Mathematics. — *Zwei Kongruenzen von rationalen Raumkurven vierter Ordnung.* By Prof. JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of December 22, 1928).

1. Vorgegeben seien ein Büschel (R^3) von kubischen Regelflächen mit Doppelgerade d und ein Büschel (R^2) von quadratischen Regelflächen durch d. Die Basiskurve σ^5 von (R^3) hat d zur Quadrisekante; die Basiskurve σ^3 von (R^2) trifft d zweimal.

Die beiden Büschel erzeugen eine *Kongruenz* $[\varrho^4]$ von *rationalen* Kurven ϱ^4, welche σ^5 je in 6 Punkten, σ^3 je in 5 Punkten treffen.

2. Es sei δ eine durch d gelegte Ebene; (R^3) und (R^2) bestimmen in δ zwei Stralenbüschel um die Spuren S_5 und S_3 der Kurven σ^5 und σ^3.

Als *Bild* einer ϱ^4 betrachte ich den Punkt R, den ϱ^4, ausserhalb d, mit δ gemein hat.

Der *singuläre* Punkt S_3 ist das Bild sämmtlicher ϱ^4, welche (R^2) auf der durch S_3 gelegten Regelfläche R^3 bestimmt. Analog ist der *singuläre* Punkt S_5 das Bild aller ϱ^4, welche auf der durch S_5 bestimmten R^2 liegen.

Die Gerade $S_3 S_5$ bildet eine Figur ab, welche aus ihr und einer sie schneidenden kubischen Kurve ϱ^3 besteht.

Offenbar gibt es ∞^1 Figuren (ϱ^3, r). Die Geraden r bilden eine *Regelfläche achten Grades*, $(r)^8$, mit siebenfacher Leitgeraden d und Leitlinien σ^3, σ^5.

3. Betrachten wir das System Λ der ϱ^4, welche eine vorgegebene Gerade l treffen. Die Bildkurve λ des Systems hat einen Doppelpunkt in S_5, einen dreifachen Punkt in S_3; sie ist demnach eine $\lambda^5\,(S_3^3, S_5^2)$. Da sie *rational* ist, besitzt sie noch zwei Doppelpunkte; diese bilden je eine ϱ^4 ab, welche l *zweimal* trifft. Ihre Stützpunkte liegen in den beiden gemeinschaftlichen Paaren der Involutionen I^2 und I^3, welche (R^2) und (R^3) auf l einschneiden.

Zwei Bildkurven λ^5 haben $5^2 - 3^2 - 2^2$, also 12, Punkte R gemein; das System Λ liegt somit auf einer *Fläche* 12en *Grades*, Λ^{12}, mit Doppelkurve σ^5, dreifacher Kurve σ^3 und zwei Doppelkurven ϱ^4. Da ihr Schnitt mit δ aus λ^5 und d besteht, ist d eine *siebenfache* Gerade.

4. Die Kurven ϱ^4, welche d in einem Punkte D treffen, bilden somit eine *Fläche* Δ^7.

Jede Ebene durch d enthält zwei sich in D treffende Geraden r_2, r_3, welche den sich in D berührenden Flächen R^2, R^3 angehören. Hieraus erhellt dass jeder R^2 eine R^3, jeder R^3 hingegen zwei R^2 sind zugeordnet. Die Fläche Δ^7 ist das Erzeugniss dieser Verwandtschaft; demnach ist σ^3 Doppelkurve, σ^5 einfache Kurve auf Δ^7. Die Bildkurve der auf Δ^7 liegenden ϱ^4 ist eine $\delta^3 (S_3^2, S_5)$; also ist d eine *vierfache* Gerade.

Zwei Kurven δ^3 haben 4 Punkte R gemein; durch je zwei Punkte D der Geraden d gehen somit vier Kurven ϱ^4.

In einer Ebene Φ durch D erzeugen die durch (R^2) und (R^3) bestimmten Büschel (c^2) und (c^3) eine Kurve Φ^7, mit 3 Doppelpunkten auf σ^3. Diese Kurve hat mit einer c^2 3 Punkte einer ϱ^4 und 6 Punkte auf σ^3, somit 5 Punkte in D gemein.

Demnach ist D ein *fünffacher* Punkt der Fläche Δ^7.

5. Die Flächen Λ^{12} und $(r)^8$ haben, ausser den vielfachen Linien $d\,(7^2)$, $\sigma^3\,(3 \times 3)$, $\sigma^5\,(2 \times 5)$, 28 Geraden r gemein, von denen 8 die Gerade l treffen (§ 2). Den übrigen 20 Geraden entsprechen 20 Kurven ϱ^3, welche sich auf l stützen; demnach bilden die Kurven ϱ^3 eine *Fläche* Σ^{20}.

