden ein invariantes Gleichungssystem.

§ 2. *Die quadratischen p-Relationen.*

Wir führen diese Zusammenfassung der irreduzieblen p-Relationen desselben Grades m durch Komitanten K für den einfachsten Fall $m = 2$ näher aus.

Ersetzen wir in (3) die ersten Faktoren durch $p_{ikl\ldots}$, die zweiten durch $q_{ikl\ldots}$, dann entsteht, wenn wir noch i_{d+1} an Stelle von k_1 schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= p_{i_1 i_2 \ldots i_d} \cdot q_{i_{d+1} k_2 \ldots k_d} - p_{i_{d+1} i_2 \ldots i_d} \cdot q_{i_1 k_2 \ldots k_d} + \ldots = \\ &= (\Sigma \pm p_{i_1}\, p_{i_2} \ldots p_{i_d}\, q_{i_{d+1}})\, q_{k_2} \ldots q_{k_d}\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

oder, da die eingeklammerte Summe gleich der durch $d!$ geteilten Determinante

$$(p\,p \ldots p\,q)_{i_1 i_2 \ldots i_d i_{d+1}} = (p^d\, q)_{i_1 i_2 \ldots i_d i_{d+1}}$$

ist:

$$d!\,\Pi = (p^d\, q)_{i_1 \ldots i_{d+1}}\, q_{k_2} \ldots q_{k_d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hieraus finden wir die Komitante

$$K = (p^d\, q\, \pi^{n-d-1})\, (q\varrho')^{d-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo $\pi_{j_1 \ldots j_{n-d-1}}$ und $\varrho'_{l_2 \ldots l_d}$ willkürliche alternierende Tensoren bedeuten. Von K gelangt man, bis auf einen von Null verschiedenen numerischen Faktor zur ursprünglichen quadratischen p-Relation zurück, indem man alle $\pi_{j_1 \ldots j_{n-d-1}}$, bei denen die Indexgruppe $(j_1 \ldots j_{n-d-1})$ vom Komplement von $(i_1 \ldots i_{d+1})$ verschieden ist und ebenso alle $\varrho'_{l_2 \ldots l_d}$ wo $(l_2 \ldots l_d) \neq (k_2 \ldots k_d)$ ist, gleich Null setzt.

$$K \equiv 0\,\{\pi_{ikl\ldots}\,,\ \varrho'_{rst\ldots}\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ergibt dann ein invariantes Gleichungssystem das (7) enthält, d.h. das jede quadratische p-Relation enthält.

---

[1]) Vgl. Inv. Theorie, p. 160.

Bei (9) können wir statt der $p_{i_1 \dots i_d}$ auch die Raumkoordinaten $p'_{j_1 \dots j_{n-d}}$ einführen:

$$K = d!\,(p'\,q)\,(p'\,\pi)^{n-d-1}\,(q\,\varrho')^{d-1}$$

und vermöge (8) wird jetzt:

$$\Pi = (p'\,q)\,p'_{j_1 \dots j_{n-d-1}}\,q_{k_2 \dots k_d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Dies ist eine besonders einfache symbolische Darstellung der p-Relationen (7). Sie kann jedoch noch durch eine andere ersetzt werden, nämlich durch Gleichungen der Gestalt

$$X_2 = (p'\,q)^2\,p'_{j_1 \dots j_{n-d-2}}\,q_{k_1 \dots k_{d-2}} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

die also entstehen aus Komitanten mit einem Klammerfaktor $(p^d\,q^2\,\pi^{n-d-2})$.

Gehen wir nämlich von (9) aus, dann können wir durch identisches Umformen alle $d-1$ Reihen q von $(q\varrho')^{d-1}$ in den Klammerfaktor $(q\,p^d\,\pi^{n-d-1})$ hineinbringen, wodurch K in eine Summe von Komitanten der Gestalt

$$(q^d\,p^m\,\pi^{n-d-m})\,(p\,\varrho')^{d-m}\,(\pi\,\varrho')^{m-1} \qquad (m = 2, 3, \dots) \quad . \; . \; . \quad (13)$$

verwandelt wird[1]). Diese Komitanten (13) haben aber alle die Gestalt ΣX_2, wo X_2 durch (12) gegeben ist. Somit ist jede quadratische p-Relation in der Form

$$\Pi = \Sigma\,X_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

darstelbar. Aber es ist auch umgekehrt jedes X_2 eine Summe von Ausdrücken Π:

$$X_2 = \Sigma\,\Pi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Dies sieht man sofort, wenn man in $X_2 = 0$ oder in

$$(p^d\,q^2)_{i_1 i_2 \dots i_{d+1} k_2}\,q_{k_3 \dots k_d} = 0$$

die Determinante $(q^d\,p^2)_{i_1 i_2 \dots i_{d+1} k_2}$ nach der letzten Zeile entwickelt, wodurch

$$\sum_{i_1 \dots k_2} \pm\,(p^d\,q)_{i_1 \dots i_{d+1}}\,q_{k_2 k_3 \dots k_d} = 0$$

entsteht.

Das Studium der höheren p-Relationen (d.h. der vom dritten und höheren Grad in den $p_{ikl\dots}$) hat dann von den Komitanten (13) auszugehen. So erhält man z.B. alle p-Relationen dritten Grades, wenn man in (13) eine oder mehr Reihen π durch das mit p und q äquivalente r ersetzt oder analog ϱ' durch r'. Dies gibt Komitanten der beiden Typen

$$(p^d\,q^m\,r^h\,\pi^{n-d-m-h})\,(q\,\varrho')^{d-m}\,(r\,\sigma')^{d-h}$$

$$(p^d\,q^m\,\pi^{n-d-m})\,(q\,\varrho')^{d-m-h}\,(q\,r')^h\,(r'\,\sigma)^{d-h}.$$

Doch ist dies bisher nur für den einfachsten Fall $d = 2$ bei beliebigem n näher ausgeführt

---

[1]) Vergl. Inv. Theorie. p. 86.

§ 3. *Syzygien bei fünf binären Linearformen.*

Nehmen wir jetzt $n=5$, $d=2$. Dann sind die zehn Grössen p_{ik} Linienkoordinaten im G_5. Hier ist die Struktur der p-Relationen bekannt und von W. H. YOUNG aufgedeckt [1]).

Transponieren wir die Matrix

$$\mathfrak{M} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{Vmatrix}, \text{ so entsteht } \mathfrak{M}' = \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{Vmatrix}$$

und hier kann jedes Paar x_i, y_i als homogene Koordinaten eines Punktes P_i in einem binären Gebiete betrachtet werden. Die p_{ik} sind dann die zehn relatieven projektieven Invarianten der fünf Punkte P_i und eine irreduzible p-Relation wird zu einer Syzygie zwischen diesen Invarianten. Die Struktur aller p-Relationen aufdecken heisst jetzt: alle irreduziblen Syzygien erster, zweiter, ... Art angeben, bis nach dem HILBERT'schen Satze [2]) die Syzygienkette abbricht.

