

**Mathematics.** — *Zur Geschichtschreibung der Dimensionstheorie.*  
By Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of September 29, 1928).

§ 1.

Die Dimensionstheorie habe ich in einem 1913 erschienenen Aufsatz „Ueber den natuerlichen Dimensionsbegriff“ (Journ. f. Math. 142, S. 146—152) fuer diejenigen Spezies, fuer welche die Dimension einen natuerlichen Sinn besitzt, naemlich fuer die kondensierten metrischen Spezies, begruendet, indem ich einen dimensionellen Rechtfertigungssatz brachte, d.h. einen im Bereich der kondensierten metrischen Spezies sinnvollen Dimensionsbegriff definierte, fuer den ich zeigen konnte, dass die  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten die Dimension  $n$  besitzen.

Fuer diesen Dimensionsbegriff boten sich naturgemaess zwei Varianten dar, welche den beiden damals fuer kondensierte metrische Spezies gangbaren Zusammenhangsbegriffen entsprachen. Es fuehrt naemlich in gleicher Weise der schwache Zusammenhang, d.h. die Unzerlegbarkeit in zwei Relativgebietspezies (LENNES 1911), zur starken Trennung (LENNES 1911), zur schwachen Dimension und zum schwachen Rechtfertigungssatz, wie der starke Zusammenhang, d.h. die Unzerlegbarkeit in zwei Stueckspezies (SCHOENFLIES 1908), zur schwachen Trennung, zur starken Dimension und zum starken Rechtfertigungssatz. Der schwache Rechtfertigungssatz ist eine unmittelbare Folge des starken, aber nicht umgekehrt. Ein Beweis des (im unten besprochenen MENGERSchen Buche nicht erwaehnten) starken Rechtfertigungssatzes wurde erst 1924 veroeffentlicht und zwar in meiner Note „Bemerkungen zum natuerlichen Dimensionsbegriff“ (diese Proceedings 27, S. 635—638).

In meinem zitierten Aufsatz vom Jahre 1913 wird zwar schon der starke Rechtfertigungssatz dem Wortlaute nach formuliert, der darauf folgende Beweis bezieht sich aber aufs deutlichste auf den schwachen Rechtfertigungssatz, so dass ersichtlich nur dieser gemeint ist, und der in der Formulierung des Satzes enthaltene Schreibfehler jedem mitdenkenden Leser sofort offenbar wird. Dass dieser Schreibfehler lange Jahre hindurch keine gedruckte Verbesserung erfuhr, hatte erstens die allgemeine Ursache der Fahrlaessigkeit muelos einzusehenden Schreibfehlern gegenueber, zweitens einen in diesen Proceedings 27, S. 136 mitgeteilten speziellen Grund.

In meinem zitierten Aufsatz von 1913 habe ich mich auf die Begrueudung der Dimensionstheorie beschraenkt und auf die Veroeffentlichung weiterer dimensionstheoretischer Entwicklungen verzichtet,

einerseits weil mit dem Beweis des Rechtfertigungssatzes das gestellte erkenntnistheoretische Ziel erreicht war, andererseits weil <sup>1)</sup> fuer die anschliessenden Betrachtungen (in erster Linie diejenigen welche sich um den Summensatz und den Zerlegungssatz gruppieren) nicht wie fuer den Beweis der Rechtfertigungssatzes <sup>2)</sup> eine intuitionistische Verwirklichung nahe lag.

Die Aufstellung des schwachen Dimensionsbegriffes und der Beweis des schwachen Rechtfertigungssatzes, d. h. die Begrueudung der Dimensionstheorie, ist mit meiner zitierten Arbeit von 1913, und nicht etwa mit der ersten oeffentlichen Formulierung des in derselben enthaltenen offensichtlichen Versehens, ebenso unanfechtbar zu datieren, wie der Beweis der Invarianz des Gebietes mit meiner betreffenden Arbeit von 1911, und nicht mit der ersten oeffentlichen Ausfuellung der in der ihr zugrunde liegenden Definition der Pseudomannigfaltigkeit befindlichen offensichtlichen Luecke, oder auch die mengentheoretische Begrueudung der ebenen Geometrie mit HILBERT's bezueglichem Originalaufsatz von 1906, und nicht mit dem Wiederabdruck dieses Aufsatzes, in welchem meinen brieflichen Angaben vom Oktober 1909 zufolge ein offensichtliches Versehen in den zugrunde liegenden Axiomen richtiggestellt wurde.

