Mathematics. — *Invarianten der Integranden vielfacher Integrale in der Variationsrechnung.* I. By Prof. L. KOSCHMIEDER in Brünn. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of October 29, 1927).

Durch das folgende hoffe ich erstens den Gegenstand zweier meiner vorhergehenden Mitteilungen [1] [2]) weiter zu fördern: die Ermittelung von Invarianten der Funktion F (14) im Zusammenhange mit der *ersten* Variation des Integrals I (15), dessen Integrand die Grösse F ist als Funktion von $n+1$ Abhängigen und deren ersten Ableitungen nach n Unabhängigen. Ich werde hier auf die damals erzielten Ergebnise zurückgreifen und die dort verwendeten Bezeichnungen benutzen, soweit das zweckmässig ist.

Zweitens aber und hauptsächlich will ich unter dem gleichen Gesichtspunkte die *zweite* Variation in die Betrachtung einbeziehen. Dabei folge ich dem Wege, den A. L. UNDERHILL [3]) bei *einfachen* Integralen eingeschlagen hat; es scheint mir sehr bemerkenswert, dass die von UNDERHILL für $n=1$ durchgeführte, schon in diesem Sonderfalle ziemlich verwickelte Rechnung sich, wie ich zeigen werde, auf *n-fache* Integrale (15) verallgemeinern lässt.

Ich habe a.a.O. [1]) [2]) invariantentheoretische Begriffe nur in dem Umfange herangezogen, wie es zur Aufstellung zweier besonderer Invarianten, der „mittleren extremalen Flächenkrümmung" und des „Rauminhaltes", erforderlich war. Im Hinblick auf die folgenden sowohl wie auch auf künftige Untersuchungen ist es angebracht, mit einer allgemeinen invariantentheoretischen Erörterung zu beginnen (I). Diese kann man mit Rücksicht auf die für $n=1$ von UNDERHILL [4]) gegebenen einschlägigen Entwickelungen kurz halten, auch wenn man sie soweit wie möglich sogleich auf eine Funktion G (3) bezieht, die von umfassenderer Art ist als F. Den Anfang (§ 1) bilden Bemerkungen über Punkttransformation. Es ist vorteilhaft, ausser der ersten Reihe von Veränderlichen y eine zweite (§ 2) in Betracht zu ziehen, deren Mitglieder η sich kogredient zu den Werten y transformieren. Wie man unter geeigneten Umständen von einer die Grössen η enthaltenden Invariante zu einer andern übergehen kann, in der nur Grössen y auftreten, zeigt § 3 im Sonderfalle (14). In § 4 kommt die Wirkung des Differentiations- und Variations-

---

[1]) Math. Zeitschr. **24** (1926), S. 181—190.

[2]) Math. Annalen **94** (1925), S. 252—261.

[3]) Invariants of the Function $F(x, y, x', y')$ in the Calculus of Variations, Trans. Amer. Math. Soc. **9** (1908), S. 316—338.

[4]) A. a. O. [3]), S. 317—326, 331.

verfahrens auf die Invarianz zur Sprache. Entsprechende Fragen bei der Parametertransformation sind Gegenstand des § 5.

Diesem allgemeinen Teile folgt die eingangs angekündigte Anwendung (II, III) auf den besonderen Fall (14), (15). Bei der Betrachtung der ersten Variation (II, 1) ergibt sich (§ 6) die a.a.O. [1], [2]) nicht erörterte Invarianz der Transversalität und der WEIERSTRASSschen E-Funktion; diejenige des durch sein Verschwinden die Extremalen des Integrals I kennzeichnenden Ausdrucks W wird einfacher hergeleitet als a.a.O. [1]), § 3. Um aus W die absolute Invariante S zu erhalten, zieht man (§ 7) die Grössen $\Phi_{\alpha\beta}$ heran; es wird die Übereinstimmung ihrer Determinante Φ mit der von TH. DE DONDER [5]) eingeführten Funktion F_1 dargetan und so die Beziehung zu einer von ihm a.a.O. [5]) angegebenen Invariante hergestellt. In § 8 weise ich auf das Integral I als Anlass zu einer Massbestimmung im $n+1$-stufigen Raume hin.

Der nächste Abschnitt (II, 2), der die zweite Variation betrifft, ist das Kernstück dieser Abhandlung. Ich habe die auf diesen Gegenstand bezüglichen, im bisherigen Schrifttum vorliegenden Ergebnisse in einer kürzlich erschienenen Arbeit [6]) aufgezählt; dort leite ich ferner die Formel für $\delta^2 I$ in Bezug auf eine Extremale her. *Ohne* diese Einschränkung scheint diese Rechnung bei *beliebiger* [7]) Variation noch nicht durchgeführt zu sein. Diese Lücke möchte ich hier ausfüllen: Mit Benutzung der a.a.O. [6]) beschafften Rechenhilfsmittel bringe ich in § 9 die Grösse $\delta^2 F$ auf solche Gestalt, wie sie im Falle *einfacher* Integrale durch die Transformation von UNDERHILL [8]) zustandekommt. Diese ist die Verallgemeinerung der bekannten Transformation von WEIERSTRASS [9]), insofern als sie sich nicht wie diese nur auf eine Extremale, sondern auf eine beliebige Kurve bezieht.

