Mathematics. — *Eine Kongruenz von elliptischen Raumkurven vierter Ordnung.* Von Prof. JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of March 23, 1929.)

1. Die elliptischen Raumkurven ε^4 durch fünf Punkte B_k, welche die Geraden c_1 und c_2 je zweimal treffen, bilden eine Kongruenz E, welche durch zwei Büschel (Q_1) und (Q_2) von quadratischen Flächen erzeugt werden kann. Die Basis von (Q_1) besteht aus c_1 und der kubischen Kurve γ_1^3 durch B_k, welche c_1 zweimal schneidet; analog gehen die Flächen Q_2 durch c_2 und die Kurve γ_2^3.

Jede Q_1 enthält ein Büschel (ε^4) mit sieben Basispunkten; (Q_1) bestimmt auf c_2 eine Involution von Basispunkten C'_2, C_2''.

Auf einer Geraden g bestimmen (Q_1) und (Q_2) i. A. zwei I^2, welche i. A. *ein* Punktepaar gemein haben, wonach g Bisekante für *eine* ε^4 ist. $(\mathsf{P}^5\,\mathsf{B}^3 = 1)$.

2. Ordnet man zwei Flächen Q_1, Q_2 einander zu, wenn sie sich auf der Geraden l treffen, so ergibt sich zwischen (Q_1) und (Q_2) eine Verwandtschaft (2,2). Demnach sind auch die Kegelschnittbüschel (K_1) und (K_2), welche (Q_1) und (Q_2) in der Ebene β_{123} $(B_1 B_2 B_3)$ bestimmen, in einer (2,2) begriffen. Mit Hülfe einer quadratischen Transformation, mit Hauptpunkten B_1, B_2, B_3, ersieht man, dass (K_1) und (K_2) eine Kurve λ^8 erzeugen, welche *vierfache* Punkte in B_1, B_2, B_3 und *Doppelpunkte* in den Spuren C_1 und C_2 von c_1, c_2 hat; ausserdem hat diese rationale Kurve noch einen Doppelpunkt in der Spur der ε^4, welche l zweimal trifft.

Betrachtet man als *Bild* einer ε^4 den Punkt E, welchen sie ausser B_1, B_2, B_3 mit β_{123} gemein hat, so entspricht dem System Λ der ε^4, welche l treffen, demnach eine *Bildkurve* $\lambda^8\,(B_1^4\,B_2^4\,B_3^4\,C_1^2\,C_2^2)$.

Weil zwei Kurven λ^8 acht Punkte E gemein haben, ist der *Ort* jenes Systems eine *Fläche* Λ^8, und gibt es acht Kurven in E, die sich auf zwei Geraden stützen $(\mathsf{P}^5\,\mathsf{B}^2\,\nu^2 = 8)$.

Die ε^4, welche γ_1^3 in einem festen Punkt treffen, liegen auf der durch diesen Punkt gelegten Fläche Q_2. Demnach sind γ_1^3 und γ_2^3 *Doppelkurven* von Λ^8; auf dieser Fläche sind B_k *vierfache Punkte* c_1 und c_2 *Doppelgeraden.*

3. a. Jede der 5 Kurven ϱ^3 durch B_k, welche sich auf c_1 und c_2 stützen, wird zu einer ε^4 ergänzt durch eine Bisekante, welche c_1 und c_1 trifft. (5 Figuren).

b. Die Transversale t_k durch B_k über c_1 und c_2 wird zu einer ε^4 ergänzt durch eine ϱ^3, welche die übrigen Punkte B enthält, c_1 und c_2 schneidet und t_k zweimal trifft. (5 Figuren).

c. Jede Gerade $B_k\, B_l$ ist Bisekante einer ϱ^3 durch die übrigen Punkte B, welche auch c_1 und c_2 zweimal schneidet. (10 Figuren).

d. Der Kegelschnitt durch $B_1 B_2 B_3 C_1 C_2$ wird zu einer ε^4 ergänzt durch einen Kegelschnitt der B_4, B_5 enthält, jenen zweimal trifft und sich auf c_1, c_2 stützt. (5 Figuren).

4. Weil jede Gerade durch den Punkt M i. A. Sehne *einer* ε^4 ist, liegen die Stützpunkte der ε^4 auf einer Fläche μ^5, mit *dreifachem* Punkte M.

Diese Fläche hat mit dem kubischen Kegel, welcher die durch M gelegte Kurve ε_0^4 projiziert, zunächst diese Kurve gemein; der Restschnitt besteht aus 11 Geraden, welche offenbar Bisekanten von ∞^1 Kurven ε^4 sind. Zu diesen *singulären Bisekanten* gehören die 5 Geraden MB_k und die 4 Geraden der durch M gelegten Flachen Q_1 und Q_2, welche sich in M treffen. Durch M gehen somit zwei Geraden s welche durch die Büschel (Q_1) und (Q_2) in derselben Involution geschnitten werden.

Die Kurven ε^4, welche eine Gerade MB_k oder eine Gerade s treffen, bilden je eine Fläche F^4; für die übrigen 4 singulären Bisekanten ist die analoge Fläche eine Q_1 oder eine Q_2.

