Mathematics. — *Ueber das Verhältnis separabler Räume zu kompakten Räumen* [1]. By Dr. W. HUREWICZ. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of March 26, 1927).

Sei R ein separabler metrisierbarer topologischer Raum, ein Raum also, der laut einem Theorem von URYSOHN [2] als Teilmenge eines *kompakten* metrisierbaren Raumes betrachtet werden kann. Es entsteht die Frage, ob es unter den R enthaltenden kompakten metrisierbaren Räumen stets auch solche gibt, deren Dimension mit der Dimension von R übereinstimmt. Wir wollen zeigen, dass dies tatsächlich der Fall ist. Es gilt m. a. W.:

Theorem. *Jeder separable metrische Raum R ist homöomorph mit einer Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes, welcher dieselbe Dimension besitzt wie R.* [3]).

Den Beweis stützen wir auf die folgende Verallgemeinerung eines bekannten dimensionstheoretischen Satzes von MENGER und URYSOHN [4]:

I. Ist R ein separabler [5] Raum von der endlichen Dimension n, und $\mathfrak{S}$ ein endliches System offener Mengen $G_1, G_2, \ldots G_p$, deren Summe R ist, so gibt es ein System abgeschlossener Mengen $F_1, F_2, \ldots F_q$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Punkt von R liegt in mindestens einer und in höchstens $n+1$ Mengen F_i;

2. Jedes F_i ist einer Menge G_k enthalten. [6])

---

[1]) Eine ausführliche Darstellung wird in den Math. Am. erscheinen.

[2]) Vgl. Math. Ann. **92**, S. 303.

[3]) In diesem Theorem ist auch das Ergebnis von TUMARKIN (vgl. diese Proceedings **28**, S. 996) enthalten, wonach jeder separable metrische Raum mit einer Teilmenge eines dieselbe Dimension besitzenden *vollständigen* Raumes homöomorph ist.

[4]) Nämlich, des Satzes, dass ein kompakter n-dimensionaler Raum für jede positive Zahl ε in endlich viele abgeschlossene Mengen mit Durchmessern $< \varepsilon$ zerlegt werden kann, die zu je $n+2$ leere Durchschnitte haben. Vgl. MENGER, Monatshefte f. Math. u. Phys. **34**, S. 153. URYSOHN, Fund. Math. **8**, S. 292.

[5]) Es werden hier, wie auch überall im Folgenden, ausschliesslich *metrische* bzw. metrisierbare Räume betrachtet.

[6]) Falls R *kompakt* ist, gibt es bei vorgegebenen Mengen G_i, wie leicht ersichtlich, eine Zahl $\varepsilon > 0$, derart, dass jede Menge mit Durchmesser $< \varepsilon$ in einer der Mengen G_i enthalten ist. Für den Fall kompakter Räume ist daher Satz *I* mit dem sub [4]) angeführten Satz von MENGER und URYSOHN äquivalent.

Zum Beweise ist es bequem Satz I. in diese Gestalt zu bringen:

I'. Ist die in einem separablen Raum gelegenene n-dimensionale Menge M in der Summe der endlich vielen offenen Mengen $G_1, G_2, \dots G_p$ enthalten, so kann M mit endlich vielen offenen Mengen $U_1, U_2, \dots U_q$ überdeckt werden, deren jede in einem G_i enthalten ist, und die zu je $n+2$ leere Durchschnitte haben.

Aus *I'*. folgt sofort *I.*: Man bilde nämlich zu den Mengen U_i von Satz *I'*. ein System von q in M abgeschlossenen Mengen F_i, so dass $F_i < U_i$ $(i = 1, 2, \dots q)$ und $M = \sum_{i=1}^{q} F_i$,[7] so befriedigen die Mengen F_i die Forderungen des Satzes *I* in Bezug auf das System der in M offenen Mengen $G_i M$. (Ebenso einfach kann man zeigen, dass umgekehrt aus *I*. *I'*. folgt).

Wir beweisen die Behauptung *I'*. zuerst für $n = 0$. Zu jedem Punkt von M gibt es dann eine Umgebung, deren Begrenzung zu M fremd ist, und die in einer der p Mengen G_i enthalten ist. M wird (mit Rücksicht auf die Separabilität des Raumes) von abzählbar vielen derartigen Umgebungen $V_1, V_2, V_3, \dots$ überdeckt. Setzen wir $W_1 = V_1$ und $W_m = V_m - (\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \dots + \overline{V}_{m-1})$ $(m = 2, 3 \dots)$ und bezeichnen wir mit U_i $(i=1, 2, \dots p)$ die Summe aller derjenigen W_m, die in G_i, aber in keinem G_k für $k < i$ enthalten sind, so genügen die p offenen Mengen U_i, wie man leicht sieht, den Forderungen des Satzes *I'*, der somit für den Fall $n = 0$ bewiesen ist.