Nunmehr werden (§ 10—§ 13) die mit der zweiten Variation zusammenhängenden Invarianten Ψ, U, Ψ_0, U_0 gewonnen, die für $n = 1$ bez. in die von UNDERHILL [10]) gefundenen Invarianten Φ, K, Φ_0, K_0 übergehen. In § 10 spalten wir von dem Ausdrucke $\delta^2 F$ die Invariante Ψ ab. Sie enthält die Variationen δx_i; eine von diesen Veränderlichen der zweiten Reihe freie Invariante U (§ 11) ergibt sich aus Ψ nach dem Verfahren des § 3. Zur Verallgemeinerung der Invariante K von UNDERHILL gelangt auch DE DONDER, aber auf anderem als dem eben geschilderten Wege [11]).

---

5) C. R. Acad. sc. Paris **155** (1912), S. 1005.

6) Revista Matemática Hispano-Americana (2) **1** (1926), S. 129—146.

7) Unter Zugrundelegung einer *Normal*variation ist die zweite Variation eines Doppelintegrals von A. KNESER berechnet: Lehrbuch der Variationsrechnung (2. Aufl. 1925), S. 339—348.

8) A. a. O. [3]), § 6, § 7.

9) Vgl. z. B. O. BOLZA, Vorlesungen über Variationsrechnung (1909), S. 224—227.

10) A. a. O. [3]), §§ 8, 9, 12, 13.

11) A. a. O. [5]). — Zur Herleitung des Zusammenhanges der dort angegebenen Determinante von Linearformen mit unserem Ausdrucke (110) scheint längere Rechnung erforderlich.

Ψ, U sind *Punkt*invarianten. Die von mir weiterhin ermittelten, bei Punkt- *und* Parametertransformation invarianten Funktionen Ψ_0, U_0 dürften hier zum ersten Male angegeben sein. Man erhält die erstere (§ 12), indem man die Invariante S variiert und von δS invariante Bestandteile absprengt. Aus Ψ_0 geht schliesslich (§ 13) die nur Veränderliche der ersten Reihe enthaltende Invariante U_0 wiederum dadurch hervor, dass man die in Ψ_0 auftretenden Variationen δx_i nach § 3, § 5 durch kogrediente Grössen ersetzt. Mit Hilfe von U bzw. U_0 lässt sich bei einer Extremale die zweite Variation $\delta^2 I$ in einfacher Weise ausdrücken.

Im letzten Teile (III) befasse ich mich mit einer etwas anders gerichteten Fragestellung, die auf M. FUJIWARA zurückgeht. Dieser hat im Falle $n = 2$, indem er die BELTRAMIschen Differentiatoren in Bezug auf eine während der Rechnung auftretende invariante quadratische Differentialform benutzte, für eine festberandete Extremale eine Zerlegung der Grösse $\delta^2 I$ in drei parameterinvariante Integrale gefunden [12]; ich habe a. a. O. [6]) dieses Ergebnis, gleichfalls unter der Annahme $W = 0$, auf n-fache Integrale übertragen. Mit Hilfe mehrerer dort bewiesener Formeln leite ich hier allgemeiner bei einer *beliebigen* Überfläche eine entsprechende Zerspaltung der zweiten Variation in parameterinvariante Summanden her.

I. *Invariantentheoretisches.*

Die Operationen, die uns zuerst beschäftigen, beziehen sich auf die Bestimmungszahlen x_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ eines Punktes in einem Bereiche X_N eines N-stufigen Raumes. Es handelt sich um die Gruppe der analytischen *Punkttransformationen* [13])

$$x_i = \chi_i\,(x'_1, x'_2, \ldots, x'_N), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die in dem Bereiche X'_N die von Null verschiedenen Funktionaldeterminanten $\partial(x_1, \ldots, x_N)/\partial(x'_1, \ldots, x'_N) = D$ besitzen und zwischen X'_N und seinem Bilde X_N eine umkehrbar eindeutige Beziehung vermitteln.

In X_N betrachten wir einen Raum X_n von n Stufen $(n < N)$

$$x_i = \varphi_i\,(u_1, u_2, \ldots, u_n); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

die rechten Seiten in (2) seien analytische Funktionen der in einem Bereiche O_n unabhängig veränderlichen Parameter u_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$. Es sei eine Funktion

$$G = G\,(x_i, x_{i,\alpha_1}, \ldots, x_{i,\alpha_1 \ldots \alpha_q}) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

gegeben, die die Abhängigen (2) und deren Ableitungen [14]) nach den

[12]) Tokyô Sûgaku-Buturigakkwai Kizi (2) 6 (1911/12), S. 123—127.

[13]) Vgl. für $N = 2$ BOLZA [9]), S. 343. — Man hat es in (1) und durchweg im folgenden mit reellen Funktionen reeller Veränderlicher zu tun.

[14]) Wir bezeichnen diese wie a. a. O. [15]) durch griechische Zeiger. Wo es ohne Einbusse an Deutlichkeit möglich ist, sparen wir lateinische und griechische Zeiger und schreiben eine $\mathfrak{r}$-te Ableitung kurz $\mathfrak{d}^{\mathfrak{r}} x$.

