**Mathematics.** — *Ueber die in der Wellengleichung verwendeten hyperkomplexen Zahlen.* Von J. A. SCHOUTEN. (Communicated by Prof. P. EHRENFEST.)

(Communicated at the meeting of February 23, 1929).

In seiner Arbeit „A symmetrical treatment of the wave equation" [1]) hat A. S. EDDINGTON gezeigt, dasz die bekannten Asymmetrien in den Gleichungen von DIRAC entfernt werden können wenn man mit der Theorie der Matrizen anfängt. Obwohl diese Methode, die inzwischen zur mathematischen Festlegung der Naturkonstante $hc/2\pi e^2$ geführt hat [2]), wohl als eine bedeutende Verbesserung anerkannt werden musz, entbehrt sie noch der sichern Grundlage, da sie sich auf gewisse merkwürdige zu Anfang eingeführte uneigentliche "Drehungen" aufbaut, die nur dazu dienen, den Operatoren $E_1, \ldots, E_5$ die ihnen zukommenden Eigenschaften zu verschaffen, und dementsprechend später gar nicht mehr verwendet werden.

Es soll nun im Folgenden gezeigt werden, dasz die uneigentlichen Drehungen als Grundlage vollständig entbehrt werden können, sobald man noch einen Schritt weiter zurück geht und mit der Theorie der komplexen Zahlensysteme anfängt. Es zeigt sich dabei, dasz das kleinste Zahlensystem, das überhaupt in Frage kommen kann, das "ursprüngliche" System mit 16 Einheiten ist und dabei ergeben sich die Eigenschaften der Operatoren $E$, einschlieszlich der Möglichkeit der Matrixdarstellung, aus den bekannten Eigenschaften dieser Systeme.

1. Es seien $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$ vier höhere komplexe Zahlen mit den Rechenregeln

$$\left.\begin{aligned} E_i\, E_i &= 1 \\ E_i\, E_j &= -E_j\, E_i \end{aligned}\right\} i, j = 1, \ldots, 4\ , \qquad (1)$$

die auszerdem dem *assoziativen* Gesetz unterworfen sind. Dann folgt, dasz die 16 Zahlen $1, E_1, \ldots, E_{12} = E_1 E_2, \ldots, E_{123} = E_1 E_2 E_3, \ldots, E_{1234} = E_1 E_2 E_3 E_4$ ein geschlossenes assoziatives System bilden. Es ist das vierte System in der Reihe der sogenannten ursprünglichen Systeme [3]), d.s. Systeme die kein invariantes Untersystem enthalten, und wir wollen dasselbe dementsprechend mit $U_4$ bezeichnen. Die aus (1) hervorgehende reelle Form der Rechenregeln (d.h. Form mit reellen Koeffizienten) führt auf CLIFFORD zurück.

---

[1]) Proc. Roy. Soc. London, A 121, (28), 524—542.

[2]) The charge of an electron, Proc. Roy. Soc. London, A. 122, (29), 358—369.

[3]) Auch System der Sedenionen oder Quadriquaternionen genannt.

Eine zweite reelle Form, die sich aber aus der ersten vermöge komplexer Transformationen ableitet, wird gebildet durch die Produktregeln der 4-reihigen Matrizen (genauer: der gemischten Gröszen zweiten Grades in vier dimensionen)

$$\sum_j P_i^{\ j} Q_j^{\ k} = R_i^{\ k} \quad ; \quad i, j, k = 1, \ldots, 4 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Aus dem assoziativen Gesetz folgt also, dasz sich die 16 Zahlen $E$ als 4-reihige Matrizen auffassen lassen.