Hiebei heisst eine Syzygie $S=0$ irreduzibel, wenn keine Darstellung $S=S^{(1)}+S^{(2)}+\dots$ möglich ist, wo jedes $S^{(i)}=0$ schon für sich eine Syzygie vorstellt. Eine Syzygie m-ter Art $S_m=0$ liegt vor, wenn

$$S_m = N_1\, S^{(1)}_{m-1} + N_2\, S^{(1)}_{m-1} + \dots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ist, wo die $S^{(i)}_{m-1}$ Syzygien $(m-1)$-ter und die N_i Polynome der Invarianten p_{ik} sind, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

a. Die N_i sind nicht identisch Null, wenn die Invarianten durch unabhängig Veränderliche ersetzt werden.

b. Drückt man die S_{m-1} in (16) durch S_{m-2} aus, sodass $S_m = \Sigma\, M_\nu\, S^{(\nu)}_{m-2}$ entsteht, dann ist jedes M_ν, als Polynom der Invarianten betrachtet, identisch Null.

c. Für eine Syzygie erster Art S_1 gilt: $S_1 \not\equiv 0\,\{p_{ik}\}$, $\equiv 0\,\{x_i, y_i\}$.

d. Drückt man in einer $S_2 = \Sigma\, N_\nu S_1^{(\nu)}$ die S_1 durch die Invarianten aus, so entsteht identisch Null.

In unserem Falle sind also die irreduziblen Syzygien erster Art S_1 gegeben durch die fünf quadratischen p-Relationen.

$$A'_i = (p\,q')^2\, q'_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Setzen wir nun, mit noch unbestimmten X_i, für die Syzygien S_2 an:

$$B = \Sigma\, X_i\, A'_i = (X\,A') = (p\,q')^2\,(q'\,X),$$

dann sind wegen $A'_i \not\equiv 0\,\{p_{ik}\}$ die X_i nicht konstant und da $B=0$ aus einer Komitante entstehen muss, haben wir $X_i = r_i\,(rU')$ zu setzen. Also wird:

$$B = (A'\,r)\,(r\,U') = (p\,q')^2\,(q'\,r)\,(r\,U').$$

---

1) Atti di Torino 34 (1899) p. 596—599. Vgl. auch Inv. Theorie, p. 176.

2) Vgl. Inv. Theorie, p. 171.

Hier ist $r_i\ (rU') \equiv\!\!/\!\!\equiv 0\{r_{ik}\}$, dagegen $B \equiv 0\{p_{ik}\}$ weil

$$(p\,q')^2\,(q'\,r)\,r_i \equiv 0\{p_{ik}\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Deshalb sind durch:

$$B = (A'\,r)\,r_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

alle irreduziblen S_2 gegeben.

Bei S_3 haben wir schliesslich den Ansatz

$$C = \Sigma\, U_i'\, B_i = (A'\,r)\,(r\,U') \equiv\!\!/\!\!\equiv 0\{B_i\}, \quad \equiv 0\{A_i'\},$$

also $r_i(rU') \equiv 0\{p_{ik}\}$, woraus nach (18) und (19) $U'_i = q'_i\,(q'p)^2 = A'_i$ folgt.

Daher ist

$$C = \Sigma\, A_i'\, B_i = (A'\,B) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

die einzige Syzygie dritter Art. Hier endigt die Syzygienkette, denn $D = M\,.\,C = \Sigma\, MA'_i\, B_i \equiv 0\{B_i\}$ hat nur die Lösung $M = 0$.

§ 4. *Syzygien bei sechs binären Linearformen.*

Bedeutend komplizierter liegen die Verhältnisse bei $n = 6$, $d = 2$. Hier können wir die $\binom{6}{2} = 15$ Grössen p_{ik} als Invarianten von sechs binären Linearformen betrachten und haben dann als irreduzible Syzygien S_1 die 15 quadratischen p-Relationen

$$A_{ik}' = (p\,q')^2\,q_{ik}' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Eine S_2 entspringt aus einer identisch verschwindenden Komitante K, die linear ist in den A'_{ik} und bei der man überdies voraussetzen kann, dass sie höchstens drei Reihen x, y, z und höchstens drei Reihen u', v', w' enthält. Sind nämlich in K z.B. sechs Reihen $x, y, \ldots, z$ vorhanden, so entwickeln wir K in eine Gordan-Capellische Reihe

$$K = K_0 + (x\,y\ldots z)\,.\,K_1 + (x\,y\ldots z)^2\,.\,K_2 + \ldots$$

und hier liefern bereits $K_0 = 0$, $K_1 = 0, \ldots$ Syzygien, sodass die aus $K = 0$ entspringenden S nicht irreduzibel sind. Sind in K fünf Reihen $x, y, \ldots, z$ vorhanden, so ermöglicht eine analoge Reihenentwicklung die Zusammenfassung $u'_1 = (xy\ldots z)_{23456}$ u.s.f. zu einer Reihe u'. Sind schliesslich vier Reihen x, y, z und t in K vorhanden, so kann man sie zu $(u'v')_{12} = (xyzt)_{3456}$ u.s.f. zusammenfassen.

Um die irreduziblen S_2 zu finden haben wir deshalb zuerst alle Komitanten K zu ermitteln, die linear in den $A_{ik}' = A_{\lambda\mu\rho\tau}$ sind und höchstens je drei Reihen x, y, z und u', v', w' enthalten.

Zur Verfügung stehen die Reihen:

$$A', p', q', \ldots, u', v', w'\,;\ A, p, q, \ldots, x, y, z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Hieraus sind Faktoren erster und zweiter Art zu bilden. Von letzteren können wir absehen, da bei Klammerfaktoren mit Komplexsymbolen (A', p', A und p) immer Umformung auf Produkte von Linearfaktoren möglich ist. Da ferners (Ap') auf $(A'p)$ reduziert werden kann und weiters (pq') wegen

$$(p\,q')\,(p\,u')\,(q'x)\,(q'y)\,(q'z) = \tfrac{1}{4}\,[(u'x)\,(A'y)\,(A'z) + \\ + (u'y)\,(A'z)\,(A'x) + (u'z)\,(A'x)\,(A'y)] \quad (23)$$

als Reduzent zu betrachten is, bleiben für den Aufbau von K die Linearfaktoren übrig:

$$(A'p),\ (A'x),\ (A\,u'),\ (p'x),\ (p\,u'),\ (u'x) \quad \ldots \quad (24)$$

Hieraus ergeben sich dann:

$$K_1 = (A'p)^2,\ K_2 = (A'p)\,(A'x)\,(p\,u'),\ K_3 = (A'x)\,(A'y), \\ K_4 = (A'p)\,(p\,u')\,(A'q)\,(q\,v') \quad (25)$$

wozu noch die Typen

$$K_5 = (p\,u')\,(p\,v') \quad , \quad K_6 = (u'x) \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

als Komitanten ohne A'_{ik} kommen.