Unabhängigen u_α bis zur q-ten Ordnung [15]) enthält und in ihren Argumenten analytisch ist. Die *Grundfunktion* G dient als Integrand des über O_n zu erstreckenden Grundintegrals

$$J = \int^{(n)} G du, \quad du = du_1\, du_2 \ldots du_n \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Die zweite Gruppe, die uns hier angeht, besteht aus den analytischen *Parametertransformationen* [16])

$$u_\alpha = \mathfrak{u}_\alpha (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n), \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

die in dem Bereiche $\bar{O}_n$ mit positiven Funktionaldeterminanten $\mathfrak{D}$ [1]), (12) versehen sind und diesen ein-eindeutig auf O_n abbilden. Die Funktion G verwandle sich unter der Wirkung von (5) nach der Formel

$$G(x, \bar{\mathfrak{d}}x, \ldots, \bar{\mathfrak{d}}^q x) = \mathfrak{D} G(x, \mathfrak{d}x, \ldots, \mathfrak{d}^q x) \;^{17)}; \quad \ldots \quad (6)$$

dann ist das Integral (4) parameterinvariant.

§ 1. *Erweiterte Punkttransformationen.*

Die Gruppe der Transformationen (1) *erweitern* wir wie folgt. Wir sehen die aus (2) zu berechnenden Grössen $\mathfrak{d}^{\mathfrak{r}} x$ $(\mathfrak{r} = 1, 2, \ldots, r)$ als neue zu den x hinzutretende Veränderliche an, die sich unter dem Einflusse von (1) nach bestimmten Gesetzen verwandeln:

$$\left.\begin{aligned} x_{i,\alpha} &= \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} x'_{k,\alpha}, \\ x_{i,\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_k \partial x'_l} x'_{k,\alpha} x'_{l,\beta} + \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} x'_{k,\alpha\beta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;^{18)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Das Ergebnis der Einsetzung der Werte (1), (7) in G (3) werde mit G' bezeichnet,

$$G(x, \mathfrak{d}x, \ldots, \mathfrak{d}^q x) = G'(x', \mathfrak{d}x', \ldots, \mathfrak{d}^q x') \quad \ldots \quad (8)$$

Den Grössen (1), (7) fügen wir die Funktion G und ihre Teilableitungen nach irgend welchen ihrer Argumente (3) bis zur p-ten Ordnung $G^{(\mathfrak{p})}$ $(\mathfrak{p} = 1, 2, \ldots, p)$ als weitere Veränderliche hinzu, deren Verwandlungseigenschaften bei dem Wechsel (1) sich durch geeignete Differentiation von (8) ergeben, z.B.

$$\frac{\partial G}{\partial x_{i,\alpha_1 \ldots \alpha_q}} = \frac{\partial G'}{\partial x'_{k,\alpha_1 \ldots \alpha_q}} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}, \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

[15]) Besondere von solchen Integranden herrührende Invarianten habe ich unlängst angegeben, Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 74—86.

[16]) Vgl. für $n = 2$ BOLZA [9]), S. 664.

[17]) $\bar{\mathfrak{d}}x, \ldots$ bedeuten wie a. a. O. [15]), S. 77, die Ableitungen der x_i nach den $\bar{u}_\alpha$.

[18]) Lateinische Zeiger laufen von 1 bis N, griechische von 1 bis n. Ueber die Fort-

Die Erweiterungen (7), (8), (9) der Transformationen (1) zusammen mit diesen selbst bilden dann diejenige unendliche kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{Y}$, auf welche es hier ankommt.

Es liege nun irgend eine Funktion $g\,(x, \mathfrak{d}x, \ldots, \mathfrak{d}^r x, G, G^{(1)}, \ldots, G^{(p)})$ vor. Mit g' bezeichnen wir kurz den Ausdruck, der aus den Veränderlichen $x', \ldots, G'^{(p)}$ nach demselben Gesetze gebildet wird wie g aus $x, \ldots, G^{(p)}$,

$$g' = g\,(x', \mathfrak{d}x', \ldots, \mathfrak{d}^r x', G', G'^{(1)}, \ldots, G'^{(p)}) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Besitzt im besonderen die Funktion g bei allen Transformationen von $\mathfrak{Y}$ die Eigenschaft

$$g' = D^a g, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

so heisst g eine *Invariante* dieser Gruppe vom Gewichte a.

Die Funktion G selbst ist hiernach gemäss (8) eine absolute Invariante, d.h. eine solche vom Gewichte 0.

§ 2. *Einbeziehung kogredienter Veränderlicher.*

Ausser der ersten Reihe Y der von (3) herrührenden Veränderlichen des § 1 tritt in der Variationsrechnung des Integrals (4) eine zweite Reihe η von Veränderlichen $\xi_{i;\alpha_1\ldots\alpha_\mathfrak{r}}$ auf, die sich unter der Wirkung von (1) kogredient zu den die Reihe y bildenden Grössen $x_{i,\alpha_1\ldots\alpha_\mathfrak{r}}$ transformieren,

$$\left.\begin{aligned} \xi_{i;\alpha} &= \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\,\xi'_{k;\alpha}, \\ \xi_{i;\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_k\,\partial x'_l}\,\xi'_{k;\alpha}\,\xi'_{l;\beta} + \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\,\xi'_{k;\alpha\beta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Indem man die Operationen von $\mathfrak{Y}$ um die Transformationen (12) vermehrt, erweitert man $\mathfrak{Y}$ zu einer neuen Gruppe H. Eine Funktion h der Veränderlichen der beiden Reihen Y und η nennen wir eine Invariante vom Gewichte a gegenüber H, wenn bei allen Transformationen von H

$$h\,(x'_i, x'_{i,\alpha}, \ldots, \xi'_{i;\alpha}, \xi'_{i;\alpha\beta}, \ldots) = D^a\, h\,(x_i, x_{i,\alpha}, \ldots, \xi_{i;\alpha}, \xi_{i;\alpha\beta}, \ldots)$$

oder nach Art der Bezeichnung (11) kurz

$$h' = D^a\, h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ist.