Eine dritte, mit *der zweiten* ebenfalls in komplexer Weise, aber mit *der ersten* in reeller Weise verknüpfte reelle Form entsteht, indem man bemerkt, dasz $E_{1234}$ sich ebenfalls antikommutativ verhält zu $E_1$, $E_2$, $E_3$ und $E_4$ während $E_{1234}\, E_{1234} = 1$ ist. Schreibt man nun $E_{1234} = E_5$, so ist

$$\left.\begin{aligned} E_i\, E_i &= 1 \\ E_i\, E_j &= -E_j\, E_i \end{aligned}\right\} i, j = 1, \ldots, 5, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und es ergeben sich daraus die Rechenregeln für die 16 Einheiten $1, E_1, \ldots, E_{12} = E_1 E_2, \ldots$

Diese Regeln führen ebenfalls auf CLIFFORD zurück. Die merkwürdigen Beziehungen zwischen vierdimensionaler und fünfdimensionaler Invarianz finden ihren Grund in dieser selbstergänzenden Eigenschaft der vier hyperkomplexen Zahlen $E_1$, $E_2$, $E_3$ und $E_4$. Ein System von fünf Zahlen $E_1, \ldots, E_5$, das den Regeln (3) unterworfen ist, soll ein *Orthogonalsystem* heiszen. Offenbar giebt es im System $U_4$ kein Orthogonalsystem das mehr als fünf Zahlen enthält.

Eine vierte reelle Form folgt aus der Eigenschaft, dasz das System $U_4$ das Produkt von zwei Quaternionsystemen ist. Bilden also $1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ einerseits und $1, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ anderseits ein Quaternionsystem mit den Rechenregeln

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 \lambda_1 = -1 & \qquad \mu_1 \mu_1 = -1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = -\lambda_2 \lambda_1 = \lambda_3 & \qquad \mu_1 \mu_2 = -\mu_2 \mu_1 = \mu_3 \\ cycl. & \qquad cycl. \end{matrix}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

so bilden $1, \lambda_i, \mu_i, \lambda_i \mu_j = \mu_j \lambda_i$, $i, j = 1, 2, 3$, ein System $U_4$. Es ist leicht einzusehen, dasz ein Orthogonalsystem sich etwa folgendermaszen bilden läszt

$$E_1 = \lambda_1 \mu_3, \quad E_2 = \lambda_2 \mu_3, \quad E_3 = \lambda_3 \mu_3, \quad E_4 = -i \mu_1, \quad E_5 = -i \mu_2 \ . \quad (5)$$

Umgekehrt lassen sich zu jedem Orthogonalsystem zwei Systeme $\lambda$ bez. $\mu$ so wählen, dasz sie den Gleichungen (5) genügen[1]:

$$\left.\begin{matrix} \mu_1 = i E_4\,, & \mu_2 = i E_5\,, & \mu_3 = -E_{45} \\ \lambda_1 = -E_{23}, & \lambda_2 = -E_{31}, & \lambda_3 = -E_{12} \end{matrix}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

[1]) Man bekommt die $\sigma$ und $\varrho$ von Dirac wenn man setzt: $\sigma_i = i\lambda_i$, $\varrho_i = i\mu_i$.

2. Die mit $E_1, \ldots, E_5$ korrespondierenden Matrizen sind Wurzeln der Einheitsmatrix. Sie haben infolgedessen nur lineare Elementarteiler und eine jede läszt sich mit Hilfe geeigneter Koordinatentransformationen in die Diagonalform überführen, wo in der Diagonale entweder $+1, +1, +1, -1$ oder $+1, +1, -1, -1$ stehen. Nun läszt sich aber jede der 5 Zahlen $E$ als Differenz eines Produktes und seiner Umkehrung schreiben, z.B.

$$E_1 = {}^1/_2 (E_1 E_{12} - E_{12} E_1), \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

woraus nach einem bekannten Satze hervorgeht, dasz die Spur Null ist. Es bleiben also nur Matrizen, mit den Elementarteillern $(\lambda-1)$, $(\lambda-1)$, $(\lambda+1)$, $(\lambda+1)$. Aus der Theorie der Elementarteiler folgt, dasz sich alle gemischten Gröszen zweiten Grades mit denselben Elementarteilern durch lineare Transformationen ineinander überführen laszen, und est ist somit sichergestellt, dasz man mit jeder beliebigen Zahl, deren Matrix die Elementarteiler $(\lambda-1)$, $(\lambda-1)$, $(\lambda+1)$, $(\lambda+1)$ besitzt, als erste Zahl eines Orthogonalsystems anfangen kann und dasz sich dann stets ein diese Zahl enthaltendes Orthogonalsystem bilden läszt.

