Mathematics. — *Invarianten der Integranden vielfacher Integrale in der Variationsrechnung.* II.*) By Prof. L. KOSCHMIEDER. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK.)

(Communicated at the meeting of November 26, 1927).

II. *Invarianten der Grundfunktion F.*

Alles folgende bezieht sich auf F (14) als Grundfunktion; in § 3 wurden deren Besonderheiten gegenüber (3) erörtert und dem weiteren dienliche Bezeichnungen eingeführt.

1. *Die erste Variation.*

§ 6. *Die einfachsten Invarianten.*

Wir beginnen mit der sogleich zu benutzenden Bemerkung, dass die Determinante

$$\xi = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{n+1} \\ x_{1,1} & x_{2,1} & \dots & x_{n+1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1,n} & x_{2,n} & \dots & x_{n+1,n} \end{vmatrix} = \theta_i \xi_i, \quad \dots \dots \quad (40)$$

in der die ξ_i den in § 3, (18) erklärten Sinn haben, nach (18), (20) eine Punktinvariante vom Gewichte -1 ist,

$$\xi' = D^{-1}\,\xi \quad \dots \dots \dots \quad (41)$$

Betrachten wir den Schnitt $x_i = \grave{x}_i$ der Überfläche $\mathfrak{f}$ (2) und einer andern $\grave{\mathfrak{f}}$ mit der Parameterdarstellung $\grave{x}_i = \grave{\varphi}_i(\grave{u}_\alpha)$! Wir bilden bei dieser die Ableitungen $\grave{x}_{i,\alpha} = \partial\grave{\varphi}_i/\partial\grave{u}_\alpha$ und bezeichnen die den θ_k entsprechenden Determinanten der Matrix $\|\grave{x}_{i,\alpha}\|$ mit $\grave{\theta}_k$; dann ist nach (41) die Grösse $\grave{\theta}_i\,\xi_i$ punktinvariant vom Gewichte -1. Schreiben wir gemäss (16) kurz $\Gamma(x_i, \theta_i) = F$, $\Gamma(\grave{x}_i, \grave{\theta}_i) = \grave{F}$, so finden wir, indem wir nach dem beim Beweise des Satzes 1 gesagten die ξ_i durch die $\partial F/\partial\theta_i$ (21) ersetzen, den Ausdruck

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{f},\grave{\mathfrak{f}}} = \frac{\partial F}{\partial \theta_i}\,\grave{\theta}_i$$

als eine absolute Punktinvariante [34]). Nun ist, wenn $\mathfrak{f}$ eine Extremale des

*) I. in diesen Proceedings, Vol. **31**, N⁰. 2, (1928), S. 140.

[34]) Man kann dies sofort aus (20), (21) entnehmen; uns lag an dem Zusammenhange mit (40).

Variationsproblems $\delta I = 0$ ist, $\mathfrak{T}_{\mathfrak{f}, \dot{\mathfrak{f}}}$ die Grösse, deren Verschwinden die *Transversalität* [35]) von $\mathfrak{f}$ zu $\dot{\mathfrak{f}}$ aussagt; daher erweist sich diese Beziehung als invariant. Da sich ferner bei derselben Aufgabe die *E-Funktion* in der Form darstellen lässt [36])

$$E(x_i, \theta_i, \dot{\theta}_i) = \dot{F} - \mathfrak{T}_{\mathfrak{f}, \dot{\mathfrak{f}}},$$

so ist wegen der Invarianz von F und $\mathfrak{T}$ auch E absolut invariant.

Mit Rücksicht darauf, dass die Variationen δx_i (25) Veränderliche der Art ξ_i (18) sind, entnimmt man aus (40), (41) weiter, dass die Grösse

$$v = \theta_i \, \delta x_i, \quad . \quad . \quad . \quad (42) \qquad\qquad v' = D^{-1} v \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

eine Punktinvariante vom Gewichte -1 ist.

Wir wenden uns jetzt zur *Variation der Grundfunktion*; es ist

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial x_{i.\alpha}} \delta x_{i.\alpha} = \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial x_{i.\alpha}} \delta x_i \right) + W \theta_i \, \delta x_i, \quad . \quad (44)$$

wo die Ausdrücke $W\theta_i = W_i$ die Variationsableitungen [1]), (7), (8) bedeuten. Nach (19) und Satz 3 ist δF absolut invariant,

$$\delta F' = \delta F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Da dies ferner nach der in (9) enthaltenen Formel

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i,\alpha}} = \frac{\partial F'}{\partial x'_{k.\alpha}} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

und nach (25. 1) für die Klammer im ersten Gliede

$$t = \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial x_{i.\alpha}} \delta x_i \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

auf der rechten Seite von (44) und daher nach Satz 2 für dieses selbst gilt, so ist dort auch das zweite Glied vW absolut invariant,

$$v' W' = v W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Nach (43) ist mithin W eine Punktinvariante vom Gewichte 1,

$$W' = D W \text{ [37])} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Auf demselben Wege [38]) kann man auch die Parameterinvarianz der Funktion W dartun. Zunächst ist nach (37) und Satz 4

$$\delta \bar{F} = \mathfrak{D} \, \delta F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

---

[35]) Nach RADON [20]), S. 58.

[36]) Ebd. S. 60.

[37]) Dieser kurze Beweis ist dem von BOLZA [9]), S. 349 bei einfachen Integralen gegebenen nachgebildet.

[38]) In anderer Weise leitet RADON [20]), S. 57 die Invarianz (57) her. — A. a. O. [1]), S. 189 habe ich (49), (57) aus der ausdrücklichen Darstellung der W_i entwickelt.

In der Formel (44)

$$\delta F = t + vW \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

nimmt die Grösse t (47) bei dem Wechsel (5) gleichfalls den Faktor $\mathfrak{D}$ an. Denn es ist nach [1]), $\overline{(31)}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_{i,\bar{\alpha}}} &= \frac{\partial F}{\partial x_{i,\lambda}} \mathfrak{D} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda}, \\ \bar{t} &= \mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial u_\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{i,\lambda}} \delta x_i\right) + \frac{\partial F}{\partial x_{i,\lambda}} \delta x_i \frac{\partial}{\partial \bar{u}_\alpha}\left(\mathfrak{D} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda}\right) \end{aligned}\right\} ; \quad . \quad . \quad (52)$$

infolge der bekannten Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}_\alpha}\left(\mathfrak{D} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

bleibt

$$\bar{t} = \mathfrak{D} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Aus (50), (54) schliesst man mit Hilfe von (51), dass auch

$$\bar{v}\,\overline{W} = \mathfrak{D} v W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

ist; da sich nach (42), (38), (36. 1)

$$\bar{v} = \mathfrak{D} v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

ergibt, erkennt man W als absolute Parameterinvariante,

$$\overline{W} = W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

§ 7. *Die Funktion F_1 von* DE DONDER.