§ 3. *Übergang von einer Invariante h zu einer Invariante g.*

Bei dem im zweiten Teile angewandten Verfahren zur Ermittelung von Invarianten stellen sich mehrfach zunächst solche von der Art h ein.

Da uns hauptsächlich an Invarianten g liegt, so sind Übergangsmöglichkeiten von Invarianten h zu solchen der Art g erwünscht. UNDERHILL [19]) hat darüber im Falle $n=1$, $N=2$, $q=1$ einen Satz aufgestellt; wir beschränken uns hier darauf, diesen auf die Funktion

$$F=G\,(x_i,\, x_{i,\alpha}),\quad i=1,2,\ldots,n+1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

als Integranden des statt (4) später ausschliesslich betrachteten Integrals

$$I=\int^{(n)} F\,du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

zu verallgemeinern. Es handelt sich also bei (14) in den Bezeichnungen (3) um den Sonderfall der Grundfunktion, in dem n beliebig, $N=n+1$ und $q=1$ ist.

Wir benutzen die von J. RADON [20]) und G. VIVANTI [21]) aus der Parameterinvarianz des Integrals I [vgl. (6)] gezogene Folgerung, dass die Grössen $x_{i,\alpha}$ in den Integranden F nur eingehen verbunden zu den Determinanten θ_k [22]), die man bis auf den Faktor $(-1)^{k+1}$ aus der Funktionalmatrix $\| x_{i,\alpha} \|$ dadurch erhält, dass man in ihr die k-te Zeile (der $x_{k,\alpha}$) streicht. Genauer ist

$$F=\Gamma(x_i,\, \theta_i) \quad {}^{23)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

eine Funktion der x_i und θ_i, die in den θ_i positiv-homogen von erster Stufe ist; daher besteht die Beziehung

$$\theta_i\,\frac{\partial F}{\partial \theta_i}=F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Was die Veränderlichen (12) betrifft, so fügen wir den Grössen $\xi_{i;\alpha}$ solche ξ_i hinzu, die sich bei der Verwandlung (1) kogredient zu den Differentialen dx_i umsetzen, also nach den Formeln

$$\xi_i=\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\,\xi'_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Nach diesen Vorbemerkungen beweisen wir folgenden

Satz 1. Aus einer Invariante h vom Gewichte a, die von den Veränderlichen der zweiten Reihe nur die ξ_i enthält und in diesen homogen von b-ter Stufe ist, erhält man eine Invariante g vom Gewichte $a+b$, wenn man die ξ_i bezüglich durch die Grössen $\partial F/\partial\theta_i$ ersetzt. [24])

---

lassung des Summenzeichens treffen wir bei beiden Arten von Zeigern die in der Tensorrechnung übliche Vereinbarung; Ausnahmen von dieser machen wir kenntlich.

[19]) A. a. O. [3]), S. 323.

[20]) Monatsh. f. Math. u. Phys. **22** (1911), S. 55.

[21]) Rend. Circ. mat. Palermo **33** (1912), S. 271.

[22]) Wir schreiben θ_k, nicht wie a. a. O. [1]) (S. 181) Δ_k, weil wir den Buchstaben Δ unten (III) in anderem Sinne verwenden.

[23]) Es hat kein Bedenken, das Zeichen F auch nach Einführung der Argumente θ_i beizubehalten; man verstehe $\partial F/\partial\theta_i = \partial\Gamma/\partial\theta_i$ u.s.w. Uebrigens bedienen wir uns, wo es angebracht scheint, der $x_{i,\alpha}$; $\partial F/\partial x_{i,\alpha}=\partial G/\partial x_{i,\alpha}$ u.s.w.

[24]) DE DONDERS Schritt von den linearen Formen DM, $\delta x_i . \partial F/\partial x_{i,\alpha}$ zu deren Deter-

Aus der Invarianz (8) der Grundfunktion

$$F' = F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und der Transformation[1]), (19') der Determinanten θ_i

$$D\theta'_k = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\,\theta_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

ergibt sich nämlich, dass sich die Ausdrücke $\partial F/\partial\theta_i$ so ändern:

$$D\,\frac{\partial F}{\partial\theta_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\,\frac{\partial F'}{\partial\theta'_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Diese Formeln nehmen die Gestalt (18) an, wenn man $D.\partial F/\partial\theta_i = \xi_i$, $\partial F'/\partial\theta'_k = \xi'_k$ setzt. Nun ist nach Voraussetzung

$$h\,(x'_i, x'_{i,\alpha}, \ldots, \xi'_i) = D^a\,h\,(x_i, x_{i,\alpha}, \ldots, \xi_i),$$

sofern nur (18) gilt; daher ist im besonderen

$$h\left(x'_i, x'_{i,\alpha}, \ldots, \frac{\partial F'}{\partial\theta'_i}\right) = D^a\,h\left(x_i, x_{i,\alpha}, \ldots, D\,\frac{\partial F}{\partial\theta_i}\right).$$

Hieraus folgt die Behauptung mit Rücksicht auf die Homogeneität des Ausdrucks h in den ξ_i.

