Mathematics. — *Ueber eine Abstandsformel in der Theorie der orthogonalen Differentialinvarianten der Kurven des R_n.* By Prof. Dr. R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 28, 1928.)

Wir leiten hier eine besonders einfache Formel her für die Abstände der oskulierenden linearen Räume einer regulären Kurve des R_n vom Koordinatenanfangspunkte.

Sind $y_i = y_i\,(t)$ $(1 = 1, 2, \ldots, n)$ die Cartesischen Koordinaten des Punktes y einer regulären Kurve C des R_n, dann ist in y der oskulierende R_d festgelegt durch die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} y_1\, y_2 \ldots\ldots y_n & 1 \\ y'_1\, y'_2 \ldots\ldots y'_n & 0 \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot & \cdot \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot & \cdot \\ y_1^{(d)} y_2^{(d)} \ldots\ldots y_n^{(d)} & 0 \end{matrix} \right\| \qquad y_i^{(h)} = \frac{d^h y_i}{dt^h} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Machen wir von homogenen rechtwinkligen Koordinaten Gebrauch mit $y_{n+1} = 1$, so sind die homogenen Punktkoordinaten dieses oskulierenden R_d gegeben durch die $(d+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (1):

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_{d+1}} = (y y' y'' \ldots y^{(d)})_{i_1 \ldots i_{d+1}} = (012 \ldots d)_{i_1 \ldots i_{d+1}} \quad . \quad . \quad (2)$$

wobei die Indizes i_ν jetzt die Zahlen $1, 2, \ldots, n+1$ durchlaufen.

Den Abstand p_d des oskulierenden $R_d\,(a)$ von $O\,(x_i = 0)$ finden wir wie folgt. Wir projizieren O auf $R_d\,(a)$ indem wir durch O einen zu $R_d\,(a)$ total-senkrechten $R_{n-d}\,(p)$ legen und den Schnittpunkt P dieses $R_{n-d}\,(p)$ mit dem $R_d\,(a)$ ermitteln.

Die homogenen Raumkoordinaten $p'_{k_1 \ldots k_d}$ des projizierenden R_{n-d} sind die d-reihigen Determinanten der Matrix, die aus (1) erhalten wird, wenn wir die erste Zeile weglassen. Bezeichnen wir dann die Reihe der $n+1$ Grössen $y_1^{(h)} : y_2^{(h)} : \ldots : y_n^{(h)} : 0$ mit $y^{(h)}\,|$ oder kürzer mit $h\,|$, so haben wir:

$$p'_{k_1 \ldots k_d} = (1\,|\,2\,| \ldots d\,|)_{k_1 \ldots k_d} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wobei die Indizes k_ν wieder die Zahlen $1, 2, \ldots, n+1$ durchlaufen.

Die Gleichung des Punktes P in homogenen Koordinaten wird dann:

$$(u'P) = (u' p'^d\, a'^{n-d}) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Hieraus finden wir:

$$(P|P) = (P|\,p'^d\,\alpha'^{n-d}) = (n-d)\,!\,(\alpha|P)\,(\alpha p')^d =$$

$$= d\,!\,(n-d)\,!\,(\alpha\,|\,q'^d\,\beta'^{n-d})\,(\alpha\,|\,1)\,(\alpha\,|\,2)\ldots(\alpha\,|\,d)$$

Hier formen wir so um, dass alle $d+1$ Reihen $\alpha\,|$ in den Klammerfaktor hineinkommen; hierbei führen $(\beta'\,1), \ldots, (\beta'\,d)$ nach (2) auf Null, sodass bleibt:

$$(P\,|\,P) = \frac{1}{d+1}\,d\,!\,(n-d)\,!\,(\alpha\,|^{\,d+1}\,\beta'^{n-d})\,(q'1)\,(q'2)\ldots(q'd)$$

$$(P\,|\,P) = \frac{1}{d+1}\,d\,!\,[(n-d)\,!]^2\,(\beta\,|\,\alpha)^{d+1}\,(q'1)\,(q'2)\ldots(q'd) \quad . \quad . \quad (5)$$

Setzen wir jetzt

$$M_{rs} = y_1^{(r)}\,y_1^{(s)} + y_2^{(r)}\,y_2^{(s)} + \ldots + y_n^{(r)}\,y_n^{(s)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dann haben wir nach (2):

$$(\beta\,|\,\alpha)^{d+1} = (d+1)\,!\,\sum_1^n \beta_{i_1\ldots i_{d+1}}\,\alpha_{i_1\ldots i_{d+1}} =$$

$$= (d+1)\,!\,\sum_1^n (012\ldots d)_{i_1\ldots i_{d+1}}\,(012\ldots d)_{i_1\ldots i_{d+1}}$$

$$(\beta\,|\,\alpha)^{d+1} = (d+1)\,!\,\triangle_{012\ldots d} = (d+1)\,!\begin{vmatrix} M_{00} & M_{01} & \ldots & M_{0d} \\ M_{10} & M_{11} & \ldots & M_{1d} \\ . & . & . & . \\ M_{d0} & M_{d1} & \ldots & M_{dd} \end{vmatrix} . \quad (7)$$

Und analog nach (3):

$$(q'\,1)\,(q'\,2)\ldots(q'\,d) = (q'\,|\,1)\,(q'\,|\,2)\ldots(q'\,|\,d) =$$

$$= \sum_1^n q'_{k_1\ldots k_d}\,(1\,|\,2\,|\ldots d\,|\,)_{k_1\ldots k_d} = \sum_1^n (1\,|\,2\,|\ldots d\,|\,)_{k_1\ldots k_d}\,(1\,|\,2\,|\ldots d\,|\,)_{k_1\ldots k_d} =$$

$$= \triangle_{12\ldots d}.$$

Also wird:

$$(P\,|\,P) = d\,!^2\,[(n-d)\,!]^2\,\triangle_{012\ldots d}\,\triangle_{12\ldots d}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Bedeutet ferner l' die Grössenreihe $0:0:\ldots:0:1$, so ist das Quadrat p_d^2 des Abstandes $p_d = OP$ gegeben durch

$$p_d^2 = \frac{(P\,|\,P)}{(l'P)^2} = \frac{P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_n^2}{P_{n+1}^2}.$$

Nach (4) haben wir:

$$\left.\begin{aligned}(l'P) &= (l'p'^{d}\, a'^{n-d}) = (n-d)!\,(al')\,(ap')^{d} = \\ &\qquad = d!\,(n-d)!\sum_{1}^{n+1} a_{i_1 \ldots i_{d+1}}\,(\,l'1|\,2\,|\ldots d|)_{i_1 \ldots i_{d+1}} = \\ &= \sum_{1}^{n+1}(l'1|\,2\,|\ldots d|)_{i_1 \ldots i_{d+1}}\,(012\ldots d)_{i_1 \ldots i_{d+1}} = d!\,(n-d)!\,\triangle_{12\ldots d}\end{aligned}\right\} . \quad (9)$$

Somit kommt schliesslich:

$$p_d^2 = \frac{\triangle_{012\ldots d}}{\triangle_{12\ldots d}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \; . \quad (10)$$

Es ist also z. B. der Abstand des Punktes y, der Tangente, der Schmiegungsebene, u.s.f. gegeben durch:

$$p_0^2 = M_{00} \quad , \quad p_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{vmatrix}}{M_{11}} \quad , \quad p_2^2 = \frac{\begin{vmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix}} \; . \quad (11)$$