Mathematics. — *Ueber Verallgemeinerungen des Satzes von* DESARGUES. By Prof. Dr. R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 28, 1928.)

Sind a, b, c und α, β, γ zwei Dreiecke der projektiven Ebene mit den Seiten a', b', c' bzw. α', β', γ' und ist $f = (a\,b\,c) \neq 0$, $\varphi = (\alpha\,\beta\,\gamma) \neq 0$, dann besagt der Satz von DESARGUES: Gehen die drei Geraden $a\alpha$, $b\beta$ und $c\gamma$ durch einen Punkt, dann liegen die drei Punkte $a'\alpha'$, $b'\beta'$, $c'\gamma'$ auf einer Geraden und umgekehrt.

Dieser Satz ist durch J. V. PONCELET, M. CHASLES, O. HERMES, F. SCHUR und andere auf verschiedene Arten auf zwei Tetraeder des dreidimensionalen Raumes verallgemeinert worden [1]). Die Frage nach einem analogen Satze bei drei Tetraedern wurde von W. FR. MEYER [2]) behandelt. Wir beweisen hier, dass es bei drei beliebigen Tetraedern eine derartige Verallgemeinerung nicht gibt.

Ferners geben wir zwei einfache Verallgemeinerungen für den projektiven Raum von vier und von fünf Dimensionen und schliessen mit einigen Bemerkungen über die möglichen Verallgemeinerungen bei n Dimensionen.

§ 1.

Der Satz von DESARGUES kann analytisch am einfachsten nach E. HUNYADI [3]) wie folgt bewiesen worden. Dass $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ durch einen Punkt gehen, wird ausgedrückt durch

$$K = ((a\alpha)\ (b\beta)\ (c\gamma)) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dies ist wegen $((a\alpha)\,u'v') = (au')(\alpha v') - (av')(\alpha u')$ gleichbedeutend mit:

$$K = \begin{vmatrix} (ab\beta) & (\alpha b\beta) \\ (ac\gamma) & (\alpha c\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (c'\beta) & -(\gamma' b) \\ -(b'\beta) & (\beta' c) \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die zu K duale Invariante ist $K' = ((a'\alpha')\ (b'\beta')\ (c'\gamma'))$.

---

1) F. SCHUR, Math. Ann. **19** (1882), p. 429—432. Ausführliche Litteratur hierüber findet man bei A. BARUCH, Rend. di Palermo **44** (1920), p. 261—300. Hiezu noch: E. STUDY, Marburger Ber. (1900), p. 78; G. KOHN, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. **22** (1913), p. 343 und Wiener Ber. **127** (1918) p. 2073 und 2088. Vgl. auch den Art. III C 8 von K. ZINDLER der Math. Encykl., Nr. 2. (1922).

2) W. FR. MEYER, Archiv der Math. u. Phys. **1** (1901), p. 372.

3) E. HUNYADI, Crelle **139** (1879), p. 79.

Setzen wir hier $a'_l = (bc)_{ik}$ und $\alpha'_l = (\beta\gamma)_{ik}$, so entsteht:

$$K = (abc) \, . \, (\alpha\beta\gamma) \, . \begin{vmatrix} (\beta' c) & -(b'\gamma) \\ -(\gamma' b) & (c'\beta) \end{vmatrix} = f \, . \, \varphi \, . \, K. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Also verschwinden K und K' gleichzeitig.

Dieser Beweis setzt auch den Inhalt des Satzes in deutliches Licht: Eine Invariante der drei Verbindingslinien der Eckpunkte der beiden Dreiecke verschwindet gleichzeitig mit der dualen, aus den Schnittpunkten der Seiten aufgebauten Invariante. Diese Fassung führt unmittelbar auf die Frage nach analogen Sätzen bei mehr als zwei Dimensionen.