§ 4. *Differentiation und Variation als invarianzerhaltende Verfahren.*

Indem wir zu der allgemeineren Grundfunktion G (3) zurückkehren, unterwerfen wir eine Invariante der *Differentiation*, erstens nach den Parametern u_α. Treten ausser diesen weitere Veränderliche $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, \mathfrak{k}$) auf, die unter sich und von den u_α unabhängig sind, so handelt es sich zweitens um das die Ableitung nach den $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ betreffende *δ-Verfahren* in seiner Wirkung auf Funktionen $\psi\,(u_\alpha, \varepsilon_{\mathfrak{a}})$. In der Variationsrechnung[25]) setzt man mit Bezug auf eine Funktion $\tilde{\chi}\,(u_\alpha, \varepsilon_{\mathfrak{a}})$, die für $\varepsilon = 0$ [26]) in $\chi\,(u_\alpha)$ übergeht, die $\mathfrak{s}$-te Variation von χ ($\mathfrak{s} = 1, 2, \ldots$)

$$\delta^{\mathfrak{s}}\chi = \delta\,(\delta^{\mathfrak{s}-1}\chi) = \left(\sum_{\mathfrak{a}}^{1,\mathfrak{k}} d\varepsilon_{\mathfrak{a}}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathfrak{a}}}\right)^{(\mathfrak{s})}\tilde{\chi}\,\Bigg|^{\varepsilon=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Hier erklären wir, ähnlich wie UNDERHILL[27]) im Falle[3]), das $\mathfrak{s}$-malige δ-Verfahren durch die Formel

$$\delta^{\mathfrak{s}}\psi = \delta\,(\delta^{\mathfrak{s}-1}\psi) = \left(\sum_{\mathfrak{a}}^{1,\mathfrak{k}} d\varepsilon_{\mathfrak{a}}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathfrak{a}}}\right)^{(\mathfrak{s})}\psi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

minante a. a. O. [11]) [dort Erklärung des Zeichens D, wegen M vgl. u. (78)] kann als Ersetzung der δx_i in der ersten von ihnen durch kogrediente Grössen angesehen werden; denn die Determinanten der Matrix $\| \partial F/\partial x_{k,\alpha} \|$, die aus dieser durch Streichung der i-ten Zeile hervorgehen, haben die Werte $F^{n-1}(-1)^{i-1}\,.\,\partial F/\partial\theta_i$. Letzteres beweist im Falle $n=2$ G. VIVANTI [Elementi del calcolo delle variazioni (1923), S. 171]; bei beliebigem n leitet man es leicht durch eine ähnliche Rechnung her, wie wir sie später zum Beweise von (88) durchführen.

25) Vgl. KNESER [7]), S. 5/6, 130.

26) Wir schreiben kurz $\varepsilon = 0$ statt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{\mathfrak{k}} = 0$; ebenso später $u = 0$ statt $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$.

27) A. a. O. [3]), S. 326.

ausführlicher geschrieben

$$\delta^{\mathfrak{s}}\psi = \sum_{\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{s}}}^{1,\mathfrak{k}} d\varepsilon_{\mathfrak{a}_1}\ldots d\varepsilon_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{s}}} \frac{\partial^{\mathfrak{s}}\psi}{\partial\varepsilon_{\mathfrak{a}_1}\ldots\partial\varepsilon_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{s}}}} \quad \ldots \quad (24)$$

Der Kürze halber sei es gestattet, den Ausdruck $\delta^{\mathfrak{s}}\psi$ als die $\mathfrak{s}$-te [28]) Variation von ψ zu bezeichnen. Das Zeichen der Variation ist mit dem der Differentiation nach den Parametern u_α und dem der Integration über den unvariierten Bereich O_n vertauschbar.

Man denke die x_i als Funktionen A_i der u_α und der $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ und bilde nach (24) die Variationen $\delta^{\mathfrak{s}}\mathfrak{d}^{\mathfrak{r}}x$; diese transformieren sich nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial x_k'}\,\delta x_k', \\
\delta x_{i,\alpha} &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_k'\,\partial x_l'}\,\delta x_k'\,x_{l,\alpha}' + \frac{\partial x_i}{\partial x_k'}\,\delta x_{k,\alpha}', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta^2 x_i &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_k'\,\partial x_l'}\,\delta x_k'\,\delta x_l' + \frac{\partial x_i}{\partial x_k'}\,\delta^2 x_k', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (25)$$

Die Variationen $\delta^{\mathfrak{s}}x_i$ verwandeln sich unter dem Einflusse von (1) kogredient zu den Differentialen $d^{\mathfrak{s}}x_i$. Durch Hinzufügung von (25) zu (1), (7), (8), (9), (12) geht aus der Gruppe H (§ 2) abermals eine neue Ξ hervor. Die Invarianz gegenüber Ξ erklären wir entsprechend (11) und (13); Invarianten der Gruppe Ξ heissen *Punktinvarianten.*

