Physics. — *Ueber den Zusammenhang der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie mit der Quantentheorie.* Von I. TAMM (Moskau). (Communicated by Prof. P. EHRENFEST.)

(Communicated at the meeting of March 23, 1929).

In der vorliegenden Note versuche ich zu zeigen, dass fuer die neue Einsteinsche Feldtheorie [1]) gewisse quantenmechanische Zuege charakteristisch sind und dass man hoffen darf, dass diese Theorie die Erfassung der Quantengesetze des Mikrokosmos ermoeglichen wird.

I. Der Hauptgedanke der neuen Einsteinschen Theorie besteht in der Annahme, dass die physikalischen Eigenschaften des Raum-Zeit-Kontinuums durch die Beschaffenheit der lokalen parallelen 4-Beine bestimmt werden. Unter einem 4-Bein ist die Gesamtheit von 4 zu einander orthogonalen Einheitsvektoren zu verstehen; deren auf ein beliebiges Koördinatsystem X^ν bezogene Komponenten mit ${}_sh^\nu$ und die zugehörigen normierten Unterdeterminanten mit ${}^sh_\nu$ bezeichnet werden. Die Beine gleichen Nummers der lokalen 4-Beine in 2 beliebigen Weltpunkten sind definitionsgemäss als parallel zu einander anzusehen (Fernparallelismus).

Es gilt:

$$ {}^sh_\mu\, {}^sh_\nu = g_{\mu\nu} \quad , \quad {}_sh^\mu\, {}_sh^\nu = g^{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \quad (1) $$

wo $g_{\mu\nu}$ der metrische Fundamentaltensor ist. Der einfachste Tensor der aus ${}_sh^\nu$ und ihren Ableitungen gebildet werden kann, ist der Tensor [2])

$$ \Lambda^\lambda_{\mu\nu} = -\Lambda^\lambda_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\, {}_sh^\lambda \left(\frac{\partial\, {}^sh_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\, {}^sh_\nu}{\partial x^\mu} \right) \quad \ldots \quad (2) $$

Ist $\Lambda^\lambda_{\mu\nu}$ gleich Null, so ist die Welt (pseudo-) euklidisch. Die Spur des Tensors, $\Lambda^\lambda_{\mu\nu}$ soll nach EINSTEIN dem elektromagnetischen Viererpotentiale Φ_μ gleich sein; wir setzen etwas allgemeiner

$$ \Lambda^\lambda_{\mu\nu} = a\Phi_\mu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3) $$

die universale Proportionalitätskonstante a soll später bestimmt werden.

2. Die von DIRAC [3]) gegebene Wellengleichung des Elektrons in einem feldfreien Raum lässt sich unter Verwendung der Minkowskischen Massbestimmung folgendermassen schreiben:

$$ F\psi \equiv (A^s p_s + Bmc)\,\psi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4) $$

---

1) A. EINSTEIN, Sitzungsber. d. Preuss. Akad., **17**, 1928; **1**, 1929.

2) In seiner letzten Abhandlung lässt EINSTEIN den Faktor $1/2$ in (2) fort.

3) P. A. M. DIRAC, Roy. Soc. Proc., (A) **117**, 610 und **118**, 351, 1928.

wo A^s (bzw. B) die Komponenten eines konstanten q-Vektors (bzw. einer skalaren q-Zahl) bedeuten, die in Matrixform ausgedrückt werden können und folgenden Relationen genügen:

$$A^q A^s + A^s A^q = 2\,\delta_{qs} \quad , \quad A^q B + B A^q = 0 \quad , \quad B^2 = 1 \; . \; . \quad (5)$$

Um die Wellengleichung des Elektrons in einem elektromagnetischen Felde zu bestimmen, hat man nach DIRAC in (5) p_s durch $p_s + \frac{e}{c}\,\Phi_s$ zu ersetzen. Wir werden dagegen aus der folgenden Annahme ausgehen: *Bezieht man die Vektor A^s und p_s auf die Einsteinschen parallelen 4-Beine, so behält im Wesentlichen die Wellengleichung auch in einem beliebigen Felde dieselbe einfache Form* (4), wie in dem feldfreien Falle; nur wenn der Vektor $\Lambda^{\lambda}_{\mu\lambda}$ von Null verschieden ist, muss in (4) noch ein Zusatzglied [1])

$$i\,\mu\,\psi = i\,K\,\sqrt{(\Lambda^{\lambda}_{\mu\lambda}\;\Lambda^{\underline{\nu}}_{\underline{\mu}\nu})}\;\psi \quad , \qquad K = \frac{1}{2\pi}\,h \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

eingeführt werden.