Setzen wir:

$$J = \tfrac{1}{2}\,(p^2\,q^2\,r^2) = (p'q)^2\,(p'r)^2 = (A'r)^2, \quad \ldots \quad (27)$$

dann ist $K_1 = J$ und wir haben die Beziehung:

$$(A'r)\,(A'x)\,(r\,u') = (p\,q')^2\,(q'r)\,(r\,u')\,(q'x) = \tfrac{1}{6}\,.\,J\,.\,(u'x) \quad .\ . \quad (28)$$

Dies gibt:

$$(B'x)\,(Bu') = (A'p)\,(A'x)\,(p\,u') - \tfrac{1}{6}\,(A'p)^2.\,(u'x) \equiv 0\,\{x,\ u',\ p_{ik}\}\,. \quad (29)$$

Hier ist $B'_k\,B_i \not\equiv 0\ \{A'_{ik}\}$, aber $\equiv 0\ \{p_{ik}\}$, d.h. wenn die A'_{ik} durch die p_{ik} ausgedrückt werden. Somit sind $B'_k\,B_i = 0$ irreduzible Syzygien S_2 wovon aber wegen (Verjüngung von (29)):

$$(B'B) = (A'p)^2 - (A'p)^2 \equiv 0\,\{A'_{ik}\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

nur fünf von den sechs Gleichungen $B'_i\,B_i = 0$ zu den *irreduziblen* S_2 zu rechnen sind, *sodass wir durch* (29) 6^2—1=35 *irreduzible* S_2 *dargegestellt erhalten:*

$$B'_k\,B_i = (A'p)\,A'_k\,p_i - \tfrac{1}{6}\,(A'p)^2\,\delta_i^k = 0 \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Jetzt wollen wir noch beweisen, dass dies *alle* irreduziblen S_2 sind. K ist linear und homogen in den Komitanten der Typen (25). Wegen (29) können wir nach Aufzählung der Syzygien (31) K_2 und K_4 weglassen, da jetzt der Faktor $(A'p)$ als Reduzent zu betrachten ist. Somit ist K linear in $K_1 = (A'p)^2$ und $K_3 = A'_{yz},\ A'_{zx},\ A'_{xy}$ [Wir schreiben im Weiteren kurz

$$A'_{xy} \quad \text{für} \quad (A'x)\,(A'y),$$

$$q'_{xyz} \quad \text{für} \quad (q'x)\,(q'y)\,(q'z) \quad \text{u.s.w.}]$$

mit Koeffizienten φ und ψ_i, die Polynome in K_5 und K_6 von (26) sind:

$$K = (A'p)^2\,.\,\varphi + \sum_1^3 A'_{yz}\,.\,\psi_1 \equiv 0\,\{p_{ik}\}\,.$$

Wählen wir hier p_{ik} halbspeziell, d.h. $J = (A'p)^2 = 0$, aber nicht alle A'_{ik} gleich Null, so folgt aus

$$A'_{yz}\,.\,\psi_1 + A'_{zx}\,.\,\psi_2 + A'_{.xy}\,.\,\psi_3 \equiv 0$$

für $z_i = p_i\,(p\,\sigma')$, dass $\psi_3 \equiv 0$ wird, wo ψ_3 ein Polynom ist mit den

Argumenten $K_5 = p_{v'w'}, p_{w'u'}, p_{u'v'}$ und $K_6 = (u'x), (u'y), (u'p)\,(p\sigma')$ u.s.w. Hieraus folgt aber $\psi_3 \equiv 0\,\{p_{ik}\}$; also ist auch $\varphi \equiv \{p_{ik}\}$ und daher $K \equiv 0\,\{A'_{ik}\}$, es liegt als keine S_2 vor und durch (29) sind alle S_2 aufgezählt.

§ 5. *Die Syzygien dritter Art* S_3.

Hier müssen wir die Komitanten L ermitteln, die *linear* sind in den durch (29) gegebenen $B'_k\,B_i$. L enthält also die Reihen

$$B', A', A'_1, \ldots, p', q', \ldots, u', v', w'; B, A, A_1, \ldots, p, q, \ldots, x, y, z. \quad (32)$$

wo $A'_1, A'_2, \ldots$ äquivalent sind mit A'. Hieraus ergeben sich die Faktoren

$$\left.\begin{array}{llll} (B'\,B), & (B'\,A), & (B'\,p), & (B'\,x) \\ (A'\,B), & (A'A_1), & (A'p), & (A'x) \\ (p'\,B), & (p'\,A), & (p'\,q), & (p'\,x) \\ (u'\,B), & (u'\,A), & (u'\,p), & (u'\,x) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

(pq') ist ein Reduzent; $(p'A)$ führt auf (pA') und gibt nach (28) Reduktion auf $(A'p)^2$. $(B'B)$ ist nach (30) $\equiv 0\,\{A'_{ik}\}$, ist aber trotzdem keine S_3, da die Koeffizienten der $B'_k\,B_i$ konstant sind. Auch der Faktor $(A'A_1)$ ist ein Reduzent; es ist nämlich

$$(A'A_1)\,(A'x) = \tfrac{1}{2}\,(p^2\,q^2\,A_1\,x)$$

nnd bringt man hier alle drei weiteren Reihen A_1 in den Klammerfaktor, so entstehen Glieder mit

$$(A_1^4\,px) = 24\,(A'p)\,(A'x),$$

was Reduktion auf $(A'p)^2$ ergibt.

Aus den übrigen Faktoren von (33) erhält man die folgenden Komitanten:

$$\left.\begin{array}{ll} L_1 = (B'x)\,(Bu') & L_4 = (B'q)\,(qu')\,(Bv') \\ L_2 = (B'x)\,(Bq')\,q'_{xyz} & L_5 = (B'q)\,(qu')\,(Br')\,r'_{xyz} \\ L_3 = (B'x)\,(BA')\,(A'y) & L_6 = (B'q)\,(qu')\,(BA')\,(A'x) \\ \multicolumn{2}{c}{L_7 = (B'A)\,A_{u'v'w'}\,(Bu')} \\ \multicolumn{2}{c}{L_8 = (B'A)\,A_{u'v'w'}\,(Bq')\,q'_{xyz}} \\ \multicolumn{2}{c}{L_9 = (B'A)\,A_{u'v'w'}\,(BA')\,(A'x)} \end{array}\right\} \quad . \quad (34)$$

Dazu kommen noch die Komitanten ohne $B'_k\,B_i$, die schon bei (25) und (26) aufgezählt wurden, nämlich:

$$(A'p)^2, \quad A'_{xy}, \quad p_{u'v'}, \quad (u'x) \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

Von (34) sind L_7, L_8 und L_9 reduzibel auf L_4, L_5 und L_6, wenn wir in $(B'A)\;A_{u'v'w'}\;A^4$ durch p^2q^2 ausdrücken.