Im dreidimensionalen Raume geben zunächst zwei Tetraeder *abcd* und $\alpha\beta\gamma\delta$ mit $f = (abcd) \neq 0$ und $\varphi = (\alpha\beta\gamma\delta) \neq 0$ die vier Verbindungslinien $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$. Hier haben bereits 2 Geraden, z. B. $a\alpha$ und $b\beta$ eine relatieve Invariante:

$$A_{12} = \Sigma \, (a\alpha)_{12} \, (b\beta)_{34} = (a\alpha b\beta). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Sind a', b', c', d' und α', β', γ', δ' die Seiten der Tetraeder, ist also

$$a'_1 = +(bcd)_{234}, \; a'_2 = -(bcd)_{134}, \; a'_3 = +(bcd)_{124}, \; a'_4 = -(bcd)_{123}$$
$$b'_1 = -(acd)_{234}, \; b'_2 = +(acd)_{134}, \; b'_3 = -(acd)_{124}, \; b'_4 = +(acd)_{123}$$

etc., so ist mit A_{12} dual: $A'_{12} = (a'\alpha' b'\beta')$. Nun ist aber:

$$(a'b')_{ik} = f \, . \, (cd)_{rs} \text{ und } (\alpha'\beta')_{rs} = \varphi \, . \, (\gamma\delta)_{ik};$$

also wird:

$$A'_{12} = f \, . \, \varphi \, . \, A_{34} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

was unmittelbar geometrisch zu deuten ist.

Aus (5) leitet man weiters ab, dass auch für die Invariante

$$K = \begin{vmatrix} O & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & O & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & O & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & O \end{vmatrix} \quad (A_{ik} = A_{ki}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

eine analoge Gleichung gilt: $K' = f^4 \, . \, \varphi^4 \, . \, K$, woraus diejenigen verallgemeinerungen des DESARGUES'schen Satzes gewonnen werden, die sich um die hyperboloidische Lage der zwei Tetraeder gruppieren.

Bei d r e i Tetraedern *ABCD*, *abcd* und $\alpha\beta\gamma\delta$ hat schon W. FR. MEYER darauf hingewiesen, dass die naheliegende Verallgemeinerung: Gehen die vier Ebenen $Aa\alpha, \ldots$ durch einen Punkt, dann liegen die vier Punkte $A'a'\alpha', \ldots$ in einer Ebene, nicht allgemein richtig ist.

B e w e i s. Dass $Aa\alpha$, $Bb\beta, \ldots$ durch einen Punkt gehen, wird ausgedrückt durch das Verschwinden der Invariante

$$K = (\,(Aa\alpha)\,(Bb\beta)\,(Cc\gamma)\,(Dd\delta)\,) = \begin{vmatrix} (ABb\beta) & (abB\beta) & (\alpha\beta bB) \\ (ACc\gamma) & (acC\gamma) & (\alpha\gamma cC) \\ (ADd\delta) & (adD\delta) & (\alpha\delta dD) \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad (7)$$

Dual hiezu wird die Bedingung, dass die vier Punkte $A'a'\alpha', \ldots$ in einer Ebene liegen, gegeben durch das Verschwinden der Invariante

$$K' = ((A'a'\alpha')(B'b'\beta')(C'c'\gamma')(D'd'\delta')) = \begin{vmatrix} (A'B'b'\beta') & (a'b'B'\beta') & (\alpha'\beta'b'B') \\ (A'C'c'\gamma') & (a'c'C'\gamma') & (\alpha'\gamma'c'C') \\ (A'D'd'\delta') & (a'd'D'\delta') & (\alpha'\delta'd'D') \end{vmatrix}.$$

Drücken wir hier A', a' und α' durch BCD, bcd und $\beta\gamma\delta$ aus, so entsteht, wenn wir die Abkürzung

$$(u'v')_{(xy)} = (u'x)(v'y) - (u'y)(v'x)$$

verwenden:

$$K' = F \, . \, f \, . \, \varphi \, . \begin{vmatrix} (b'\beta')_{(CD)} & (\beta'B')_{(cd)} & (B'b')_{(\gamma\delta)} \\ (c'\gamma')_{(DB)} & (\gamma'C')_{(db)} & (C'c')_{(\delta\beta)} \\ (d'\delta')_{(BC)} & (\delta'D')_{(bc)} & (D'd')_{(\beta\gamma)} \end{vmatrix}.$$