Nehmen wir jetzt an, Satz *I'* sei richtig, wenn man in ihm die Zahl n durch eine kleinere ersetzt, und zerspalten wir die gegebene n-dimensionale Menge M in einen $(n-1)$-dimensionalen Teil ${}^{n-1}M$ und einen 0-dimensionalen Teil ${}^{0}M$.[8] Nach Annahme lässt sich ${}^{n-1}M$ (bzw. ${}^{0}M$) mit endlich vielen offenen Mengen $U_1, U_2, \dots U_q$ (bzw. $U'_1, U'_2, \dots U'_r$) überdecken, die Teilmengen der G_i sind und zu je $n+1$ (bzw. zu je zwei) leere Durchschnitte haben. Die $q+r$ Mengen U_i und U'_i bilden zusammen ein System von den im Satz *I'* verlangten Eigenschaften.

Sei jetzt R separabler Raum von der endlichen Dimension n[9]) den wir auf eine Teilmenge eines n-dimensionalen kompakten Raumes topologisch abbilden wollen. Wir setzen voraus (auf Grund des erwähnten URYSOHN'schen Theorems), R sei bereits als Teilmenge eines kompakten Raumes (von einer unbekannten Dimension) gegeben. Dann ist bekanntlich R für jedes $\varepsilon > 0$ Summe von endlich vielen in R offenen Mengen mit Durchmessern $< \varepsilon$[10]).

Wir betrachten eine beliebige gegen 0 konvergierende Folge positiver Zahlen ε_m und bestimmen für jede natürliche Zahl m ein System abgeschlossener Mengen

$$\mathfrak{S}_m = \{F_1^m, F_2^m, \dots F_{km}^m\}$$

gemäss den folgenden Bedingungen:

1. Es gilt $R = \sum_{i=1}^{km} F_i^m$, $(m = 1, 2 \dots)$ und jeder Punkt von R gehört (bei festem m) höchstens $n+1$ Mengen F_i^m an.

---

[7]) In jedem metrischen Raum gilt der Satz: Ist M eine beliebige Menge und $G_1, G_2, \dots G_p$ offene Mengen, so dass $M < \sum_{i=1}^{p} G_i$, so gibt es p in M abgeschlossene Mengen F_i $(i=1, 2, \dots p)$ mit den Eigenschaften: $F_i < G_i$; $M = \sum_{i=1}^{p} F_i$.

[8]) Vgl. HUREWICZ, Math. Ann. **96**, S. 761, sowie TUMARKIN, a.a.O.

[9]) Ist R ∞-dimensional, so hat *jeder* R enthaltende topologische Raum dieselbe Dimension wie R.

[10]) Vgl. HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig, 1914), S. 313—315.

2. Die Durchmesser aller F_i^m sind $< \varepsilon_m$.

3. Ist (für $m \geqq 2$) $\mathfrak{S}'_{m-1}$ das Vereinigungssystem der Systeme $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \ldots \mathfrak{S}_{m-1}$ (d. h. das System aller Mengen, die einem der Systeme $\mathfrak{S}_i$ $(i < m)$ angehören), und sind $A_1, A_2, \ldots A_r$ irgend welche Mengen aus $\mathfrak{S}'_{m-1}$, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen, so hat keine Menge des Systems $\mathfrak{S}_m$ mit sämtlichen A_i Punkte gemein.

Dass man die Systeme $\mathfrak{S}_m$ in Einklang mit diesen Bedingungen wirklich bestimmen kann, ist eine Folgerung aus Satz I. Sei nämlich m eine natürliche Zahl; denken wir uns die Systeme $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots \mathfrak{S}_{m-1}$ und folglich aus das System $\mathfrak{S}'_{m-1}$ bereits definiert, und bezeichnen wir für jeden Punkt p von R mit $A_{m-1}(p)$ die Summe aller Mengen des Systems $\mathfrak{S}'_{m-1}$, die p n i c h t enthalten. (Die Mengen $A_{m-1}(p)$ bilden natürlich ein *endliches* System). Sodann zerlegen wir R in endlich viele offene Mengen $U_1^m, U_2^m, \ldots U_{km}^m$ mit Durchmessern $< \varepsilon_m$ und bestimmen auf Grund von I. die Mengen F_i^m in der Weise, dass die Bedingung 1 besteht und dass jedes F_i^m in einer der endlich vielen offenen Mengen $U_k^m (R - A_{m-1}(p))$ (die in ihrer Gesamtheit R überdecken), enthalten sei. Dann sind, wie man sofort bestätigt, auch die Bedingungen 2 und 3 erfüllt.