Es sei nun $L = 0$ eine S_3. L ist linear in den Komitanten L_1 bis L_6 mit Koeffizienten, die Polynome der Komitanten (35) sind. Da $L \equiv 0\,\{A'_{ik}\}$ sein muss wenn wir die $B'_k\,B_i$ nach (29) durch die A'_{ik} ausdrücken, müssen wir zuerst die L_i von (34) linear in den A'_{ik} schreiben. Wir wollen dann M'_{ik} statt derjenigen A'_{ik} schreiben, die von den $B'_k B_i$ stammen. Aus diese Weise erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &= (M'p)(M'x)(pu') - \tfrac{1}{6}(M'p).(u'x)\\
L_2 &= (M'p)(M'x)(pq')\,q'_{xyz} = \tfrac{1}{4}[(M'y)(M'x).A'_{xz} - (M'z)(M'x).A'_{xy}]\\
L_3 &= (M'p)(M'x)(pA')(A'y) - \tfrac{1}{6}(M'p)^2.A'_{xy} = \tfrac{1}{6}J\,M'_{xy} - \tfrac{1}{6}(M'p)^2.A'_{xy}\\
L_4 &= (M'p)(M'q)(pv')(qu') - \tfrac{1}{6}(M'p)^2.(qv')(qu')\\
L_5 &= (M'p)(M'q)(qu')(pr')\,r'_{xyz} - \tfrac{1}{6}(M'p)^2.(qr')(qu')\,r'_{xyz} =\\
&= \tfrac{1}{4}[(M'q)(M'x)(qu').A'_{yz} + (M'q)(M'y)(qu').A'_{zx} +\\
&\quad + (M'q)(M'z)(qu').A'_{xy}] - \tfrac{1}{24}(M'p)^2[(u'x)A'_{yz} +\\
&\qquad\qquad + (u'y)A'_{zx} + (u'z)A'_{xy}]\\
L_6 &= (M'p)(M'q)(pA')(qu')(A'x) - \tfrac{1}{6}(M'p)^2.(A'q)(qu')(A'x) =\\
&= \tfrac{1}{6}J[(M'q)(M'x)(qu') - \tfrac{1}{6}(M'p)^2.(u'x)].
\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

In diesen Formeln ist die Reduktion ausgeführt, wenn ein Faktor (pq') oder ein Faktor (pA') vorhanden war.

Nach (25) haben wir also:

$$\left.\begin{aligned}
L_1(x, u') &= K_2(x, u') - \tfrac{1}{6}K_1.(u'x)\\
L_2(x, xyz) &= \tfrac{1}{4}[K_3(x, z).A'_{xy} - K_3(x, y).A'_{xz}]\\
L_3(x, y) &= \tfrac{1}{6}J.K_3(x, y) - \tfrac{1}{6}K_1.A'_{xy}\\
L_4(u', v') &= K_4(v', u') - \tfrac{1}{6}K_1.p_{v'u'}\\
L_5(u', xyz) &= \tfrac{1}{4}\{[K_2(x, u') - \tfrac{1}{6}K_1.(u'x)]A'_{yz} +\\
&\quad + [K_2(y, u') - \tfrac{1}{6}K_1.(u'y)].A'_{zx} + [K_2(z, u') - \tfrac{1}{6}K_1.(u'z)].A'_{xy}\}\\
L_6(x, u') &= \tfrac{1}{6}J[K_2(x, u') - \tfrac{1}{6}K_1.(u'x)].
\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

Hieraus folgen:

$$L_6 - \tfrac{1}{6}J\,L_1 \equiv 0\,\{M'_{ik}\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

$$L_5 - \tfrac{1}{4}[L_1(x, u').A'_{yz} + L_1(y, u').A'_{zx} + L_1(z, u').A'_{xy}] \equiv 0\,\{M'_{ik}\}. \quad (39)$$

Wir können also jedes L_5 und L_6 durch L_1 ausdrücken und haben die S_3 aufzuzählen, die entspringen aus:

$$(C'x)(Cu') = (B'q)(qu')(BA')(A'x) - \tfrac{1}{6}J(B'x)(Bu') = 0 \quad .\ . \quad (40)$$

$$\left.\begin{aligned}
(Du')\,\triangle'_{xyz} &= (B'q)(qu')(Br')\,r'_{xyz} - \tfrac{1}{4}[(B'x)(Bu').A'_{yz} +\\
&\quad + (B'y)(Bu').A'_{zx} + (B'z)(Bu').A'_{xy}] = 0.
\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

Jedes weitere L ist jetzt linear und homogen in L_1 bis L_4. Bei L_1 haben wir entsprechend den sechs Reihen x, y, z, u', v', w', neun Komitanten $L_1(x, u')$, $L_1(y, u')$, ... Bei L_2 haben wir drei Komitanten, die nach (37) verknüpft sind durch die Beziehung:

$$L_2(x, xyz).A'_{yz} + L_2(y, xyz).A'_{zx} + L_2(z, xyz).A'_{xy} \equiv 0\{K_3\}. \quad (42)$$

Hier ergeben sich also wieder S_3:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha' x)^2 (\beta' y)^2 (\gamma' z)^2 = (B'x)(Bq')\, q'_{xyz} \,.\, A'_{yz} + \\ + (B'y)(Bq')\, q'_{xyz} \,.\, A'_{zx} + (B'z)(Bq')\, q'_{xyz} \,.\, A'_{xy} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Bei $L_3(x, y)$ haben wir nur drei Komitanten, da wegen $K_3(x, y) = M'_{xy}$ $K_3(x, x) = 0$ wird und also auch $L_3(x, x) \equiv 0\{M'_{ik}\}$ ist, was wieder Syzygien dritter Art liefert, entspringend aus:

$$(R'x)^2 = L_3(x, x) = (B'x)(BA')(A'x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Ebenso haben wir bei $L_4(u', v')$ nur drei Komitanten; denn auch hier ist wegen $K_4(u', v') = (M'p)(pu')(M'q)(qv') = - K_4(v', u')$:

$$(Ru')^2 = L_4(u', u') = (B'q)(qu')(Bu') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Machen wir jetzt den allgemeinen Ansatz

