**Mathematics.** — *Bestimmung einer Körperbasis für die rationalen Invarianten einer quaternären in* $\alpha$ *und* $\beta$ *alternierenden Grösse* $c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$. [1]) Von D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of April 27, 1929).

1. Die quaternäre alternierende Grösse $c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = - c_{\beta\alpha}^{\cdot\cdot\gamma}$ mit *unbestimmten* Bestimmungszahlen legt die folgenden Grössen fest:

erstens den kovarianten Vektor

$$c_\alpha = c_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\lambda}, \qquad (1$$

zweitens den kovarianten Tensor vom Rang 4

$$h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha} = c_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\mu}\, c_{\beta\mu}^{\cdot\cdot\lambda}, \qquad (2)$$

drittens die kontravariante Tensordichte vom Rang 4 und vom Gewicht 1

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = \mathfrak{g}^{\beta\alpha} = 3\,!\; c_{[12}^{\cdot\cdot\alpha}\, c_{34]}^{\cdot\cdot\beta}, \qquad (3)$$

Daraus entstehen:

erstens die Affinordichte vom Rang 4, Gewicht 1 und Grad 4 (in den $c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$)

$$\mathfrak{M}_{\alpha}^{\cdot\beta} = h_{\alpha\lambda}\, \mathfrak{g}^{\lambda\beta}, \qquad (4)$$

zweitens die kovarianten Vektordichten

$$\overset{r}{\mathfrak{e}}_\alpha = \begin{cases} c_\alpha, & r = 1, \\ \mathfrak{M}_{\alpha}^{\cdot\lambda}\, \overset{r-1}{\mathfrak{e}}_\lambda, & r = 2, 3, 4, \end{cases} \qquad (5)$$

wo $\overset{i}{\mathfrak{e}}_\alpha$ $(i, j, \ldots = 1, 2, 3, 4)$ das Gewicht $i - 1$ und den Grad $4\,i - 3$ hat, und drittens die Unterdeterminanten dritten Grades $\underset{i}{\mathfrak{e}}^\alpha$ der Determinante $\mathfrak{D}$ der $\overset{i}{\mathfrak{e}}_\alpha$:

$$\sum_i \overset{i}{\mathfrak{e}}_\alpha\, \underset{i}{\mathfrak{e}}^\beta = \mathfrak{D} A_\alpha^\beta = \begin{cases} \mathfrak{D}, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \overset{i}{\mathfrak{e}}_\lambda\, \underset{j}{\mathfrak{e}}^\lambda = \mathfrak{D}\delta_j^i = \begin{cases} \mathfrak{D}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (6)$$

$\mathfrak{D}$ ist eine relative Invariante vom Rang 4, Gewicht 7 und Grad 28; $\underset{i}{\mathfrak{e}}^\alpha$ ist eine kontravariante Vektordichte vom Gewicht $8 - i$ und vom Grad $31 - 4\,i$.

---

[1]) Veranlassung zu dieser Note gab eine Bemerkung von R. WEITZENBÖCK: Differentialinvarianten in der EINSTEINschen Theorie des Fernparallelismus, Berliner Sitzungsberichte (1928), S. 471.

Setzt man jetzt

$$\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{c}}} = -\overset{k}{\underset{ji}{\mathfrak{c}}} = c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}\, \underset{i}{e}^{\alpha}\, \underset{j}{e}^{\beta}\, \overset{k}{e}_{\gamma}, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

so ist $\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{c}}}$ eine relative Invariante vom Gewicht $15-(i+j-k)$ und vom Grad $60-4(i+j-k)$. Weil, wie wir sogleich beweisen werden, bei unbestimmten Bestimmungszahlen $\mathfrak{D} \neq 0$ ist, wird

$$c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = \frac{\sum\limits_{ijk} \overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{c}}}\, \overset{i}{e}_{\alpha}\, \overset{j}{e}_{\beta}\, \underset{k}{e}^{\gamma}}{\mathfrak{D}^3} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Hieraus ergibt sich sofort, dass die 25 Invarianten $\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{c}}}$ und $\mathfrak{D}$ die gesuchte Körperbasis bilden. [1] [2] Denn eine beliebige rationale Invariante der $c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$ lässt sich, mit Koeffizienten, die von den $\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{c}}}$ und $\mathfrak{D}$ abhängen, als eine rationale Invariante der $\overset{i}{e}_{\alpha}$ und $\underset{i}{e}^{\alpha}$ ausdrücken; eine solche gibt es aber nicht ausser $\mathfrak{D}$. [3]

2. Um zu beweisen, dass für unbestimmte Bestimmungszahlen $\mathfrak{D} \neq 0$ ist, genügt es, eine Spezialisierung nach bestimmten Bestimmungszahlen anzugeben, für die $\mathfrak{D} \neq 0$ ist. Dazu bezeichne $\bar{i}$ bzw. $\underline{i}$ den $i$-ten kontravarianten bzw. kovarianten Massvektor in einem beliebigen Koordinatensystem (also $\underset{i}{e}^{\alpha}$ bzw. $\overset{i}{e}_{\alpha}$), $\bar{i}\,\bar{j}$, $\bar{i}\,\underline{j}$, $\underline{i}\,\bar{j}$ und $\underline{i}\,\underline{j}$ das allgemeine Produkt von zwei solchen Vektoren ($\underset{i}{e}^{\alpha}\, \underset{j}{e}^{\beta}$, usw.); Zahlen ohne Querstrich sind gewöhnliche Zahlenfaktoren. Setzt man dann für