Für die Zahlen $\lambda$ und $\mu$ läszt sich ähnliches ableiten. Die Elementarteiler der zu den Zahlen aus diesen Zahlentripletten gehörigen Matrizen sind $(\lambda-i)$, $(\lambda-i)$, $(\lambda+i)$, $(\lambda+i)$ und daraus geht hervor, dasz man mit jeder beliebigen Zahl, deren Matrix diese Elementarteiler besitzt, als erste Zahl eines Zahlentriplettes anfangen kann und dasz sich dann stets ein diese Zahl enthaltendes Triplett und ein dazugehöriges zweites Triplett bilden läszt, so dasz die Rechenregeln (4) gelten.

3. Stellt man die Frage, wie viele Orthogonalsysteme existieren, die $E_5$ enthalten, so ist zunächst zu bemerken, dasz auch $E'_1, \ldots, E'_4, E_5$; $E'_j = i E_5 E_j, j = 1, \ldots, 4$, ein solches System bilden. Dieses Resultat rührt von EDDINGTON her; bei ihm bleiben aber diese beiden Systeme (bis auf Vorzeichenwechsel) die einzig möglichen, was damit zusammenhängt, dasz seine „perpendicular sets" von fünf Zahlen in Bezug auf die zu Anfang erwähnten uneigentlichen Drehungen definiert sind und sich somit nicht genau mit unseren Orthononalsystemen decken. Es berechnet sich leicht, dasz die allgemeine Form des gewünschten Systems (bis auf Vorzeichenwechsel) lautet:

$$\alpha E_1 + \beta E'_1, \ldots, \alpha E_4 + \beta E'_4, E_5, \; \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad \ldots \quad (8)$$

Sehen wir von Vorzeichenwechsel ab, so gibt es also $\infty^1$ reelle Systeme, die $E_5$ enthalten, und diese sind einander paarweise zugeordnet ($\alpha, \beta$ zu $-\beta, \alpha$).

Jedes dieser Systeme z.B. $E_1, \ldots, E_5$ ist invariant bei orthogonalen Transformationen der fünf Operatoren. Multipliziert man eine lineare Gleichung in den $E$, z.B.

$$(\sum_i t_i E_i)\,\psi = 0 \quad ; \quad i = 1, \ldots, 5, \quad \ldots \ldots \quad (9$$

die in diesem Sinne fünfdimensionale Invarianz aufweist, mit $E_5$, so entsteht die mit (9) aequivalente

$$(\sum_i t_i E_i' + t_5)\,\psi = 0 \quad ; \quad i = 1, \ldots, 4, \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

die vierdimensionale Invarianz besitzt. Dieses wichtige Resultat EDDINGTONS ist also unabhängig von der bei ihm zu Grunde gelegte auf die uneigentlichen Drehungen beruhenden Definition der "perpendicular sets" und ist rein eine Folge der Eigenschaften des Zahlensystems $U_4$.

Jede homogene quadratische Form in den $E_1, \ldots, E_5$ lässt sich als nicht homogene quadratische Form in $E_1', \ldots, E_4'$ schreiben [1]);

$$\sum_{ij} t_{ij} E_i E_j = \sum_{ab} t_{ab} E_a' E_b' + i \sum_a (t_{a5} - t_{5a}) E_a' + t_{55} \quad \ldots \quad (11)$$

$$i, j = 1, \ldots, 5\,;\; a, b = 1, \ldots, 4.$$

4. Es sei zum Schlusz die Frage erörtert welche Zahlen überhaupt die Form $\sum_i t_i E_i$, $i = 1, \ldots, 5$ annehmen können. Aus der Möglichkeit der orthogonalen Transformation der $E$ folgt, dasz eine solche Zahl sich nur durch einen gewöhnlichen Zahlenfaktor unterscheidet von einer Zahl deren Matrix die Elementarteiler $(\lambda - 1)$, $(\lambda - 1)$, $(\lambda + 1)$, $(\lambda + 1)$ besitzt. Die gesuchten Zahlen sind also diejenigen, deren Matrizen lineare Elementarteiler und eine charakteristische Gleichung mit zwei zweimal zählenden entgegengesetzten Wurzeln besitzen.

---

[1]) Diese Bemerkung verdanke ich Herrn D. VAN DANTZIG.