Indem man Ableitungen nach den $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ durch deutsche Zeiger andeutet,

$$x_{i,\mathfrak{a}} = \frac{\partial x_i}{\partial\varepsilon_{\mathfrak{a}}}, \quad x_{i,\alpha\mathfrak{a}} = \frac{\partial x_{i,\alpha}}{\partial\varepsilon_{\mathfrak{a}}}, \ldots, \quad x_{i,\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial\varepsilon_{\mathfrak{a}}\,\partial\varepsilon_{\mathfrak{b}}}, \ldots$$

kann man den Inhalt von (25) auch in der Gestalt ausdrücken

$$\left.\begin{aligned}
x_{i,\mathfrak{a}} &= \frac{\partial x_i}{\partial x_k'}\,x_{k,\mathfrak{a}}', \\
x_{i,\alpha\mathfrak{a}} &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_k'\,\partial x_l'}\,x_{k,\mathfrak{a}}'\,x_{l,\alpha}' + \frac{\partial x_i}{\partial x_k'}\,x_{k,\alpha\mathfrak{a}}', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{i,\mathfrak{a}\mathfrak{b}} &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_k'\,\partial x_l'}\,x_{k,\mathfrak{a}}'\,x_{l,\mathfrak{b}}' + \frac{\partial x_i}{\partial x_k'}\,x_{k,\mathfrak{a}\mathfrak{b}}', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (26)$$

Es liege nun eine absolute Invariante $\mathfrak{h}(\delta^{\mathfrak{s}}\mathfrak{d}^{\mathfrak{r}}x)$ vor, $\mathfrak{r} = 0, 1, \ldots, r$; $\mathfrak{s} = 0, 1, \ldots, s$; wir bezeichnen ihre Argumente kurz mit z_L, $L = 1, 2, \ldots$ Auf die Differentiation von $\mathfrak{h}$ beziehen sich

S a t z 2. Mit $\mathfrak{h}$ ist auch die Ableitung $\partial\mathfrak{h}/\partial u_\alpha$ absolut punktinvariant.

---

28) Unter $\delta^{\mathfrak{s}}\psi$ für $\mathfrak{s} = 0$ verstehen wir ψ.

Satz 3. Mit $\mathfrak{h}$ ist auch die Variation $\delta\mathfrak{h}$ absolut punktinvariant.

Die Beweise beider Sätze führen wir gleichzeitig. Bei dem Ansatze $x'_i = A'_i(u_\alpha, \varepsilon_\mathfrak{a})$ stellt die vorausgesetzte Invarianz $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ auf Grund von (1), (7), (25) eine Identität in u *und* ε [29]) dar; man kann sie etwa nach u_α bzw. $\varepsilon_\mathfrak{a}$ differenzieren. Das Ergebnis

$$\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial\mathfrak{h}'}{\partial u_\alpha}, \quad . \; . \; . \quad (27^a) \qquad\qquad \frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial\varepsilon_\mathfrak{a}} = \frac{\partial\mathfrak{h}'}{\partial\varepsilon_\mathfrak{a}} \quad . \; . \; . \; . \quad (27^b)$$

hat ausgeführt die Gestalt

$$\sum_L \frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial z_L} z_{L,\alpha} = \sum_L \frac{\partial\mathfrak{h}'}{\partial z'_L} z'_{L,\alpha}, \; . \quad (28^a) \qquad\qquad \sum_L \frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial z_L} z_{L,\mathfrak{a}} = \sum_L \frac{\partial\mathfrak{h}'}{\partial z'_L} z'_{L,\mathfrak{a}} \; . \quad (28^b)$$

Die Beziehungen (28) sind zunächst Identitäten in u und ε; sie bestehen aber auch, wenn man die Gesamtheit Z' der Ableitungen $\overline{x}'_{i,\alpha_1\ldots\alpha_\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{s}}$ [30]) in ihnen durch eine solche $\hat{Z}'$ von *beliebigen* Werten $\hat{x}'_{i,\alpha_1\ldots\alpha_\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_\mathfrak{s}}$ [31]) ersetzt und zugleich Z durch diejenige Gesamtheit $\hat{Z}$ von Werten $\hat{x}_{i,\alpha_1\ldots\alpha_\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_\mathfrak{s}}$, welche mit $\hat{Z}'$ durch die Formeln (1), (7), (26) zusammenhängt. Dabei treten in (28) an Stelle der $\delta^\mathfrak{s} x'_{i,\alpha_1\ldots\alpha_\mathfrak{r}}$ die Grössen

$$\delta^\mathfrak{s}\hat{x}'_{i,\alpha_1\ldots\alpha_\mathfrak{r}} = \sum_{\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{s}}^{1,\mathfrak{k}} d\varepsilon_{\mathfrak{a}_1}\ldots d\varepsilon_{\mathfrak{a}_\mathfrak{s}}\,\hat{x}'_{i,\alpha_1\ldots\alpha_\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_\mathfrak{s}} \quad . \; . \; . \; . \quad (29)$$

und an Stelle der $\delta^\mathfrak{s} x_{i,\alpha_1\ldots\alpha_\mathfrak{r}}$ die nach Art von (29) aus den Mitgliedern von $\hat{Z}$ gebildeten Grössen $\delta^\mathfrak{s}\hat{x}_{i,\alpha_1\ldots\alpha_\mathfrak{r}}$.