Setzen wir der Einfachheit halber $F_i^m = 0$ für $i > k_m$, und bezeichnen wir für jedes System α aus endlich vielen verschiedenen natürlichen Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_r$ mit F_α^i den Durchschnitt $F_{m_1}^i . F_{m_2}^i \ldots F_{m_r}^i$. Eine unendliche Folge: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots.$
von Systemen natürlicher Zahlen nennen wir eine *Kette* [11]), wenn folgendes gilt:

(a) Für jedes m ist

$$\prod_{i=1}^{m} F_{\alpha_i}^i \neq 0\,;$$

(b) Die Folge $\{\alpha_i\}$ verliert die Eigenschaft (a), sobald irgend eines ihrer Glieder α_i durch ein System natürlicher Zahlen α_i' ersetzt wird, in dem α_i als echtes Teilsystem enthalten ist. Es gilt m.a.W. für jede nat. Zahl p, die kein Element ist von α_i:

$$(x) \qquad F_p^i . \prod_{j=1}^{m} F_{\alpha_j}^j = 0$$

für mindestens einen Index m.

Aus 3. ergibt sich leicht:

(') S i n d $\{\alpha_i\}$ u n d $\{\beta_i\}$ z w e i *verschiedene* K e t t e n, (d. h. i s t f ü r m i n d e s t e n s e i n e n I n d e x i α_i v o n β_i v e r s c h i e d e n), s o s i n d d i e S y s t e m e α_i u n d β_i f ü r *alle hinreichend grosse* i e l e m e n t e n f r e m d.

In der Tat sei p eine natürliche Zahl, die in β_i, aber nicht in α_i vorkommt. Dann ist die Gleichung (x) für einen Index m erfüllt. Ist nun m' grösser als die beiden Zahlen i und m, so gibt es nach 3) keine Menge $F_p^{m'}$, die mit den beiden Mengen

$$(^0) \qquad F_p^i, \ \prod_{j=1}^{m} F_{\alpha_j}^j$$

[11]) Vgl. ALEXANDROFF, Math. Ann. **96**, S. 489. Die folgenden Ueberlegungen lehnen sich eng an den Gedankengang dieser ALEXANDROFF'schen Abhandlung an.

Punkte gemein hat. Ist aber q ein Element von $\beta_{m'}$ (bzw. von $\alpha_{m'}$), so hat $F_q^{m'}$, per Definitionseigenschaft (a) der Ketten zufolge, mit der ersten (bzw. mit der zweiten) der Mengen (^{0}) Punkte gemein. Folglich haben die Systeme $\alpha_{m'}$ und $\beta_{m'}$ keine gemeinsame Elemente.

Sei jetzt $\{\alpha_i\}$ eine beliebige Kette, m eine natürliche Zahl. Die Gesamtheit aller Ketten $\{\beta_i\}$, für die $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ Untersysteme sind von α_1, bzw. $\alpha_2, \ldots,$ bzw. α_m, nennen wir die *m-te Umgebung* der Kette $\{\alpha_i\}$. Durch diese Festsetzung wird, wie sich auf Grund von (') bei Berufung auf einen Satz von ALEXANDROFF ergibt [12]), ein *kompakter metrisierbarer topologischer R^* von der Dimension n* definiert, dessen Elementevorrat aus sämtlichen Ketten besteht.

Wir wollen jetzt eine topologische Abbildung zwischen R und einem Teil des soeben definierten Raumes R^* herstellen. Zu diesem Zwecke betrachten wir einen Punkt x von R und bezeichnen für jedes m mit $\alpha_m(x)$ das System aller natürlicher Zahlen n_i für die der Punkt x in F_{n_i} enthalten ist. Die Folge $\{\alpha_i(x)\}$ ist, wie man leicht einsieht, eine Kette.

Die Bedingung (a) ist nämlich in trivialer Weise erfüllt. Die Bedingung (b) folgt daraus, dass die Mengen $F^m_{\alpha_m}$ (wo $\alpha_m = \alpha_m(x)$ gesetzt ist) mit wachsendem m nach 1) unendlich klein werden und sich daher auf den Punkt x zusammenziehen. Ist also die Zahl p kein Element von α_i, d.h. liegt x in der offenen Menge $R - F^i_p$, so gilt bei hinreichend grossem $m: F^m_{\alpha_m} < R - F^i_p$, somit $F^m_{\alpha_m} \cdot F^i_p = 0$.