Es sei auf $\mathfrak{f}$ (2)

$$\theta^2 \equiv \theta_i \theta_i > 0 \;\; ^{39)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Wir setzen

$$\frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\alpha} \partial x_{i,\beta}} = \Phi_{\alpha,\beta} \;\; ^{40)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

$$\det.\, \Phi_{\alpha\beta} = \Phi \;, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Zunächst bringen wir die Determinante Φ zu der Funktion F_1 von DE DONDER[5]) in Beziehung. Aus der Formel

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i,\alpha}} = \frac{\partial F}{\partial \theta_l} \theta_{l,i\alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

[39]) Vgl. [1]), S. 181; $\theta > 0$.

[40]) $\Phi_{\alpha,\beta}$ ist in [1]), (5) mit $F_{\alpha,\beta}/\theta^2$, in [6]), (17) mit $F^*_{\alpha,\beta}$ bezeichnet. Φ (60) hat in der Schreibweise [6]), S. 141 den Wert $\Phi\theta^{-2n}$.

in der $\theta_{l,i\alpha} = -\theta_{i,l\alpha}$ die algebraische Ergänzung des Elementes $x_{i,\alpha}$ bezüglich der Determinante θ_l bedeutet ($\theta_{i,i\alpha}$ [41]) $= 0$), erhalten wir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\alpha}\, \partial x_{p,\beta}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_l\, \partial \theta_m}\, \theta_{l,i\alpha}\, \theta_{m,p\beta} - \frac{\partial F}{\partial \theta_l}\, \frac{\partial \theta_{i,l\alpha}}{\partial x_{p,\beta}}.$$

Ist $p = i$, so fällt der Subtrahend rechts fort, weil $x_{i,\alpha}$ in θ_i nicht auftritt (§ 3); multipliziert man diese einfachere Gleichung mit $x_{h,\alpha}\, x_{k,\beta}$, wendet die elementaren Determinantenformeln

$$\theta_{p,q\gamma}\, x_{r,\gamma} = j_{qr}\, \theta_p - j_{rp}\, \theta_q, \quad j_{lm} = \begin{cases} 0 \text{ für } l \neq m, \\ 1 \text{ für } l = m \end{cases}$$

an und beachtet die aus (17) durch Differentiation folgende Beziehung

$$\theta_l\, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_l\, \partial \theta_m} = 0, \text{ [42]}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (62)$$

so findet man nach Summation über i

$$\Phi_{\alpha\beta}\, x_{h,\alpha}\, x_{k,\beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_h\, \partial \theta_k}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (63)$$

In der $(n+1)$-reihigen Determinante der Grössen rechts hat die algebraische Ergänzung f_{hk} des Elementes $\partial^2 F / \partial \theta_h\, \partial \theta_k$ nach (63) den Wert

$$f_{hk} = (-1)^{h+k} \det. (\Phi_{\alpha\beta}\, x_{H,\alpha}\, x_{K,\beta}),$$

wo H und K die Zahlen von 1 bis $n+1$ mit Ausnahme von h und k vorstellen; da hier die rechte Seite sich in das Produkt $\Phi\, \theta_h\, \theta_k$ umformen lässt, stimmt die Determinante Φ in der Tat mit der von DE DONDER durch die Formel

$$f_{hk} \equiv \text{adj.}\, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_h\, \partial \theta_k} = F_1\, \theta_h\, \theta_k \quad \ldots \ldots \quad (64)$$

erklärten Funktion F_1 überein, *es ist*

$$\Phi = F_1 \,. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (65)$$

Was ferner die Transformation der Ausdrücke $\Phi_{\alpha\beta}$, Φ betrifft, so ergibt sich aus [1]), (20), (23) und der nach u. (38), (58) geltenden Gleichung

$$\overline{\theta} = \mathfrak{D}\theta, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (66)$$

dass

$$\Phi'_{\alpha\beta} = D^2\, \Phi_{\alpha\beta}, \quad \ldots \quad (67) \qquad \overline{\Phi}_{\alpha\beta} = \mathfrak{D}^{-1}\, \Phi_{\lambda\mu}\, \frac{\partial \overline{u}_\alpha\, \partial \overline{u}_\beta}{\partial u_\lambda\, \partial u_\mu}, \quad \ldots \quad (68)$$

$$\Phi' = D^{2n}\, \Phi \text{ [43]}), \quad \ldots \quad (69) \qquad \overline{\Phi} = \mathfrak{D}^{-n-2}\, \Phi \quad \ldots \ldots \quad (70)$$

---

[41]) Hier wird über i nicht summiert.

[42]) Vgl. RADON [20]), S. 55. Die dortigen Grössen $\Phi_{\alpha\beta}$ und unsere $\Phi_{\alpha\beta}$ (59) erweisen sich auf Grund von (63) und [20]), (7) als gleich.

[43]) Nach (65) ist also $F_1' = D^{2n} F_1$; nicht $F_1' = D^2 F_1$, wie a. a. O. [5]) irrtümlich angegeben.

ist. Wir setzen Φ wie auch F in dem betrachteten Gebiete [44]) etwa als positiv voraus; dieses Vorzeichen bleibt bei den Verwandlungen (69), (70) und (19), (37) erhalten.

Mit Hilfe der vorstehenden Formeln gewinnt man die Transformation mehrerer später wichtiger Grössen. Nach (67), (69) ist

$$\Phi'_{\alpha 3}\, \Phi'^{-\frac{1}{n}} = \Phi_{\alpha 3}\, \Phi^{-\frac{1}{n}}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (71)$$

hier wie im folgenden verstehen wir unter der mehrdeutigen Potenz deren reellen positiven Wert. Setzt man weiter

$$F^{n+2}\, \Phi = f, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (72)$$

so findet man aus (19), (37), (69), (70)

$$f' = D^{2n} f, \quad \ldots \quad (73) \qquad \bar{f} = f \quad \ldots \quad (74)$$

Die Ausdrücke

$$\vartheta_i = f^{\frac{1}{2n}}\, \theta_i \quad \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

verwandeln sich auf Grund von (20), (38), (73), (74) wie folgt:

$$\vartheta'_k = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\, \vartheta_i, \quad \ldots \quad (76) \qquad \bar{\vartheta}_i = \mathfrak{D}\, \vartheta_i \quad \ldots \quad (77)$$

Vermöge (69) leitet man aus W (49) die absolute Punktinvariante

$$M = W \Phi^{-\frac{1}{2n}}, \quad \ldots \quad (78) \qquad M' = M \;{}^{45)} \quad \ldots \quad (79)$$

her; darüber hinaus zeigen (73), (74), dass die Grösse

$$S = W f^{-\frac{1}{2n}} = W\,(F^{n+2}\, \Phi)^{-\frac{1}{2n}} \quad \ldots \ldots \quad (80)$$

eine absolute Punkt- und Parameterinvariante ist [46]),

$$S' = S, \quad \ldots \quad (81) \qquad \bar{S} = S \quad \ldots \quad (82)$$

§ 8. *Das Grundintegral als Anlass zu einer Massbestimmung.*

P. FINSLER [47]) und L. BERWALD [48]) haben die Differentialgeometrie eines N-stufigen Raumes aufgebaut, in der auf jeder Kurve die Bogenlänge

---

[44]) Dieses ist hinsichtlich der x_i der Bereich X_{n+1} [s. (1)]; die $x_{i,\alpha}$ haben beliebige endliche Werte von der Art, dass (58) gilt.