Um zu zeigen, dass die Invarianzen (28) auch in diesem allgemeineren Sinne gelten, wählen wir die A'_i in der Form der Polynome

$$x'_i = \sum_\tau^{0,R} \sum \sum_\mathfrak{t}^{0,S} \sum \hat{x}'_{i,(\tau_1)\ldots(\tau_n)(\mathfrak{t}_1)\ldots(\mathfrak{t}_\mathfrak{k})} \frac{u_1^{\tau_1}\ldots u_n^{\tau_n}}{\tau_1!\ldots\tau_n!}\,\frac{\varepsilon_1^{\mathfrak{t}_1}\ldots\varepsilon_\mathfrak{k}^{\mathfrak{t}_\mathfrak{k}}}{\mathfrak{t}_1!\ldots\mathfrak{t}_\mathfrak{k}!} \quad . \; . \quad (30)$$

Dabei ist die vierte bzw. zweite Summe über die Werte $\mathfrak{t}_\mathfrak{a} \geqq 0$ bzw. $\tau_\alpha \geqq 0$ so zu erstrecken, dass $\mathfrak{t}_1 + \ldots + \mathfrak{t}_\mathfrak{k} = \mathfrak{t}$ bzw. $\tau_1 + \ldots + \tau_n = \tau$ ist; S bzw. R bezeichnet in beiden Fällen (a), (b) den jeweils grössten Wert des Zeigers $\mathfrak{s}$ bzw. $\mathfrak{r}$ [30]); die Koeffizienten bedeuten die Mitglieder von $\hat{Z}'$, die den zu Z' gehörigen Ableitungen

$$\frac{\partial^{\tau+\mathfrak{t}} x'_i}{\partial u_1^{\tau_1}\ldots\partial u_n^{\tau_n}\,\partial\varepsilon_1^{\mathfrak{t}_1}\ldots\partial\varepsilon_\mathfrak{k}^{\mathfrak{t}_\mathfrak{k}}} = x'_{i,(\tau_1)\ldots(\tau_n)\,(\mathfrak{t}_1)\ldots(\mathfrak{t}_\mathfrak{k})}$$

entsprechen. Der Ansatz (30) liefert in der Tat

$$x'_{i,(\tau_1)\ldots(\tau_n)\,(\mathfrak{t}_1)\ldots(\mathfrak{t}_\mathfrak{k})}\Big|^{u=0,\;\varepsilon=0} = \hat{x}'_{i,(\tau_1)\ldots(\tau_n)\,(\mathfrak{t}_1)\ldots(\mathfrak{t}_\mathfrak{k})}\;;$$

---

29) Diese Folge der Erklärung (23) gibt dem Beweise der Aussage (29) bequeme Form.

30) Jetzt läuft im Falle (a) $\mathfrak{r}$ bis $r+1$, im Falle (b) $\mathfrak{s}$ bis $s+1$.

31) Wir setzen bei ihnen diejenigen Zeigersymmetrien voraus, welche bei den ihnen entsprechenden Ableitungen statthaben.

er bewirkt, dass Z' in $\hat{Z}'$, also $\delta^{\mathfrak{s}} x'_{i,\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{r}}}$ nach (24), (29) in $\delta^{\mathfrak{s}} \hat{x}'_{i,\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{r}}}$ übergeht. Aus der gemachten Annahme, dass $\hat{Z}$ und $\hat{Z}'$ durch (1), (7), (26) verknüpft sind, folgt dann, dass gleichzeitig aus Z die Gesamtheit $\hat{Z}$ wird und mithin die Grössen $\delta^{\mathfrak{s}} x_{i,\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{r}}}$ wirklich die Werte $\delta^{\mathfrak{s}} \hat{x}_{i,\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{r}}}$ erhalten. Die Gleichungen (27^b) ergeben gemäss (23.1) sogleich den Satz 3

$$\delta \mathfrak{h}' = \delta \mathfrak{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

§ 5. *Parametertransformationen.*

Bei den Parametertransformationen (5), von denen jetzt kurze Rede sein soll, setzen wir voraus, dass in den Ausdrücken $\mathfrak{u}_\alpha$ die $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ nicht vorkommen. Die u_α, $\bar{u}_\alpha$ werden nicht variiert; in der Schreibweise des § 4 ist

$$\delta u_\alpha = \delta \bar{u}_\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Ein Wechsel (5) lässt die x_i ungeändert,

$$x_i = \bar{x}_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Es sei $x_i = A_i\,(u_\alpha, \varepsilon_{\mathfrak{a}}) = \bar{A}_i\,(\bar{u}_\alpha, \varepsilon_{\mathfrak{a}})$; bedient man sich der Abkürzungen

$$x_{i,\bar{\lambda}} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{u}_\lambda}\,, \quad x_{i,\bar{\lambda}\bar{\mu}} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{u}_\lambda\, \partial \bar{u}_\mu}\,, \ldots,$$

so lauten die Verwandlungsformeln der Ableitungen $\mathfrak{d}^{\mathfrak{r}} x$

$$\left.\begin{aligned} x_{i,\alpha} &= x_{i,\bar{\lambda}} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial u_\alpha}, \\ x_{i,\alpha\beta} &= x_{i,\bar{\lambda}\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_\mu}{\partial u_\beta} + x_{i,\bar{\lambda}} \frac{\partial^2 \bar{u}_\lambda}{\partial u_\alpha\, \partial u_\beta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