Die Flächen R_0^2 und R_0^3, welche durch $r_0\,(S_3\,S_5)$ gehen, erzeugen noch eine ϱ_0^3, welche r_0 in einem Punkte R_0 trifft. Die Fläche R_0^2 schneidet σ^5, ausserhalb d, in 6 Punkten R, enthält somit ausser (r_0, ϱ_0^3) noch 5 Figuren (r, ϱ^3); diese werden in S_5 abgebildet. Daher ist S_5 ein 5-facher Punkt der Bildkurve σ des Systems Σ. Analog ergibt sich, dass S_3 ein 4-facher Punkt ist. Beachtet man, dass S_3S_5 noch den Punkt R_0 enthält, so erhellt, dass jene Bildkurve eine $\sigma^{10}\,(S_3^4, S_5^5)$ ist.

Die Kurven $\sigma^{10}\,(S_3^4, S_5^5)$ und $\lambda^5\,(S_3^3, S_5^2)$ bestimmen 28 Punkte R; ihnen entsprechen 8 ϱ^3, welche l nicht treffen; es ergibt sich somit wiederum, dass Σ eine Fläche 20en Grades ist. Auf ihr ist σ^3 vierfache, σ^5 fünffache Kurve, d eine zehnfache Gerade.

6. Betrachten wir das System Φ der Kurven ϱ^4, welche eine vorgegebene Ebene Φ berühren.

Auf der kubischen Kurve, welche Φ gemein hat mit der durch S_3 gelegten Fläche R^3, bilden die Flächen R^2 eine Involution I^4; demnach wird Φ berührt durch 6 Kurven ϱ^4, welche in S_3 ihr Bild haben. Analog gibt es 6 ϱ^4 des Systems, welche in S_5 abgebildet werden.

Demnach ist die Bildkurve eine $\Phi^{12}\,(S_3^6, S_5^6)$. Sie trifft eine $\lambda^5\,(S_3^3, S_5^2)$ in 30 Punkten R. Der Ort der Φ berührenden ϱ^4 ist somit eine *Fläche* Φ^{30}, mit 6-fachen Kurven σ^3, σ^5 und 18-facher Geraden d.

Zwei Kurven Φ^{12} haben 72 Punkte R gemein; zwei Ebenen werden somit durch 72 ϱ^4 berührt.

7. Eine Ebene Φ durch die Gerade l schneidet die Fläche Λ^{12} noch in einer Kurve elften Grades; diese trifft l in den Stützpunkten der beiden ϱ^4, welche l zweimal schneiden, somit in 7 Punkten, wo Φ von Kurven ϱ^4 berührt wird. Der Ort der Berührungspunkte von Φ mit Kurven ϱ^4

ist daher eine Kurve Φ^7. Sie hat auf d einen 5-fachen Punkt (§ 4), demnach das Geschlecht 5. Weil die Bildkurve Φ^{12} somit ebenfalls das Geschlecht 5 hat, gibt es auf ihr, ausser den beiden 6-fachen Punkten, 20 singuläre Punkte. Sei x die Anzahl ihrer Doppelpunkte, y die Anzahl ihrer Spitzen, also $x+y=20$, demnach $72-2x-3y$ ihre Klasse, so ist $60-2x-3y$ die Anzahl ihrer Tangenten, welche nach S_3 zielen. Diese Tangenten entsprechen offenbar den 3 Flächen R^2, welche Φ berühren und den 5 R^2, welche durch die Schnittpunkte von Φ und σ^5 gehen [1]). Also ist $2x+3y=52$ und $x=8$, $y=12$. Hieraus erhellt, dass eine Ebene durch 12 Kurven ϱ^4 *osculiert* und durch 8 Kurven ϱ^4 in je *zwei Punkten berührt* wird.

8. Ein Büschel (α^3) von kubischen Flächen, dessen Basis aus den windschiefen Geraden c, d und der Raumkurve σ^7 besteht, erzeugt mit einem Büschel (β^2) von quadratischen Flächen, dessen Basis aus c, d und deren Transversalen f, g besteht, eine *Kongruenz* von *rationalen* Raumkurven ϱ^4, welche c und d je dreimal treffen.

Ein β^2 trifft σ^7 ausserhalb c und d in 6 Punkten: demnach stützt eine ϱ^4 sich sechsmal auf σ^7; die Geraden f und g schneidet sie je in einem Punkte.