[45]) Diese Punktinvariante hat DE DONDER a. a. O. [5]) gefunden; die dort mitgeteilte Gestalt $WF_1^{-\frac{1}{2}}$ ist nach [43]) durch $WF_1^{-\frac{1}{2n}}$ zu ersetzen.

[46]) Wir nannten $-S$ a. a. O. [1]), (14) die "mittlere extremale (Ueberflächen-) Krümmung".

[47]) Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen; Dissertation, Göttingen 1918.

[48]) *a*) Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. **34** (1925), S. 213—220; *b*) Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 40—73; *c*) Lotos (Prag) **74** (1926), S. 43—51; *d*) Journ. f. d. reine u. angew. Math. 156 (1927), S. 191—222.

durch das einfache Grundintegral eines Variationsproblems erster Ordnung [49]) erklärt ist. Sieht man in ähnlicher Weise bei jeder im $n+1$-stufigen Raume X_{n+1} gelegenen Überfläche X_n (2) das Integral (15) als Mass ihres Inhaltes an, so ermöglicht dieses n-fache Grundintegral, wie ich im folgenden andeuten will, eine *Massbestimmung in* X_{n+1}. BERWALD bildet seine Entwickelungen in der Form dem Sonderfalle nach, in dem das Integral die Bogenlänge in einem RIEMANNschen Raume $\mathfrak{X}_N$ angibt [50]); entsprechend vergleichen wir hier das allgemeine Integral (15) mit demjenigen besonderen, welches den Inhalt $\mathfrak{J}$ eines Teiles der in einen RIEMANNschen Raum $\mathfrak{X}_{n+1}$ gebetteten Überfläche $\mathfrak{X}_n$ (2) darstellt. Das Linienelement in $\mathfrak{X}_{n+1}$ sei $d\mathfrak{s}^2 = \mathfrak{a}_{ik}\, dx_i\, dx_k$; die $\mathfrak{a}_{ik}$ sind Funktionen der x_l allein. Mit Hilfe ihrer algebraischen Ergänzungen $\mathfrak{A}_{ik}$ bezüglich der Determinante $\mathfrak{a}$ der $\mathfrak{a}_{ik}$ drückt $\mathfrak{J}$ sich in der Gestalt aus

$$\mathfrak{J} = \int^{(n)} \mathfrak{F}\, du, \quad . \quad . \quad (83) \qquad\qquad \mathfrak{F}^2 = \mathfrak{A}_{ik}\, \theta_i \theta_k \text{ [51])}; \quad . \quad . \quad (84)$$

ersichtlich besteht die Beziehung

$$\mathfrak{A}_{ik} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}^2}{\partial\theta_i\, \partial\theta_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Demgemäss führt man bei dem Integrale (15) zur Erklärung eines Grundtensors in dem *allgemeinen Raume* X_{n+1} zunächst die Grössen

$$A_{ik} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial\theta_i\, \partial\theta_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

ein; entsprechend (84) gilt dann die Formel

$$F^2 = A_{ik}\, \theta_i\, \theta_k\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

da F (17) in den θ_i homogen von erster Stufe ist. Mit Ausnahme des Falles (84), in dem die $\mathfrak{A}_{ik}$ reine Ortsfunktionen sind, hängen die A_{ik} ausser von den x_l auch von den θ_l ab.

Die Determinante

$$A = \text{det.}\, A_{ik} = \text{det.} \left(\frac{\partial F}{\partial\theta_i} \frac{\partial F}{\partial\theta_k} + F \frac{\partial^2 F}{\partial\theta_i\, \partial\theta_k} \right)$$

lässt sich leicht berechnen. Schreibt man sie nämlich als Summe von 2^{n+1} Determinanten, deren Elemente teils von der Gestalt $\sigma_{ik} = \dfrac{\partial F}{\partial\theta_i} \dfrac{\partial F}{\partial\theta_k}$ sind, teils die Form $\tau_{ik} = F \dfrac{\partial^2 F}{\partial\theta_i\, \partial\theta_k}$ besitzen, so verschwinden von diesen Determinanten alle, bei denen mindestens zwei Spalten Elemente σ_{ik} enthalten; ferner diejenige, welche aus lauter Elementen τ_{ik} besteht, weil dies nach (64) von ihrer Reziproken $F^{n(n+1)}$ det. f_{ik}

---

49) $n = 1$, $q = 1$ in der Bezeichnung (3).

50) Vgl. 47) *a*), S. 216.

51) Vgl. z. B. 2), S. 253.

gilt. Es bleiben die Determinanten zu summieren, bei denen die σ_{ik} genau in einer Spalte auftreten; da dann die algebraischen Ergänzungen der σ_{ik} die Werte $F^n f_{ik}$ haben, ergibt sich nach (64), (65), (17), (72)

$$A = \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \frac{\partial F}{\partial \theta_k} F^n \Phi \theta_i \theta_k = F^{n+2} \Phi = f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Demnach ist $A \neq 0$. Unter Heranziehung der Grössen (75) kann man also die Invariante F^2 (87) in der Form $A^{-\frac{1}{n}} A_{ik} \vartheta_i \vartheta_k$ darstellen; dabei bilden nach (76) die ϑ_i einen bei dem Wechsel (1) kovarianten Vektor. Folglich sind die Ausdrücke $a^{ik} = A^{-\frac{1}{n}} A_{ik}$ die kontravarianten Komponenten eines Tensors zweiter Stufe; die diesen Sachverhalt ausdrückenden Formeln

$$a'^{lm} = a^{ik} \frac{\partial x'_l}{\partial x_i} \frac{\partial x'_m}{\partial x_k}$$

sind an Hand von (86), (88), (20), (73) leicht auch unmittelbar zu bestätigen. Wir sehen den — übrigens parameterinvarianten — Tensor der a^{ik} als den massbestimmenden *Grundtensor* in X_{n+1} an; seine kovarianten Komponenten sind die mit $A^{\frac{1}{n}-1}$ multiplizierten algebraischen Ergänzungen der Elemente A_{ik} in Bezug auf A. Die a_{ik} sind Funktionen der x_l und — abgesehen von dem Sonderfalle (84) — der θ_l; es ist det. $a_{ik} = A^{\frac{1}{n}}$. Wir erklären jetzt das *Linienelement* in X_{n+1} durch die Formel

$$ds^2 = a_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Weitere differentialgeometrische Ausführungen in der durch das Vorstehende bezeichneten Richtung werde ich an anderer Stelle folgen lassen.