$$L = \sum_9 L_1(x, u') \,.\, \alpha_{11} + \sum_3 L_2(x, xyz) \,.\, \beta_1 + \sum_3 L_3(x, y) \,.\, \gamma_3 + \sum_3 L_4(u', v') \,.\, \delta_3, \quad (46)$$

dann muss dies $\equiv 0\{M'_{ik}\}$ sein, wenn wir die L_i nach (37) durch die K_i ausdrücken und setzen:

$$\left.\begin{aligned}K_1 = (M'p)^2, \quad K_2 = (M'p)(M'x)(pu'), \quad K_3 = M'_{xy}, \\ K_4 = (M'p)(pu')(M'q)(qv').\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Die Koeffizienten α_{ik}, β_i, γ_i und δ_i in (46) sind Polynome der Typen:

$$J = (A'p)^2, \quad A'_{xy}, \quad p_{u'v'}, \quad (u'x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Bei K_2 in (47) haben wir 9, bei K_3 und K_4 je drei Komitanten. (46) geht daher über in:

$$\left.\begin{aligned}(M'p)^2 \,.\, \Phi + \sum_9 (M'p)(M'x)(pu') \,.\, \alpha_{11} + \\ + \sum_3 M'_{xy} \,.\, \chi_3 - \sum_3 (M'p)(pu')(M'q)(qv') \,.\, \delta_3 \equiv 0\{M'_{ik}\}.\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Dabei ist nach (46):

$$\Phi = -\tfrac{1}{6} \sum_9 (u'x) \,.\, \alpha_{11} - \tfrac{1}{6} \sum_3 A'_{xy} \,.\, \gamma_3 + \tfrac{1}{6} \sum_3 p_{u'v'} \,.\, \delta_3 \quad . \quad . \quad (50)$$

(49) muss gelten für alle M'_{ik}. Setzen wir $M'_{ik} = (\sigma' \tau')_{ik}$, dann erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}2p_{\sigma'\tau'} \,.\, \Phi + \sum_9 [p_{\sigma'u'}(\tau' x) - p_{\tau'u'}(\sigma' x)] \,.\, \alpha_{11} + \sum_3 [(\sigma' x)(\tau' y) - (\sigma' y)(\tau' x)] \,.\, \chi_3 - \\ - \sum_3 [p_{\sigma'u'} \,.\, q_{\tau'v'} - p_{\tau'u'} \,.\, q_{\sigma'v'}] \,.\, \delta_3 \equiv 0\{\sigma', \tau'\}.\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Wählen wir jetzt σ' so, dass das lineare Gebiet $G_5(\sigma')$ durch die 5 Punkte $x, y, z, p_i(pu')$ und $q_i(qv')$ geht, dass also:

$$\sigma'_1 = (x\, y\, z\, p\, q)_{23456}\, (pu')(qv')$$

ist und setzen gleichzeitig:

$$\tau'_1 = (x\, y\, z\, p\, q)_{23456}\, (pu')(qw'),$$

so ist erstens bei nicht-speziellen p_{ik}: $(p\sigma')(p\tau') \equiv\!\!/\!\!\equiv 0$ und zweitens verschwinden in (51) alle Glieder bis auf das erste. Also ist $\Phi \equiv 0$.

Wählen wir dann σ' wieder so wie eben ausgeführt, hingegen τ' so, dass das $G_5(\tau')$ durch x, y, z und $p_i(pu')$ geht, so ergibt sich $\delta_3 = 0$; es verschwinden also auch alle δ_i. Wählen wir dann σ' so, dass

$$(\sigma' x) = (\sigma' y) = (\sigma' z) = 0$$

ist, so folgt $a_{ik} = 0$ und es bleibt:

$$\sum_3 K_3(x, y) \cdot \chi_3 = \sum_3 M'_{xy} \cdot \chi_3 = 0, \quad \ldots \ldots \quad (52)$$

woraus leicht $\chi_i = 0$ gefolgert wird. Statt (46) kommt also jetzt:

$$L = \sum_3 L_2(x, xyz) \cdot \beta_1 + \sum_3 L_3(x, y) \cdot \gamma_3 = 0, \quad \ldots \quad (53)$$

wobei wegen $\Phi = 0$ nach (50) die Gleichungen bestehen:

$$\sum_3 A'_{xy} \cdot \gamma_3 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

$$\left.\begin{aligned} \chi_1 &= +\tfrac{1}{4}\beta_2 A'_{xy} - \tfrac{1}{4}\beta_3 A'_{zx} + \tfrac{1}{6} J \cdot \gamma_1 = 0 \\ \chi_2 &= +\tfrac{1}{4}\beta_3 A'_{yz} - \tfrac{1}{4}\beta_1 A'_{xy} + \tfrac{1}{6} J \cdot \gamma_2 = 0 \\ \chi_3 &= +\tfrac{1}{4}\beta_1 A'_{zx} - \tfrac{1}{4}\beta_2 A'_{yz} + \tfrac{1}{6} J \cdot \gamma_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (55)$$

Sind in (55) alle $\beta_i = 0$, so folgt $\gamma_i = 0$, wir erhalten keine S_3. Ist $\beta_2 = \beta_3 = 0$, $\beta_1 \neq 0$, so folgt $\gamma_1 = 0$ und nach (55):

$$\tfrac{1}{4}\beta_1 \cdot A'_{xy} = \tfrac{1}{6} J \cdot \gamma_2 \quad , \quad \tfrac{1}{4}\beta_1 A'_{zx} = -\tfrac{1}{6} J \cdot \gamma_3$$

Aus (53) ergibt sich dann die Komitante

$$J \cdot L_2(x, xyz) - \tfrac{3}{2}\left[L_3(x, z) A'_{xy} - L_3(x, y) A'_{xz}\right] \equiv 0 \{M'_{ik}\}, \quad . \quad (56)$$

aus welcher wieder Syzygien dritter Art entstehen:

$$\left.\begin{aligned} (E'x)^2 (F'y)(F'z) = J \cdot (B'x)(Bq')\, q'_{xyz} - \tfrac{3}{2}[(B'x)(BA')(A'z) \cdot A'_{xy} - \\ - (B'x)(BA')(A'y) \cdot A'_{xz}] \cdot \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Sind in (55) schliesslich alle $\beta_i \neq 0$, so folgt $\gamma_i = 0$, da die Koeffizienten-determinante der β_i in diesen Gleichungen verschwindet. Es bleiben dann drei lineare und homogene Gleichungen für die β_i, deren Lösung auf die schon aufgezählte Beziehung (42) führt.