### § 2.

Auf meine im § 1 besprochene Begrueudung der Dimensionstheorie folgen URYSOHN, der 1922, von einer lokalen Form der schwachen Dimensionsdefinition <sup>3)</sup> ausgehend, den Summensatz und den Zerlegungssatz fand <sup>4)</sup> und im Zusammenhang mit diesen Saetzen in den Jahren 1922—1924 zahlreiche dimensionstheoretische Fragen zur Klaerung brachte <sup>5)</sup>, und MENGER und ALEXANDROFF, die, ersterer seit 1924, letzterer seit 1925, die Dimensionstheorie weiter ausbauten und vertieften. Weil indessen die scharfsinnigen Untersuchungen von URYSOHN, MENGER und ALEXANDROFF grossenteils einen bloss formalistischen Charakter besitzen, reicht der intuitionistische (d. h. sinnvolle) Bestand der Dimensionstheorie heute kaum ueber denjenigen von 1913 hinaus.

### § 3.

Im neulich erschienenen MENGERschen Buche "Dimensionstheorie" wird eine historische Darstellung der Entstehung der Dimensionstheorie

<sup>1)</sup> Vgl. meine einschlaegige Aeusserung in „Intuitionistische Mengenlehre“, diese Proceedings 23 (1920), S. 950.

<sup>2)</sup> Vgl. meine (im unten besprochenen MENGERschen Buche nicht erwaehte) Note „Intuitionistische Einfuehrung des Dimensionsbegriffes“, diese Proceedings 29 (1926), S. 855—863.

<sup>3)</sup> Auf die (im unten besprochenen MENGERschen Buche nicht explizite erwaehte) Aequivalenz der URYSOHNSchen Form mit der meinigen haben URYSOHN fuer kompakte Spezies und ich fuer kondensierte Spezies unabhaengig voneinander hingewiesen (vgl. Fund. Math. 8, S. 328; diese Proceedings 27 (1924), S. 636).

<sup>4)</sup> Comptes Rendus 175, S. 440.

<sup>5)</sup> Fund. Math. 7, 8.

gegeben, welcher gemaess MENDER als ihr Begründer, ich (mit EUKLID und einigen anderen) als Vorläufer und URYSOHN als Nachfolger zu gelten haetten. Diese Darstellung widerspricht dem oben in § 1 und § 2 dargelegten wirklichen Sachverhalt, ist denn auch falsch und bedeutet ein Antasten der Autorschaft eines Lehrers und eines verstorbenen Kommilitonen.

#### § 4.

Meine Autorschaft wird im MENDERSchen Buche angetastet dadurch, dass zu verstehen gegeben wird, dass die BROUWERSche Note aus dem Jahre 1913 eine Definition der schwachen Dimension (jedenfalls nach dem damaligen Stande der Wissenschaft) weder explizite noch implizite enthalte, dass also derjenige, der spaeter eine solche Definition explizite niedergeschrieben habe, berechtigt sei, sich selbst als Entdecker des Dimensionsbegriffes und als Begründer der Dimensionstheorie zu qualifizieren. Diese These wird erhaertet mit zwei falschen Zitaten:

Erstens wird (auf S. 85) meine Arbeit von 1913, die in den bisherigen Veroeffentlichungen MENDERS regemaessig regulaer mit der schwachen Dimensionsdefinition, d.h. unter Anbringung der aus dem anschliessenden Text folgenden, zum Ueberflusse auch formal und explizite in der Literatur befindlichen Richtigstellung, zitiert worden war, hier auf einmal mit der starken Dimensionsdefinition angefuehrt, wobei also die MENDER einerseits als sich unmittelbar darbietend, andererseits als in der Literatur vorhanden bekannte Richtigstellung in einer den Leser irrefuehrenden und den Sachverhalt entstellenden Weise totgeschwiegen wird.