II. *Die zweite Variation.*

§ 9. *Die Verallgemeinerung der Transformation von* UNDERHILL.

Die zweite Variation der Grundfunktion F ist nach (51)

$$\delta^2 F = \delta t + W \delta v + v \delta W, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Da aus (42) durch Variation und Multiplikation mit W die Formel

$$W \delta v = W \delta \theta_i \, \delta x_i + W \theta_i \, \delta^2 x_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

hervorgeht und ferner gemäss [1]), (8)

$$\delta W_i \, \delta x_i = v \delta W + W \delta \theta_i \, \delta x_i$$

ist, ergibt sich

$$W \delta v + v \delta W = \delta W_i \, \delta x_i + W_i \, \delta^2 x_i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

$$\delta^2 F = \delta t + \delta W_i \, \delta x_i + W_i \, \delta^2 x_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

Der zweite Summand rechts hat, wie aus der a.a.O. [6]), § 1 durchgeführten Rechnung [vgl. dort die Formeln (12), . . . , (15)] ohne Aenderung übernommen werden kann, den Wert

$$\delta W_i\ \delta x_i = \frac{\partial W_i}{\partial x_k}\ \delta x_i\ \delta x_k - F_{ik,\alpha\beta}\ \delta x_i\ \delta x_{k,\alpha\beta}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\ \partial x_{k,\alpha}} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\alpha}\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial u_\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\beta}\partial x_{k,\alpha}}\right)\delta x_i\ \delta x_{k,\alpha};$$

dem Zeichen $F_{ik,\alpha\beta}$ kommt dabei die a.a.O. [6]), S. 133 bzw. [1]), S. 188 angegebene Bedeutung zu. Schreibt man

$$-F_{ik,\alpha\beta}\ \delta x_i\ \delta x_{k,\alpha\beta} = \frac{\partial F_{ik,\alpha\beta}}{\partial u_\beta}\ \delta x_i\ \delta x_{k,\alpha} - \delta x_i\ \frac{\partial}{\partial u_\beta}\ (F_{ik,\alpha\beta}\ \delta x_{k,\alpha})$$

und zieht den Ausdruck [6]), (16) bzw. [1]), (30) der Vierzeigergrössen heran [40]), so wird weiter

$$\left.\begin{aligned}\delta W_i\ \delta x_i &= \frac{\partial W_i}{\partial x_k}\ \delta x_i\ \delta x_k - \delta x_i\ \frac{\partial}{\partial u_\beta}(\Phi_{\alpha\beta}\ \theta_i\ \theta_k\ \delta x_{k,\alpha})\\ &+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\ \partial x_{k,\alpha}} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\alpha}\ \partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\alpha}\partial x_{k,\beta}} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\beta}\ \partial x_{k,\alpha}}\right)\right]\delta x_i\ \delta x_{k,\alpha}.\end{aligned}\right\}\quad(93)$$

Hier greift nun die *Hilfsformel*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\ \partial x_{k,\alpha}} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\alpha}\ \partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\alpha}\partial x_{k,\beta}} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\beta}\ \partial x_{k,\alpha}}\right)\\ &= \theta_{i,k\alpha}\ W + \Phi_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial u_\beta}\ \theta_k - \frac{\partial\theta_k}{\partial u_\beta}\ \theta_i\right)\end{aligned}\right\}\ .\quad(94)$$

ein. Sie ist a.a.O. [6]), § 2, (28) im Falle einer Extremale hergeleitet, d.h. unter der Annahme $W = 0$, von der wir uns hier freimachen. Die Beziehungen [6]), (20), . . . , (26) sind von letzterer unabhängig. Auf der rechten Seite von [6]), (26) ersetzt man das erste Glied nach [1]), (7) durch den Ausdruck $\theta_{k,i\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k} - W_k\right)$ [52]) ; die weitere Rechnung unterscheidet sich also von der a.a.O. [6]) angestellten lediglich dadurch, dass man dort rechts das Glied $\theta_{i,k\alpha}\ W_k$ [52]) hinzufügt. Statt [6]), (28) erhält man mithin (94).

Trägt man (94) in (93) ein, beachtet, dass dann rechts $\theta_{i,k\alpha}\ \delta x_{k,\alpha} = \delta\theta_i$ ist, und addiert beiderseits $W\theta_i\ \delta^2 x_i$, so findet man laut (91), (90) mit Rücksicht auf [1]), (8), auf (42) und die Symmetrie der Grössen (59)

$$v\,\delta W + W\delta v = \frac{\partial W_i}{\partial x_k}\ \delta x_i\ \delta x_k - v\,\frac{\partial}{\partial u_\beta}\ (\Phi_{\alpha\beta}\ \theta_k\ \delta x_{k,\alpha})$$

$$- v\Phi_{\alpha\beta}\ \frac{\partial\theta_k}{\partial u_\beta}\ \delta x_{k,\alpha} + W\delta v,$$

$$v\,\delta W = \frac{\partial W_i}{\partial x_k}\ \delta x_i\ \delta x_k - v\,\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial v}{\partial u_\beta}\right) + v\,\delta x_k\ \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\ \frac{\partial\theta_k}{\partial u_\beta}\right).$$

[52]) Hier ist nach k nicht zu summieren.

Wenn man daher

$$\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial \theta_i}{\partial u_\beta}\right) = P_i \text{ [53]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x_k} + \frac{\partial W_k}{\partial x_i} + P_k\,\theta_i + P_i\,\theta_k\right) = L_{ik} = L_{ki} \text{ [54]} \quad . \quad . \quad (96)$$

setzt, so wird

$$v\,\delta W = L_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k - v\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial v}{\partial u_\beta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

Da bei Einführung der Bezeichnung

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} + P_i = Q_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

nach [1]), (8) die Formeln gelten

$$L_{ik} = \tfrac{1}{2}(Q_i\,\theta_k + Q_k\,\theta_i), \quad L_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k = vQ_i\,\delta x_i, \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

entnimmt man aus (97) als Wert der Variation von W

$$\delta W = Q_i\,\delta x_i - \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial v}{\partial u_\beta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Durch Einsetzung der Werte (97) bzw. (100) in (89) gewinnt man diejenigen beiden *Darstellungen der Grösse* $\delta^2 F$, *welche* UNDERHILLS auf den Fall $n = 1$ bezügliche *Transformation der zweiten Variation* [8]) *auf unser Grundintegral* (15) *verallgemeinern.*

Wir zerlegen in § 10 den als Bestandteil von $\delta^2 F$ auftretenden Ausdruck

$$\delta(vW) = W\delta v - v\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial v}{\partial u_\beta}\right) + vQ_i\,\delta x_i, \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

der nach (48) und Satz 3 eine absolute Punktinvariante ist, in weitere invariante Summanden.