§ 6. *Die irreduziblen S_3.*

Nach (44) haben wir

$$(R'x)(R'y) = \tfrac{1}{2}[(B'x)(BA')(A'y) + (B'y)(BA')(A'x)];$$

ersetzen wir hier y_i durch $p_i\ (pu')$, so entsteht:

$$\begin{aligned} (R'x)(R'p)(pu') &= \tfrac{1}{2}[(B'x)(BA')(A'p)(pu') + (B'p)(pu')(BA')(A'x)] = \\ &= \tfrac{1}{2}[-\tfrac{1}{6} J \cdot (B'x)(Bu') + L_6] = \tfrac{1}{2}[L_6 - \tfrac{1}{6} J L_1], \end{aligned}$$

also nach (38) und (40):

$$(C'x)(Cu') = 2\,(R'x)(R'p)(pu') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (58)$$

und dies gilt identisch in allen $B'_k\,B_i$. Die durch $C'_k\,C_i = 0$ dargestellten Syzygien dritter Art sind also auf $R'_{ik} = 0$ reduzierbar.

Auf analoge Weise bekommen wir bei (45) aus

$$(Ru')(Rv') = \tfrac{1}{2}\,[(B'q)(qu')(Bv') + (B'q)(qv')(Bu')]$$

wenn wir $v' = p'\,p'_{xyz}$ setzen:

$$(Ru')(Rp')\,p'_{xyz} = \tfrac{1}{2}\,[(B'q)(Bu')(qp')\,p'_{xyz} + (B'q)(Bp')(qu')\,p'_{xyz}],$$

also nach (23), (34), (39) und (41):

$$(Du')\,\triangle'_{xyz} = 2\,(Ru')(Rp')\,p'_{xyz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (59)$$

d. h. auch die Syzygien $D_i\,\triangle'_{klm} = 0$ sind reduzibel.

Ersetzen wir weiters in $(C'x)\,(C'u)$ die u' durch $p'\,p'_{xyz}$, so finden wir nach (40):

$$(C'x)(Cp')\,p'_{xyz} = (B'q)(BA')(A'x)(qp')\,p'_{xyz} - \tfrac{1}{6}\,J\,.\,(B'x)(Bp')\,p'_{xyz}$$

und hier führt die Umformung von (qp') nach (57) zur Beziehung

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{6}\,(E'x)^2\,F'_{yz} = -(C'x)(Cp')\,p'_{xyz} - \tfrac{1}{4}\,(R'x)^2\,.\,A'_{yz} - \\ - \tfrac{1}{2}\,(R'x)(R'y)\,.\,A'_{zx} - \tfrac{1}{2}\,(R'x)(R'z)\,.\,A'_{xy}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

d. h. nach (58):

$$(E'x)^2\,F'_{yz} = \tfrac{3}{2}\,(R'x)^2\,.\,A'_{yz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (61)$$

Es sind also auch alle Syzygien $E'_{ik}\,F'_{lm} = 0$ reduzibel.

Ersetzen wir schliesslich in $(Du')\triangle'_{xyz}$ die u' durch $p'\,p'_{xyz}$, so wird nach (41):

$$(Dp')\,p'_{xyz}\,\triangle'_{xyz} = (B'q)(qp')\,p'_{xyz}(Br')\,r'_{xyz} - \tfrac{1}{4}\,[(B'x)(Bp')\,p'_{xyz}\,.\,A'_{yz} + \ldots],$$

also nach (42) und (43), wenn wir im ersten Gliede rechts (qp') nach (23) umformen:

$$(\alpha'x)^2(\beta'y)^2(\gamma'z)^2 = -2\,(Dp')\,p'_{xyz}\,\triangle'_{xyz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (62)$$

Nach (59) ist also:

$$(\alpha'x)^2(\beta'y)^2(\gamma'z)^2 = -4\,(Rp')\,p'_{xyz}\,(Rq')\,q'_{xyz} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (63)$$

wodurch auch die Syzygien $\alpha'_{ik}\,\beta'_{lm}\,\gamma'_{rs} = 0$ reduziert sind.

Es bleiben somit die 21 irreduziblen S_3, die aus $(R'x)^2 \equiv 0$ entstehen:

$$R'_{ik} = \tfrac{1}{2}\,[B'_i\,(BA')\,A'_k + B'_k\,(BA')\,A'_i] \equiv\!\!/\!\!\equiv 0\,\{B'_k\,B_i\},\ \equiv 0\,\{A'_{ik}\} \qquad (64)$$

und die 21 irreduziblen S_3, die sich aus $(Ru')^2 \equiv 0$ ergeben:

$$R_{ik} = \tfrac{1}{2}\,[(B'q)\,q_i\,B_k + (B'q)\,q_k\,B_i] \equiv\!\!/\!\!\equiv 0\,\{B'_k\,B_i\},\ \equiv 0\,\{A'_{ik}\} \quad . \qquad (65)$$

§ 8. *Die Syzygien vierter Art.*

Es sei $T = 0$ eine S_4. T ist linear in den R'_{ik} und R_{lm} und verschwindet identisch, wenn wir diese nach (64) und (65) durch die $B'_k\,B_i$ ausdrücken.

Die Typen von linear nicht-reduziblen Komitanten mit R_{ik} und R'_{ik} sind, ausgedrückt durch die L_i von (34):

$$\left.\begin{aligned}
R_1 &= 2(Ru')(Rv') = L_4(u',v') + L_4(v',u')\\
R_2 &= 2(Ru')(Rp')\,p'_{xyz} = L_5 - \tfrac{1}{4}[L_1(x,u')\,.\,A'_{yz} + L_1(y,u')\,.\,A'_{zx} +\\
&\qquad + L_1(z,u')\,.\,A'_{xy}]\\
R_3 &= 2(Ru')(RA')(A'x) = L_6 - \tfrac{1}{6}J\,.\,L_1(x,u')\\
R_4 &= 2(RA')(A'x)(Rq')\,q'_{xyz} = -\tfrac{1}{6}JL_2(x,xyz) - \tfrac{1}{4}[L_3(x,x)\,.\\
&\qquad .\,A'_{yz} + L_3(y,x)\,A'_{zx} + L_3(z,x)\,.\,A'_{xy}]\\
R_5 &= 2(RA')(A'x)(RB')(B'y) = -\tfrac{1}{6}J[L_3(x,y) + L_3(y,x)]\\
R_6 &= 2(Rp')\,p'_{xyz}(Rq)\,q'_{xyz} =\\
&= -\tfrac{1}{2}[L_2(x,xyz)\,.\,A'_{yz} + L_2(y,xyz)\,.\,A'_{zx} + L_2(z,xyz)\,.\,A'_{xy}]
\end{aligned}\right\}\quad(66)$$

$$\left.\begin{aligned}
R'_1 &= 2(R'x)(R'y) = L_3(x,y) + L_3(y,x)\\
R'_2 &= 2(R'x)(R'p)(pu') = L_6(x,u') - \tfrac{1}{6}J\,.\,L_1(x,u')\\
R'_3 &= 2(R'p)(pu')(R'q)(qv') = -\tfrac{1}{6}J[L_4(u',v') + L_4(v',u')]
\end{aligned}\right\}\quad(67)$$