9. Es sei δ eine feste, durch d gelegte, Ebene; sie trifft c in einem Punkte C, σ^7, ausserhalb d, in den Punkten A_1, A_2, A_3. Der Büschel (α^3) bestimmt in δ den Büschel (α^2), mit Basispunkten A_k und C; der Büschel (β^2) erzeugt den Stralenbüschel (b) um C. Jede α^2 hat mit jedem Stral b einen Punkt E gemein; dieser Punkt soll als *Bild* der ϱ^4 betrachtet werden, welcher von den entsprechenden Flächen α^3 und β^2 erzeugt wird.

Die *singulären* Punkte A_k sind Bilder von je ∞^1 Kurven; diese liegen auf der durch A_k gelegten Fläche β^2_k.

Auch der *singuläre* Punkt C bildet ∞^1 Kurven *ab*; sie liegen auf der Fläche Γ^5, welche das Erzeugniss ist der Büschel (α^3) und (β^2), wenn diese derart projektiv auf einander bezogen sind, dass die ihnen entsprechenden α^2 und b sich in C berühren. Diese Fläche geht je zweimal durch c und d und enthält die drei Geraden $A_k C$.

10. Die Kurven ϱ^4, welche eine Gerade l treffen, bilden eine *Fläche* Λ und werden abgebildet auf die Punkte E einer Kurve λ. Diese geht zweimal durch jeden Punkt A und fünfmal durch C, ist daher eine λ^7. Als *rationale* Kurve besitzt sie noch zwei Doppelpunkte; diese sind die Bilder der beiden ϱ^4, welche l je *zweimal* treffen. Die Stützpunkte dieser Kurven bilden die gemeinschaftlichen Paare der Involutionen, welche (α^3) und (β^2) auf l bestimmen.

---

[1]) Ich verdanke diese Bemerkung Herrn Dr. G. SCHAAKE.

Zwei Kurven $\lambda^7 (3\,A^2, C^5)$ haben $7^2 - 3 \times 2^2 - 5^2$, also 12, Punkte E gemein. Es gibt daher 12 Kurven ϱ^4, welche *zwei beliebig gewählte Geraden* treffen.

Die Kurven ϱ^4, welche l schneiden, liegen auf einer *Fläche* Λ^{12}, mit Doppelkurve σ^7, fünffachen Geraden c, d, zwei Doppelkurven ϱ^4 und dreifachen Geraden f, g; letzteres erhellt hieraus, dass die ϱ^4, welche f in einem Punkte F treffen, auf der durch F gelegten α^3 liegen.

11. Jede Transversale r von c, d und σ^7 wird durch eine Kurve ϱ^3 zu einer Kongruenzkurve ergänzt. Die Geraden r bilden eine *Regelfläche* $(r)^6$, mit dreifachen Leitlinien c, d.

Die Flächen $(r)^6$ und Λ^{12} haben, ausserhalb c, d und σ^7, $6 \times 12 - 2 \times 3 \times 5 - 2 \times 7$, also 28, Geraden r gemein. Da von diesen nur 6 sich auf l stützen, wird l von 22 ergänzenden Kurven ϱ^3 getroffen. Demnach ist der *Ort der Kurven* ϱ^3 eine Fläche Σ^{22}.

Eine α^3 enthält 5 Geraden r; diese bestimmen je eine β^2; eine β^2 trifft, auf σ^7, 6 Geraden r. Vermittelst der Geraden r ergibt sich demnach eine Verwandtschaft (5, 6) zwischen (α^3) und (β^2); das Erzeugniss dieser (5, 6) ist eine Figur 28$^{\text{en}}$ Grades, welche offenbar aus $(r)^6$ und Σ^{22} besteht.

Von den 6 Figuren (r, ϱ^3), welche auf der durch A_1 gelegten β_1^2 liegen, werden 5 in A_1 abgebildet; die sechste enthält die Geraden $A_1\,C$ und die ihr entsprechende ϱ^3 wird in einen Punkt von $A_1\,C$ abgebildet.

Die Kurven ϱ^3 werden somit auf die Punkte einer Kurve $\sigma^{11} (3A^5, C^5)$ abgebildet.

Diese hat mit $\lambda^7 (3\,A^2, C^5)$ $7 \times 11 - 3 \times 2 \times 5 - 5^2$, also 22, Punkte E gemein; hieraus ergibt sich wiederum der Grad 22 der *Fläche* Σ. Ihr Schnitt mit δ setzt sich zusammen aus der Kurve σ^{11} und der 11-fachen Geraden d. Auch c ist 11-fach auf Σ^{22}, und σ^7 ist eine 5-fache Kurve.