§ 10. *Die Punktinvariante Ψ.*

Es werde in (101) rechterhand statt v (42), (43) die laut (43), (69) absolut punktinvariante Grösse

$$\Omega = \Phi^{\frac{1}{2n}} v, \quad . \quad . \quad (102) \qquad\qquad \Omega' = \Omega \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

eingeführt. Aus $v = \Phi^{-\frac{1}{2n}}\Omega$ folgt

$$\delta v = \Phi^{-\frac{1}{2n}}\delta\Omega - \frac{1}{2n}\,\Omega\Phi^{-\frac{1}{2n}}\frac{\delta\Phi}{\Phi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

---

[53]) P_i sind die a. a. O. [6]), (33) mit A_i bezeichneten Ausdrücke.

[54]) Ist $n = 1$, so stimmen die Grössen L_{11}, $L_{12} = L_{21}$, L_{22} mit den von UNDERHILL [3]), S. 327 eingeführten L_1, M_1, N_1 überein.

und es ist

$$\frac{\delta\Phi}{\Phi}=\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{i,\alpha}}\delta x_i\right)-\delta x_i\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{i,\alpha}}\right)\ . \quad (105)$$

Dabei kann man die Ausdrücke $\partial\Phi/\partial x_{i,\alpha}$ auch nach Art der Grössen (61) im Sinne von (65) geschrieben denken. Das zweite Glied auf der rechten Seite von (101) bringt man leicht auf die Form

$$v\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial v}{\partial u_\beta}\right)=\Omega\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\,\Phi^{-\frac{1}{n}}\frac{\partial\Omega}{\partial u_\beta}\right)+\Omega^2\,\Phi^{-\frac{1}{2n}}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi^{-\frac{1}{2n}}}{\partial u_\beta}\right);(106)$$

man erhält daher statt (101)

$$\left.\begin{aligned}\delta(vW)=W\Phi^{-\frac{1}{2n}}\delta\Omega-\frac{1}{2n}\Omega W\Phi^{-\frac{1}{2n}}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{i,\alpha}}\delta x_i\right)\\-\Omega\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\Phi^{-\frac{1}{n}}\frac{\partial\Omega}{\partial u_\beta}\right)-\frac{1}{2n}\Omega W\Phi^{-\frac{1}{2n}}\left[\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{i,\alpha}}\right)\right]\delta x_i\\+\Omega\Phi^{-\frac{1}{2n}}Q_i\,\delta x_i-\Omega^2\Phi^{-\frac{1}{2n}}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi^{-\frac{1}{2n}}}{\partial u_\beta}\right).\end{aligned}\right\}\ (107)$$

Wir werden jetzt zeigen, dass in dieser, wie erwähnt absolut invarianten Verbindung jedes der drei ersten Glieder $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ rechts die Invarianzeigenschaft besitzt; ist dies nachgewiesen, so ist eine neue Invariante ermittelt, nämlich die Summe $\mathfrak{Z}$ der drei letzten Glieder auf der rechten Seite von (107).

Die Invarianz $\mathfrak{Z}_1'=\mathfrak{Z}_1$ folgt aus (79), (103) und Satz 3. Was $\mathfrak{Z}_2$ betrifft, so ist nach (69)

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x_{i,\alpha}'}=D^{2n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{k,\alpha}}\frac{\partial x_k}{\partial x_i'},$$

sodass durch Division mit (69) und Zusammensetzung mit den $\delta x_i'=\delta x_l\,.\,\partial x_i'/\partial x_l$ sich ergibt

$$\frac{1}{\Phi'}\frac{\partial\Phi'}{\partial x_{i,\alpha}'}\delta x_i'=\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{i,\alpha}}\delta x_i;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(108)$$

mit Hilfe des Satzes 2 und kraft (79), (103) bestätigt man, dass in der Tat $\mathfrak{Z}_2'=\mathfrak{Z}_2$ ist. In $\mathfrak{Z}_3$ ist nach (71) und Satz 2 zunächst der Inhalt der Klammer invariant, daher auch $\mathfrak{Z}_3=\mathfrak{Z}_3'$.

Nach der an (107) angeschlossenen Bemerkung ist jetzt die Invarianz $\mathfrak{Z}'=\mathfrak{Z}$ dargetan. Mit $\mathfrak{Z}$ ist auch die Grösse $\mathfrak{Z}/\Omega=\Psi$, also *der Ausdruck*

$$\left.\begin{aligned}\Psi(x_i,x_{i,\alpha},x_{i,\alpha\beta},x_{i,\alpha\beta\gamma},\delta x_i)=\frac{1}{2n}W\Phi^{-\frac{1}{2n}}\left[-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{i,\alpha}}\right)\right]\delta x_i\\+\Phi^{-\frac{1}{2n}}Q_i\,\delta x_i-\Omega\,\Phi^{-\frac{1}{2n}}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi^{-\frac{1}{2n}}}{\partial u_\beta}\right)\end{aligned}\right\}\ (109)$$

absolut punktinvariant.

§ 11. *Die Punktinvariante U.*

Da man die Variationen δx_i (25) als Veränderliche ξ_i (18) auffassen kann, treffen auf die Invariante (109) die Voraussetzungen des Satzes 1 zu. Ersetzt man daher in Ψ die δx_i durch die Werte $\partial F/\partial \theta_i$ und somit Ω (102) gemäss (42), (17) durch $\Phi^{\frac{1}{2n}} F$, so entsteht eine Invariante der Art g vom Gewichte 1, aus der nach Multiplikation mit $\Phi^{-\frac{1}{2n}}$ zufolge (69) eine absolute Invariante hervorgeht. Indem wir diese mit $-FU$ bezeichnen, *gelangen wir* bei irgendeiner Überfläche $\mathfrak{f}$ (2) *zu der absoluten Punktinvariante*

$$\left.\begin{aligned} U(x_i, x_{i.\alpha}, x_{i.\alpha\beta}, x_{i.\alpha\beta\gamma}) = & - F^{-1}\, \Phi^{-\frac{1}{n}} Q_i \frac{\partial F}{\partial \theta_i} + \Phi^{-\frac{1}{2n}} \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^{-\frac{1}{2n}}}{\partial u_\beta}\right) \\ & + \frac{1}{2n} F^{-1}\, W \Phi^{-\frac{1}{n}} \frac{\partial F}{\partial \theta_i}\left[\frac{1}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{i.\alpha}}\right)\right], \end{aligned}\right\} \quad (110)$$

der Verallgemeinerung der Invariante K von UNDERHILL [55]), die sich aus U für $n = 1$ ergibt. Das erste Glied $\mathfrak{Q}$ auf der rechten Seite von (110) kann man nach (17) und (99) auch schreiben

$$\mathfrak{Q} = - F^{-2} \Phi^{-\frac{1}{n}} L_{ik} \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \frac{\partial F}{\partial \theta_k}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (111)$$