Aus der letzten der Gleichungen (67) und der ersten von (66) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
T_1 &= (Tu')(Tv') = R'_3(u'.v') + \tfrac{1}{6}J\,.\,R_1(u',v') =\\
&= (R'p)(pu')(R'q)(qv') + \tfrac{1}{6}J(Ru')(Rv') \equiv\!\!/\!\!\equiv 0\{R_{ik},R'_{rm}\}, \equiv 0\{B'_kB_i\}.
\end{aligned}\right\}\quad(68)$$

woraus 21 S_4 entspringen. Wir wollen beweisen, dass dies alle irreduziblen Syzygien vierter Art sind.

Eine S_4 $T=0$ entsteht durch Elimination der L_i aus den Gleichungen (66) und (67). Die Elimination von L_4 gibt (68), die von L_6 gibt:

$$T_3 = (Tu')(TA')(A'x) = -\tfrac{1}{6}J\,.\,R'_2(x,u') + \tfrac{1}{6}J\,.\,R_3(x,u') \equiv 0\{B'_k\,B_i\} \quad (69)$$

Die Elimination von L_3 gibt:

$$T_5 = (TA')(A'x)(TB')(B'y) = \tfrac{1}{6}J[R_5(x,y) + \tfrac{1}{6}J\,R'_1(x,y)] \equiv 0\{B'_k\,B_i\}. \quad (70)$$

Setzen wir ferners in (68) $v' = p'\,p_{xyz}$, so entsteht:

$$\left.\begin{aligned}
&4(Tu')(Tp')\,p'_{xyz} = \tfrac{2}{3}J(Ru')(Rp')\,p'_{xyz} -\\
&-[(R'x)(R'p)(pu')\,.\,A'_{yz} + (R'y)(R'p)(pu')\,.\,A'_{zx} + (R'z)(R'p)(pu')\,.\,A'_{xy}].
\end{aligned}\right\}\quad(71)$$

Hier kann man rechter Hand nach (69) und $(67)_2$ die R' eliminieren und erhält;

$$\left.\begin{aligned}
&4J(Tu')(Tp')\,p'_{xyz} - 6\,\Sigma\,(Tu')(TA')(A'x)\,.\,A'_{yz} =\\
&\quad = \tfrac{2}{3}J\,R_2(u',xyz) - [R_3(x,u')\,.\,A'_{yz} + R_3(y,u')\,A'_{zx} +\\
&\qquad + R_3(z,u')\,.\,A'_{xy}] \equiv 0\{B'_k\,B_i\},
\end{aligned}\right\}\quad(72)$$

woraus sich für

$u' = A'(A'x)$ bzw. für $u' = q'q'_{xyz}$ ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
&4J(TA')(A'x)(Tp')\,p'_{xyz} - 6\,\Sigma\,(TA')(A'x)(TB')(B'x)\,.\,A'_{yz} =\\
&\quad = \tfrac{2}{3}J\,R_4(x,xyz) - [R_5(x,x)\,.\,A'_{yz} + R_5(x,y)\,.\,A'_{zx} +\\
&\qquad + R_5(x,z)\,.\,A'_{xy}] \equiv 0\{B'_k\,B_i\}
\end{aligned}\right\}\quad(73)$$

$$\left.\begin{aligned} &4\,J\,(Tp')\,p'_{xyz}\,(Tq')\,q'_{xyz} - 6\,\Sigma\,(TA')\,(A'x)\,(Tp')\,p'_{xyz}\,.\,A'_{yz} = \\ &\quad = \tfrac{8}{3}\,J\,R_6 - [R_4\,(x,\,xyz)\,.\,A'_{yz} + R_4\,(y,\,xyz)\,.\,A'_{zx} + \\ &\qquad\qquad + R_4\,(z,\,xyz)\,.\,A'_{xy}] \equiv 0\,\{B'_k\,B_i\}. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Alle diese identisch in den $B'_k\,B_i$ geltenden Beziehungen sind S_4 die auf T_1 reduzibel sind.

Sei nun $T = 0$ eine S_4. T ist linear in den R_i und R'_k von (66) und (67). Multiplizieren wir T mit J^2, so ist jedes R'_3 nach (68) durch R_1, jedes R'_2 nach (69) durch R_3, jedes JR'_1 nach (70) durch R_5 ausdrückbar, sodass in T keine R'_i mehr vorkommen.

Jetzt können wir auf dieselbe Weise vermöge (72), (73) und (74) R_2, R_4 und R_6 eliminieren. Dies gibt schliesslich für T den Ansatz:

$$J^2 T = \sum_1^6 R_1\,(v',\,w')\,.\,\alpha_{23} + \sum_1^9 R_3\,(u',\,x)\,.\,\beta_{11} + \sum_1^6 R_5\,(y,\,z)\,.\,\gamma_{23} \equiv 0\{B'_k\,B_i\} \quad (75)$$

Hier sind die α_{ik}, β_{ik} und γ_{ik} Polynome in den Komitanten der Typen

$$J = (A'p)^2, \quad A'_{xy}, \quad p_{u'v'}, \quad (u'x).$$

Aus (75) folgt nun, das alle α_{ik}, β_{ik} und γ_{ik} Null sein müssen, d.h. dass auch $T \equiv 0\,\{R_{ik}\}$ gelten muss, d.h. (68) gibt die einzigen S_4.

Das Verschwinden der Koeffizienten in (75) beweist man wie folgt. Wir wählen $B'_k\,B_i$ so, dass B' und B Grössenreihen sind:

$$B'_1 = (xyzpq)_{23456}\,(pu')\,(qv') \quad , \quad B_1 = (u'v'w'\sigma'\tau')_{23456}.$$

Dann haben wir:

$$(B'x) = 0, \quad (B'y) = 0, \quad (B'z) = 0, \quad (B'p)\,(pu') = 0, \quad (B'q)\,(qv') = 0$$

und

$$(Bu') = 0, \quad (Bv') = 0, \quad (Bw') = 0.$$

Bei diesen Annahmen reduziert sich (75) auf

$$(B'q)\,(qw')\,.\,[(BA')\,(A'x)\,.\,\beta_{13} + (BA')\,(A'y)\,.\,\beta_{23} + (BA')\,(A'z)\,.\,\beta_{33}] \equiv 0,$$

woraus wegen

$$(B'q)\,(qw') = (xyzpqr)\,(pu')\,(pv')\,(rw') \equiv\!\!/\!\!\equiv 0$$

$\beta_{ik} = 0$ folgt. Daher kommt statt (75):

$$T = \sum_1^6\,[(B'p)\,(pv')\,(Bw') + (B'p)\,(pw')\,(Bv')]\,.\,\alpha_{23} -$$
$$- \tfrac{1}{6}\,J\,.\,\sum_1^6\,[(B'y)\,(BA')\,(A'z) + (B'z)\,(BA')\,(A'y)] \equiv 0\,\{B'_k\,B_i\}$$

Wählt man hier B' so, dass $(B'x) = 0$. $(B'y) = 0$ und B so, dass $(Bu') = 0$, $(Bv') = 0$ und $(Bw') = 0$ ist, so folgt $\gamma_{ik} = 0$ und analog finden wir, dass auch $\alpha_{ik} = 0$ sein muss.