Zweitens wird (auf S. 86) im Anschluss an das vorstehende Zitat behauptet, dass die der daselbst dem Wortlaute nach enthaltenen Form der starken Definition dem Wortlaute nach aehnliche Form der schwachen Definition auf dem „inzwischen erst entstandenen“ modernen Zusammenhangsbegriff beruhe (eine Behauptung, der man kaum einen anderen Sinn beilegen kann, als den einer Anfechtung der frueheren — sowohl durch mich wie durch MENDER erfolgten — Hinstellung des betreffenden Versehens als Schreibfehler), waehrend in Wirklichkeit die Definition des schwachen Zusammenhangs (wie diejenige der starken Trennung) in einer von MENDER selbst in seiner ersten Veroeffentlichung ordnungsgemaess zitierten Abhandlung von LENNES aus dem Jahre 1911 vorzufinden ist.

#### § 5.

Die URYSOHNSche Autorschaft in bezug auf die lokale Form der schwachen Dimensionsdefinition wird im MENDERSchen Buche angetastet mit der Anfuehrung (daselbst S. 83 u. 84) von zwei Akten, welche der zitierten URYSOHNSchen Comptes-Rendus-Note gegenueber eine Prioritaet besitzen sollen, naemlich:

1. Eine Hinterlegung bei der Wiener Akademie der Wissenschaften aus dem Jahre 1921.

Diese (mir vorliegende, uebrigens in diesen Proceedings 29, S. 1122—1123 wörtlich abgedruckte) Hinterlegung enthaelt aber nur vage Aendeutungen ueber die Dimensionalitaet „gewisser Kontinua“ der euklidischen Raeume, denen kaum mehr als die Hoffnung, dieselbe spaeter einmal durch eine rekursive Definition festzulegen, zu entnehmen ist (Schon um die Dimension 2 zu definieren wird der dazu notwendige Begriff der Dimensionalitaet 1 fuer kompakte Mengen welche keine Kontinua sind, als „aus diskreten Kurven bestehend“ erklart, mit der nicht weiter ausgefuehrten Bemerkung, dass „dieses diskret sich praezisieren lasse“).

2. Eine angeblich im Februar 1922 bei den Monatsh. f. Math. u. Phys. eingereichte Note, in welcher die schwache Dimensionsdefinition fuer Teilmengen von euklidischen Raeumen ausgesprochen sein soll.

In Wirklichkeit ist eine derartige Note nicht erschienen und es hat sich davon auch kein Manuskript vorgefunden. Es existiert nur ein (mir vorliegender) Brief von MENGER an HAHN vom 15. Febr. 1922, der folgenden Passus enthaelt: „*Ich hatte die kleine Arbeit, die Sie Herr Professor zu lesen die grosse Guete hatten, mit einer Definition der  $n$ -dimensionalen Mengen beschlossen<sup>6)</sup>, die korrekterweise, wie ich nun glaube<sup>6)</sup>, so haette lauten sollen:*“ (Es folgt die lokale Form der schwachen Dimensionsdefinition fuer Teilmengen von euklidischen Raeumen). „..... *Ich vermute<sup>6)</sup> nun, dass u.a. folgender Satz gilt:  $n$ -dimensional im  $R_n$  sind die und nur die Mengen mit einem innern Punkt im  $R_n$ .*“

Es handelt sich also nur um eine Vermutung (nicht einmal um eine unbewiesene Behauptung) des schwachen Rechtfertigungssatzes bzw. der Brauchbarkeit der lokalen Form des schwachen Dimensionsbegriffes fuer Teilmengen des  $R_n$ , also keineswegs um eine Begruendung, geschweige denn um die erste Begruendung, der Dimensionstheorie.