Will man aber die Wellengleichung auf ein beliebiges Koordinatensystem x^ν beziehen, so hat man das skalare Produkt A^s_{ps} entsprechend umzuformen; also statt (2)

$$F\,\psi \equiv (A^\nu\,p_\nu + Bmc + i\mu)\,\psi \quad , \quad A^\nu = {}_s h^\nu A^s \quad . \; . \; . \quad (7)$$

zu schreiben. Um den Vergleich der Wellengleichung (7) mit der Schrödingerschen zu ermöglichen gehen wir zu der Gleichung zweiter Ordnung in ψ über, indem wir die linke Seite der Gleichung (7) der zu F konjugierten Operation $F^\star$

$$F^\star = A^\nu\,p_\nu + Bmc - i\mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

unterwerfen. Ersetzt man p_ν durch $-\,i\,K\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ und beachtet (3) und (5), so erhält man nach einer einfachen Rechnung:

$$\left.\begin{aligned} F^\star F\,\psi \equiv -\,K^2 \Big\{ g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right) + 2\,a\Phi^\nu\,\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \\ + a^2\,\Phi^\mu\Phi_\mu - \frac{m^2c^2}{K^2} - A^\mu\,A^\nu\,\Lambda^\lambda_{\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial x^\lambda} - aA^\nu\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\sqrt{\Phi^\mu\Phi_\mu}\Big\}\,\psi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

wo $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ die aus dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ gebildeten Dreiindicessymbole sind. Nimmt man nun an, dass

$$a = \pm\,\frac{i\,e}{cK} = \pm\,\frac{2\pi\,i\,e}{c\,h} \quad , \quad e > 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

ist, so fällt der von dem Matrizenvektor A^ν unabhängige Anteil der Gleichung (9) mit der allgemein-relativistischen Schrödingergleichung

[1]) Das Unterstreichen eines Index soll nach EINSTEIN das Heraufziehen des Index andeuten.

vollkommen zusammen. Das vorletzte Glied von (9) ist nahe verwandt mit dem in der Diracschen Wellengleichung vorkommenden Gliede

$$\frac{e}{c} K A^{\mu} A^{\nu} F_{\mu\nu} \psi,$$

das von den magnetischen Eigenschaften des Elektrons Rechenschaft gibt; das letzte Glied in (9) ist von derselben Grössenordnung.

Ersetzt man in (9) die Wellenfunktion ψ durch $e^{\frac{iS}{K}}$, und geht dann zu der Limite $K = O$ über, so erhält man die klassische Hamilton-Jakobische Differentialgleichung [1])

$$\lim_{K=0} \frac{1}{\psi} F^* F\psi = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial S}{\partial x^{\nu}} \pm \frac{2e}{c} \Phi_{\mu} \frac{\partial S}{\partial x_{\nu}} + \frac{e^2}{c^2} \Phi_{\mu} \Phi_{\nu} \right) + m^2 c^2 = 0 \quad (11)$$

Das Vorzeichen der Ladung e in (11) hängt davon ab, welcher von den beiden komplex-konjugierten Werten von a in die Wellengleichung (9) eingesetzt wird.

3. Die Tatsache, dass das skizzierte Verfahren wirklich zu einer vernünftigen Wellengleichung führt, ist deshalb besonders interessant, weil der zu der erwähnten wellenmechanischen Annahme analoge "klassische" Ansatz: die auf die 4-Beine bezogene Bewegung des Elektrons sei immer gleichförmig, zu keinen brauchbaren Bewegungsgleichungen führt. Somit erscheint *in der Einsteinschen Theorie das wellenmechanische Prinzip dem Prinzipe des kürzesten Weges der geometrischen Optik übergeordnet.* Der Uebergang zu der klassischen Mechanik, d. h. zu der Limite $K = \frac{1}{2\pi} h = 0$ kann erst *nach* dem Einsetzen der Wellenfunktion in die Wellengleichung vorgenommen werden, denn der in der das Verhältniss zwischen $\Lambda^{\lambda}_{\mu\lambda}$ und Φ_{μ} bestimmenden Konstante a enthaltene Faktor K kann nur durch den entsprechenden Faktor, der in der Wellengleichung vorkommt, aufgehoben werden.