Wäre nun obiger Satz richtig, so müssten K' und K gleichzeitig verschwinden. Dass dies nicht der Fall ist, lässt sich durch folgendes Beispiel zeigen. Wir wählen $ABCD$ als Koordinatensimplex. Dann wird $F = 1$ und nach (7) haben wir:

$$K = \begin{vmatrix} b_3\beta_4 - b_4\beta_3 & -(ab\beta)_{134} & (\alpha\beta b)_{134} \\ c_4\gamma_2 - c_2\gamma_4 & (ac\gamma)_{124} & -(\alpha\gamma c)_{124} \\ d_2\delta_3 - d_3\delta_2 & -(ad\delta)_{123} & (\alpha\delta d)_{123} \end{vmatrix}.$$

Dagegen kommt statt K':

$$K' = f \, . \, \varphi \, . \begin{vmatrix} -(acd)_{124}\beta'_4 - (acd)_{123}\beta'_3 & (\beta'c)d_2 - (\beta'd)c_2 & (a\delta cd)\gamma_2 - (a\gamma cd)\delta_2 \\ -(abd)_{123}\gamma'_2 + (abd)_{134}\gamma'_4 & (\gamma'd)b_3 - (\gamma'b)d_3 & (ab\beta d)\delta_3 - (ab\delta d)\beta_3 \\ +(abc)_{134}\delta'_3 + (abc)_{124}\delta'_2 & (\delta'b)c_4 - (\delta'c)b_4 & (abc\gamma)\beta_4 - (abc\beta)\gamma_4 \end{vmatrix}.$$

Nun spezialisieren wir wie folgt:

$$f = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & 0 & b_4 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & 0 & d_4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \varphi = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Mit diesen Werten wird $K = 0$, dagegen

$$K' = -f \, . \, \varphi \, (abc\beta) \, . \, \gamma_4 \, . \, \alpha_2\delta_4 \, (\gamma c)_{13} \, . \, a_3 \, (bd)_{12} \, . \, \delta_4\alpha_3\beta_1 \neq 0.$$

§ 3.

Im projektiven R_4 gehen wir aus von zwei Simplexen $abcde$ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$. Die 5 Geraden $a\alpha, \ldots, e\varepsilon$ haben unter anderem die folgende Invariante:

$$K = \Sigma \, (c\gamma)_{ik} \, (a\alpha b\beta)_i \, (d\delta e\varepsilon)_k = (a\alpha b\beta c)(d\delta e\varepsilon\gamma) - (a\alpha b\beta\gamma)(d\delta e\varepsilon c) \quad . \quad (8)$$

Ihr Verschwinden sagt aus, dass die Schnittebene der beiden R_3 $a\alpha b\beta$ und $d\delta e\varepsilon$ von der Geraden $c\gamma$ getroffen wird.

Dual zu K haben wir:

$$K' = (a'\alpha'b'\beta'c')(d'\delta'e'\varepsilon'\gamma') - (a'\alpha'b'\beta'\gamma')(d'\delta'e'\varepsilon'c');$$

Hier ist wegen

$$(a'b'c')_{ikl} = f^2 \,.\, (de)_{rs}, \quad (\alpha'\beta')_{ik} = \varphi \,.\, (\gamma\delta\varepsilon)_{rst}$$

der erste Klammerfaktor von K' auch gleich $f^2 . \varphi . (d\delta\, e\varepsilon\, \gamma)$ und analog die übrigen Faktoren. Dies gibt

$$K' = f^3 \,.\, \varphi^3 \,.\, K, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

was wieder leicht geometrisch zu deuten ist.