Jedem Punkt von R ist also eine Kette zugeordnet. D.h. es liegt eine Abbildung des Raumes R auf einen Teil des höchstens n-dimensionalen kompakten Raumes R^* vor, und man zeigt leicht, dass diese Abbildung umkehrbar eindeutig und beiderseits stetig ist [13]). Damit ist der Beweis unseres Theorems erbracht.

Aus dem Bewiesenen ergeben sich vor allem wichtige Folgerungen hinsichtlich der MENGER'schen grundlegenden Untersuchungen über das

---

[12]) Vgl. ALEXANDROFF, a.a.O. Um an die ALEXANDROFF'sche Terminologie anzuknüpfen, müssen wir ein System α natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft $F^m_\alpha \neq 0$ als einen *Simplex des m-ten Komplexes* bezeichnen (Für jedes m besteht der m-te Komplex aus einer nur endlichen Anzahl von Simplizes) und unter einer *Gruppe* eine endliche Folge

$$[\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m]$$

verstehen, wo α_i ein Simplex des i-ten Komplexes ist ($i = 1, 2, \ldots m$), und $\prod_{i=1}^{m} F^i_{\alpha_i} \neq 0$ gilt. (Eine Kette ist demnach in Uebereinstimmung mit der im Text gegebenen Definition eine unendliche Folge $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ deren jeder Abschnitt eine Gruppe ist, die aber diese Eigenschaft verliert, wenn man für irgend ein m α_m durch einen umfassenderen Simplex des m-ten Komplexes ersetzt). Es liegt dann ein *höchstens n-dimensionales approximierendes Spektrum* vor (Vgl. ALEXANDROFF, a.a.O., S. 493): *höchstens n-dimensional*, weil jeder Simplex infolge von 1) aus höchstens $n+1$ Elementen besteht; *approximierend* — mit Rücksicht auf ('). Der durch unser Spektrum "approximierte" Raum ist der im Text definierte Raum R^*. Mit Hilfe eines URYSOHN'schen Satzes (Vgl. unten Fussnote [18])) beweist ALEXANDROFF, dass R^* kompakt, metrisierbar und höchstens n-dimensional ist.

[13]) Daraus folgt natürlich sofort, dass die Dimension von R^* *genau* n ist.

Verhältnis von allgemeinen Räumen zu den Euklidischen Zahlenräumen. Aus dem MENGER'schen Ergebniss, dass jeder ein-dimensionale kompakte Raum mit einer Teilmenge des drei-dimensionalen Euklidischen Raumes homöomorph ist [14]), folgt bei Heranziehung des hier bewiesenen Theorems, dass (wie dies auch von MENGER vermutet wurde [15])) allgemeiner jeder ein-dimensionale *separable* Raum (insbesondere also jede eindimensionale Teilmenge eines Euklidischen Raumes von beliebiger Dimension) mit einer Teilmenge des Euklidischen R_3 homöomorph ist. Ebenso lässt sich der MENGER'sche Fundamentalsatz [16]), wonach jeder endlichdimensionale kompakte Raum auf eine Teilmenge eines Euklidischen Raumes topologisch abbildbar ist, ohne weiteres auf separable Räume übertragen [17]).

Eine andere Folgerung ergibt sich aus der folgenden Bemerkung: Die Voraussetzung, dass R n-dimensional ist, ist in den Beweis unseres Theorems nur durch die Vermittlung der Tatsache eingegangen, dass R die Behauptung des Satzes I erfüllte. Jeder Raum, welcher dieser letzten Bedingung genügt, ist also mit einer Teilmenge eines höchstens n-dimensionalen kompakten Raumes homöomorph und a fortiori selbst höchstens n-dimensional. Es gilt somit neben Satz I auch die Umkehrung:

II. Ist n eine ganze nicht negative Zahl, — R ein separabler Raum, und gibt es zu jedem endlichen System $\mathfrak{S}$ offener Mengen, die R überdecken, eine Zerlegung von R in endlich viele abgeschlossene Mengen, deren jede in einer Menge aus $\mathfrak{S}$ enthalten ist und die zu je $n+2$ leere Durchschnitte haben, so ist R höchstens n-dimensional.