Die Flächen Σ^{22} und Λ^{12} haben, ausser den vielfachen Linien c, d und σ^7, 28 Kurven ϱ^3 gemein; von diesen treffen 22 die Gerade l, indes die übrigen 6 den sich auf l stützenden Geraden r entsprechen.

12. Dem Büschel (β^2) gehören zwei Ebenenpaare an. Jedes dieser Paare wird von jeder α^3 in zwei Kegelschnitten getroffen, welche einen auf der Kante des Ebenenpaares liegenden Punkt gemein haben und eine zusammengesetzte Kongruenzkurve bilden.

Diese Systeme werden abgebildet auf die Punktreihen der Geraden b, welche nach den Punkten (df) und (dg) zielen. Jede dieser beiden Geraden enthält zwei Punkte E einer $\lambda^7 (3\,\mathrm{A}^2, C^5)$; demnach liegen auf einer Fläche Λ *vier* Figuren $(\varrho_1^2, \varrho_2^2)$.

13. Betrachten wir das System Ψ der ϱ^4, welche eine Ebene ψ berühren. Auf dem Kegelschnitt ψ^2, den ψ mit der Fläche β_1^2 gemein hat, bilden die durch A_1 gelegten ϱ^4 eine I^4; demnach ist A_1 ein sechsfacher Punkt der Bildkurve von Ψ. Die durch $A_2 A_3$ gelegte Fläche α^3 trifft ψ

in einer ψ^3; die auf dieser erzeugte I^4 hat 8 Doppelpunkte; A_2A_3 trägt somit 8 Bildpunkte E und die 6-fachen Bildpunkte A_2, A_3. Das Bild von Ψ ist daher eine Kurve $\psi^{20}(3\,A^6, C^{14})$.

Weil $\psi^{20}(3\,A^6, C^{14})$ und $\lambda^7(3\,A^2, C^5)$ offenbar $20\times7-3\times6\times2-14\times5$, also 34, Punkte E gemein haben, bilden die ϱ^4, welche ψ berühren, eine *Fläche* Ψ^{34}, mit 6-facher Kurve σ^7, 14-fachen Geraden c, d und 8-fachen Geraden f, g. (Die durch einen Punkt von f gelegte α^3 enthält in ψ eine I^4, mit 8 Doppelpunkten).

Weil zwei Kurven ψ^{20} sich in 96 Punkten E treffen, gibt es 96 Kurven ϱ^4, welche *zwei Ebenen berühren*.

14. Eine durch l gelegte Ebene ψ trifft Λ^{12} noch in einer Kurve λ^{11}; diese hat mit l die beiden Punktpaare gemein, in welchen die beiden l zweimal schneidenden ϱ^4 sich auf l stützen; demnach liegen auf l 7 Punkte in denen ψ von Kurven ϱ^4 berührt wird. Die Fläche Ψ wird somit von ψ in einer Kurve ψ^7 berührt.

Werden die in ψ belegenen Büschel (α^3) und (β^2) derart projektiv auf einander bezogen, dass entsprechende Kurven sich auf c berühren, so erzeugen sie eine Kurve 5en Grades mit 3-fachem Punkte. Somit hat ψ^7 zwei dreifache Punkte, ist daher vom Geschlecht 9. Die Bildkurve $\psi^{20}(3\,A^6, C^{14})$ ist ebenfalls vom Geschlecht 9, hat demnach noch $\frac{1}{2}\times19\times18-3\times\frac{1}{2}\times6\times5-\frac{1}{2}\times14\times13-9$, also 26, singuläre Punkte. Diesen entsprechen Kurven ϱ^4, welche ψ osculieren oder zweimal berühren.

Sei x die Anzahl der Doppelpunkte der ψ^{20}, demnach $26-x$ die Anzahl ihrer Spitzen; die Klasse dieser Kurve beträgt dann $20\times19-$ $-14\times13-3\times6\times5-2x-3(26-x)$, also $30+x$. Nach C zielen somit $x+2$ Tangenten.

Eine Gerade b, durch C, bestimmt auf ψ eine Kurve β^2, welche eine I^4 enthält. Wenn β^2 die Kurve σ^7 trifft, artet I^4 aus in eine I^3 und einen festen Punkt; von den 6 auf b liegenden Punkten E, sind dann zwei zusammen gefallen, wonach b Tangente der ψ^{20} ist. Wenn β^2 ein Geradenpaar ist, artet I^4 wiederum aus. Somit ist $x+2=7+3$, also $x=8$.

Die Ebene ψ wird daher von 8 Kurven ϱ^4 je *zweimal berührt* und von 18 ϱ^4 *osculiert*.