Nimmt man in (8) $a\alpha$ statt $d\delta$, geht also aus von der Invariante

$$J = \Sigma\, (c\gamma)_{ik}\, (a\alpha b\beta)_i\, (a\alpha e\varepsilon)_k = (a\alpha b\gamma c)\,(a\alpha e\varepsilon\gamma) - (a\alpha b\beta\gamma)\,(a\alpha e\varepsilon c), \; . \quad (10)$$

dann erhält man für die zu J duale Invariante J':

$$J' = \Sigma\, (c'\gamma')_{ik}\, (a'\alpha' b'\beta')_i\, (a'\alpha' e'\varepsilon')_k =$$
$$= f^3 \,.\, \varphi^3 \,.\, \Sigma\, (c\gamma)_{ik} (b\beta d\delta)_i\, (d\delta e\varepsilon)_k = f^3 \,.\, \varphi^3 \,.\, J_1, \text{ wo}$$
$$J_1 = (b\beta d\delta c)\,(d\delta e\varepsilon\gamma) - (b\beta d\delta\gamma)\,(d\delta e\varepsilon c) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

eine von J verschiedene Invariante der fünf Geraden $a\alpha, \ldots, e\varepsilon$ ist. Es führt also J' auf $J_1 \neq J$. Wir hatten übrigens schon bei (5) § 2 ein derartiges Ergebnis.

Ein weiteres Beispiel für dieses Verhalten von J haben wir bei $n=6$, also im projektiven Raum R_5 von 5 Dimensionen. Hier haben bereits drei Verbindungslinien $a\alpha$, $b\beta$ und $c\gamma$ eine Invariante

$$A_{123} = (a\alpha b\beta c\gamma). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Für $A'_{123} = (a'\alpha' b'\beta' c'\gamma')$ finden wir:

$$A'_{123} = f^2 \,.\, \varphi^2 \,.\, (e\varepsilon f\eta g\zeta) = f^2 \,.\, \varphi^2 \,.\, A_{456}. \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Hier ist $A'_{123} = 0$ die Bedingung dafür, dass die drei Geraden $a\alpha$, $b\beta$ und $c\gamma$ einem linearen R_4 angehören.

§ 4.

Im allgemeinen Falle gehen wir bei $n-1$ Dimensionen aus von zwei Simplexen $abc \ldots lm$ und $\alpha\beta\gamma \ldots \lambda\mu$ und haben n Verbindungslinien $a\alpha, \ldots, m\mu$.

Sei $K(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ eine ganze rationale projektive Invariante dieser Geraden, vom Grade h_1 in den $(a\alpha)_{ik}$, vom Grade h_2 in den $(b\beta)_{ik}$, . K ist dann eine Summe von Termen, jeder Term ist ein Produkt von $\frac{2s}{n}$ Klammerfaktoren $(a\alpha b\beta c\gamma d\delta \ldots \varepsilon\eta \ldots)$, wobei $s = h_1 + h_2 + \ldots + h_n$.

Gehen wir zur dualen Invariante K' über, so ergibt das Zurückgehen zu den Reihen $a, b, c, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Gleichung

$$K'(h_1, h_2, \ldots, h_n) = (f \,.\, \varphi)^{\frac{s}{n}(n-2)} \,.\, K_1 \left(\frac{2s}{n} - h_1, \frac{2s}{n} - h_2, \ldots, \frac{2s}{n} - h_n \right) . \quad (14)$$

wo die positiven Zahlen $\frac{2s}{n} - h_1 \ldots$ die Graden von K_1 in $(a\alpha)_{ik}, \ldots$ angeben.

(14) *stellt die umfassendste Verallgemeinerung des* DESARGUEUS'*schen Satzes auf zwei Simplexe des* R_{n-1} *dar.*

Es ergibt sich noch die Frage: wann ist K_1 mit K identisch?

Eine notwendige Bedingung ist leicht anzugeben. Aus (14) entnimmt man nämlich für diesen Fall:

$$\frac{2s}{n} - h_i = h_i, \text{ also } h_1 = h_2 = \ldots = h_n = \frac{s}{n}.$$

Es muss also K von gleichem Grade in allen Geraden $a\alpha$, $b\beta, \ldots$ sein. Ob dies für $K_1 = K$ auch hinreicht, dürfte wohl erst dann zu entscheiden sein, wenn man über die Struktur von K Näheres weis.