Dieser Satz ist für kompakte Räume mit einen Ergebniss von URYSOHN [18]) äquivalent und ist ebenso wie das letztere zahlreicher Anwendungen fähig.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit gestattet eine wesentliche Verallgemeinerung: Es stellt sich heraus, dass man *abzählbar viele* separable Mengen, die in ihrer Summe abgeschlossen sind, *simultan* in kompakte Räume von entsprechenden Dimensionen einbetten kann. Es gilt genau gesprochen:

Seien $M_1, M_2, M_3 \ldots$ abzählbar viele in einem separablen Raum R gelegene abgeschlossene Mengen. Als topologischer Raum betrachtet, lässt sich dann R zu einem kompakten metrisierbaren Raum R^* erweitern,

---

14) Vgl. MENGER, diese Proceedings **29**, S. 476.

15) Vgl. MENGER, a.a.O., S. 482.

16) Vgl. MENGER, a.a.O., S. 482 sowie Jahresbericht d. D. Math.-Ver. **35**, S. 149.

17) Von MENGER wurde dies vermutet. Vgl. Jahresbericht d. D. Math.-Ver. **35**, S. 149, Fussnote [4]).

18) Mit dem Satze nämlich, dass ein kompakter Raum, der für jedes $\varepsilon > 0$ in endlich viele abgeschlossene Mengen mit Durchmessern $< \varepsilon$ zerlegbar ist, die zu je $n+2$ fremd sind, eine Dimension $\leq n$ besitzt. Vgl. URYSOHN, Fund. Math. **8**, S. 294. Dieser Satz ist implicite in den Beweis des Haupttheorems dieser Arbeit eingegangen, da er die Grundlage für den ALEXANDROFF'schen Satz bildet, auf den wir uns berufen haben (Vgl. Fussnote [12])).

so dass, wenn $\overline{M}_n$ die abgeschlossene Hülle von M_n in R^* bedeutet, die Dimension von $\overline{M}_n$ für jedes n mit der Dimension von M_n übereinstimmt.

Der Gedankengang des Beweises bleibt in wesentlichen derselbe wie früher. Nur wird an Stelle von Satz I der folgende Satz benützt:

In einem separablen Raum R sei eine Folge von abgeschlossenen Mengen $M_1, M_2, M_3 \ldots$ gegeben. Zu jeder Zerlegung von R in endlich viele offene Mengen $G_1, G_2 \ldots G_n$ gibt es dann eine Zerlegung von R in endlich viele abgeschlossene Mengen $F_1, F_2, \ldots F_q$, die Teilmengen der G_k sind, wobei jeder Punkt von M_i $(i = 1, 2, \ldots)$ in höchstens $n_i + 1$ Mengen F_k liegt, wenn n_i die Dimension von M_i bedeutet.

Es entsteht die Frage, ob ein separabler Raum R stets, in der Weise zu einem kompakten (metrisierbaren) Raume R^* erweitert werden kann, dass *jede* in R abgeschlossene Menge M ihre Dimension nach der Abschliessung in R^* bewahrt?

Betrachtet man anstatt der Gesamtdimension des Raumes seine Dimension *in den einzelnen Punkten*, so gilt das folgende Theorem:

Jeder separable metrisierbare topologische Raum R ist Teilmenge eines kompakten metrisierbaren Raumes R^*, so dass in jedem Punkte x von R gilt:

$$dim_x R = dim_x R^* \text{ [19]},$$

(unter $dim_x R$, bzw. $dim_x R^*$ die Dimension von R bzw. von R^* im Punkte x verstanden.

Beim Beweise geht man folgendermassen vor: Zuerst zeigt man leicht mit Hilfe des verallgemeinerten BOREL'schen Theorems: Es existiert ein System $\mathfrak{S}$ von abzählbar vielen in R offenen Mengen, so dass sich auf jeden Punkt von R eine Folge von Mengen aus zusammenzieht, deren Begrenzungen (in R) $(n(x)-1)$-dimensional sind, wo $n(x)$ die Dimension von R in x bedeutet. Den Raum R^* wird jetzt so bestimmt, dass jede beliebige Menge U aus $\mathfrak{S}$ Durchschnitt ist von R mit einer *in* R^* offenen Menge U^*, deren Begrenzung in R^* mindestens die gleiche Dimension hat, wie die Begrenzung von U in R.

Auch an diesen Satz knüpft sich eine Fragestellung an: Bleibt die Behauptung richtig, wenn man verlangt, dass R^* *in allen* seinen Punkten (nicht nur in den Punkten von R) dieselbe Dimension besitze wie R?

---

[19]) Man kann noch zeigen, dass es einen R enthaltenden kompakten Raum gibt, der die soeben formulierte Bedingung erfüllt und überdies dieselbe *Gesammtdimension* besitzt wie R.