Ist $\mathfrak{f}$ im besonderen eine *Extremale*, also $W = 0$, so lassen sich die Grössen L_{ik} durch eine einzige L darstellen in der Form [56])

$$L^*_{ik} = L \theta_i \theta_k \;{}^{57)}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (112)$$

daher vereinfacht sich die Invariante U zu

$$U^* = - F^{-1}\, \Phi^{-\frac{1}{n}} Q^*_i \frac{\partial F}{\partial \theta_i} + \Phi^{-\frac{1}{2n}} \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^{-\frac{1}{2n}}}{\partial u_\beta}\right). \quad . \; . \quad (113)$$

bzw.
$$U^* = - \Phi^{-\frac{1}{n}} L + \Phi^{-\frac{1}{2n}} \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^{-\frac{1}{2n}}}{\partial u_\beta}\right) \quad . \; . \; . \quad (114)$$

Hiernach ist die Funktion L [6]), (41) der Gestalt fähig

$$L = F^{-1}\, Q^*_i \frac{\partial F}{\partial \theta_i}.$$

---

55) A. a. O. 3), S. 330.

56) Das Zeichen * deutet an, dass die mit ihm versehenen Grössen für eine Extremale zu berechnen sind.

57) A. a. O. 6), S. 138. — Die Grösse L verallgemeinert den von K. WEIERSTRASS für $n = 1$ mit F_2 [vgl. 9), S. 226] bezeichneten Ausdruck.

§ 12. *Die Punkt- und Parameterinvariante* Ψ_0.

Um über die Punktinvariante Ψ (109) hinaus zu einem Ausdrucke fortzuschreiten, der ausserdem parameterinvariant ist, variieren wir die Grösse S (80). Diese ist absolut invariant in beiderlei Sinne (81), (82); dieselbe Eigenschaft hat nach den Sätzen 3 und 4 der Ausdruck

$$\delta S = S\left[\frac{\delta W}{W} - \frac{1}{2n}\frac{\delta \Phi}{\Phi} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\frac{\delta F}{F}\right].$$

Da das laut (19), (45), (37), (50) auch von der Grösse $\delta F/F$ gilt, ist

$$\zeta = \frac{\delta W}{W} - \frac{1}{2n}\frac{\delta \Phi}{\Phi}$$

eine absolute Punkt- und Parameterinvariante, wie man mit Hilfe von (49), (57), (69), (70) auch unmittelbar feststellt.

Zu geeigneter Darstellung von ζ wendet man auf den Minuenden die Formel (100) an; man bedient sich an Stelle von v (42), (56) des Ausdrucks

$$V = F^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\Phi^{\frac{1}{2n}} v = F^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\Omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

der sich vermöge (103), (70) als absolut invariant in beiderlei Sinne erweist,

$$V' = V, \quad . \quad . \quad (116) \qquad\qquad \bar{V} = V. \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Indem man bei der Umrechnung von (100) die den Faktor V enthaltenden Glieder zusammenfasst und den Subtrahenden in ζ ähnlich wie in (105) umformt, findet man

$$\left.\begin{aligned}\zeta = W^{-1} Q_i\,\delta x_i - F^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\Phi^{-\frac{1}{2n}} S^{-1} V \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left[\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(F^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\Phi^{-\frac{1}{2n}}\right)\right] \\ -\frac{1}{2n}\frac{1}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{1}{2n}\delta x_i \frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{F}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{i,\alpha}}\right) \\ -\frac{1}{FS}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(F^{1-\frac{2}{n}}\Phi^{-\frac{1}{n}}\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial V}{\partial u_\beta}\right) - \frac{1}{2n}\frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{F}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{i,\alpha}}\delta x_i\right).\end{aligned}\right\} (118)$$

Nun ist hier rechts sowohl das vorletzte Glied $-\mathfrak{z}_4$ als auch das letzte $-\mathfrak{z}_5/2n$ invariant in beiderlei Sinne. Zunächst ist nämlich $\mathfrak{z}_4' = \mathfrak{z}_4$ infolge der Beziehungen (71), (116) und des Satzes 2. Ferner ergibt sich im Hinblick auf (37), (70), (68), (117), (82)

$$\bar{\mathfrak{z}}_4 = \mathfrak{D}^{-1} F^{-1} S^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{u}_\alpha}\left(\mathfrak{D} F^{1-\frac{2}{n}}\Phi^{-\frac{1}{n}}\Phi_{\lambda\mu}\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda}\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\mu}\frac{\partial V}{\partial u_\nu}\frac{\partial u_\nu}{\partial \bar{u}_\beta}\right);$$

benutzt man rechts die (in $u, \bar{u}$ statt in x, x' geschriebenen) Formeln [1]), (27) und differenziert die Klammer als ein Produkt, dessen einer Faktor

$\mathfrak{D} \,.\, \partial \bar{u}_\alpha / \partial u_\lambda$ ist, so erhält man kraft (53) $\bar{\mathfrak{z}}_4 = \mathfrak{z}_4$. Aus (19), (108) und Satz 2 folgt $\mathfrak{z}_5' = \mathfrak{z}_5$; da nach (70)

$$\frac{1}{\bar{\Phi}} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_{i,\bar{\alpha}}} = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{i,\lambda}} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda}$$

ist, stellt sich auf Grund von (36) und (53) auch

$$\bar{\mathfrak{z}}_5 = \frac{1}{\mathfrak{D} F} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(\mathfrak{D} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda} \frac{F}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{i,\lambda}} \delta x_i \right) = \mathfrak{z}_5$$

heraus. Die Invarianten $-\mathfrak{z}_4$ und $-\mathfrak{z}_5 / 2n$ trennt man von der Invariante ζ (118) ab; indem man deren verbleibenden Bestandteil mit S multipliziert und

$$\frac{S}{W} Q_i - \frac{1}{2n} \frac{S}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{2n} \frac{S}{F} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(\frac{F}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{i,\alpha}} \right) = R_i$$

setzt, gewinnt man die gewünschte *absolute Invariante in beiderlei Sinne*

$$\Psi_0 \left(x_i \,,\, x_{i,\alpha} \,,\, x_{i,\alpha\beta} ,\, x_{i,\alpha\beta\gamma} ,\, \delta x_i \right) = R_i \; \delta x_i$$

$$- V F^{-\frac{2}{n}} \Phi^{-\frac{1}{2n}} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(\Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^{-\frac{1}{2n}}}{\partial u_\beta} \right) - V F^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(\Phi^{-\frac{1}{n}} \Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial F^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}}{\partial u_\beta} \right).$$