Wir haben somit 21 irreduzible S_4, die aus (68) entspringen:

$$T_{ik} = (R'p)\,p_i\,(R'q)\,q_k + \tfrac{1}{6}\,J\,.\,R_{ik} \equiv\!\!/\!\!\equiv 0\,\{R'_{ik},\,R_{lm}\}, \equiv 0\,\{B'_k\,B_i\}$$

§ 9. *Das Abbrechen der Syzygienkette.*

Die in den T_{ik} linearen, linear-irreduziblen Komitanten sind analog zu (66) gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned}
T_1 &= (Tu')(Tv') = R'_3(u',v') + \tfrac{1}{6} JR_1(u',v') \\
T_2 &= (Tu')(Tp')p'_{xyz} = -\tfrac{1}{4}[R'_2(x,u').A'_{yz} + \ldots] + \tfrac{1}{6} JR_2(u',xyz) \\
T_3 &= (Tu')(TA')(A'x) = -\tfrac{1}{6} JR'_2(x,u') + \tfrac{1}{6} JR_3(x,u') \\
T_4 &= (TA')(A'x)(Tp')p'_{xyz} = \tfrac{1}{24} J[R'_1(x,x).A'_{yz} + \ldots] + \tfrac{1}{6} JR_4(x,xyz) \\
T_5 &= (TA')(A'x)(TB')(B'y) = \tfrac{1}{36} J^2 . R'_1(x,y) + \tfrac{1}{6} JR_5(x,y) \\
T_6 &= (Tp')p'_{xyz}(Tq')q'_{xyz} = \tfrac{1}{16} \Sigma R'_1(x,x).A'_{yz}A'_{yz} + \tfrac{1}{6} J . R_6.
\end{aligned}\right\} \quad (76)$$

Es sei $S=0$ eine S_5. Dann ist S linear in den Komitanten (76). Wir wollen zeigen, dass man J^2. S durch T_1, T_3 und T_5 allein ausdrücken kann. Hiezu ist nachzuweisen, dass die Gleichungen (72), (73) und (74) des vorigen § nicht nur für beliebige $B'_k B_i$, sondern auch bei willkürlichen R_{jk} gelten. Dieser Nachweis kann wie folgt erbracht werden.

Formt man $(A'^2 B'^2 C'^2)(p' t)$ um, so entsteht:

$$(A'^2 B'^2 C'^2)(p't)p'_{xyz} = -6(p' A' B'^2 C'^2)p'_{xyz}(A' t) \quad . \quad . \quad (77)$$

Da aber, wie leicht nachzurechnen:

$$(A'^2 B'^2 C'^2) = \tfrac{16}{3} J^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (78)$$

$$(p' A' B'^2 C'^2)p'_{xyz}(A't) = \tfrac{4}{3} J[A'_{xt}A'_{yz} + A'_{yt}A'_{zx} + A'_{zt}A'_{zy}] \; . \quad (79)$$

ist, wird aus (77), wenn wir $t=R$ setzen und mit (Ru') multiplizieren:

$$\tfrac{2}{3} J . (Ru')(Rp')p'_{xyz} = \Sigma (Ru')(RA')(A'x).A'_{yz}, \; . \; . \; . \quad (80)$$

was Gleichung (72) mit *beliebigem* R_{ik} ist.

Wir können daher auch T_{ik} statt R_{ik} in (80) schreiben und dann in J^2S mit Hilfe der zu (72), (73) und (74) analogen Gleichungen jedes JT_2, JT_4 und J^2T_6 durch T_3 und T_5 ausdrücken. Es entsteht so:

$$\left.\begin{aligned}
J^2 S = \sum_1^6 T_{v'w'} . \alpha_{23} + \sum_1^9 (Tu')(TA')(A'x) . \beta_{11} + \\
+ \sum_1^6 (TA')(A'y)(TB')(B'z) . \gamma_{23}
\end{aligned}\right\} \quad (81)$$

und dies muss $\equiv 0\,\{R'_{ik}, R_{lm}\}$ sein. Nach den Gleichungen (76) folgt dann, dass auch

$$\sum_1^6 R_{v'w'} . \alpha_{23} + \sum_1^9 (Ru')(RA')(A'x) . \beta_{11} +$$
$$+ \sum_1^6 (RA')(A'y)(RB')(B'z) . \gamma_{23} \equiv 0\,\{R_{ik}\}$$

sein muss. Hieraus folgt aber nach dem vorigen § das Verschwinden aller α_{ik}, β_{ik} und γ_{ik}, d.h. $S \equiv 0\,\{T_{ik}\}$. Es gibt also keine S_5 mehr.

Wir stellen schliesslich noch die erhaltenen Syzygien übersichtlich zusammen, wobei wir von der Schreibweise mit hoch- und tiefstehenden Indizes Gebrauch machen, indem wir z. B. p^{iklm} statt p'_{iklm} schreiben:

15 irred. Syzygien erster Art $A^{ik} = p^{ik\lambda\mu}\, p_{\lambda\mu} = 0$

35 „ „ zweiter „ $B_i^k = A^{\lambda k}\, p_{\lambda i} - \frac{1}{6} A^{\lambda\mu}\, p_{\lambda\mu}\, \delta_i^k = 0$

42 „ „ dritter „ $\begin{cases} R^{ik} = \frac{1}{2}\,[B_\lambda^i\, A^{\lambda k} + B_\lambda^k\, A^{\lambda i}] = 0 \\ R_{ik} = \frac{1}{2}\,[B_i^\lambda\, p_{\lambda k} + B_k^\lambda\, p_{\lambda i}] = 0 \end{cases}$

21 „ „ vierter „ $T_{ik} = R^{\lambda\mu}\, p_{\lambda i}\, p_{\mu k} + \frac{1}{6} J \,.\, R_{ik} = 0$