Ebensowenig wie die beiden obigen Akten gibt MENGER's erste Publikation „Ueber die Dimensionalitaet von Punktmengen, Erster Teil“ (der Druckerei ueberreicht 12. 12. 1923, druckfertig erklart 28. 1. 1924, erschienen 12. 4. 1924, auf dem Umschlage der Monatsh. f. Math. u. Phys. 33 und im Mengerschen Buche „Dimensionstheorie“ unrichtig datiert mit dem Erscheinungsjahre 1923) ihm einen Anteil an der Begruendung oder dem Ausbau der Dimensionstheorie, weil in dieser Publikation nichts steht, was am Datum ihrer Einreichung nicht laengst (naemlich in meiner Arbeit von 1913 und in der URYSOHNSchen Comptes-Rendus-Note von 1922) veroeffentlicht und allgemein zugaenglich waere.

Die fuer Prioritaetsfragen in Betracht kommenden Mengerschen Veroeffentlichungen zur Dimensionstheorie setzen erst ein mit seinen

<sup>6)</sup> Sperrung von mir.

Aufsätzen „Ueber die Dimension von Punktmengen“ (diese Proceedings 27, S. 639—643, 1924) und „Ueber die Dimension von Punktmengen, II. Teil“ (Monatsh. f. Math. u. Phys. 34, S. 137—161, der Redaktion eingereicht 6. 10. 1924, der Druckerei ueberreicht 15. 10. 1924, druckfertig erklart 30. 12. 1924, erschienen 20. 9. 1926, auf dem Umschlage der Monatsh. f. Math. u. Phys. 34 und im MENGERSchen Buche „Dimensionstheorie“ unrichtig datiert mit dem Erscheinungsjahre 1924). Bei MENER's Erscheinen auf der dimensionstheoretischen Buehne lagen mithin in der Literatur bereits vor die Definition der schwachen und der starken Dimension (inklusive des Aequivalenzbeweises der URYSOHNSchen Form mit der meinigen fuer die schwache Dimension), die Formulierung und der Beweis des schwachen und des starken Rechtfertigungssatzes (inklusive der — in MENER's Debutarbeit ordnungsgemaess zitierten — oeffentlichen formalen Richtigstellung des oben in § 1 und § 4 erwachten Schreibfehlers) und die Formulierung der Hauptsatze fuer die schwache Dimension.

#### § 6.

Die URYSOHNSche Autorschaft in bezug auf die Beweise des Summensatzes und des Zerlegungssatzes wird im MENGERSchen Buche angetastet dadurch, dass daselbst (S. 94 u. 157) die MENGERSchen Beweise dieser Saetze mit 1924 und die URYSOHNSchen <sup>7)</sup> mit 1926 datiert werden.

Der Sachverhalt ist aber dieser, dass die (im Fruehling 1923 eingereichte) einschlaegige URYSOHNSche Abhandlung sicher nicht spaeter als mit URYSOHN's Todestag am 17.8.1924 und die einschlaegige MENERsche Abhandlung nach dem vorigen § sicher nicht frueher als mit ihrem Eingangstag am 6. 10. 1924 zu datieren ist, so dass auch in bezug auf die Beweise des Summensatzes und des Zerlegungssatzes URYSOHN's Prioritaet ausser Zweifel steht.

Ueberdies wird die URYSOHNSche Autorschaft in bezug auf die Formulierung und den Beweis der Umkehrung des Zerlegungssatzes im MENGERSchen Buche verdunkelt dadurch, dass der Zerlegungssatz und seine Umkehrung daselbst (S. 156 u. 157) nicht als selbstaendige Saetze, sondern als Teile von durch Kombination mit Ergaenzungen geringerer Tragweite entstehenden erweiterten Saetzen eingefuehrt werden.

---

<sup>7)</sup> Die URYSOHNSche Formulierung des Summensatzes befindet sich nicht, wie MENER angibt, auf S. 260, sondern auf S. 337 von Fund. Math. 8.