Durch die vorgenommene Auflösung des zweiten Gliedes auf der rechten Seite von (118) in die beiden mit dem Faktor V behafteten Glieder von Ψ_0 wird die Beziehung dieses Ausdrucks zu Ψ (109) ersichtlich:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 = F^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \Psi - V F^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(\Phi^{-\frac{1}{n}} \Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial F^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}}{\partial u_\beta} \right) \\ + \frac{1}{2n} W F^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}} \Phi^{-1-\frac{1}{2n}} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{i,\alpha}} \delta x_i \,. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

§ 13. *Die Punkt- und Parameterinvariante U_0.*

Auf die Invariante Ψ_0, in der von den Veränderlichen der zweiten Reihe nur die absolut parameterinvarianten $\delta x_i = \xi_i$ auftreten, und zwar linear homogen, lassen sich die Sätze 1,6 anwenden. Wenn man demgemäss in Ψ_0 die δx_i durch die Grössen $\partial F / \partial \theta_i$ und daher V (115) durch $f^{\frac{1}{2n}}$ (72) ersetzt, erhält man aus Ψ_0 einen Ausdruck T, der punktinvariant vom Gewichte 1 und absolut parameterinvariant ist. Infolge von (73), (74) wird der Quotient $-T / f^{\frac{1}{2n}}$, also *die Grösse*

$$\left. \begin{aligned} U_0 \left(x_i ,\, x_{i,\alpha} ,\, x_{i,\alpha\beta} ,\, x_{i,\alpha\beta\gamma} \right) = U_0 = F^{-\frac{2}{n}} U \\ + F^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(\Phi^{-\frac{1}{n}} \Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial F^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}}{\partial u_\beta} \right) - \frac{1}{2n} W F^{-2-\frac{2}{n}} \Phi^{-1-\frac{1}{n}} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{i,\alpha}} \end{aligned} \right\} (120)$$

eine absolute Punkt- und Parameterinvariante. Sie verallgemeinert die von UNDERHILL *bei einfachen Integralen angegebene Invariante* K_0 [58]), die aus U_0 für $n=1$ hervorgeht.

Für eine *Extremale* hat U_0 den Wert

$$U_0^* = F^{-\frac{2}{n}} U^* + F^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(\Phi^{-\frac{1}{n}} \Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial F^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}}{\partial u_\beta} \right) \quad . \quad . \quad (121)$$

oder, wie sich auf Grund von (114) nach kurzer Umrechnung ergibt,

$$U_0^* = - F^{-\frac{2}{n}} \Phi^{-\frac{1}{n}} L + F^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \Phi^{-\frac{1}{2n}} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left[\Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial u_\beta} \left(F^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \Phi^{-\frac{1}{2n}} \right) \right]. (122)$$

Auf die geometrische Bedeutung von U_0 [59]) bei RIEMANNschen $\mathfrak{X}_{n+1}$ und allgemeinen Räumen X_{n+1} (§ 8) werde ich, wie gesagt, bei anderer Gelegenheit eingehen. Hier sei noch die *übersichtliche Form* vermerkt, die man *der Grösse* $\delta^2 I$ bei einer festberandeten *Extremale* $\mathfrak{f}^*$ mit Hilfe von U^*, U_0^* geben kann, indem man gewissen von UNDERHILL für $n=1$ aufgestellten Formeln [60]) entsprechende beim Integrale (15) nachbildet.

Man bringt unter den genannten Annahmen die zweite Variation

$$\delta^2 I^* = \int^{(n)} \delta^2 F\, du = \int^{(n)} v\, \delta W\, du \quad {}^{61})$$

an Hand von (107), (99), (112) leicht auf die Gestalt

$$\delta^2 I^* = - \int^{(n)} \Omega \left[\frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(\Phi^{-\frac{1}{n}} \Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial \Omega}{\partial u_\beta} \right) + U^* \Omega \right] du.$$

Die Einführung des Ausdrucks V (115) an Stelle von Ω liefert in Verbindung mit (121)

$$\delta^2 I^* = - \int^{(n)} V \left[\frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(F^{1-\frac{2}{n}} \Phi^{-\frac{1}{n}} \Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial V}{\partial u_\beta} \right) + U_0^*\, V\, F \right] du;$$

durch teilweise Integration des ersten Gliedes rechts erhält man, indem man das Verschwinden von V längs des Randes berücksichtigt,

$$\delta^2 I^* = \int^{(n)} \left(F^{-\frac{2}{n}} \Phi^{-\frac{1}{n}} \Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial V}{\partial u_\alpha} \frac{\partial V}{\partial u_\beta} - U_0^*\, V^2 \right) F du.$$

Diese Formel gibt Anlass zu einer Bemerkung [62]) über das Vorzeichen

---

[58]) A. o. O. [3]), S. 334.

[59]) Diejenige von K_0 ist von UNDERHILL [3]), S. 338 angegeben. — Die Invarianten K [55]), K_0 von UNDERHILL treten in den neuesten Arbeiten über die Differentialgeometrie des Variationsproblems der Art [3]) auf: BERWALD 48*b*), S. 61; *c*), S. 46, 52; *d*), S. 192.

[60]) A. a. O. [3]), S. 335 f.

[61]) Vgl. u. (89).

[62]) Sie rührt für $n=1$ von UNDERHILL her; [3]), S. 336.

von $\delta^2 I^*$: Ist die quadratische Form $\mathfrak{q} = \Phi_{\alpha\beta}\, w_\alpha\, w_\beta$ etwa definit positiv [63]), und ist $U_0^* < 0$ auf $\mathfrak{f}^*$, so gilt dort $\delta^2 I^* > 0$.