5. In einer Ebene φ bestimmen (Q_1) und (Q_2) zwei Büschel (k_1) und (k_2). Auf einer k_1 bilden die ε^4 eine Involution I^4; demnach enthält eine Q_1 sechs ε^4, welche φ berühren. Das System Φ der ε^4, welche φ berühren ordnet somit die Büschel (K_1) und (K_2), (§ 2), in eine Verwandtschaft (6,6).

Demnach ist die *Bildkurve* des Systems Φ eine φ^{24} $(B_1{}^{12} B_2{}^{12} B_3{}^{12} C_1^6 C_2^6)$. Mit einer Kurve λ^8 hat sie 24 Punkte E gemein; daher liegt das System auf einer Fläche Φ^{24}, mit *zwölffachen* Punkten B, *sechsfachen* Geraden c_1, c_2 und *sechsfachen* Kurven γ_1^3, γ_2^3. $(\mathrm{P}^5\, \mathrm{B}^2\, \nu\varrho = 24)$.

Weil zwei Kurven φ^{24} sich in 72 Punkten E durchsetzen, ist $\mathrm{P}^5\, \mathrm{B}^2\, \varrho^2 = 72$.

6. Der Ort der Punkte in denen sich zwei Kurven der Büschel (k_1), (k_2) berühren, ist eine Kurve φ^5; sie ist offenbar der Ort der Punkte in denen die Ebene φ von Kurven ε^4 berührt wird.

Ausser der zweimal gelegten Kurve φ^5 hat φ mit der Fläche Φ^{24} noch eine Kurve φ^{14} gemein; diese ist der Ort der Punktepaare, welche die ε^4 des Systems Φ ausser ihren Berührungspunkten noch mit φ gemein haben.

Durch eine quadratische Transformation wird φ^5 in eine Kurve ψ^7 übergeführt, welche der Ort ist der Berührungspunkte der rationalen biquadratischen Kurven eines Büschels mit den Geraden eines Stralenbüschels; diese Kurve hat drei dreifache Punkte, in denen je eine Tangente nach dem Mittelpunkte des Stralenbüschels zielt. Dieser Punkt trägt 15 Wendetangenten der ψ^7; demnach gibt es auf φ^5 15 Punkte, wo φ eine Kurve ε^4 *oskuliert.*

In diesen 15 Punkten wird φ^5 von φ^{14} berührt; weil φ^{14} vierfache Punkte besitzt in den 8 Basispunkten von (k_1) und (k_2), treffen φ^5 und φ^{14} sich noch in 8 Punkten. Diese bilden offenbar 4 Paare von Punkten in denen φ von einer ε^4 berührt wird.

Demnach wird eine *Ebene* i. A. von *vier* Kurven ε^4 je *zweimal berührt* und von *fünfzehn* Kurven ε^4 *oskuliert.*

7. Aus § 4 ergibt sich dass ein Punkt M der Ebene φ acht Tangenten t von Kurven ε^4 trägt. Die in φ liegenden Tangenten t umhüllen somit eine Kurve der achten Klasse; ihr Geschlecht stimmt mit dem der Kurve φ^5 überein, ist daher 6. Sie besitzt somit 15 *Doppeltangenten*; zu diesen gehören die 6 Geradenpaare der Büschel (k_1), (k_2), denn jede dieser 12 Geraden trägt eine Involution I^2, berührt also zwei ε^4.

Die übrigen 3 Doppeltangenten sind offenbar singuläre Bisekanten s (§ 4). Die Geraden s bilden daher eine *Kongruenz* [2,3].

8. Eine andere Abbildung der Kongruenz E ergibt sich, wenn man ε^4 abbildet auf die Spuren der beide Bisekanten durch M in einer Bildebene ε. Eine ε^4 hat alsdann zwei Bildpunkte, E_1 und E_2.

Die durch M gelegte ε_0^4 wird abgebildet auf die Punkte der Kurve ε_0^3, in welche ε_0^4 aus M projiziert wird. Auf ε_0^3 gibt es 11 *singuläre Bildpunkte*: die Spuren der nach M zielenden singulären Bisekanten.

Die *Bildkurve* λ der ε^4, welche die Gerade l treffen, hat auf ε_0^3 7 *vierfache* und 4 *zweifache* Punkte (§ 4), ist somit eine λ^{12}.

Zwei Kurven λ^{12} haben 8 Paare E_1, E_2 gemein; hieraus ergibt sich wiederum $\mathsf{P}^5\mathsf{B}^2\nu^2 = 8$.

Ein System Φ erzeugt Involutionen I^4 auf den Flächen F^4 und Q, welche zu den singulären Bisekanten gehören; diese I^4 haben 12 bez. 6 Doppelpunkte. Demnach hat die Bildkurve von Φ 7 *zwölffache* und 4 *sechsfache* Punkte, wonach ihr Grad 36 beträgt. Mit einer λ^{12} hat sie 24 Paare E_1, E_2 gemein; hieraus erhellt wiederum $\mathsf{P}^5\mathsf{B}^2\nu\varrho = 24$.