4. Da Φ_{μ} reell ist, so folgt aus (3) und (10), dass der Fundamentaltensor ${}_{s}h^{\nu}$ komplex sein muss. Diese Tatsache scheint mit einigen Eigentümlichkeiten der Einsteinschen Feldgleichungen eng verbunden zu sein. Indem EINSTEIN die elektromagnetischen Potentiale Φ_{μ} gleich $\Lambda^{\lambda}_{\mu\lambda}$ setzt, definiert er nämlich die Tensordichte

$$\overline{\mathfrak{B}}^{a}_{kl} = \mathfrak{B}^{a}_{kl} - \varepsilon \mid h \mid (\Phi_l \, \delta^{a}_{k} - \Phi_h \, \delta^{a}_{l}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

[1]) Hätten wir das Zusatzglied $i \mu \psi$ in (7) nicht eingeführt, so wäre das Glied $\frac{e^2}{c^2} \Phi^{\mu} \Phi_{\mu}$ in (11) abwesend. Man könnte aber statt dessen auch m in (4) durch $m' = \sqrt{m^2 - \frac{1}{c^2} K^2 \Lambda^{\lambda}_{\lambda\mu} \Lambda^{\nu}_{\mu\nu}}$ ersetzen; welches von den beiden Verfahren das richtige ist, können wir zur Zeit nicht entscheiden.

wo $|h|$ die aus ${}_s h^\nu$ gebildete Determinante ist und ε eine beliebig kleine Hilfsgrösse bedeuten soll; $\mathfrak{B}^a_{kl}$ ist eine bestimmte aus ${}_s h^\nu$ gebildete Tensordichte. Die Einsteinschen Gravitationsgleichungen lauten

$$\overline{\mathfrak{B}}^a_{\underline{k}\,l}\big/_l - \overline{\mathfrak{B}}^s_{\underline{k}\,t} A^a_{st} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

mit der Vorschrift nach Vornahme der Operation$/_l$ (Divergenzbildung) zu $\varepsilon = 0$ überzugehen.

Nimmt man nun die Gültigkeit der Beziehungen (3) und (10) an, so kann man (12) unter Weglassung [1]) von ε folgendermassen schreiben:

$$\overline{\mathfrak{B}}^a_{kl} = \mathfrak{B}^a_{kl} \pm i \frac{c}{e} K (A^\sigma_{l\sigma} \, \delta^a_k - A^\sigma_{k\sigma} \, \delta^a_l) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

wobei die Vorschrift zu $\varepsilon = 0$ überzugehen durch die Vorschrift $K = \frac{1}{2\pi} h \rightarrow 0$ ersetzt ist. In der Limite fällt der mit i multiplizierte Anteil von (14) fort. Ueberhaupt tritt in erster Näherung bei $K = 0$ und bei Abwesenheit der Materie *die Scheidung der Gesetze der Elektrizität und der Gravitation ein*, was von dem hier vertretenen Standpunkte *der Scheidung* der reellen und der imaginären Anteile des Tensors ${}_s h^\nu$ entspricht.

$$({}^s h_\mu \, {}^s h_\nu = g_{\mu\nu} \text{ reell}, \quad A^\lambda_{\mu\lambda} = a\Phi_\mu \text{ imaginär}).$$

Da die Gleichungen (13) und (14) bei $K = 0$ in erster Näherung mit den klassischen Gravitationsgleichungen übereinstimmen, so möchte man vermuten, dass bei endlichem K die Einsteinschen Feldgleichungen die wesentlichen Quantenzüge des Mikrokosmos richtig wiedergeben werden.

Moskau, 14 März 1929.

Institut der theor. Physik
d. I. Staatsuniversität.

---

[1]) Vielleicht soll ε nicht weggelassen, sondern durch einen endlichen Zahlenfaktor ersetzt werden.