III. *Zerlegung der zweiten Variation in parameterinvariante Summanden.*

Bei der Darstellung (89) der zweiten Variation $\delta^2 F$, die nach (37) und Satz 4 eine Parameterinvariante [64]) vom Gewichte 1 ist, haben gemäss (54), (56), (57) die drei Glieder rechts die gleiche Eigenschaft,

$$\overline{\delta t} = \mathfrak{D}\delta t, \quad \overline{W\delta v} = \mathfrak{D}\, W\delta v, \quad \overline{v\delta W} = \mathfrak{D} v\,\delta W \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

Wir werden jetzt das dritte Glied $v\,\delta W$ weiter in fünf invariante Summanden zerspalten. Dabei nehmen wir in der a.a.O. [6]), S. 141 geschilderten Weise auf die invariante quadratische Differentialform $q_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta$ [65]) Bezug, deren Grundtensor die kontravarianten Komponenten

$$q^{\alpha\beta} = \theta\, \Phi_{\alpha\beta}$$

besitzt [40]). Wie dort bedienen wir uns der — bei invarianten χ, ψ gleichfalls invarianten — Differentiatoren

$$\nabla(\chi,\psi) = q^{\alpha\beta} \frac{\partial \chi}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial u_\beta}, \quad \Delta_1(\chi) = \nabla(\chi, \chi), \quad \Delta(\chi) = \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\theta q^{\alpha\beta} \frac{\partial \chi}{\partial u_\beta}\right).$$

Mit diesen Zeichen kann man unter Verwendung der nach (56), (66) absolut invarianten Grösse

$$\omega = \theta^{-1}\, v, \quad . \quad . \quad (124) \qquad\qquad \overline{\omega} = \omega \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

in dem Ausdrucke [s. (101)]

$$v\,\delta W = -\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\, v \frac{\partial v}{\partial u_\beta}\right) + \Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial v}{\partial u_\alpha} \frac{\partial v}{\partial u_\beta} + v Q_i\, \delta x_i$$

das erste und zweite Glied rechts schreiben

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial v^2}{\partial u_\beta}\right) = -\frac{1}{2}\theta\, \Delta(\omega^2) - 2\omega\, \nabla(\theta, \omega) + \omega^2\, [\theta^{-1}\, \Delta_1(\theta) - \Delta(\theta)],$$

$$\Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial v}{\partial u_\alpha} \frac{\partial v}{\partial u_\beta} = \theta^{-1}\, \Delta_1(\theta\omega) = \theta \Delta_1(\omega) + 2\,\omega\, \nabla(\theta, \omega) + \omega^2\, \theta^{-1}\, \Delta_1(\theta) \quad {}^{66)}.$$

Setzt man für Q_i den Wert (98) ein, fügt den Summanden $\omega^2 P_i \theta_i$ hinzu und zieht ihn in der Gestalt $\omega\theta^{-1}\, \theta_k\, P_k\, \theta_i\, \delta x_i$ wieder ab, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} v\,\delta W = &-\frac{1}{2}\theta \Delta(\omega^2) + \theta \Delta_1(\omega) + \omega^2\, [2\,\theta^{-1}\, \Delta_1(\theta) - \Delta(\theta) + P_i\, \theta_i] \\ &+ \theta\omega \frac{\partial W}{\partial x_i}\, \delta x_i + \omega\theta^{-1}\, \theta_k\, (P_i\, \theta_k - P_k\, \theta_i)\, \delta x_i\,. \end{aligned}\right\} \quad (126)$$

---

63) Der Faktor von $\mathfrak{q}$ ist nach § 7 positiv.

64) Da in III ausschliesslich von Parameterinvarianten die Rede ist, nennen wir diese weiterhin kurz Invarianten.

65) Die a. a. O. mit $g_{\alpha\beta}$ bezeichneten Grössen nennen wir hier $q_{\alpha\beta}$.

66) Vgl. [6]), (51).

Von den Gliedern rechts ist nach (66) und (125) das erste und zweite, nach (57), Satz 5 und (36 . 1) das vierte invariant vom Gewichte 1. Das dritte Glied hat dieselbe Eigenschaft; da nämlich darin der Faktor Θ von ω^2 gemäss [6], (68) die Umformung gestattet

$$\Theta \equiv 2\,\theta^{-1} \triangle_1 (\theta) - \triangle (\theta) + P_i \theta_i = \theta^{-1} [\triangle_1 (\theta) - \sum_i \triangle_1 (\theta_i)], \quad (127)$$

so lehrt [6], (58), dass $\overline{\Theta} = \mathfrak{D}\Theta$. Jetzt schliesst man aus (126) und (123.3), dass auch das fünfte Glied invariant vom Gewichte 1 ist; man überzeugt sich davon auch unmittelbar, indem man in ihm laut (95)

$$P_i\, \theta_k - P_k\, \theta_i = \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left[\Phi_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial u_\beta}\, \theta_k - \frac{\partial \theta_k}{\partial u_\beta}\, \theta_i \right) \right]$$

schreibt und dann (38), (68), (53) heranzieht.

Vermöge (89), (123), (126), (127) erscheint die Grösse $\delta^2 F$ als eine Summe von sieben Invarianten des Gewichtes 1. Demgemäss *zerlegt sich die zweite Variation*

$$\delta^2 I = \int^{(n)} \delta^2 F\, du$$

in sieben parameterinvariante Integrale

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 I = & \int^{(n)} \delta t\, du + \int^{(n)} W \delta (\theta \omega)\, du - \frac{1}{2} \int^{(n)} \triangle(\omega^2)\, \theta du \\ & + \int^{(n)} \triangle_1(\omega)\, \theta du + \int^{(n)} \omega^2\, \theta^{-1} [\triangle_1 (\theta) - \sum_i \triangle_1(\theta_i)]\, du \\ & + \int^{(n)} \omega \frac{\partial W}{\partial x_i}\, \delta x_i\, \theta\, du + \int^{(n)} \omega \theta^{-1} \theta_k\, (P_i\, \theta_k - P_k \theta_i)\, \delta x_i\, du. \end{aligned}\right\} \quad (128)$$

Bei festgehaltener $(n-1)$-stufiger Begrenzung verschwinden das erste und dritte von ihnen.

Dass unter dieser Annahme die Formel (128) für eine Extremale $W = 0$ in diejenige übergeht, welche ich in diesem Sonderfalle a.a. O.[6], (69) angegeben habe, bestätigt man so: Weil dann nach [6], S. 139

$$\frac{\partial W_k}{\partial x_i} + P_i\, \theta_k = \frac{\partial W_i}{\partial x_k} + P_k\, \theta_i$$

ist, vereinfacht sich die Summe des sechsten und siebenten Integranden nach [1], (8) und nach (42), (124) wie folgt:

$$\omega \theta^{-1} \theta_k \left(\frac{\partial W_k}{\partial x_i} + P_i\, \theta_k - P_k \theta_i \right) \delta x_i = \omega \theta^{-1}\, \theta_k \frac{\partial W_i}{\partial x_k}\, \delta x_i = \omega^2 \frac{\partial W_k}{\partial x_k}\,.$$