Die durch (5) bedingten Transformationen (33), (34) bilden eine Gruppe $\mathfrak{N}$; man kann sie zu einer neuen $\mathfrak{B}$ *erweitern*, indem man wie in § 2 eine zweite Reihe (oder deren mehrere) von Veränderlichen $\mathfrak{v}_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{r}}}$ [32]) einführt, die sich kogredient zu den $x_{i,\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{r}}}$ d. h. so umsetzen, dass die Formeln (33), (34) gelten, wenn man in ihnen $x_{i,\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{r}}}$, $x_{i,\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_{\mathfrak{r}}}$ bezüglich durch $\mathfrak{v}_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{r}}}$, $\mathfrak{v}_{i;\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_{\mathfrak{r}}}$ ersetzt. Ist Π eine Funktion der Grössen $x_{i,\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{r}}}$, $\mathfrak{v}_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{q}}}$, so bedeute $\bar{\Pi}$ dieselbe Funktion der $x_{i,\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_{\mathfrak{r}}}$, $\mathfrak{v}_{i,\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_{\mathfrak{q}}}$. Π heisst eine *Parameterinvariante* vom Gewichte c, wenn bei allen Transformationen von $\mathfrak{B}$

$$\bar{\Pi} = \mathfrak{D}^c\, \Pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Veränderliche der Art $\mathfrak{v}_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{r}}}$ sind die Variationen $\delta^{\mathfrak{s}} x_{i,\alpha_1\ldots\alpha_{\mathfrak{r}}} = w_M$ [33]).

---

[32]) $\mathfrak{r}, \mathfrak{q} = 0, 1, \ldots$.

[33]) $\mathfrak{r} = 0, 1, \ldots, \rho$; $\mathfrak{s} = 0, 1, \ldots, \sigma$; $M = 1, 2, \ldots$.

da diese bei (5) genau dieselbe Regel befolgen wie die $x_{i,\alpha_1\ldots\alpha_r}$ selbst,

$$\delta x_i = \delta \bar{x}_i \ , \quad \delta x_{i,\alpha} = \delta x_{i,\bar{\lambda}} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial u_\alpha}, \ldots, \delta^2 x_i = \delta^2 \bar{x}_i \ , \ldots \qquad (36)$$

$\mathfrak{P}$ sei eine Funktion der w_M; Funktionen dieser Veränderlichen betrifft der

Satz 4. Ist $\mathfrak{P}$ eine Parameterinvariante vom Gewichte c, so gilt dies auch von der Variation $\delta\mathfrak{P}$.

Man beweist ihn entsprechend wie oben den Satz 3, indem man hier von den Abhängigkeiten $\bar{x}_i = \bar{A}_i\,(\bar{u}_\alpha\,,\,\varepsilon\mathfrak{a})$ ausgeht. Bei der Variation der Voraussetzung (35) für $\mathfrak{P}$ ist zu berücksichtigen, dass nach (32) $\delta\mathfrak{D} = 0$ ist. In den Formeln, die man jetzt statt der früheren (28^b) erhält, kann wiederum an Stelle der Gesamtheit $\bar{\mathfrak{w}}$ der Werte $\bar{w}_M$ eine *beliebige* $\hat{\bar{\mathfrak{w}}}$ treten, wenn gleichzeitig $\mathfrak{w}$ durch eine Gesamtheit $\hat{\mathfrak{w}}$ ersetzt wird, die mit $\hat{\bar{\mathfrak{w}}}$ durch (33), (34) zusammenhängt.

Auf Grund der Beziehungen (36) ergibt sich

Satz 5. Ist $\mathfrak{P}$ eine Parameterinvariante vom Gewichte c, so gilt dies auch von der Ableitung $\partial\mathfrak{P}/\partial\delta^{\mathfrak{s}} x_i$.

Beispiel einer Parameterinvariante vom Gewichte 1 ist nach (6) die Funktion G selbst. Wir heben unter den Invarianten Π diejenigen besonderen $\varkappa$ hervor, welche wie G *nur die Veränderlichen* $\mathfrak{d}^{\mathfrak{r}} x$ enthalten. Auf solche Invarianten der Funktion F (14) zielt folgende Ergänzung des Satzes 1 ab:

Satz 6. Wenn unter den Voraussetzungen des Satzes 1 die ξ_i absolut parameterinvariant sind und $h\,(\mathfrak{d}^{\mathfrak{r}} x_i,\, \xi_i)$ eine Parameterinvariante vom Gewichte c ist, so trifft das letztere auch auf die dort aus h gewonnene Punktinvariante g zu.

Die erwähnte Eigenschaft (6) der Grundfunktion

$$\bar{F} = \mathfrak{D} F \qquad (37)$$

führt nämlich in Verbindung mit der Transformation [1]), $\overline{(19)}$ der Determinanten θ_i

$$\bar{\theta}_i = \mathfrak{D}\theta_i \qquad (38)$$

zu der Invarianz

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \qquad (39)$$

Es können mithin in der für h gültigen Formel (35) die Grössen $\partial F/\partial\theta_i$ an die Stelle der ξ_i treten.