---

[1]) Praktisch leistet sie wenig, weil $\mathfrak{D}$ in den einfachsten Fällen verschwindet. Z.B. verschwindet im gruppentheoretischen Fall, wo $c_{[\alpha\beta}^{\cdot\cdot\lambda}\, c_{\gamma]\lambda}^{\cdot\cdot\delta} = 0$ ist, $\mathfrak{g}^{\alpha\beta} c_{\beta}$, folglich auch $\overset{2}{e}_{\alpha}$ und $\mathfrak{D}$.

[2]) Eine (ganze rationale) Basis für diejenigen ganzen rationalen Invarianten der quaternären alternierenden Grösse $c^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\gamma}$, deren Grade $\leqq 8$ sind, ist von I. C. CHOUFOER aufgestellt worden (Het punt-lijn-connex in de driedimensionale ruimte, Diss., Amsterdam, 1927). Die hier aufgestellte Körperbasis aller rationalen Invarianten enthält solche bis zum 64-ten Grade.

[3]) Die $\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{c}}}$ sind bis auf geeignete Potenzen von $\mathfrak{D}$ die Bestimmungszahlen von $c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$ bzgl. eines invariant definierten Koordinatensystems, dessen Massvektoren bis auf geeignete Potenzen von $\mathfrak{D}$ die $\overset{i}{e}_{\alpha}$ und $\underset{i}{e}^{\alpha}$ sind. Vgl. auch G. F. C. GRISS, Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren, Diss. Amsterdam (1925), S. 32.

$$c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} \quad (\underline{1}\,\underline{3}-\underline{3}\,\underline{1})\,\bar{1}+(\underline{2}\,\underline{4}-\underline{4}\,\underline{2})\,\bar{2}+(\underline{4}\,\underline{1}-\underline{1}\,\underline{4})\,(\bar{3}+\bar{4})+(\underline{2}\,\underline{3}-\underline{3}\,\underline{2})\,(\bar{3}-\bar{4}),$$

so wird

$$h_{\alpha\beta} \quad \underline{1}\,\underline{1}+(\underline{1}\,\underline{2}+\underline{2}\,\underline{1})+\underline{2}\,\underline{2}+(\underline{1}\,\underline{4}+\underline{4}\,\underline{1})+(\underline{2}\,\underline{3}+\underline{3}\,\underline{2})+\underline{3}\,\underline{3}+\underline{4}\,\underline{4},$$

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta} \quad -(\bar{1}\,\bar{2}+\bar{2}\,\bar{1})-2\,\bar{3}\,\bar{3}-2\,\bar{4}\,\bar{4},$$

$$\mathfrak{M}_{\alpha}^{\cdot\beta} \quad -(\underline{1}+\underline{2}+\underline{3})\,\bar{1}-(\underline{1}+\underline{2}+\underline{4})\,\bar{2}-2\,(\underline{2}+\underline{3})\,\bar{3}-2\,(\underline{1}+\underline{4})\,\bar{4},$$

$$\overset{1}{\mathfrak{e}}_{\alpha}=c_{\alpha} \quad -\underline{1}+\underline{2}-\underline{3}-\underline{4},$$

$$\overset{2}{\mathfrak{e}}_{\alpha} \quad 2\,\underline{1}+2\,\underline{2}+3\,\underline{3}+\underline{4},$$

$$\overset{3}{\mathfrak{e}}_{\alpha} \quad -6\,\underline{1}-10\,\underline{2}-8\,\underline{3}-4\,\underline{4},$$

$$\overset{4}{\mathfrak{e}}_{\alpha} \quad 24\,\underline{1}+32\,\underline{2}+22\,\underline{3}+18\,\underline{4},$$

und

$$\mathfrak{D}=64\neq 0.$$

3. Substitution von (8) in (1) und (5) ergibt 4 Relationen ersten und 12 Relationen vierten Grades in den $\overset{k}{\underset{ij}{\mathfrak{c}}}$ zwischen diesen Invarianten und $\mathfrak{D}$. Dies stimmt überein mit der zu erwartenden Anzahl von $24-16=8$ absoluten, also 9 relativen algebraisch unabhängigen Invarianten. Die Relationen lauten:

$$\sum_{j}\overset{j}{\underset{ij}{\mathfrak{c}}}=\begin{cases}\mathfrak{D}^2, & i=1,\\ 0, & i\neq 1,\end{cases} \qquad (9)$$

$$3!\sum_{jkl}\overset{k}{\underset{il}{\mathfrak{c}}}\,\overset{l}{\underset{jk}{\mathfrak{c}}}\,\overset{j}{\underset{[12}{\mathfrak{c}}}\,\overset{m}{\underset{34]}{\mathfrak{c}}}=\begin{cases}\mathfrak{D}^7, & i=m+1,\quad m=1,2,3,\\ 0, & i\neq m+1,\quad m=1,2,3.\end{cases} \qquad (10)$$